

# 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

第一名

051804

液兒液兒瓶中轉

學校名稱：國立彰化女子高級中學

作者：  高三 蔡旻珊  高一 呂翊綺  高二 王紫蘋	指導老師：  李政憲  張國志
---	-----------------------------

關鍵詞：Sharp Teeth、雷諾數、

Navier-Stokes 方程式

# 得獎感言

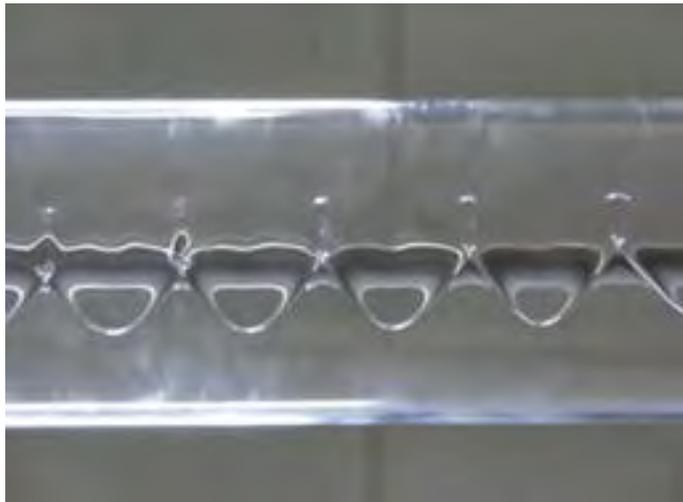
## 液兒液兒瓶中轉的科展觀

我們懷著既緊張又興奮的心情踏上前往中興大學的路程，第一天是開幕典禮，在會場我們對自己期許：既然來參加了開幕，那閉幕一定也少不了我們。意思是希望我們可以得到好成績在閉幕頒獎的時候可以有我們的名字出現。接下來的幾天，我們都在為第三、四天的報告做準備，過程中學姐耐心的提點、一次次的鼓勵都是我們爭取好名次的動力。雖然在報告的時候因為緊張出現了一點小失誤，但最後很幸運的我們得到了第一名的佳績。如果要說科學研究帶給我們的影響是什麼，那就是努力不懈、追根究底的精神了，因為做研究必須要一直抱持著懷疑的態度並且提出“為什麼”，人一旦有了疑問才會去尋找問題的答案或解決方法，做研究當然也不例外。在這段時間裡，我們一樣學習到了團結的重要性，我們當然有很多實驗做不出來挫敗的窘境，要不是有隊友的幫助、鼓勵，單單只靠一個人的力量是無法順利完成實驗的，“三個臭皮匠勝過一個諸葛亮”，古人的智慧便在這邊展露無遺。

我們想對各位此次參展的朋友，和未來參展的學弟妹們說，永遠不要因被挫折打敗就輕言放棄，人生有多少個挫折要面對，一次的挫敗正是提醒自己要更勇敢的站起來面對下一個挑戰，而每次的挫敗，都暴露了我們應該面對的弱點，是給我們改進自己的機會，也不要輕忽了自己的實力，要相信人有無限的潛能，誰都有一鳴驚人的本事，只是還沒展露出來而已，最後，也要相信自己的隊友，他們是你的支柱，在所有人反駁你的觀點的時候他們會挺你，在被困難打敗的時候他們會拉你一把，這些都是我們在這個團隊學到的一切。科展結束了，但是我們的精神信念仍在，我們相信時間不會抹滅我們經歷過的這些回憶，我們永遠是最團結最棒的液兒液兒瓶中轉。



在這次的參展的過程中，我們也用相機記錄我們的回憶。



這是我們轉出來的穩定圖形，SharpTeeth，也是我們變因主要探討的對象。



英國南岸的 Dorset 海灘出現的海浪景觀，這個現象跟我們的實驗也許有極大的關聯。

## 摘要

本實驗由鋁製空心管當作轉動軸心，壓克力管當作圓柱容體，在壓克力管中加入液體，再將鋁管與壓克力管組裝及黏合固定，以鋁管作為軸心置於轉速機上，並用支架加以固定。當轉速機開始運作時，壓克力管中的液體會產生各種圖形，其中包括 Basic, Pool, Turbulence, Mountain, Sharp teeth, Waterfall。本篇文章主要針對為何形成 Stable Sharp Teeth，以及各項變因對於圖形的影響進行討論，變因包含壓克力管長度及直徑、轉速機轉速、液體質量比以及液體體積，並運用黏滯力、表面張力、質量守恆定律、邊界及初始條件、雷諾數、流體不穩定性、Navier-Stokes 方程式進行討論，其中黏滯力、表面張力、重力及漩渦是影響 Stable Sharp teeth 形成的最重要因素。

## 壹、 研究動機

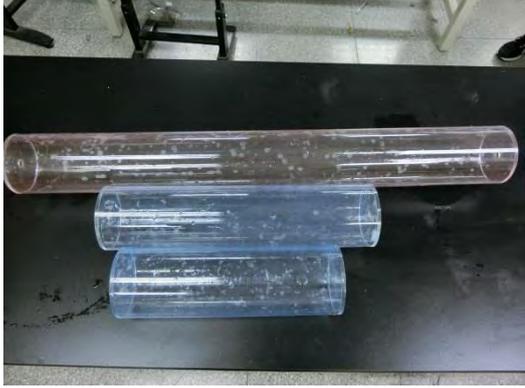
在網路上看到一個影片，其中內容就是一個瓶子旋轉，結果裡面的液體就有了特別圖形，對這個實驗非常好奇，便心想為何會產生這些圖形呢?甚麼原因會影響這些圖案呢?於是上網查詢相關資料後，因為好奇心驅使，便一頭栽入到這個實驗中。這個實驗結合高中課程，將運用雷諾數、黏滯力、表面張力以及液體流動性質進行討論，主要討論 Stable Sharp Teeth 的形成及各項參數對圖形的影響。

## 貳、 研究目的

為了要探討為何壓克力管轉動會使液體形成各種圖形?甚麼原因影響圖形形狀(特別是 Stable Sharp Teeth 圖形)?變因包含壓克力管長度及直徑、轉速機轉速、液體質量比以及液體體積，並運用黏滯力、表面張力、質量守恆定律、邊界及初始條件、線性雷諾數、旋轉雷諾數、流體不穩定性、Navier-Stokes 方程式以及液體流動性進行討論。為了解決心中的疑惑，並了解其中隱藏的深奧概念，因此設計了此實驗去探討。

## 參、 研究設備及器材

### 一、研究設備

設備	用途
 <p>(圖一)</p>	圖一為壓克力管，作為實驗進行的重要功臣，內裝有實驗用液體
 <p>(圖二)</p>	圖二為鋁製空心管，作為實驗用重要功臣，可承受壓克力管重量，並加裝在轉速機上，使壓克力管和轉速機同步轉動
 <p>(圖三)</p>	圖三為轉速機，前頭有加裝鋁製空心管，帶動壓克力管以及鋁製空心管轉動，以進行實驗



(圖四)

圖四為帶有軸層的支架，用來支撐鋁製空心管重量，並使鋁製空心管及壓克力管保持水平狀態以利實驗



(圖五)

圖五為表面張力測定儀，可以用來測量液體表面張力，在本實驗中用來測定甘油的表面張力係數



(圖六)

圖六為經調色處理後之液體，為了方便觀察流動情形及分析圖形，本實驗將所有甘油經過調色處理，以利實驗進行



(圖七)

圖七為甘油及清潔劑，甘油為此實驗主要液體，清潔劑為保持實驗器材整潔的重要功臣



(圖八)

圖八為黏滯係數測定儀，在本實驗中用來測量甘油的黏滯係數



(圖九)

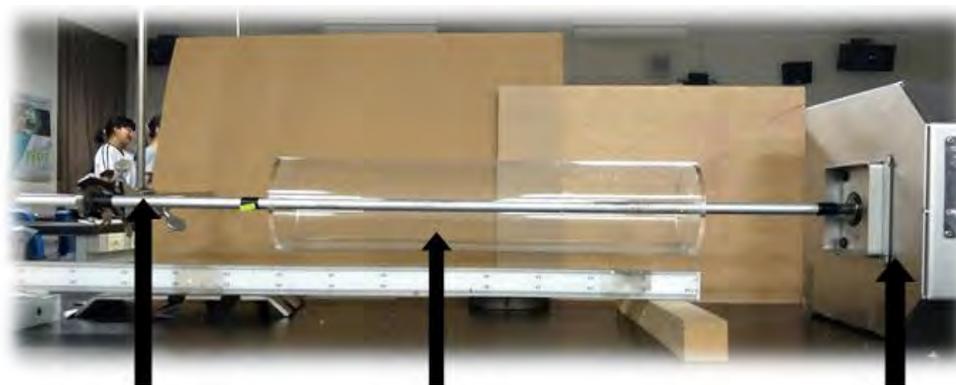
圖九為光電計時器及光電閘，透過光電計時器、光電閘以及黏滯係數測定儀的互相配合，可以算是液體的黏滯係數



(圖十)

圖十為水平儀，本實驗中用來確認壓克力管是否有達到平衡

## 二、實驗儀器架構



帶有軸層的支架

壓克力管

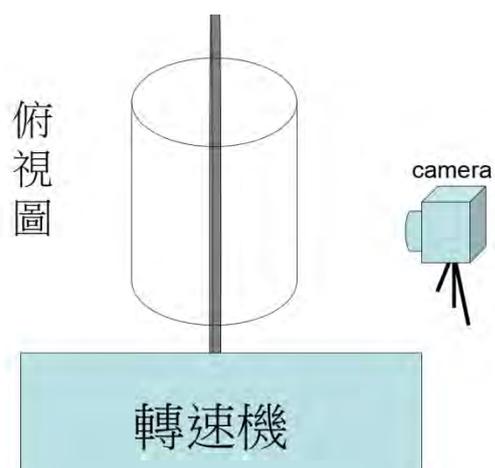
轉速機

(圖十一)

## 肆、研究過程及方法

### 一、實驗方法

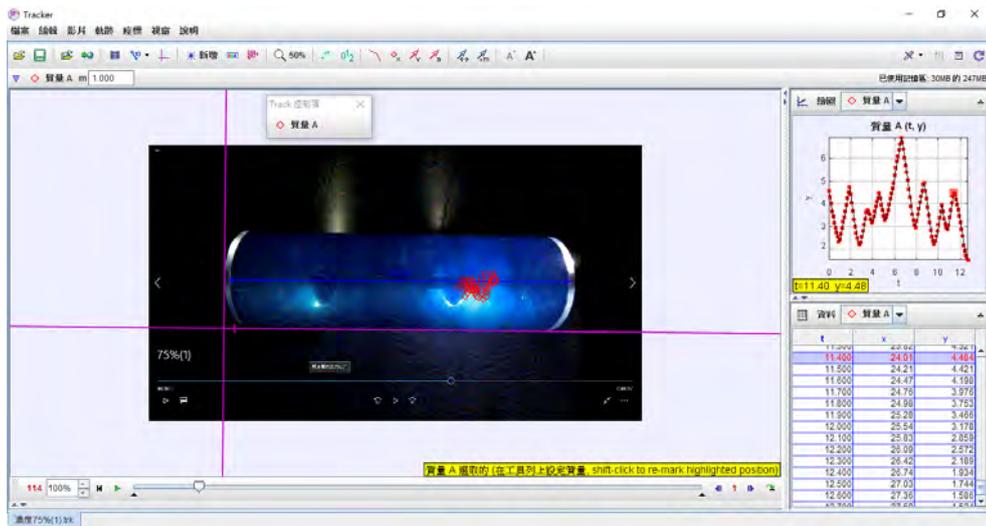
#### (一) 拍攝方向



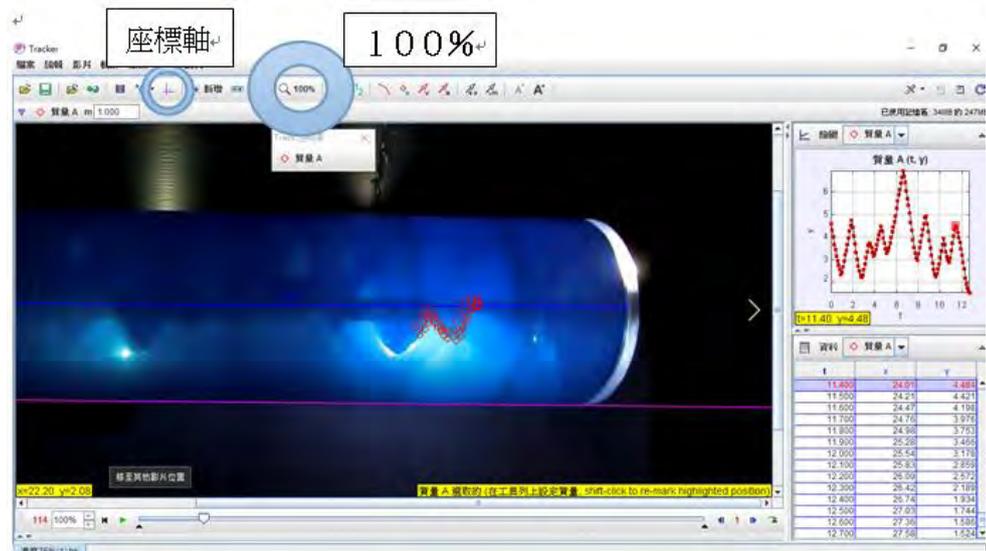
(圖十二)

順時針轉的時候，因為圖形會出現在左邊所以我們把相機架設在右邊，且固定它的距離，如果沒有固定的話，圖形在進行比較時會有誤差，如圖十二所示。

## (二) 分析圖形



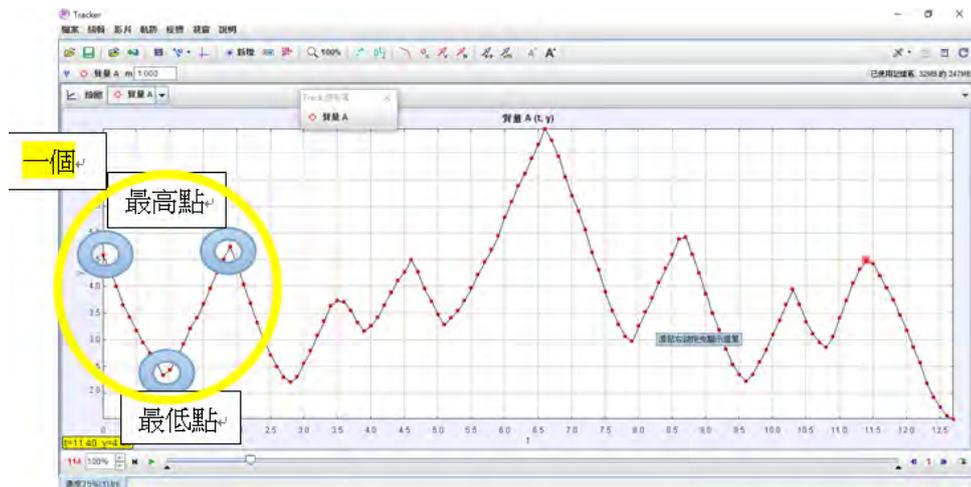
(圖十三)



(圖十四)

分析圖形方法是先從影片找出圖形穩定且清晰明顯的地方截圖，另存為圖片檔，再下載到 tracker 裡面，建立座標軸，接著使用校正桿設好長度的比例（例如：管長 30 公分），把末頁框設成 1000 再放大到 100%，新增質點 A，最後沿著圖形的周圍追蹤圖形邊緣形狀，如圖十三以及圖十四所示。

### (三) 振幅及波長計算方式



(圖十五)

上圖圖十五橫坐標為  $x$  軸，縱座標為  $y$  軸。用圖表的  $xy$  軸，我們計算出圖形的平均振幅及平均波長。設相鄰兩個波峰座標為  $(x_1, y_1)$  及  $(x_2, y_2)$ ，相鄰兩波峰之間的波谷為  $(x_3, y_3)$ ，則振幅為  $\frac{(y_1 + y_2)}{2} - y_3$ ，將同一圖片中所有波的振幅相加再除以波的數量後，即可得到平均振幅。另外波長為  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ，將同一圖片中所有波的波長相加再除以波的數量後，即可得到平均波長。

### (四) 黏滯係數測量方式

我們在本實驗的環境測量溫度為 15-18 度，並使用黏滯係數測定儀測定黏度，實驗時，利用 20 克的砝碼帶動圓柱，使在雙圓柱中間的液體因黏滯力的原因而被帶動，待測液體的黏滯力會影響砝碼落下的速率，所以在砝碼會落下的位置放置兩個光電閘連接光電計時器，光電閘間的距離為 5 公分，砝碼通過光電閘時，光電計時器會記錄通過兩個光電閘的時間，如此距離除以時間可以得到待測液體的速率。

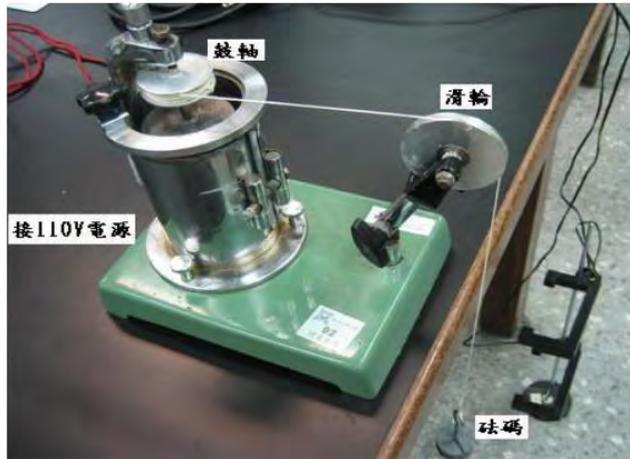
另可轉動圓柱體的半徑為  $a$ ，空心圓柱的半徑為  $b$ ，而距離轉動圓柱體  $r$  的速率可以用  $v=r\omega$  表示，在圓柱中，可轉動圓柱長度為  $l$ ，壓力可表示為

$$P(r) = F(r) / A = (L/r) / (2 \pi r l) = L / (2 \pi r^2 l)$$

把所有得到的數據代入數據到處理後的公式則可測得黏滯係數。

$$\eta = (b^2 - a^2) / (4\pi a^2 b^2 l) * L / \omega$$

a=可轉動圓柱半徑，b=空心圓柱半徑，l=可轉動圓柱長度，L=施用力矩（絕對單位表示）， $\omega$ =可轉動圓柱的角速度

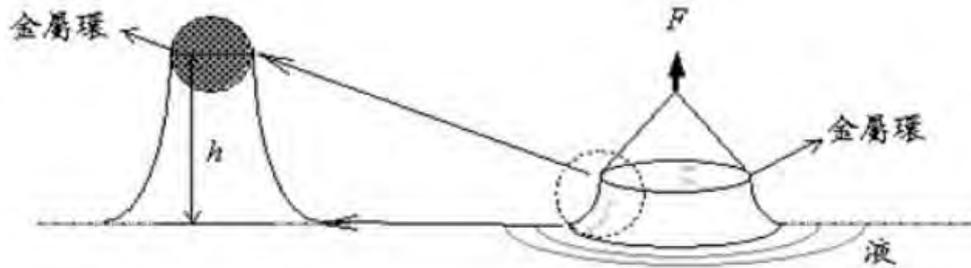


(圖十六)

#### (五) 表面張力測量方式

表面張力在本實驗的環境測量溫度為 15-18 度，首先把表面張力測定儀的刻度盤和水平歸零，再掛上金屬環，接著把橫桿調到自己想要的高度，放上一塊紙板，然後轉歸零鈕，轉到金屬環抬到剛剛的高度時，紀錄我們轉的度數。再來把培養皿倒入液體，再把金屬環放入培養皿，調整平台高度粗調和微調，圓環會從液下緩緩拉到與液面接觸，接著轉動歸零鈕，金屬環離開的瞬間紀錄度數。

器材運作原理為鋼線一端固定，另一端固定於可旋轉的齒輪上，齒輪上有指針可由刻度盤讀出齒輪旋轉的刻度，而固定於鋼線上的橫桿因鋼線的扭轉而產生一向上的力 F。因此只要能夠將已知重量的砝碼掛在橫桿上，就能找出指針旋轉刻度與橫桿向上之力 F 的關係。再將數據代入  $W=F \cdot h=2Lh \cdot T$  以及  $T=\frac{F}{2L}$ ，其中 F 為拉力，L 為環長(拉起來有兩個面所以乘以兩倍)，如圖十七所示。



(圖十七)

## 二、實驗變因

### (一) 變因一: 壓克力管內甘油質量比

#### 1. 控制變因

轉速	195.440rpm
壓克力管直徑	10.0 公分
壓克力管長度	30.0 公分
液體體積比	5.0%
室溫	攝氏 26.0 度

#### 2. 操縱變因

甘油質量比 50.0%, 65.0%, 70.0%, 75.0%, 80.0%

(二) 變因二: 壓克力管長度

1. 控制變因

轉速	191.225rpm
壓克力管直徑	10.0 公分
液體體積比	5.0%
甘油質量比	70.0%
室溫	攝氏 26.0 度

2. 操縱變因

壓克力管 10.0 , 20.0 , 30.0 , 40.0 , 60.0 , 80.0 , 100.0 公分

(三) 變因三: 轉速機轉速

1. 控制變因

液體體積比	5.0%
甘油質量比	70.0%
壓克力管長度	60.0 公分
壓克力管直徑	10.0 公分
室溫	攝氏 26.0 度

2. 操縱變因

轉速 900.0 rpm , 928.0 rpm , 956.0 rpm , 984.0rpm , 1012 .0rpm , 1040.0 rpm

(四) 變因四: 壓克力管內液體體積

1. 控制變因

甘油質量比	70.0%
壓克力管直徑	10.0 公分
壓克力管管長	30.0 公分
轉速	195.440rpm
室溫	攝氏 26.0 度

2. 操縱變因

液體體積比 1.0 , 5.0 , 10.0 , 20.0 , 30.0%

(五) 變因五: 壓克力管直徑

1. 控制變因

甘油質量比	70.0%
壓克力管長度	30.0 公分
轉速	191.245rpm
室溫	攝氏 26.0 度
液體體積比	5.0%

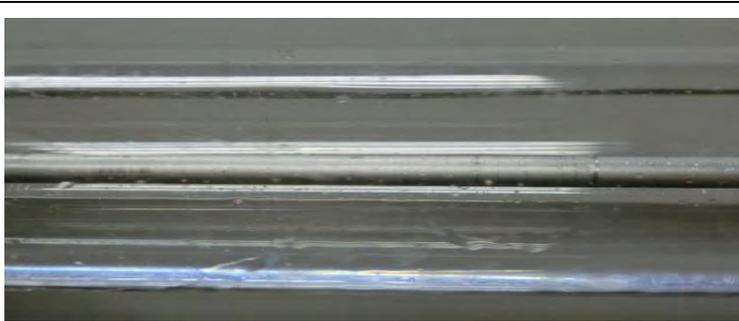
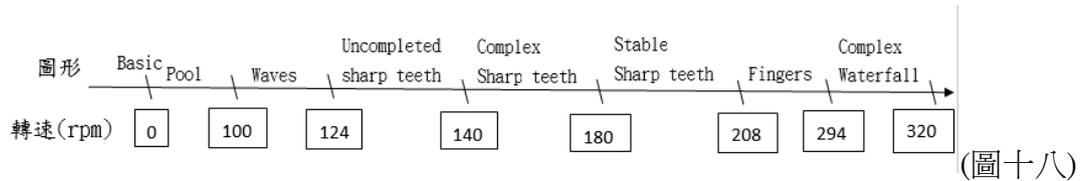
2. 操縱變因

直徑: 6.0 公分 , 10.0 公分 , 16.0 公分

### 三、文獻探討及理論名詞定義

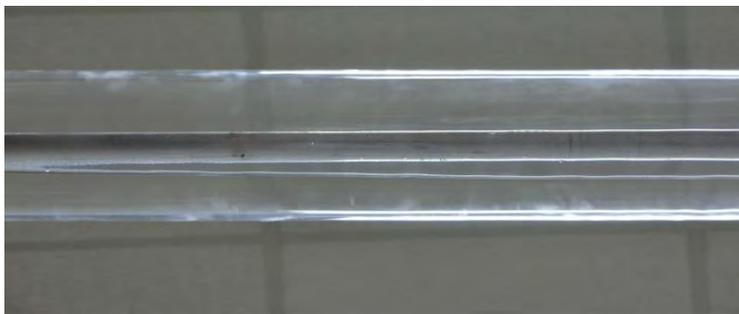
#### (一) 圖形定義

以下為本實驗做出的液體圖案現象，當轉速提高且其他參數都固定(管長 60.0 公分，管直徑 10.0 公分，甘油質量比 70.0%，液體體積比 5%)時，壓克力管內的甘油隨著轉速的圖形變化為圖十八所示



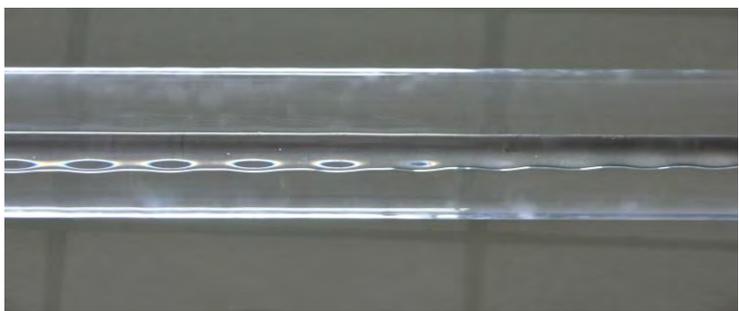
(圖十九)

圖十九為 Basic，定義為未開始轉動且沒有形狀變化的液體狀態，此時液體平均分布在壓克力管下方。



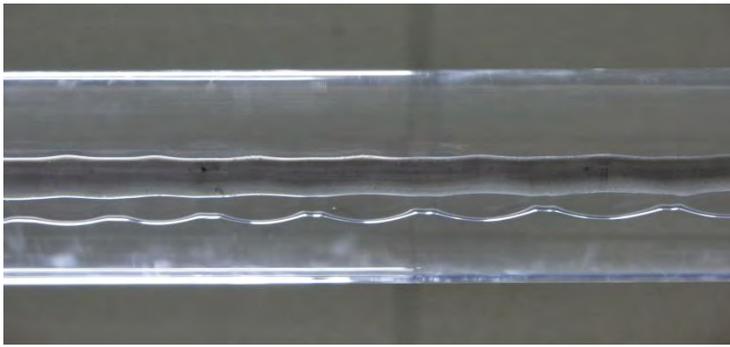
(圖二十)

圖二十為 Pool，定義為開始轉動後圖形形狀甚少變化的液體狀態，此時液體平均分布在壓克力管下方。



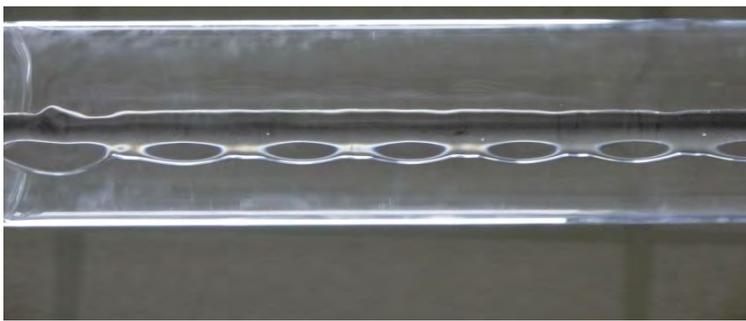
(圖二十一)

圖二十一為 Waves，定義為開始轉動後，在水的邊界有波浪狀的流體型態。



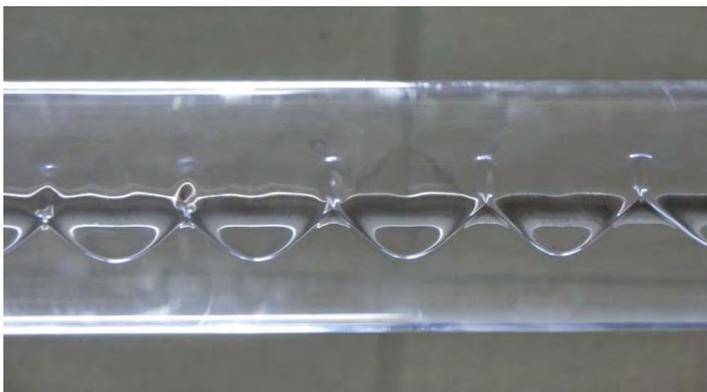
(圖二十二)

圖二十二為 Uncompleted Sharp Teeth，定義為開始轉動後，有大小相間的 Sharp Teeth 圖形。



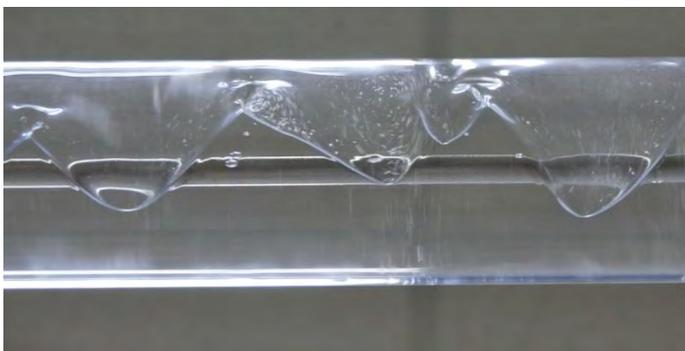
(圖二十三)

圖為 Complex Sharp Teeth，定義為圖形同時出現 Uncompleted Sharp Teeth 和 Stable Sharp Teeth，尖端形成位置位於壓克力管正下方。



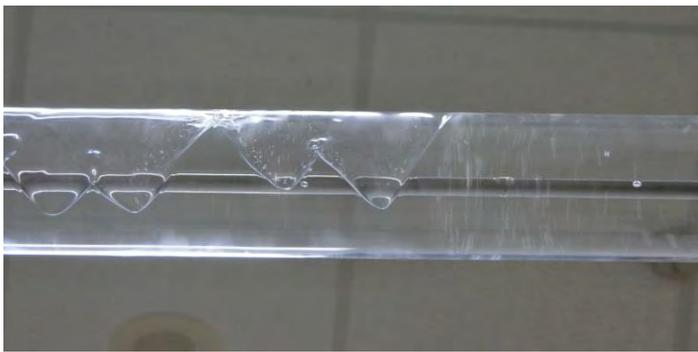
(圖二十四)

圖二十四為 Stable Sharp Teeth，定義為開始轉動後，形成穩定形狀(像牙齒)的液體狀態，尖端形成位置位於壓克力管正下方。



(圖二十五)

圖二十五為 Fingers，定義為大小不一致的尖端圖形類似手指的圖形。



(圖二十六)

圖二十六為 Complex Waterfall，定義為同時出現 Fingers 及 Waterfall 的圖形，而 Waterfall 為一區間充滿液體及未有液體相間的圖形。

(二) 名詞定義

1. 線性雷諾數

線性雷諾數為流體慣性力以及流體黏滯力的比值，當線性雷諾數夠大時，液體會形成紊流型態，反之，則會呈現層流狀態。

$$Re = \frac{\text{慣性力(inertial force)}}{\text{黏滯力(viscous force)}} = \frac{\rho v^2}{\mu \frac{dv}{dz}} \cong \frac{\rho v^2}{\mu \frac{v}{D}} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (\text{式一})$$

式一中分子的力我們稱為慣性力(inertial force)，但這並非真正的力量，而是用來描述流體的動量有多大，亦即要改變流體運動的難度。假如我們將水柱打在牆上，則牆壁在單位面積所受到的力為

$$\frac{F}{A} = \frac{\Delta P}{A \Delta t} = \frac{\rho(Av \Delta t)}{A \Delta t} = \rho v^2 \quad (\text{式二})$$

而當液體在形狀截面積固定的管中流動且線性雷諾數小時不夠大的時候，會形成層流；當液體在形狀截面積固定的管中流動且線性雷諾數夠大的時候，會形成紊流

## 2. 黏度

黏度是液體受力、剪應力(shear stress)、張應力(tensile stress)而產生抗拒流動或形變的一種量度

## 3. 旋轉雷諾數

旋轉雷諾數為(半徑平方乘以轉速)與運動黏度的比值

$$Re = R^2 \Omega / \nu \quad (\text{式三})$$

R 為半徑， $\Omega$  為轉速， $\nu$  為運動黏度，旋轉雷諾數有跟線性雷諾數類似的性質，只是使用情況比較不同，旋轉雷諾數適用在旋轉性的液體，且當旋轉雷諾數超過臨界值時，會形成現象穩定的圖形

## 4. 黏滯力

黏滯力是流體受到剪應力變形時所形成的反抗變化的阻力，可以是黏性流體內部的一種流動阻力，也可以是驅動液體流動的助力。

## 5. 液體體積比: 液體體積比為加入的液體體積與壓克力管體積的比值

## 6. Navier-Stokes 方程式:

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\text{Unsteady acceleration}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_{\text{Convective acceleration}} \right) = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Pressure gradient}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{Viscosity}} + \underbrace{\mathbf{f}}_{\text{Other forces}}$$

(式四)

上方式子為 Navier-Stokes 方程式是流體力學基本方程式，其中  $\rho$  為液體速度， $P$  為壓力， $v$  為速度， $f$  為其他力的總力。方程式等號左方項代表  $ma$ ，並且這邊的 Inertia 項指的不是離心力，而是指單位體積的合力；右方第一項代表壓力，第二項代表黏滯力。

## 7. 連續性方程式

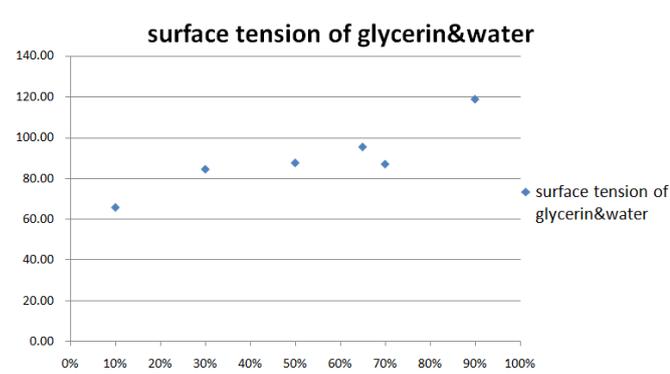
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{式五})$$

上式表示每秒流過的質量相等，對於不可以壓縮流體，每秒流過的體積相等

## 伍、 研究結果

### 一、甘油相關係數

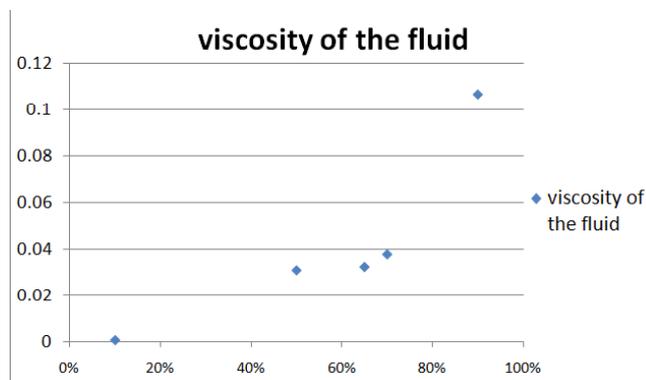
#### (一) 表面張力係數



(圖二十七)

由圖二十七可以得知，當甘油黏度提高時，表面張力大致上也逐漸增加

#### (二) 黏滯係數



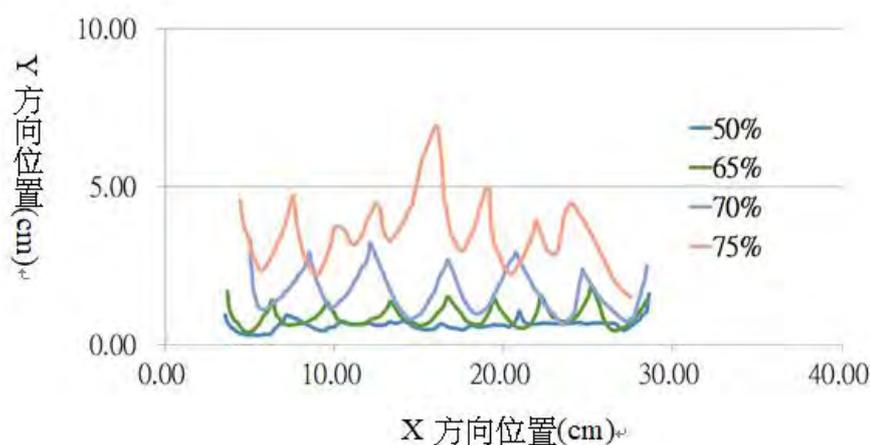
(圖二十八)

由圖二十八可以得知，當甘油濃度增加時，黏滯係數也逐漸增加

## 二、變因一: 壓克力管內甘油濃度

控制變因: 轉速 195.440rpm, 壓克力管 30.0 公分, 液體體積比 5.0%, 管直徑 10 公分

操縱變因: 甘油質量比 10.0%, 30.0%, 40.0%, 50.0%, 65.0%, 70.0%, 75.0%, 80.0%



(圖二十九)

甘油濃度 <sup>o</sup>	個數(個) <sup>o</sup>	波長(cm) <sup>o</sup>	振幅(cm) <sup>o</sup>
65% <sup>o</sup>	8 <sup>o</sup>	2.987 <sup>o</sup>	1.15075 <sup>o</sup>
70% <sup>r</sup>	6 <sup>r</sup>	4.052 <sup>r</sup>	1.64025 <sup>r</sup>
75% <sup>o</sup>	7.5 <sup>o</sup>	3.341 <sup>o</sup>	2.64125 <sup>o</sup>

(圖三十)

由圖二十九及圖三十可得知, 當甘油濃度提高時, 70.0% Stable Sharp Teeth 的圖形個數最少, 波長最長, 而振幅則是隨著甘油濃度提高而增大。我們一共用了七種液體做實驗, 分別是 10.0%, 30.0%, 50.0%, 65.0%, 70.0%, 75.0%, 80.0%, 我們發現在這幾種濃度裡面只有 65.0%, 70.0% 可以做得出來 Stable Sharp Teeth, 75.0% 可以做出 Fingers, 而 50.0% 液體是出現了 Complex Sharp teeth 圖形, 80.0% 的液體也出現 Unstable Sharp Teeth, 根據以上實驗結果, 我們可以得知出現 Stable Sharp Teeth 的範圍大約是在甘油質量比為 65.0%-75.0% 之間。

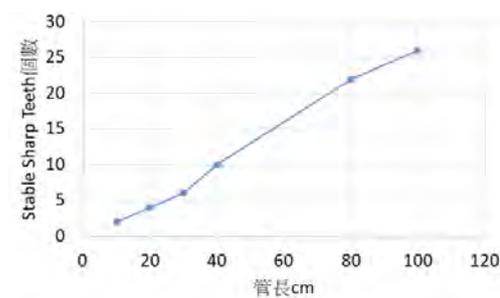
而改變甘油質量比主要改變的是液體黏滯力, 當甘油質量比變大時, 黏滯係數亦變大(由圖二十三可得知), 而黏滯係數變大時, 液體之間以及液體和管壁之間的黏滯力亦會增加, 進而使壓克力管拉動的液體量會增加。引進雷諾數的想法, 當被拉動的液體量增加且速度固定時, 慣性力會增加, 使得雷諾數亦增加, 所以 65.0% 以上的

液體才可以被拉起來，而甘油質量比過高的液體，會因為液體之間黏滯力過大，而液體和管壁之間的黏滯力不足以與之抗衡，所以無法形成圖形明顯的 Stable Sharp Teeth。

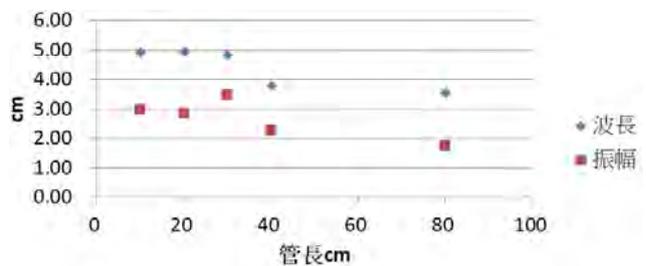
### 三、變因二: 壓克力管長度

控制變因: 轉速 191.225rpm，甘油質量比 70.0%，液體體積比 5.0%，管直徑 10.0 公分

操縱變因: 壓克力管 10.0，20.0，30.0，40.0，80.0，100.0 公分



(圖三十一)



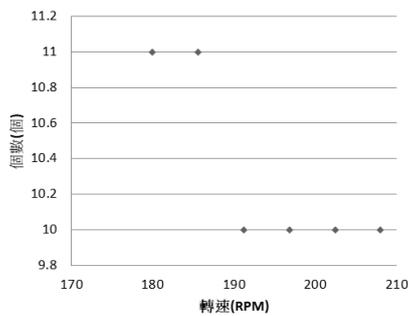
(圖三十二)

由圖三十一及圖三十二可以得知，當壓克力管管長增加時，Stable Sharp Teeth 個數增加，而波長大致上隨著管長增加而減少，振幅則除了 30.0 公分以外，大致上隨著管長增加而減少。當壓克力管管長變長時，液體黏滯係數以及表面張力係數不會改變，個數的增加是因為管長較長，因此可容納的圖形個數較多。而波長則是管長和 Stable Sharp Teeth 個數的比值，當管長增加時，管長和 Stable Sharp Teeth 個數的比值會越來越小，因此波長大致上會越來越小。

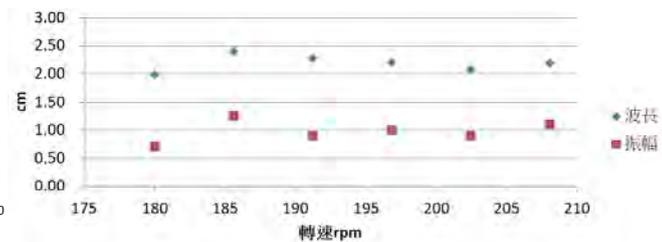
### 四、變因三: 轉速機轉速

控制變因: 壓克力管 60.0 公分，液體體積比 5.0%，甘油質量比 70.0%，管直徑 10.0 公分

操縱變因: 轉速 180.00，185.60，191.20，196.80，202.40，208.00rpm



(圖三十三)



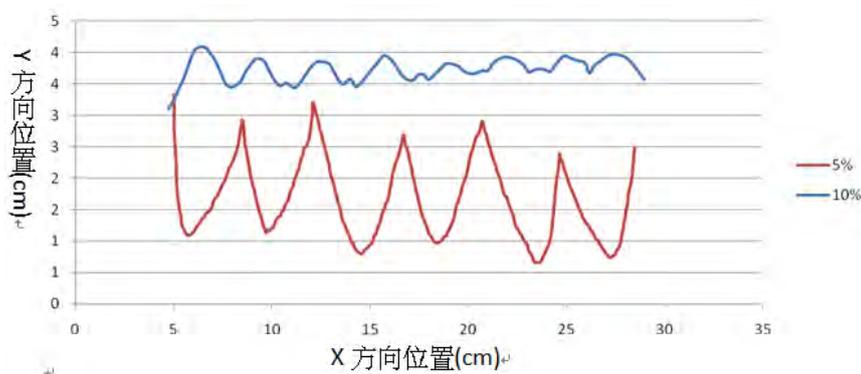
(圖三十四)

在這個變因主要探討轉速對 Stable Sharp Teeth 的各項參數影響，由圖可知 Stable Sharp Teeth 個數隨著轉速增加而減少，波長和振幅則和轉速沒有明顯規則。

#### 五、變因四: 壓克力管內液體體積

控制變因: 轉速 195.440rpm，壓克力管 30.0 公分，甘油質量比 70.0%

操縱變因: 液體體積比 1.0，5.0，10.0，20.0，30.0%



(圖三十五)

液體體積比	個數(個)	波長(cm)	振幅(cm)
5%	6	4.052	1.64025
10%	8	3.0105	0.56975

(圖三十六)

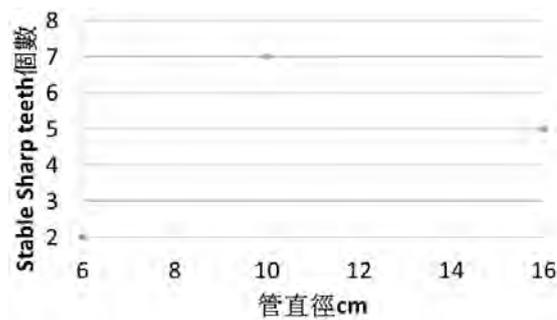
由圖三十五及圖三十六可以得知，液體體積比越大 Stable Sharp Teeth 個數越多，而 5.0%波長較 10.0%長，且 5.0%振幅較 10.0%大。同轉速下，當液體越多的時候所產生的慣性力越大，相對於慣性力，黏滯力就顯得比較小，所以慣性力變大，線性雷諾數也會跟著變大。當體積比為 1.0%時，液體全部緊靠在圓柱體管壁做層狀流動，也因為體積比只有 1.0%，水量稀少，所以管壁可以拉起大部分的液體，使管壁均勻分

布著液體；當體積比為 5.0%和 10.0%時，圖形為 Stable Sharp Teeth，因為轉速夠快，且液體慣性力夠大，使得雷諾數數值達到形成 Stable Sharp Teeth 的臨界值；當體積比為 20.0%及 30.0%時，圖形為 Uncompleted Sharp Teeth，雖然慣性力及轉速夠大使得雷諾數達到形成體積比 5%Stable Sharp Teeth 的臨界值，但因為液體體積比太大，轉動中的管壁無法使如此多的液體穩定形成 Stable Sharp Teeth 的圖形，只能觀察到類似於 Uncompleted Sharp Teeth 的圖形。

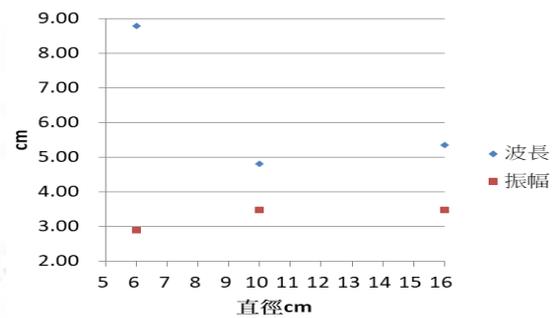
## 六、變因五: 管直徑

控制變因: 轉速 191.245rpm, 壓克力管管長 30.0 公分, 甘油質量比 70.0%, 體積比 5.0%

操縱變因: 管直徑 6.0、10.0、16.0 公分



(圖三十七)



(圖三十八)

由圖可知，Stable Sharp Teeth 個數、波長跟管直徑皆無明顯規則。而振幅大致上會隨著管直徑增加而增加。

## 陸、 討論

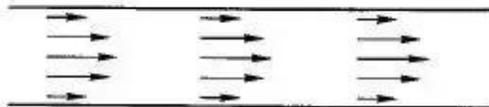
### 一、雷諾數

#### (一) 線性雷諾數

$$\text{Re} = \frac{\text{慣性力(inertial force)}}{\text{黏滯力(viscous force)}} = \frac{\rho v^2}{\mu \frac{dv}{dz}} \cong \frac{\rho v^2}{\mu \frac{v}{D}} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (\text{式六})$$

首先，我們將式六命名為線性雷諾數，因為學術上非用此命名，特此聲明。

$\rho$  為密度， $\mu$  為黏滯係數， $v$  為速度， $D$  為特徵長度，由線性雷諾數公式可得知，線性雷諾數跟慣性力及黏滯力有極大關係，可以用來解釋本實驗中的結果，慣性力及黏滯力的大小會影響線性雷諾數，造成圖形的不同。當液體在形狀截面積固定的管中流動且線性雷諾數小時不夠大的時候，會形成層流；當液體在形狀截面積固定的管中流動且線性雷諾數夠大的時候，會形成紊流；而當旋轉雷諾數超過臨界值時，會形成現象穩定的圖形，例如 Stable Sharp Teeth。



(圖三十九)層流示意圖



(圖四十)紊流示意圖

#### (二) 旋轉雷諾數

$$\text{Re} = R^2 \Omega / \nu \quad (\text{式七})$$

$R$  為半徑， $\Omega$  為轉速， $\nu$  為運動黏度，旋轉雷諾數有跟線性雷諾數一樣的性质，只是使用情況比較不同，旋轉雷諾數適用在旋轉性的液體，在本實驗中理論上應該使用旋轉雷諾數，隨著旋轉雷諾數的增大，圖形變化為 Pool  $\rightarrow$  Turbulence  $\rightarrow$  Sharp Teeth。

## 二、影響液體流動和圖案形成之因素

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\text{Unsteady acceleration}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_{\text{Convective acceleration}} \right) = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Pressure gradient}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{Viscosity}} + \underbrace{\mathbf{f}}_{\text{Other forces}}$$

(式八)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

(式九)

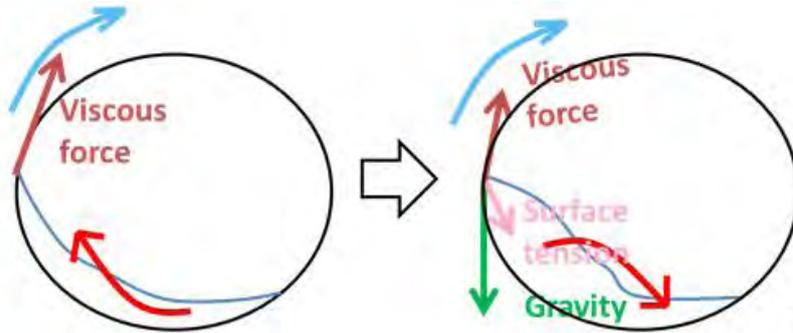
上方式子為 Navier-Stokes 方程式是流體力學基本方程式， $\rho$  為液體密度， $P$  為壓力， $\mathbf{v}$  為速度， $\mathbf{f}$  為其他力的總力。方程式等號左方項代表  $m\mathbf{a}$ ，並且這邊的 Inertia 項指的不是離心力，而是指單位體積的合力；右方第一項代表壓力，第二項代表黏滯力，第三項在本實驗中代表重力以及表面張力，式八的邊界條件指的是在壓克力管上的液體薄壁在壓克力管旋轉時，會跟壓克力管有相同的轉速以及液體表面壓力必垂直表面，而初始條件就是指壓克力管初始速度為 0。根據式八可以得知，轉速、壓力、黏滯力、表面張力以及重力，這些因素會影響實驗液體流動情形以及圖形的形成。式九為不可壓縮流體質量守恆公式， $\mathbf{u}$  為速度。根據式八、式九、液體質量守恆、邊界條件以及初始條件，理論上可以得出液體會產生渦流，並形成本實驗中所有圖案及液體流動情形。

三、關於討論可以分為兩個部分進行討論，一個是由側面觀察，另一個是由上方往下方進行觀察，如圖四十一所示，A 為側面觀察，B 為由上方往下方觀察



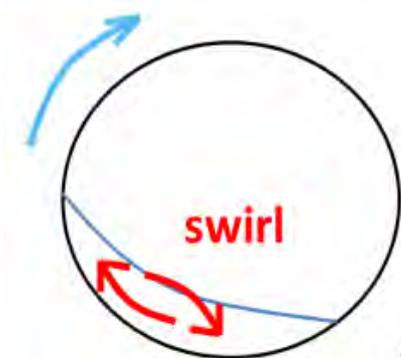
(圖四十一)

#### 四、側面觀察



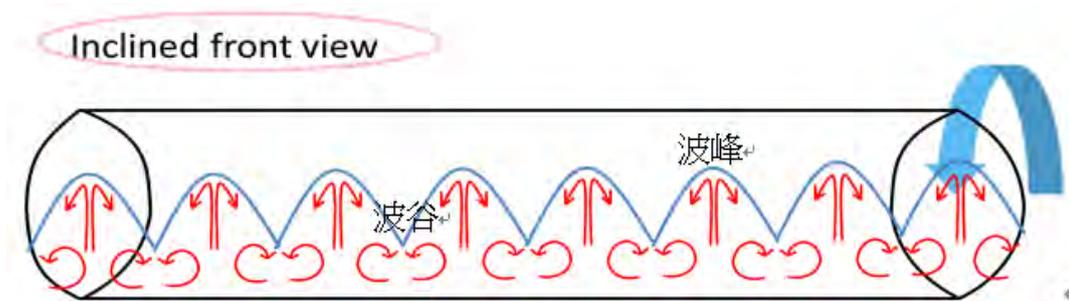
(圖四十二)

根據圖四十二可以得知，壓克力管開始轉動的時候，因為黏滯力(viscous force)帶動使液體被拉起，一開始黏滯力 > 重力(gravity)+表面張力所造成的力(surface tension force)，所以會有一層薄膜從管壁和液體接觸面被拉起來，造成在整個壓克力管管壁都有一層極薄的液體，但當黏滯力帶動的液體變多時，重力+表面張力造成下拉的力變大，而拉起的液體和管壁的速度差變小，導致黏滯力下降，因此液體會往下流，因為壓克力管是持續轉動，所以在這樣的循環之下會產生一個漩渦，如圖四十三所示(紅色箭頭為水流方向，藍色箭頭為壓克力管的轉動方向)。



(圖四十三)

## 五、由上方往下方觀察

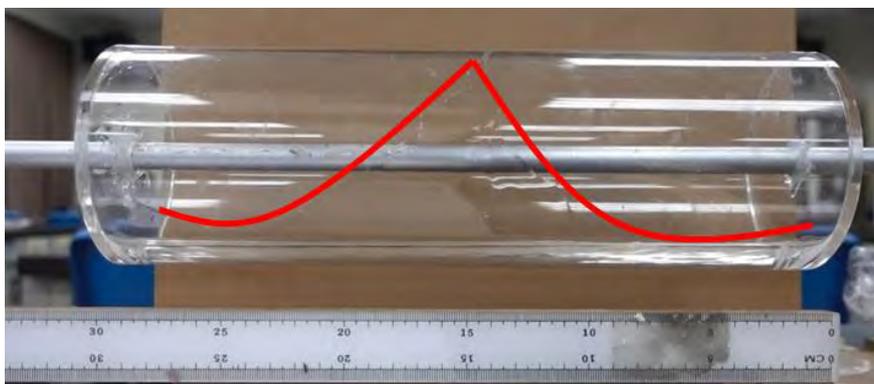


(圖四十四) (紅色箭頭為液體流動方向，藍色箭頭為壓克力管的轉動方向)

如圖四十四所示，最旁邊的兩側因為有兩個面(左右兩側圓形壁及圓柱管壁)同時拉動液體，所以液體在一開始會先由兩側表面上拉，當兩側的液體被拉起來時，原本的地方會產生一個缺口，靠近缺口的液體會向缺口填補，而液體流到缺口的液體又被黏滯力往上拉，如此循環後形成一個漩渦，但是兩端因為填補的缺口方向不一樣，導致旋轉方向相反的漩渦。圓柱體兩側之外的漩渦方向如圖所示，會產生液體在波峰形成向外的漩渦，在波谷形成向內的漩渦。

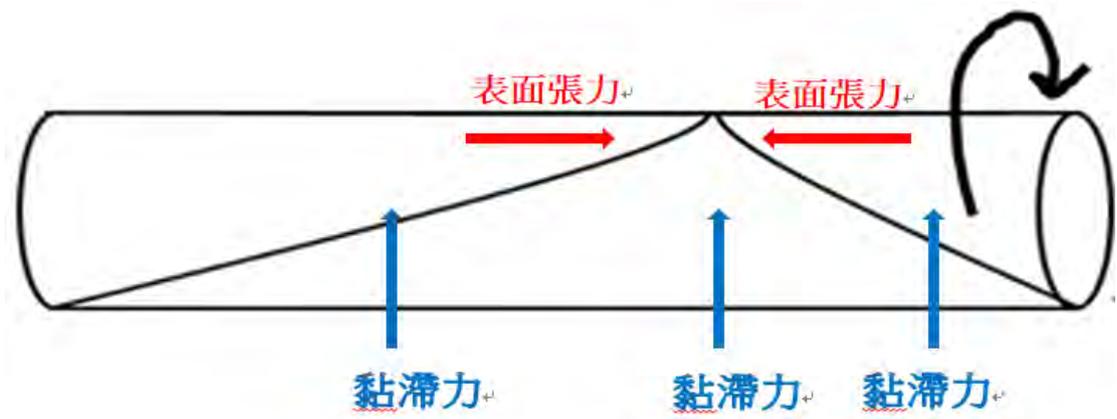
## 六、水的特殊形狀

(一) 另外當我們一開始進行實驗時，用水當作液體，使用長為 30 公分的壓克力管，會產生一種特殊的形狀，我們稱為 Mountain，如圖四十五所示，圖形紅線為水形成 Mountain 的邊界，紅線以下有水存在。



(圖四十五)

(二) Mountain 的尖端形成是因為當壓克力管開始轉動時，因為黏滯力，因此壓克力管管壁會拉起水形成薄膜，越上方管壁的水會因為重力影響逐漸增大，而因為水和管壁之間的速率差越小，導致黏滯力下降，同時在表面張力的作用下，為了達到水膜的最小面積，水薄膜向中間聚集，因此在管壁上會形成山坡，如圖四十六所示。

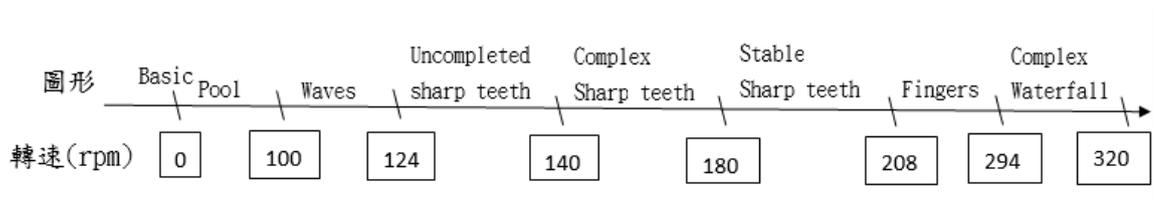


(圖四十六)

## 柒、 結論

一、圖形的形成跟漩渦、黏滯力、表面張力、重力、液體體積比、液體質量比、轉速機轉速、慣性力及雷諾數有很大關係。

二、隨著轉速變化圖形變化如下



三、當甘油質量比為 50-75%，甘油體積比為 5-10%，壓克力管不限長度時，都會產生 Stable Sharp Teeth 的圖形。

四、根據水為液體的實驗可知，水和甘油可以形成不同的圖形，水 Mountain 形成位置位於管壁側面，而甘油圖案形成位置在壓克力管正下方，這和兩者黏滯性差異大有關。

五、未來展望:

(一) 期望可以用 Navier- Stokes 方程式進行討論 Sharp Teeth 的形成過程

(二) 進一步研究表面張力和液體黏滯係數對液體圖形的影響

## 捌、 參考資料及其他

一、 S. T. Thoroddsen and L. Mahadevan. Experimental study of coating flows in a partially-filled horizontally rotating cylinder. Exp. Fluids 23, 1-13 (1997),  
<https://www.seas.harvard.edu/softmat/downloads/pre2000-13.pdf>

## 【評語】 051804

本作品觀測到黏滯性液體在旋轉的管壁上所形成的波形譜圖，能以管壁旋轉頻率滋生數種波譜。雖是參考前資料，但內容豐富且能以黏滯行為所滋生的漩渦來了解此物理觀察。本作品尚有許多可以深入探究之物理行為，建議可繼續延續性研究。

## 壹、研究動機

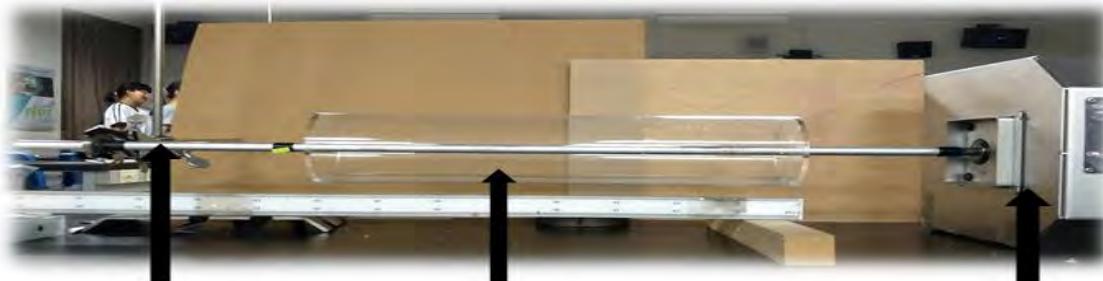
在網路上看到一個影片，其中內容就是一個繞軸旋轉的瓶子，裡面乘載的液體顯現出了特殊的圖形。於是上網查詢相關資料後，在好奇心的驅使之下，便一頭栽入到這個實驗中。這個實驗結合課程內容，將運用雷諾數、黏滯力、表面張力以及液體流動性質進行討論。

## 貳、研究目的

為了要探討為何壓克力管轉動會帶動液體在管壁形成各種圖形?甚麼原因影響圖形的形狀(特別是 Sharp Teeth 圖形)?為了了解系統的複雜性以及其中隱藏的概念，因此設計了此實驗去探討。

## 參、研究過程或方法

### 一、實驗方法



帶有軸層的支架

壓克力管

轉速機

### 二、分析圖形

分析圖形方法是先從實驗中記錄的影片找出最穩定的地方截圖，貼到小畫家，下載到 tracker 裡面，然後定義座標軸以及長度的比例以分析圖形的振幅和波長。

### 三、使用的公式

#### 1. 線性雷諾數(Re):

$$Re = \frac{\text{慣性力(inertial force)}}{\text{黏滯力(viscous force)}} = \frac{\rho v^2}{\mu \frac{dv}{dz}} \cong \frac{\rho v^2}{\mu \frac{v}{D}} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$\rho$  為密度,  $\mu$  為黏滯係數,  $v$  為速

度,  $D$  為特徵長度, 由線性雷諾數公式可得知, 線性雷諾數跟慣性力及黏滯力有極大關係, 慣性力及黏滯力的大小會影響線性雷諾數, 造成圖形的不同。

#### 2. 旋轉雷諾數:

$R$  為半徑,  $\Omega$  為轉速,  $\nu$  為運動黏度, 適用在旋轉的液體, 隨著旋轉雷諾數的增大, 圖形變化為

$$Re = R^2 \Omega / \nu$$

Pool  $\rightarrow$  Wave  $\rightarrow$  Lace  $\rightarrow$  Sharp Teeth  $\rightarrow$  Transients  $\rightarrow$  Fingers  $\rightarrow$  Layer。

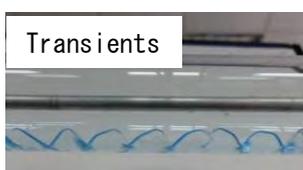
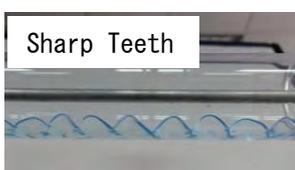
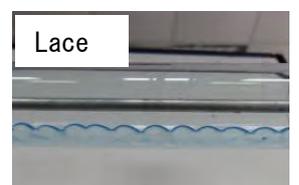
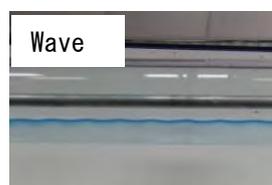
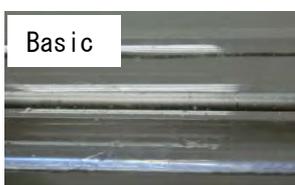
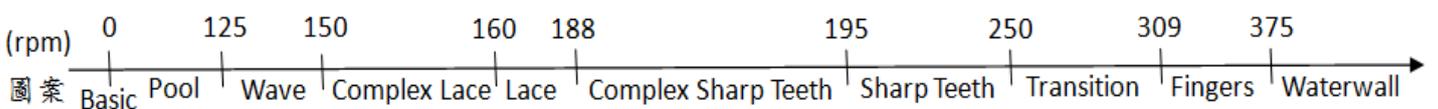
#### 3. Navier-Stokes 方程式:

$\rho$  為液體速度,  $P$  為壓力,  $v$  為速度,  $f$  為其他力的總力。方程式等號左方項代表 ma, 並且這邊的 Inertia 項指

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\text{Unsteady acceleration}} + \underbrace{v \cdot \nabla v}_{\text{Convective acceleration}} \right) = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Pressure gradient}} + \underbrace{\mu \nabla^2 v}_{\text{Viscosity}} + \underbrace{f}_{\text{Other forces}}$$

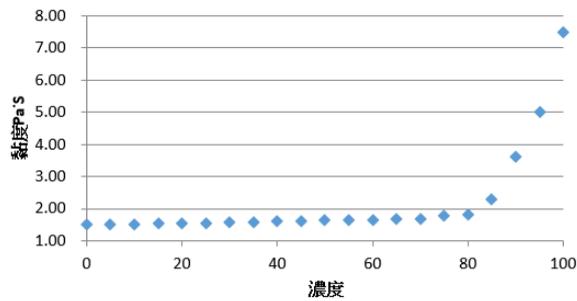
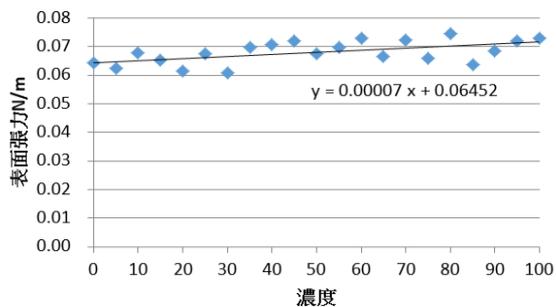
的不是離心力, 而是指單位體積的合力; 右方第一項代表壓力, 第二項代表黏滯力, 第三項在本實驗中代表重力以及表面張力。

### 四、定義



# 肆、研究結果

## 一、表面張力係數及黏度

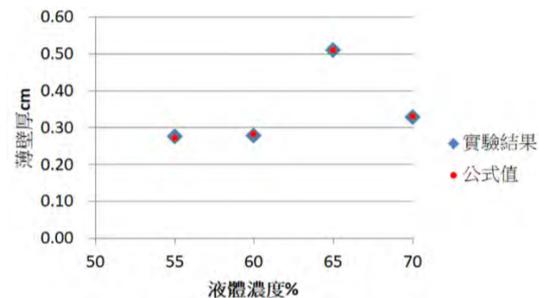
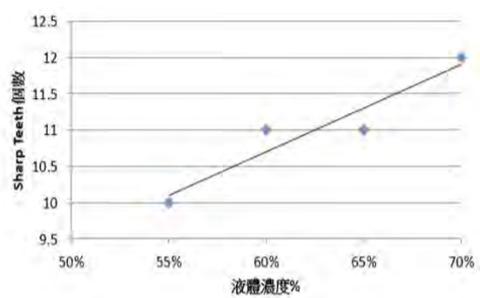
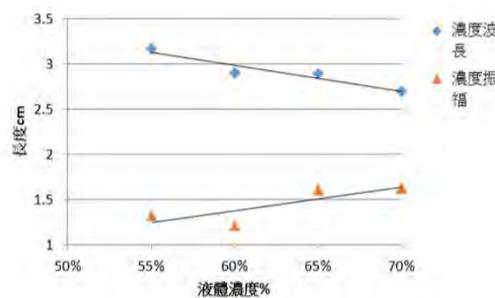


## 二、變因一：壓克力管內甘油濃度

控制變因：轉速 215rpm，壓克力管 30 公分、直徑 8 公分，液體體積比 5%

操縱變因：甘油濃度 0-100%，取每 5% 為一間隔進行實驗

甘油濃度主要改變的是液體黏滯力，當甘油濃度變大時，黏滯係數亦變大，所以液體會被帶得越高，在濃度為 55-70% 會形成 sharp teeth 的圖形。

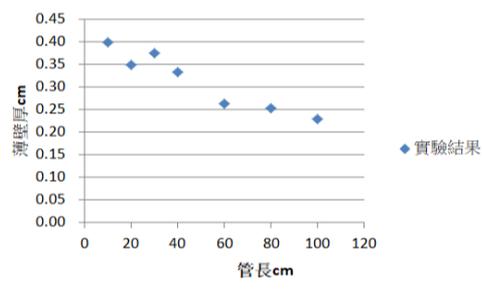
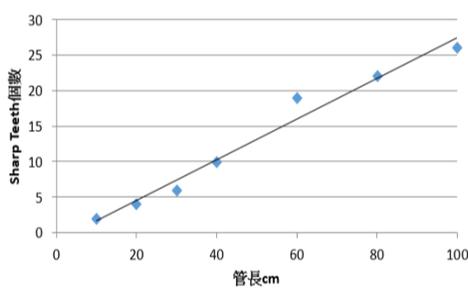
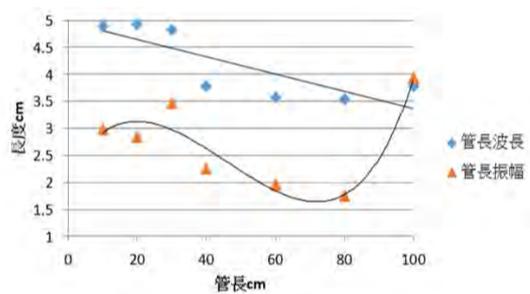


## 三、變因二：壓克力管長度

控制變因：轉速 191.225rpm，甘油濃度 70%，液體體積比 5%，管直徑 10 公分

操縱變因：壓克力管 10, 20, 30, 40, 60, 80, 100 公分

當壓克力管管長增加時，Sharp Teeth 個數會成等差增加，波長不具規律，但振幅會增加。當管長變長時，液體黏滯係數以及表面張力係數不會改變，個數的增加是因為管長較長，因此可容納的圖形個數較多。

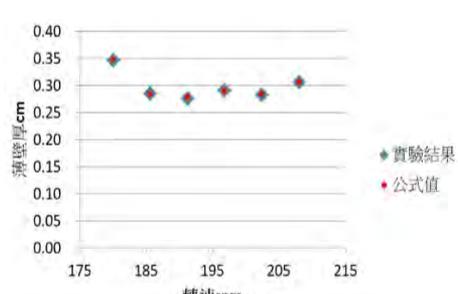
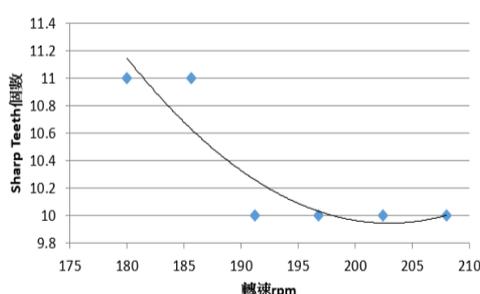
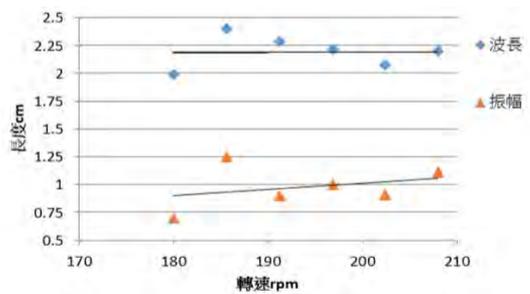


## 四、變因三：轉速機轉速

控制變因：壓克力管 60 公分，直徑 10 公分，液體體積比 5%，甘油濃度 70%

操縱變因：轉速 180, 185.6, 191.2, 196.8, 202.4, 208rpm

在這些轉速下都可以形成 sharp teeth 圖形，但是因為轉速的不同所形成的 sharp teeth 也會有些微的不同，在轉速 180、185.5 rpm 的情況下所形成的 sharp teeth 個數是最多的。

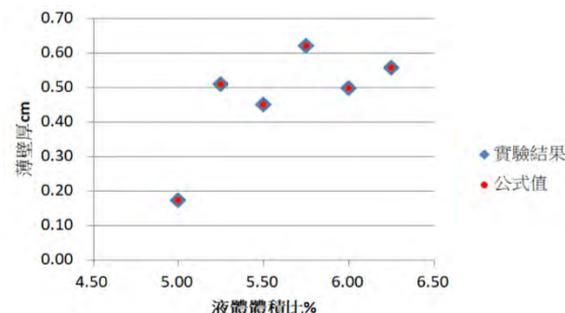
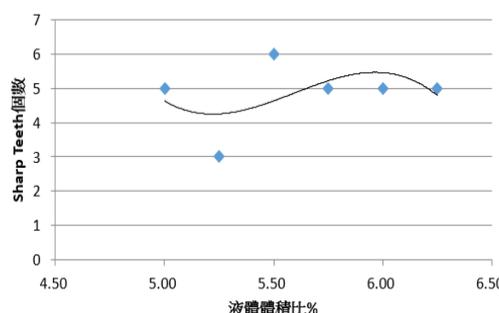
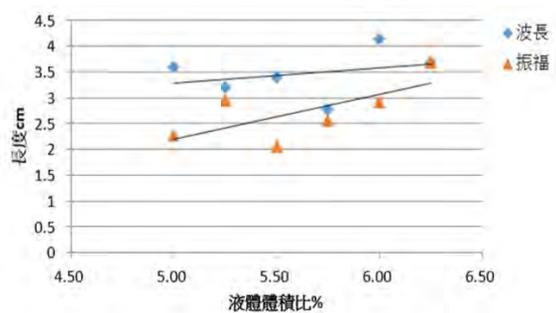


## 五、變因四：壓克力管內液體體積比

控制變因：轉速 250rpm，壓克力管 20 公分，管直徑 10 公分，甘油濃度 70%

操縱變因：1, 3, 4, 4.5, 4.75, 5, 5.25, 5.5, 5.75, 6, 6.25, 6.5, 7, 10, 15, 20, 25, 30%

由下方圖表可已得知，液體體積比越大 Sharp Teeth 個數越多，波長和振幅越大。

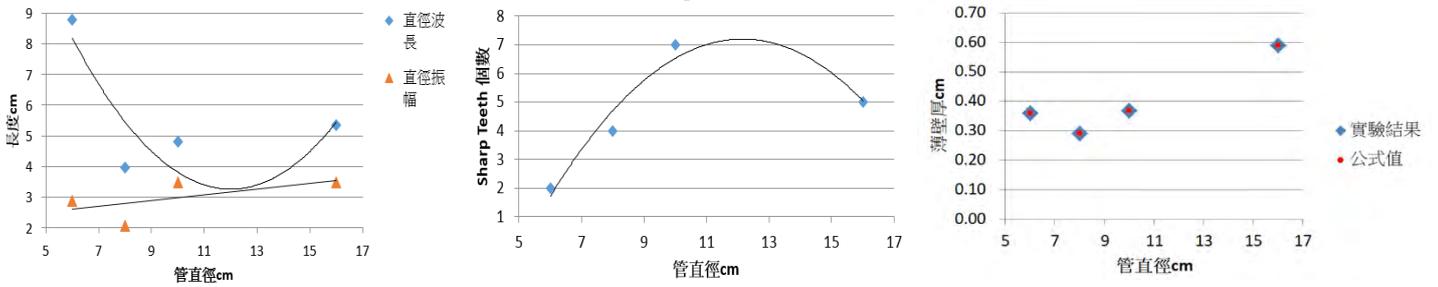


## 六、變因五:壓克力管直徑

控制變因:轉速 191.245rpm，管長 30 公分，液體體積比 5%，甘油濃度 70%

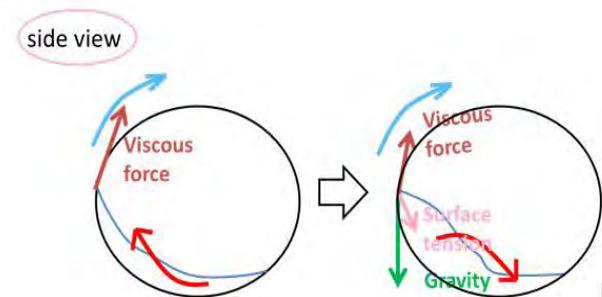
操縱變因:6, 8, 10, 16 公分

由下方圖表可以得知，管直徑與 Sharp Teeth 個數並無直接關係。



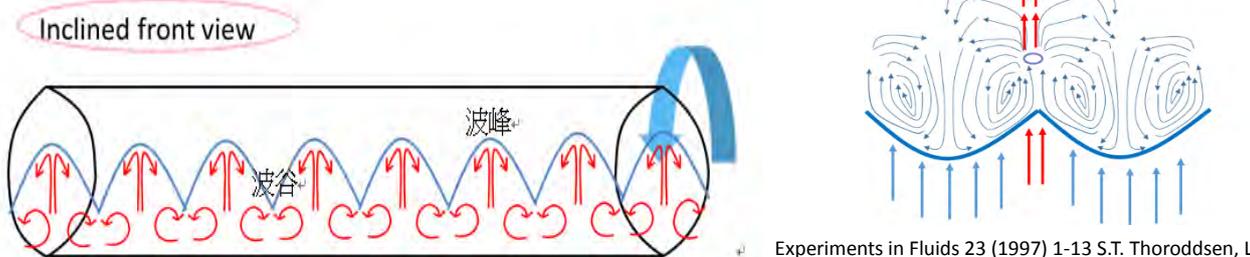
## 伍、討論

### 一、側面觀察



壓克力管開始轉動時，一開始黏滯力 > [重力 (gravity) + 表面張力 (surface tension force)]，但當黏滯力帶動的液體變多時，[重力 + 表面張力] 會大於黏滯力，則表面的液體會順著水面往下流，才會產生一個漩渦。

### 二、由上方往下方觀察



(紅色箭頭為水流方向，藍色箭頭為壓克力管的轉動方向) 因為圓柱體的兩個底面和管身的圓弧面會同時拉起液體，所以液體在一開始會先由兩側表面上拉，當兩側的液體被拉起來時，原本的地方會產生一個缺口，由附近的液體填補，又會產生另一個缺空處，再由其他地方的液體填補，重複這個動作後，就形成了數個漩渦，但是兩端因為填補的缺口方向不同，導致形成不同方向的漩渦。

## 陸、結論

一、在甘油質量比 55-70%，體積比 5- 6.25%，轉速 180-208 rpm 的情況下都能產生 sharp teeth 的圖形，而管長和管直徑變因主要影響的是 sharp teeth 形成的個數和振幅、波長的大小。

二、sharp teeth 圖形的出現必定伴隨著漩渦。

三、以純水當成變因的實驗不穩定性極高，因為純水的黏滯力太小導致

四、根據我們做出來的數據，可列出以下薄膜厚公式：

1.  $\chi$  定義為  $0.00000000010639658689444 \frac{\gamma \mu K^2 D^5 N^5}{M^4}$  ( $\gamma$  為表面張力、 $\mu$  為黏滯係數、 $K$  為管質量、 $D$  為管直徑、 $N$  為轉速、 $M$  為液體質量)

2. 直徑薄膜厚

$$-73921933.7604828x^3 + 801349.057258156x^2 - 2485.5322338565x + 2.665908455$$

3. 轉速薄膜厚

$$11777538211072x^4 - 605574407816.851x^3 + 329908775.578629x^2 -$$

$$78827.7505072431x + 7.2476220361653$$

4. 濃度薄膜厚

$$1628559.95284025x^2 - 14276.75460517x + 31.554838231773$$

5. 體積比薄膜厚

$$472218733746.375x^5 + 29386279795.197x^4 - 714050183.038072x^3 + 8462908.21385856x^2 - 48914.6030645926x + 110.866753295407$$

## 柒、參考資料

S. T. Thoroddsen and L. Mahadevan. Experimental study of coating flows in a partially-filled horizontally rotating cylinder. *Exp. Fluids* 23 -13(1997), <https://www.seas.harvard.edu/softmat/downloads/pre2000-13.pdf>