

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051802

同聲相應，同氣相「球」

-球狀星團各類半徑與其疏密程度之探討

學校名稱：新北市立中和高級中學

作者： 高二 張閔峰 高二 李孟翰	指導老師： 邱柏然 楊旻蒼
-------------------------	---------------------

關鍵詞：球狀星團、疏密、半徑

摘要

本研究之目的在探討球狀星團疏密程度的判斷方式，並探討球狀星團半徑之關係。我們發現球狀星團可藉由亮度分布曲線圖來判斷其核心密集程度，並將結果與夏普力·索耶集中度分類法做比較，其結果大致相仿，對於少數球狀星團的判斷結果不同。此研究同時利用球狀星團的潮汐半徑與核半徑之比值作為球狀星團疏密程度的判斷依據，並探討以半光度半徑、半質量半徑來取代核半徑的可行性，結果為潮汐半徑與上述各種半徑的比值皆能有效代表一個球狀星團的疏密程度。除此之外，核半徑與半光度半徑之比值亦能有效代表球狀星團的疏密程度，提供一種不使用潮汐半徑理論值來衡量球狀星團疏密度的方法。

壹、研究動機

我們平時就對充滿奧秘又浩瀚的宇宙頗有興趣，尤其是在上完基礎地科下冊的燦爛星空一章後，更是著迷於夜空中各式各樣的天體，恰好學校設有天文台，其中又有口徑 15 公分的天文望遠鏡可供使用，我們便時常於放學後留在學校觀星，偶爾也會去參加一些天文相關的活動。在一次上塔塔加觀星時，我們觀測到了幾個球狀星團，雖然是平時就能觀測到的星體，不過這次由於光害較少、觀測條件較佳，因此注意到了平時看似相同的球狀星團們之間其實還是有所差異，如下圖 1 中可以發現球狀星團 M54 中心恆星的分布要比 M13 密集。



圖 1：左為球狀星團 M54，右為 M13

我們猜測其疏密程度或許和球狀星團演化有關，於是對球狀星團的集中度產生了興趣，然而搜尋相關資料後發現關於球狀星團集中度的研究並不多，其中最為著名的是二十世紀早

期的哈洛·夏普力和海倫·索耶·霍格等科學家曾做過相關研究，並提出夏普力·耶索集中度分類法（Concentration classes of globular cluster）（Hogg, 1965）。此分類法將球狀星團從最密集到最不密集共分為 12 個等級，以羅馬數字 I 至 XII 表示，並訂定出每個等級的代表球狀星團，例如球狀星團 M75 為分類中的 I（最集中），而球狀星團 Pal 12 則是分類中的 XII（最不集中），其餘如圖 2 所列。

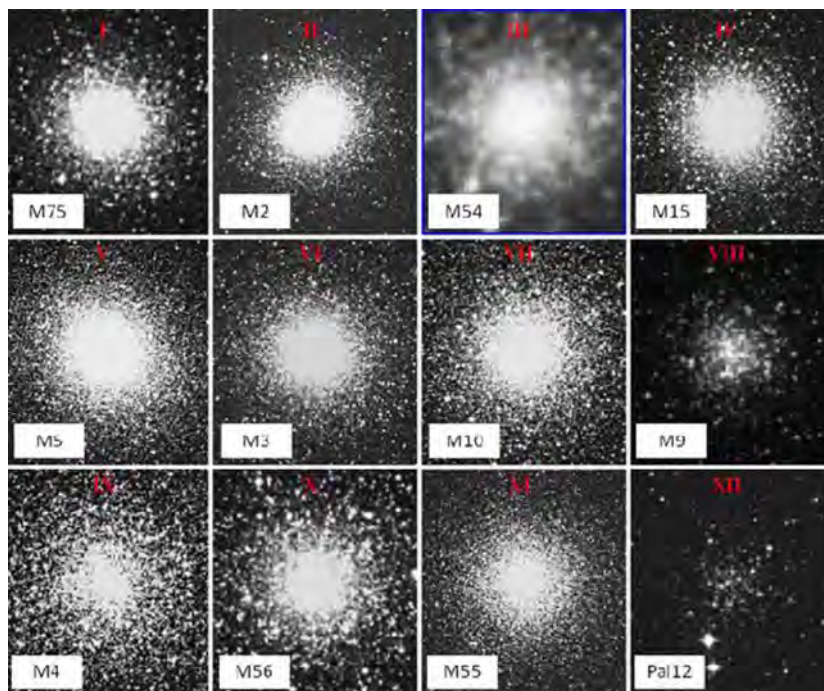


圖 2：夏普力·索耶集中度分類法各類代表球狀星團

然而夏普力·索耶集中度分類法並沒有詳細敘述其分類依據，似乎僅由星團影像中就視覺上的判斷作為各球狀星團是否疏密之依據，故我們想對此有進一步的研究，並希望建立一套能夠定量描述球狀星團疏密程度的系統。也許在未來能成為研究球狀星團甚至於星系演化的一大助力。

貳、研究目的

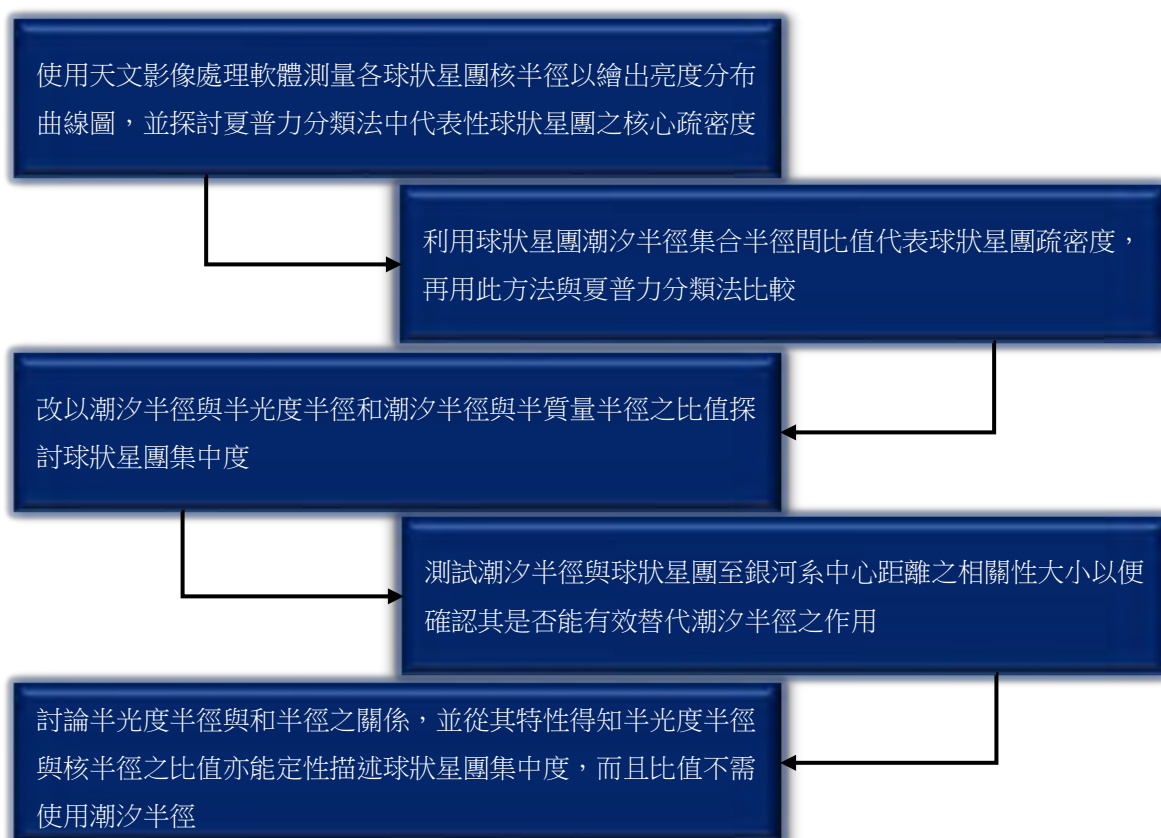
- 一、 探討夏普力·索耶集中度分類法之相關依據
- 二、 找尋以球狀星團各半徑定量描述其疏密程度之方法
- 三、 試求球狀星團潮汐半徑和銀河中心距離之相關性
- 四、 找尋半光度半徑與核半徑之關係並從中推測能代表球狀星團疏密度的方法

參、研究設備

DSS 數位巡天資料庫 (Digital sky survey)、SAOImage DS9 天文影像處理軟體、SIMBAD 線上天文資料庫、筆記型電腦、Microsoft Office Word 2016、Excel 2016

肆、研究過程及方法

一、研究流程：



二、名詞釋義

- (一)、 pc ：距離單位， $1pc = 3.26$ 光年、 $1kpc = 3260$ 光年。
- (二)、 R_{sun} ：球狀星團與太陽的距離，本報告以 kpc 為單位。
- (三)、 R_{gc} ：球狀星團與銀河系中心距離，本報告以 kpc 為單位。
- (四)、 M_c ：球狀星團質量，為判定球狀星團潮汐半徑 (R_t) 之重要依據，本報告以太陽質量 (M_{\odot}) 為單位。

- (五)、 M_{gc} ：銀河系質量，本報告以 10^{12} 太陽質量 (M_{\odot}) 為基準。
- (六)、 潮汐半徑 (R_t)：此範圍內星團本身重力影響大於銀河系之影響。
- (七)、 核半徑 (R_c)：表面光度降為中心一半的核心距離。
- (八)、 半光度半徑 (R_h)：這是總光度達到整個星團一半區域的半徑。
- (九)、 半質量半徑 (R_m)：由中心至包含星團一半質量的距離。
- (十)、 相關係數 r ：用於比較兩筆數據之相關性的工具，其值範圍為 $1 \gg r \gg -1$ ，數值為正即為正相關，愈接近 1 代表兩筆數據正相關愈強；愈接近 -1 則負相關愈強。在散佈圖上，當 X、Y 兩數據各點分布愈靠近斜率為正的直線上，此時的 r 愈趨近於 1，反之，愈接近 -1。

三、研究方法：

- (一)、 以「亮度分布曲線圖」探討球狀星團的分布疏密度：
 1. 由 DSS 資料庫中下載夏普力·索耶集中度分類法中各級代表球狀星團的觀測影像。
 2. 以 DS9 天文影像處理軟體進行球狀星團的光亮測量。
 3. 利用 MicroSoft Excel 繪出球狀星團「亮度分布曲線圖」。
 4. 探討不同球狀星團間「亮度分布曲線圖」。

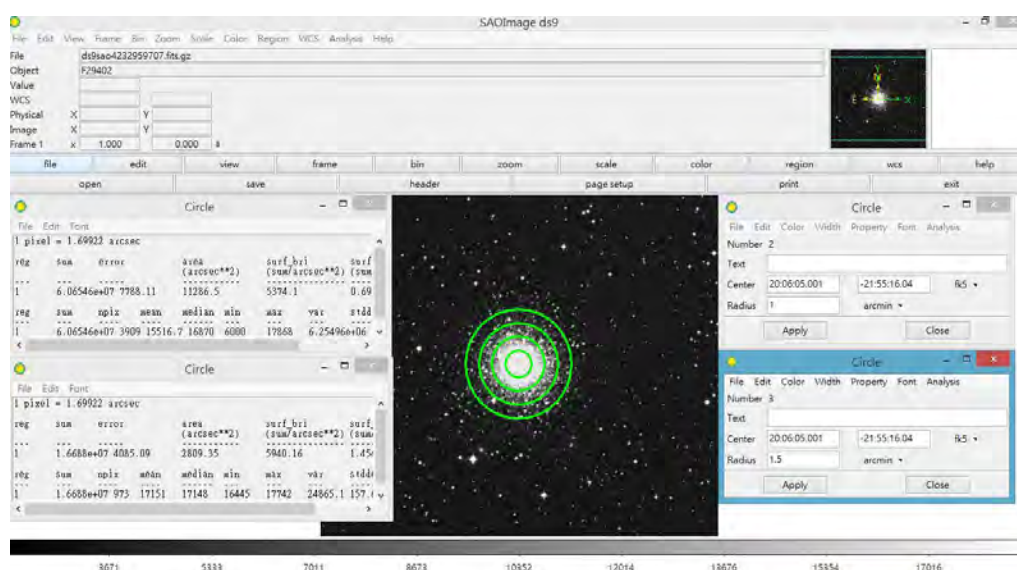


圖 3：利用 DS9 量測球狀星團的亮度

- (二)、以「核半徑與潮汐半徑之間的比值」探討球狀星團的分布疏密度：
 1. 利用 SIMBAD 天文線上資料庫中的數據來計算球狀星團的潮汐半徑。
 2. 計算潮汐半徑與核半徑的比值，並與夏普力·索耶集中度分類作比較。
- (三)、以「潮汐半徑與半光度半徑、半質量半徑之比值」探討球狀星團的分布疏密度：
 1. 由學術論文中引用出我們需要的球狀星團之半光度半徑及半質量半徑資料。
 2. 計算潮汐半徑與半光度半徑、半質量半徑的比值，並與 C 作比較。
- (四)、以「半光度半徑與核半徑之間的比值」探討球狀星團的分布疏密度：
 1. 計算半光度半徑與核半徑之間的比值，並與 C 作比較。

伍、研究結果

一、以「亮度分布曲線圖」探討球狀星團的分布疏密度：

圖 4 為球狀星團 M75 及 M4 的表面亮度與中心距離之關係圖。由於各球狀星團的距離遠近及大小都不同，星團中心的亮度也不同，為了方便各星團之間的比較，因此作圖時我們以「距中心距離與該星團核半徑的比值」作為橫軸，而以「亮度與該星團最大亮度的比值」作為縱軸來作圖。

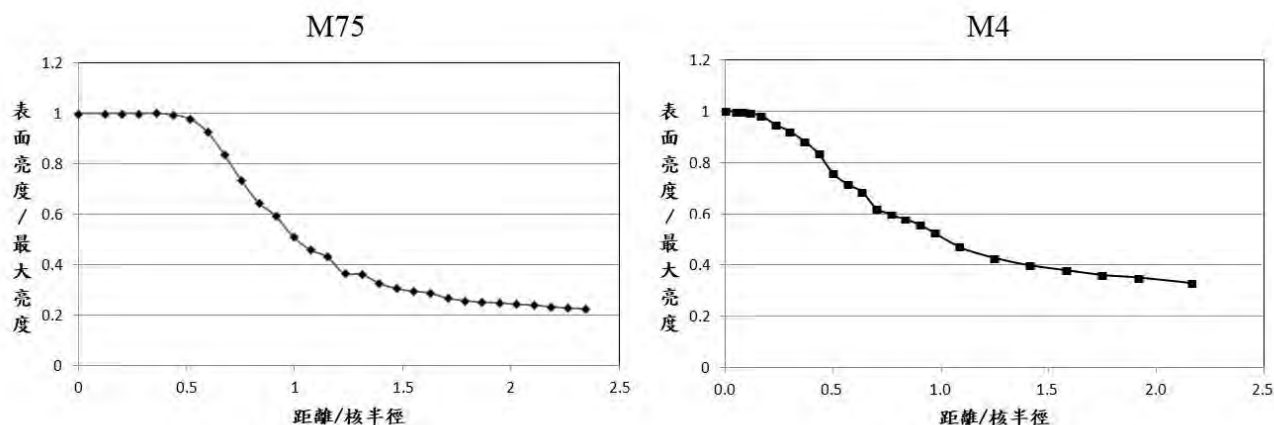


圖 4：球狀星團 M75 及 M4 的亮度-距中心距離關係圖

由圖 4 可以看出 M75 與 M4 的表面亮度與距中心距離的關係呈現出明顯不同的特徵。M75 由中心至 0.5 個核半徑之範圍內，表面亮度的數值幾乎相同，意即整個核心區域的皆非常亮

且均勻，直至距離中心 0.5 個核半徑之外，表面亮度才隨著距中心距離而下降。而 M4 則是在 0.2 個核半徑之外，表面亮度便開始隨距中心距離遞減，並沒有一個明亮平坦的核心。此外，M75 當亮度開始隨距離遞減時（大於 0.5 個核半徑之外），其亮度下降趨勢較 M4 來得快，且在「亮度平坦區」與「亮度遞減區」之間有明顯的斜率邊界。與 M75 不同的是，M4 的表面亮度隨距離增大呈現平緩穩定的遞減，並無明顯的斜率邊界，意即由中心往外恆星的密集程度是一個由密緩緩漸疏的變化。

由於這些明顯的差異，可以得知以表面光度-距中心距離的關係圖來探討球狀星團分布的疏密程度是一個可行且好用的辦法。基於上述的討論，我們將 M75 命名為「核心集中型」的球狀星團，而 M4 命名為「均勻分布型」的球狀星團。為了作更進一步的探討比較，我們針對所有夏普力·索耶集中度分類法中的球狀星團進行亮度測量，並將結果繪於圖 5 的亮度-距中心距離關係圖中。其中 Pal 12 因為分布過於稀疏，故不列入比較。

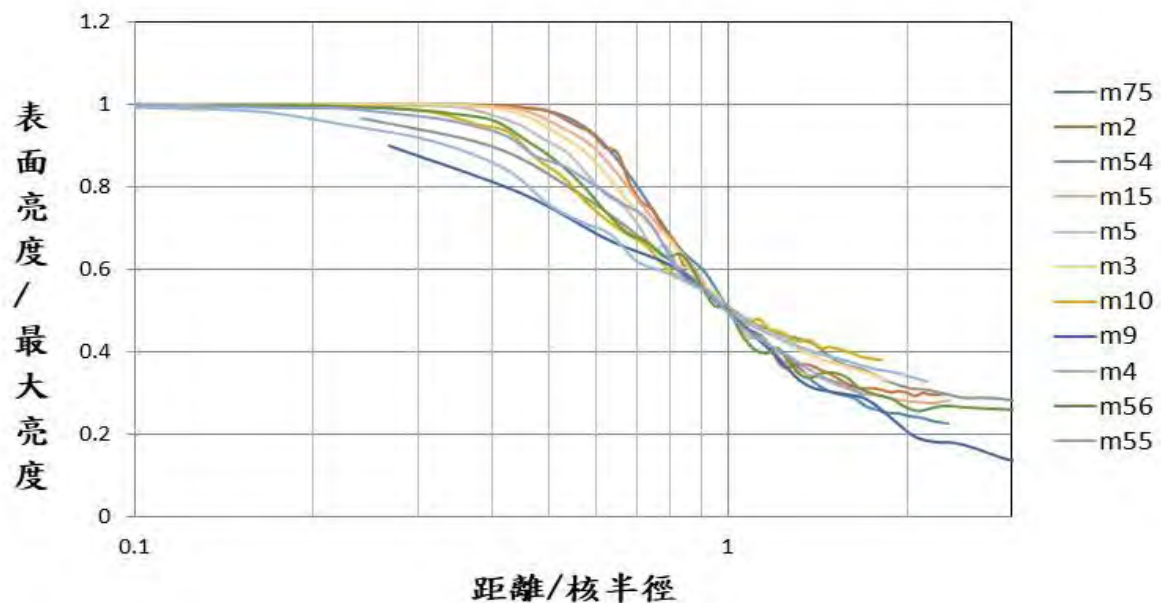


圖 5：夏普力·索耶分類法中球狀星團表面亮度-距中心距離關係圖

由圖 5 可看出球狀星團 M75、M2、M15、M3、M5 的分布屬於「核心集中型」，其中 M75 與 M2 有著比例上最大的明亮核心；而 M54、M9、M4 三者則屬「均勻分布型」，幾乎看不到明顯的明亮核心，其中又以 M9 與 M4 的亮度遞減最為平緩。而 M10、M55、M56 三者則約略介於兩者之間，有些許平坦明亮的核心但不明顯，我們稱之為「中間型」。

若將上述結果與夏普力當初的分類作比較，「核心集中型」的球狀星團恰好皆為夏普力認為中心分布集中的類別，而且擁有最大核心的 M75 與 M2 恰好為夏普力所認定的第一與第二名。而「均勻分布型」中的 M9、M4 也恰好是夏普力認定較不密集的球狀星團，分別為第八與第九名。但特別的是夏普力分類中第三密集的 M54 在關係圖上卻屬於均勻分布型；而第十及第十一密集的 M56、M55 卻是介於「核心集中型」及「均勻分布型」的「中間型」。因此嚴格來說，以「亮度分布曲線圖」來探討球狀星團疏密的分布，雖然未完全按照夏普力分類中的排列順序，且有少數關係不明，但大致上符合由密到疏的趨勢。

二、以「核半徑與潮汐半徑之間的比值」探討球狀星團的分布疏密度：

為了確認疏密程度，首先需要瞭解球狀星團中大部分的恆星是如何分布，由於球狀星團中的恆星，大多誕生於同一時期，每顆恆星質量相差不遠，而質量又與其光度又有一定關係，因此能推測在一球狀星團中，光度與質量分布應是呈現正相關的，在前一段的試驗中，得知核半徑（ R_c ）是代表一球狀星團由中心開始，中心表面光度降至一半的距離，因此核半徑內範圍應能有效代表其質量集中區域。

有了質量集中區域後，仍然需要一個能代表星團大小的量，故在此介紹一個新的物理量 - 潮汐半徑 r_t ，其意義為在此範圍內星團本身影響大於星系的影響，簡而言之就是星團的大小，其公式如下：

$$r_t = k \cdot \left(\frac{M_c}{2M_{gc}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_{gc}$$

其中， k 為非球型的限制潮汐表面提供平均校正， $k = \frac{2}{3}$ 。（Bellazzini，2004）。擁有整個星團的大小及質量集中區域，我們認為兩半徑間的比值應可代表其疏密程度，因此推測：

$$\frac{r_t}{r_c}$$

能代表球狀星團疏密度，其值愈大，代表分布愈集中；愈小，則有愈分散的趨勢。然而有時兩半徑差距過大，而造成比值也過大，因此我們認為將其取對數後，計算的值可能會更加方便，並暫時將此值稱作核密度，如下：

$$\text{核密度} = \log \frac{r_t}{r_c}$$

接著將夏普力分類的 12 個球狀星團之計算結果列於表 1 並作圖 6 比較，其中 Pal12 由於數據過於極端，故不列入比較。

表 1：夏普力分類之球狀星團數據

族	球狀星團名稱	Rc(kpc)	Rt(kpc)	Rt/Rc	log(Rt/Rc)
I	M75	0.008	0.036	4.737	0.676
II	M2	0.011	0.042	3.986	0.601
III	M54	0.005	0.073	14.569	1.163
IV	M15	0.009	0.085	9.689	0.986
V	M5	0.010	0.053	5.169	0.713
VI	M3	0.011	0.081	7.378	0.868
VII	M10	0.005	0.025	4.764	0.678
VIII	M9	0.001	0.016	12.659	1.102
IX	M4	0.002	0.031	16.704	1.223
X	M56	0.005	0.029	5.733	0.758
XI	M55	0.006	0.021	3.428	0.535
XII	無				

表中核半徑 (R_c) 乃是利用前面提到之 DSS 資料庫中資料，再用 DS9 軟體找出的，不過因其單位原先為角分 (arcmin)，於是便將其轉換成以千秒差距 (kpc) 計算，分辨與計算後的潮汐半徑單位結合。

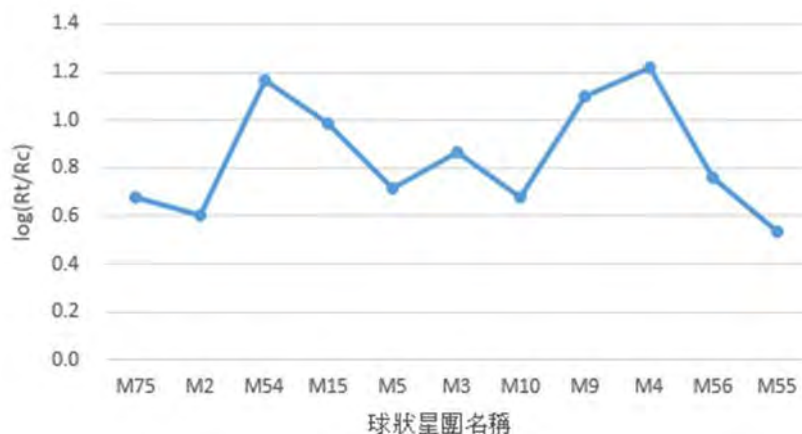


圖 6：夏普力球狀星團之集中度折線圖(其中橫軸由左→右是夏普力分類法中的密→疏)

由上圖能明顯看出各球狀星團之疏密度，無論從橫軸左端或右端開始，皆無特定順序，認為此辨別方式與夏普力·索耶集中度分類法有所差異，故將對此作延伸討論。

三、以「潮汐半徑與半光度半徑之比值」探討球狀星團的分布疏密度：

搜尋資料時，我們發現球狀星團還有除了核半徑之外的其他表示法。其中有個比較特別的一點是先前提到的核密度，其實已經有人做過相關研究，並稱此值為 C (Central concentration) (Ivan R. King, 1966)：

$$C = \log \frac{r_t}{r_c}$$

它代表著球狀星團的集中度，驗證了之前的推測。不過我們認為只有一種方法有時會造成不便，亦或者過於武斷，因此引入了另外兩種半徑作討論，分別是半光度半徑以及半質量半徑。半光度半徑 - r_h ，其代表的意義為由球狀星團中心開始總光度達到整個星團一半區域的半徑 (William, 2010)。而半質量半徑 - r_m 的意義，代表的是由中心至包含星團一半質量的距離。其中半光度半徑與半質量半徑的概念類似，一個是總質量的一半，另一個是總光度的一半，而且光度或質量愈大代表恆星數愈多，光度也會愈大，故在此推測半光度半徑以及半質量半徑應該有相當高的相關性。

由於前面採用潮汐半徑與核半徑的比值能有效代表星團疏密程度，於是我們認為以半光度半徑及半質量半徑取代核半徑來與潮汐半徑做比較，應亦能符合我們的所求。為了將各種半徑做有效的整理，我們從原始資料中將某些資料缺失無法討論的數據排除，留下較有代表性的資料，並將各種所需資訊整理在表格中，從中將相關內容擷取討論。

首先，延續之前的想法，由於光度與質量有一定關係，因此其光度應能有效代替質量，我們將潮汐半徑除以半光度半徑，為了便利性，將其值取以 10 為底的對數(後續為了方便討論，若無特別強調，我們都會將比值後的數值再取以 10 為底的對數)，並將此比值稱做 C_h (Concentration derived from half-light radius) 以便討論，如下：

$$C_h = \log \frac{r_t}{r_h}$$

C_h 計算結果列於表 2。

表 2：各球狀星團之 C_h

ID	C	Rt/Rh	C-h	ID	C	Rt/Rh	C-h
NGC 288	0.99	5.91	0.77	Ton 2	1.30	8.28	0.92
Eridanus	1.10	6.85	0.84	NGC 6388	1.75	12.98	1.11
M 79	1.70	12.34	1.09	NGC 6401	1.69	6.41	0.81
NGC 2298	1.38	7.59	0.88	Pal 6	1.10	6.93	0.84
pyxis	0.65	4.56	0.66	NGC 6426	1.70	14.16	1.15
E 3	0.75	5.01	0.70	Terzan 9	2.50	12.17	1.09
NGC 3201	1.29	8.18	0.91	ESO456-SC38	1.50	9.94	1.00
NGC 4372	1.30	8.93	0.95	NGC 6517	1.82	7.92	0.90
Rup 106	0.70	4.77	0.68	NGC 6522	2.50	15.81	1.20
NGC 4833	1.25	7.38	0.87	NGC 6553	1.16	7.44	0.87
IC 4499	1.21	7.96	0.90	Pal 7	1.33	9.07	0.96
NGC 5927	1.60	15.20	1.18	Terzan 12	0.57	4.11	0.61
Pal 14	0.80	4.24	0.63	MGC 6569	1.31	8.94	0.95
NGC 6144	1.55	20.46	1.31	M 28	1.67	5.70	0.76
Terzan 3	0.70	4.73	0.67	M 69	1.38	9.43	0.97
M 107	1.53	10.97	1.04	NGC 6642	1.99	13.38	1.13
M 12	1.34	9.76	0.99	M 22	1.38	9.49	0.98
Pal 15	0.60	4.35	0.64	Pal 9	2.07	13.82	1.14
M 19	1.53	11.04	1.04	NGC 6723	1.11	6.99	0.84
NGC 6304	1.80	9.33	0.97	NGC 6752	2.50	28.15	1.45
NGC 6325	2.50	15.06	1.18	NGC 6760	1.65	11.96	1.08
NGC 6342	2.50	21.66	1.34	Pal 10	0.58	3.11	0.49
NGC 6356	1.59	11.53	1.06	Terzan 8	0.60	4.19	0.62
NGC 6352	1.10	5.10	0.71	M 71	1.15	5.33	0.73
NGC 6355	2.50	17.97	1.25	NGC 6934	1.53	10.80	1.03
Ton 1	1.55	16.30	1.21	M30	2.50	18.42	1.27

為了得知其值能否代表球狀星團的疏密度，可以將 C_h 與C作圖比較，如圖 7 所示。

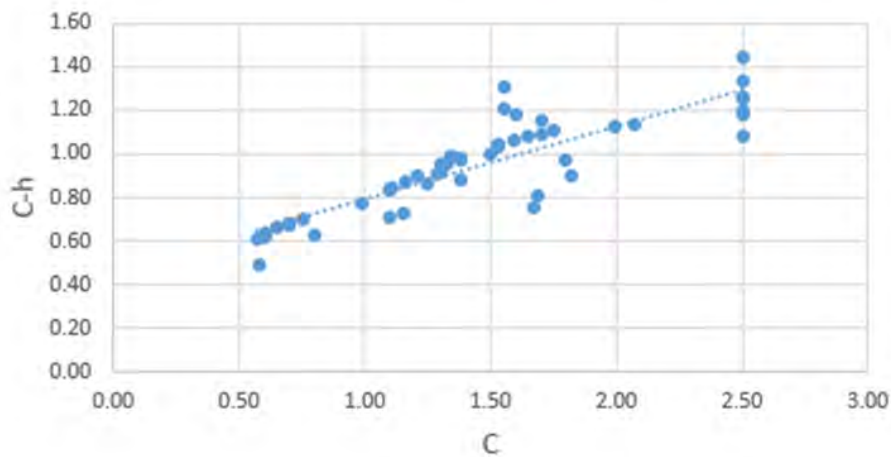


圖 7： C_h 與 C 之關係圖

從圖六中可以發現， C_h 與 C 之間明顯有一趨勢，計算後得到相關係數為 0.8662，證實其相關性之高，因此可以得知 C_h 也足以作為判斷球狀星團疏密度方式之一。

延續上者，改以半質量半徑取代半光度半徑重複上述的討論。潮汐半徑除以半質量半徑的物理意義，即代表一種星團大小對上質量集中區域的比例，一樣將潮汐半徑除以半質量半徑並取對數，取作 C_m (concentration derived from half-mass radius)，如下：

$$C_m = \log \frac{r_t}{r_m}$$

C_m 計算的結果整理於表 3 中，並作圖與 C 進行比較。

表 3：各球狀星團之 C_m

ID	C	Rt/Rm	C-m	ID	C	Rt/Rm	C-m
NGC 288	0.99	5.94	0.77	Ton 2	1.30	9.97	1.00
Eridanus	1.10	7.88	0.90	NGC 6388	1.75	10.07	1.00
M 79	1.70	10.03	1.00	NGC 6401	1.69	6.41	0.81
NGC 2298	1.38	9.54	0.98	Pal 6	1.10	7.84	0.89
pyxis	0.65	4.56	0.66	NGC 6426	1.70	13.57	1.13
E 3	0.75	5.11	0.71	Terzan 9	2.50	12.17	1.09
NGC 3201	1.29	9.46	0.98	ESO456-SC38	1.50	12.58	1.10
NGC 4372	1.30	8.95	0.95	NGC 6517	1.82	6.39	0.81
Rup 106	0.70	4.55	0.66	NGC 6522	2.50	15.20	1.18
NGC 4833	1.25	7.38	0.87	NGC 6553	1.16	4.94	0.69
IC 4499	1.21	9.08	0.96	Pal 7	1.33	9.19	0.96
NGC 5927	1.60	14.54	1.16	Terzan 12	0.57	3.67	0.56
Pal 14	0.80	4.50	0.65	MGC 6569	1.31	5.38	0.73
NGC 6144	1.55	20.59	1.31	M 28	1.67	7.20	0.86
Terzan 3	0.70	4.55	0.66	M 69	1.38	9.54	0.98
M 107	1.53	7.03	0.85	NGC 6642	1.99	13.38	1.13
M 12	1.34	8.00	0.90	M 22	1.38	9.79	0.99
Pal 15	0.60	3.95	0.60	Pal 9	2.07	13.82	1.14
M 19	1.53	11.66	1.07	NGC 6723	1.11	6.64	0.82
NGC 6304	1.80	9.40	0.97	NGC 6752	2.50	22.97	1.36
NGC 6325	2.50	10.10	1.00	NGC 6760	1.65	6.97	0.84
NGC 6342	2.50	17.97	1.25	Pal 10	0.58	3.11	0.49
NGC 6356	1.59	12.62	1.10	Terzan 8	0.60	3.98	0.60
NGC 6352	1.10	5.23	0.72	M 71	1.15	5.39	0.73
NGC 6355	2.50	18.17	1.26	NGC 6934	1.53	12.42	1.09
Ton 1	1.55	16.08	1.21	M30	2.50	16.50	1.22

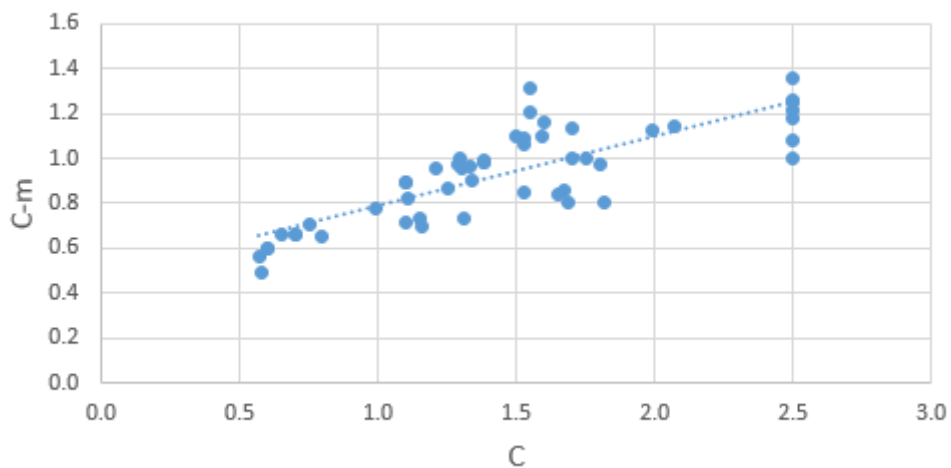


圖 8： C_m 與C之關係圖

由圖 8 可以看出 C_m 與 C 之相關性也很高，它與 C 的相關係數為 0.8145，雖然比起 C_h 小了一點，但仍為高度相關，故可得知 C_m 與 C_h 皆能作為球狀星團疏密程度的判斷依據。

四、球狀星團潮汐半徑與其距銀河系中心的距離之相關性探討

在探討球狀星團疏密度時，有一個很重要的指標：潮汐半徑，其意義為代表球狀星團的引力主宰範圍，不過我們想嘗試有無其他能有效替代潮汐半徑的方法，因此開始推測，藉由潮汐半徑的公式與意義中瞭解到其值應與球狀星團到銀河系中心之距離有關，然而無法知道實際上的相關大小。起初認為，若潮汐半徑大小與距銀心距離之相關性很強，那或許能從某種程度上替代潮汐半徑的功能，於是我們將潮汐半徑與球狀星團至銀心距離做圖以便看出其關係，如下圖 9：

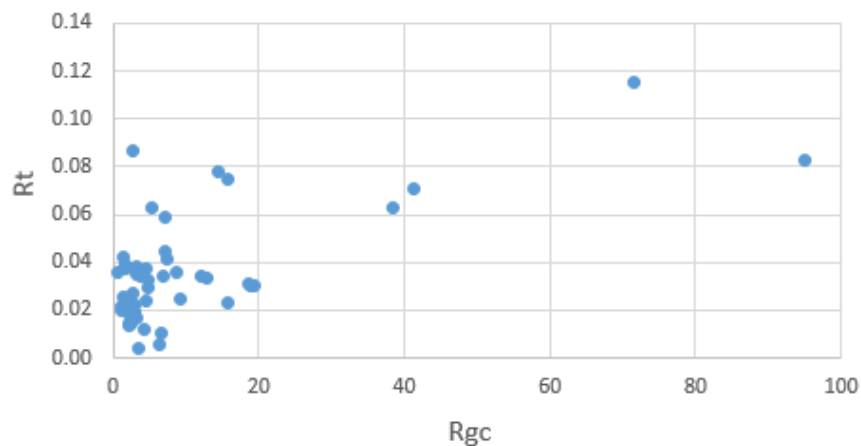


圖 9： r_{gc} 與 r_t 之關係圖

然而，結果卻不如預期，從圖上無法看出兩者有明顯的線性關係，由於對單從圖判斷結果會有主觀問題之疑慮，我們亦使用相關係數檢驗兩者間的關係，不過其值為 0.6554，確實有相關性但其值沒有很理想，可以認為此值不高，甚至有點不夠，表示雖然球狀星團潮汐半徑與其至銀心距離有某種程度的正相關，但在宇宙中其它天體對其的影響卻也不小，因此得出球狀星團至銀心距離無法有效代表潮汐半徑，兩者間無法有效進行替代。我們一樣將製作此圖之表 4 列出。

表 4：球狀星團潮汐半徑與其至銀心距離

ID	Rgc(kpc)	Rt(kpc)	ID	Rgc(kpc)	Rt(kpc)
NGC 288	12	0.03	Ton 2	1.4	0.03
Eridanus	95	0.08	NGC 6388	3.1	0.02
M 79	18.8	0.03	NGC 6401	2.7	0.04
NGC 2298	15.8	0.02	Pal 6	2.2	0.01
pyxis	41.4	0.07	NGC 6426	14.4	0.08
E 3	9.1	0.02	Terzan 9	1.1	0.02
NGC 3201	8.8	0.04	ESO456-SC38	1.8	0.02
NGC 4372	7.1	0.06	NGC 6517	4.2	0.01
Rup 106	18.5	0.03	NGC 6522	0.6	0.04
NGC 4833	7	0.03	NGC 6553	2.2	0.01
IC 4499	15.7	0.07	Pal 7	3.7	0.03
NGC 5927	4.6	0.04	Terzan 12	3.4	0.00
Pal 14	71.6	0.12	MGC 6569	3.1	0.02
NGC 6144	2.7	0.09	M 28	2.7	0.02
Terzan 3	2.5	0.01	M 69	1.7	0.02
M 107	3.3	0.04	NGC 6642	1.7	0.02
M 12	4.5	0.02	M 22	4.9	0.03
Pal 15	38.4	0.06	Pal 9	2.4	0.02
M 19	1.7	0.04	NGC 6723	2.6	0.03
NGC 6304	2.3	0.02	NGC 6752	5.2	0.06
NGC 6325	1.1	0.02	NGC 6760	4.8	0.03
NGC 6342	1.7	0.04	Pal 10	6.4	0.01
NGC 6356	7.5	0.04	Terzan 8	19.4	0.03
NGC 6352	3.3	0.02	M 71	6.7	0.01
NGC 6355	1.4	0.04	NGC 6934	12.8	0.03
Ton 1	3.3	0.04	M30	7.1	0.04

陸、討論

一、以「半光度半徑與核半徑之間的比值」探討球狀星團的分布疏密度：

在之前的敘述中，皆是用潮汐半徑當作主軸進行推論，前面曾嘗試以球狀星團距銀河系中心距離替代潮汐半徑，其結果不如預期，而我們又認為，有時潮汐半徑無法真實代表球狀星團分布範圍，有的球狀星團或許因附近無大質量天體干擾，因而引力主宰範圍擴大，潮汐半徑就擴大，實際上球狀星團恆星卻沒有分布那麼外面，在這種情況下，利用潮汐半徑探討球狀星團恆星疏密度或許無法真正接近實際狀況。經過考慮後，我們希望找到一種不需使用

潮汐半徑而能代表球狀星團疏密度的方法。在先前的討論中，已經了解到核半徑與半光度半徑皆與光度有關，且在眾多數據中也是最容易取得的，因此這兩種半徑或許會是不錯的指標。

在研究時曾發現一個球狀星團的半光度半徑通常會比其核半徑大，但也有球狀星團的半光度半徑小於其核半徑。為了說明這點，需要利用上面一些資訊。首先，從之前的討論中得知 C 的值愈大代表核心愈密集，故利用現有相關參數做計算，在挑選的樣本中 $C \geq 1$ 的有 42 個， $C \geq 1.5$ 的還有 25 個，選出的樣本共 52 個，代表大部分球狀星團其實是偏向密集的，此事在原始資料中 157 個未經挑選的球狀星團也得到驗證。至於為何半光度半徑會比核半徑大與集中度有關，可以藉由下面例子說明：

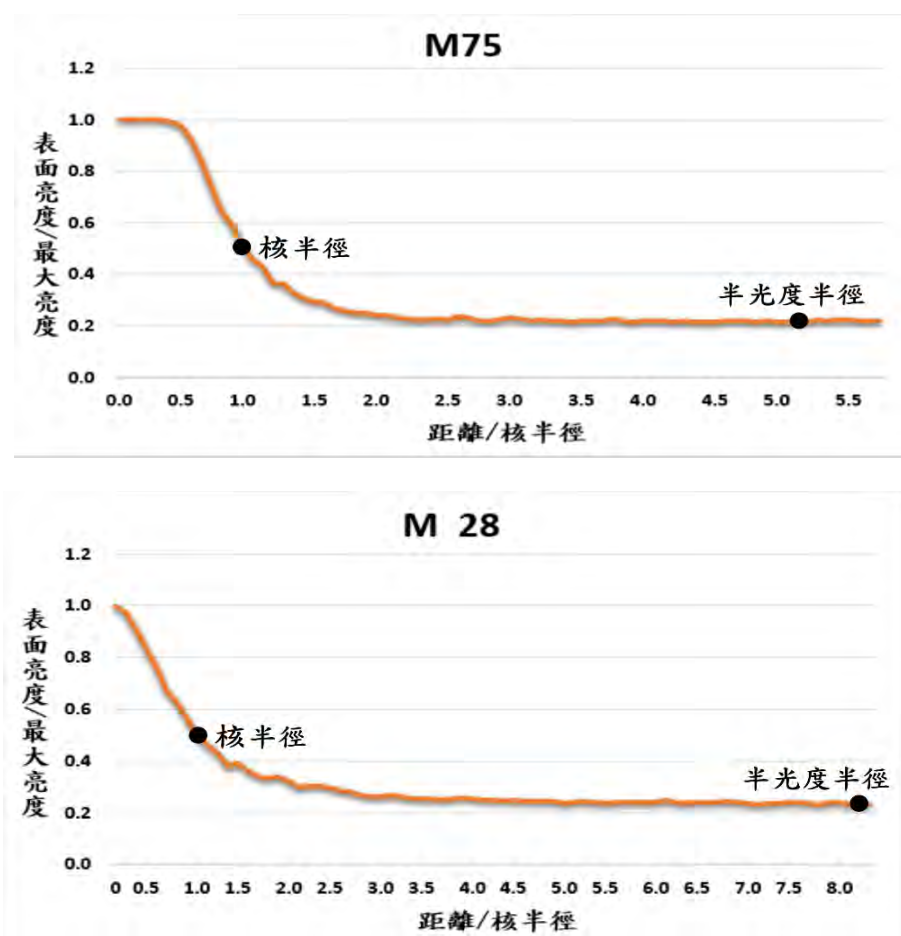


圖 10：M75 與 M28 表面光度曲線圖

圖 10 為 M75 與 M28 的表面光度曲線圖比較，M75 的 R_h/R_c 比值為 5.11 而 M28 的 R_h/R_c 比值為 8.21。在圖中我們將兩星團之核半徑及半光度半徑標出，可以輕易看出這兩個樣本都是偏向高集中度的，從內向外光度遞減快，因此在曲線中，從最高點至最高點一半光度的橫

坐標會相當靠近中心，也因此核半徑會靠近中心；另一方面，半光度半徑是以總光度計算，即使外圍光度較小，只要面積夠大，累積光度便能與內圈相當，自然其範圍能比核半徑延伸更多，圖 11 為球狀星團 NGC 6569 的核半徑、半光度半徑與潮汐半徑示意圖。

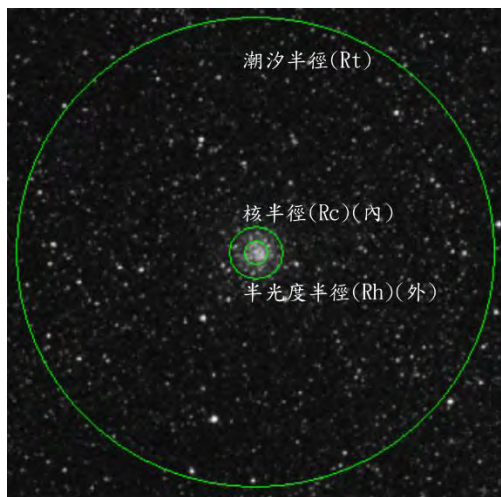


圖 11：NGC 6569 的核半徑、半光度半徑與潮汐半徑示意圖

而下圖是另一個例子：

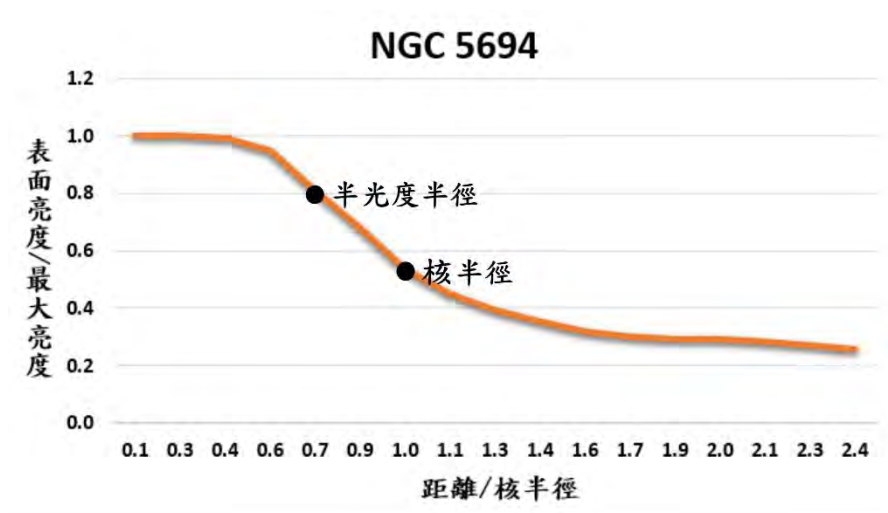


圖 12：NGC5694 表面光度曲線圖，Rh/Rc 比值為 0.67

可以看出，這個球狀星團中心較前面兩個疏散，並且其核半徑大於半光度半徑，會發生這樣的原因為光度遞減較慢，因此核半徑距離較大，而半光度半徑則會因為外圍恆星與內圈恆星光度差異較小而向內靠近。

綜合以上幾點可以得知，若球狀星團偏向中心密集，則半光度半徑一般會大於核半徑；若有大範圍區域無顯著光度遞減，如光度普遍高集中，至較邊緣地區方使急遽遞減，抑或整體光度較低，遞減幅度較無法察覺者，皆可能出現核半徑大於半光度半徑之現象。故在此推測半光度半徑與核半徑的比值應該也能有效代表球狀星團集中度，如下：

$$\varphi = \log \frac{r_h}{r_c}$$

其中由於 r_h 通常比 r_c 大，所以我們將 r_h 放在分子，使其比值在取對數後為正的值較多。

因為這個值很特殊，與潮汐半徑幾乎無關，因此稱作它為 φ 以做區別。

將 φ 的計算結果列於表 5。並且為了證實它確實能代表球狀星團疏密程度，在此也將 φ 與 C 做對比，得出下圖 13：

表 5：各球狀星團之 ϕ

ID	C	Rh/RC	ϕ	ID	C	Rt/Rm	ϕ
NGC 288	0.99	1.65	0.22	Ton 2	1.30	9.97	1.00
Eridanus	1.10	1.84	0.26	NGC 6388	1.75	10.07	1.00
M 79	1.70	4.06	0.61	NGC 6401	1.69	6.41	0.81
NGC 2298	1.38	3.16	0.50	Pal 6	1.10	7.84	0.89
pyxis	0.65	0.98	-0.01	NGC 6426	1.70	13.57	1.13
E 3	0.75	1.12	0.05	Terzan 9	2.50	12.17	1.09
NGC 3201	1.29	2.38	0.38	ESO456-SC38	1.50	12.58	1.10
NGC 4372	1.30	2.23	0.35	NGC 6517	1.82	6.39	0.81
Rup 106	0.70	1.05	0.02	NGC 6522	2.50	15.20	1.18
NGC 4833	1.25	2.41	0.38	NGC 6553	1.16	4.94	0.69
IC 4499	1.21	2.04	0.31	Pal 7	1.33	9.19	0.96
NGC 5927	1.60	2.62	0.42	Terzan 12	0.57	3.67	0.56
Pal 14	0.80	1.49	0.17	MGC 6569	1.31	5.38	0.73
NGC 6144	1.55	1.73	0.24	M 28	1.67	7.20	0.86
Terzan 3	0.70	1.06	0.03	M 69	1.38	9.54	0.98
M 107	1.53	3.09	0.49	NGC 6642	1.99	13.38	1.13
M 12	1.34	2.24	0.35	M 22	1.38	9.79	0.99
Pal 15	0.60	0.92	-0.04	Pal 9	2.07	13.82	1.14
M 19	1.53	3.07	0.49	NGC 6723	1.11	6.64	0.82
NGC 6304	1.80	6.76	0.83	NGC 6752	2.50	22.97	1.36
NGC 6325	2.50	21.00	1.32	NGC 6760	1.65	6.97	0.84
NGC 6342	2.50	14.60	1.16	Pal 10	0.58	3.11	0.49
NGC 6356	1.59	3.38	0.53	Terzan 8	0.60	3.98	0.60
NGC 6352	1.10	2.47	0.39	M 71	1.15	5.39	0.73
NGC 6355	2.50	17.60	1.25	NGC 6934	1.53	12.42	1.09
Ton 1	1.55	2.18	0.34	M30	2.50	16.50	1.22

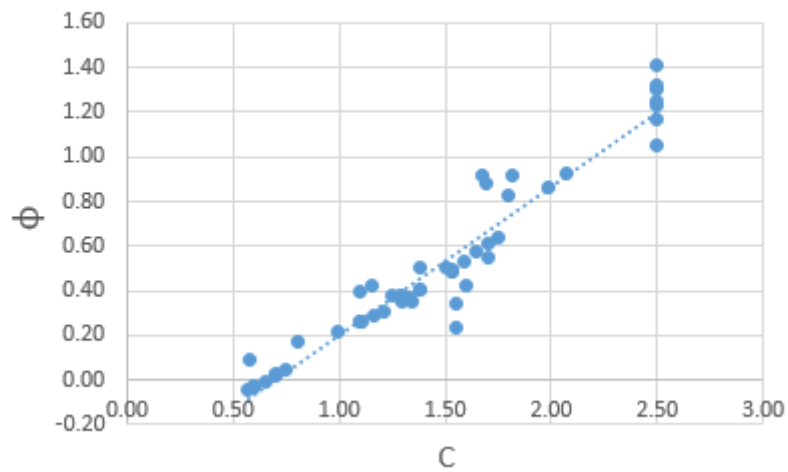


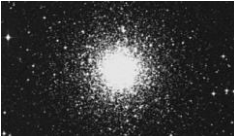
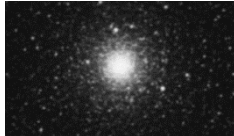
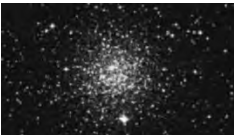
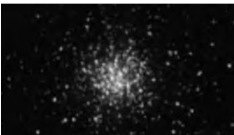
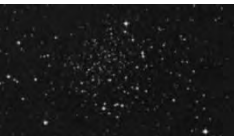
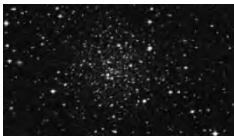


圖 13： ϕ 與 C 之關係圖

由上圖可以觀察到，此散佈圖中的資料明顯比 C_h 與 C_m 還要靠近趨勢線，推測其相關性很大，故計算其與C之相關係數，得出相關係數為0.9601，相關性極高。認為 ϕ 亦可代表球狀星團疏密程度，其與C的關係甚至高過 C_h 與 C_m 。另外，由於 ϕ 的計算與潮汐半徑理論值無關，所以 ϕ 應會是一個非常好用的係數，根據以上結果與各球狀星團進行比對，將球狀星團依 ϕ 值訂定以下分類：

表6：不同 ϕ 值之球狀星團特徵

分類	描述	範本	
A 族 $\phi \geq 0.85$	僅能觀測到核心一點，恆星數目相對於B、C族較少，難以識別為球狀星團。	 Pal 9 $\phi=0.93$	 NGC 6522 $\phi=1.3$
B 族 $0.85 > \phi \geq 0.35$	明顯觀測到為球狀星團，整體明亮，核心區域亮度較周圍高。	 M79 $\phi=0.64$	 NGC 6388 $\phi=0.61$
C 族 $0.35 > \phi \geq 0.2$	明顯觀測到為球狀星團，整體明亮，核心區域亮度稍高於周圍，部分球狀星團不易觀測明顯核心。	 IC 4499 $\phi=0.26$	 NGC 6723 $\phi=0.31$
D 族 $\phi < 0.2$	疏散，難以判斷為球狀星團。	 E 3 $\phi=-0.02$	 Terzan 8 $\phi=0.05$

雖然在我們的數據中，此判別法有少數例外（如圖 14），但仍能應用於大多數球狀星團，於觀測時能有較佳的判斷依據。

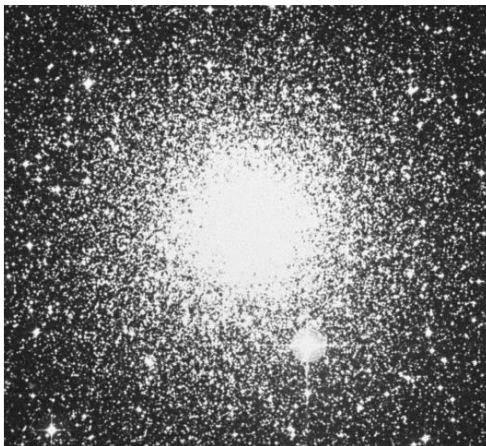


圖 14：NGC6752， $\phi = 1.05$ ，但其表現像 $0.85 > \phi \geq 0.35$ 之範圍內球狀星團

柒、結論

- 一、以「亮度分布曲線圖」來探討球狀星團疏密的分布，結果與夏普力·耶索集中度分類法大致相關，但其中有幾個天體存在著矛盾。
- 二、由潮汐半徑與核半徑可以訂出 $C = \log \frac{r_t}{r_c}$ ，其值可以作為球狀星團集中程度的依據，其值愈大代表球狀星團中心愈密集，但此方法與夏普力·耶索集中度分類法較無相關。
- 三、由半光度半徑與半質量半徑所定出的比值 C_h 與 C_m ，亦能代表球狀星團集中程度，可見利用相關半徑所得出之數據能作以辨別。
- 四、球狀星團的潮汐半徑與其至銀心距離有某種程度的正相關，但相關性沒大到能有效替代潮汐半徑，因此不足以作為判斷球狀星團疏密程度的依據。
- 五、以半光度半徑與核半徑所訂定出的比值 ϕ 也能代表球狀星團疏密程度之判斷，比值中的相關數據有直接測量的性質，應比較接近實際狀況，且用理論模型計算出來的潮汐半徑或許無法表示真正球狀星團恆星分布範圍，因此在消除潮汐半徑後，僅利用與球狀星團真實恆星分布有關的物理量來表示其疏密度，相對來說應更具有物理意義。

捌、資料來源

- 一、Concentration Classes of Globular Clusters. (2014, February 9) , from
<http://www.messier.seds.org/xtra/supp/gc-cltab.html>
- 二、Maurizio Salaris , Santi Cassisi. (2005) Evolution of Stars and Stellar Populations (pp.138-140)
- 三、Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 347, Issue 1(pp.119-124), (1 January 2004) , from
<https://academic.oup.com/mnras/article/347/1/119/1269794>
- 四、Vasily Belokurov. (2016) King Models, Towards models of real star clusters. Lowered isothermal models (pp.34-51) , from
http://www.ast.cam.ac.uk/~vasily/Lectures/SDSG/sdsg_7_clusters.
- 五、William E. Harris, McMaster University. (2010 December) , Catalog of parameters for Milky way globular clusters:The database , from
<http://physwww.mcmaster.ca/~harris/mwgc.dat>
- 六、William E. Harris, McMaster University. (2003 February) , Catalog of parameters for Milky way globular clusters:The database , from
<http://www.gaac.us/globulars.htm>

【評語】 051802

本作品研究球狀星團半徑的不同定義，並以不同半徑的比值來描述球狀星團的疏密程度，從天文數據庫以及文獻中取得實際的例子，是一個仔細的研究工作，殊堪嘉許。之後假如能以這些基礎，進一步探討有關球狀星團以及星系結構或演化的問題，可能可以有不錯的結果。

摘要

本研究之目的在探討球狀星團疏密程度的判斷方式，並探討球狀星團各種半徑之相關性。球狀星團可藉由亮度分布曲線圖判斷其核心密集程度，並將結果與夏普力·索耶集中度分類法做比較，發現少數球狀星團的判斷結果不同，但結果大致相仿。同時利用球狀星團的潮汐半徑與核半徑之比值作為球狀星團疏密程度的判斷依據，並探討以半光度半徑、半質量半徑取代核半徑的可行性，發現潮汐半徑與上述各種半徑的比值皆能有效代表一個球狀星團的疏密程度。除此之外，核半徑與半光度半徑之比值亦能有效代表球狀星團的疏密程度，提供一種不使用潮汐半徑理論模型即可判斷球狀星團疏密程度的方式。

壹、研究動機

我們平時就對充滿奧秘又浩瀚的宇宙頗有興趣，在某次與老師討論星團的性質時，我們對於球狀星團的集中度產生了興趣，然而搜尋相關資料後發現關於球狀星團疏密之探討的相關資料並不多，其中最為著名的是二十世紀早期的哈洛·夏普力和海倫·索耶·霍格等天文學家曾做過相關研究，並提出夏普力·索耶集中度分類法 (Concentration classes of globular cluster)。此分類法將球狀星團從最密集到最不密集共分為12個等級，以羅馬數字 I 至 XII 表示，並訂定出每個等級的代表球狀星團，例如球狀星團M75為分類中的 I (最集中)，而球狀星團Pal 12則是分類中的 XII (最不集中)，其餘如圖2所列。然而夏普力·索耶集中度分類法並沒有詳細敘述其分類依據，似乎僅由星團影像中就視覺上的判斷作為各球狀星團是否疏密之依據，故我們想對此有進一步的研究，並希望建立一套能夠定量描述球狀星團疏密程度的工具，或許在未來，能為球狀星團恆星分布的演化甚至星系的演化做出貢獻。



圖1：左為球狀星團M54，右為M13

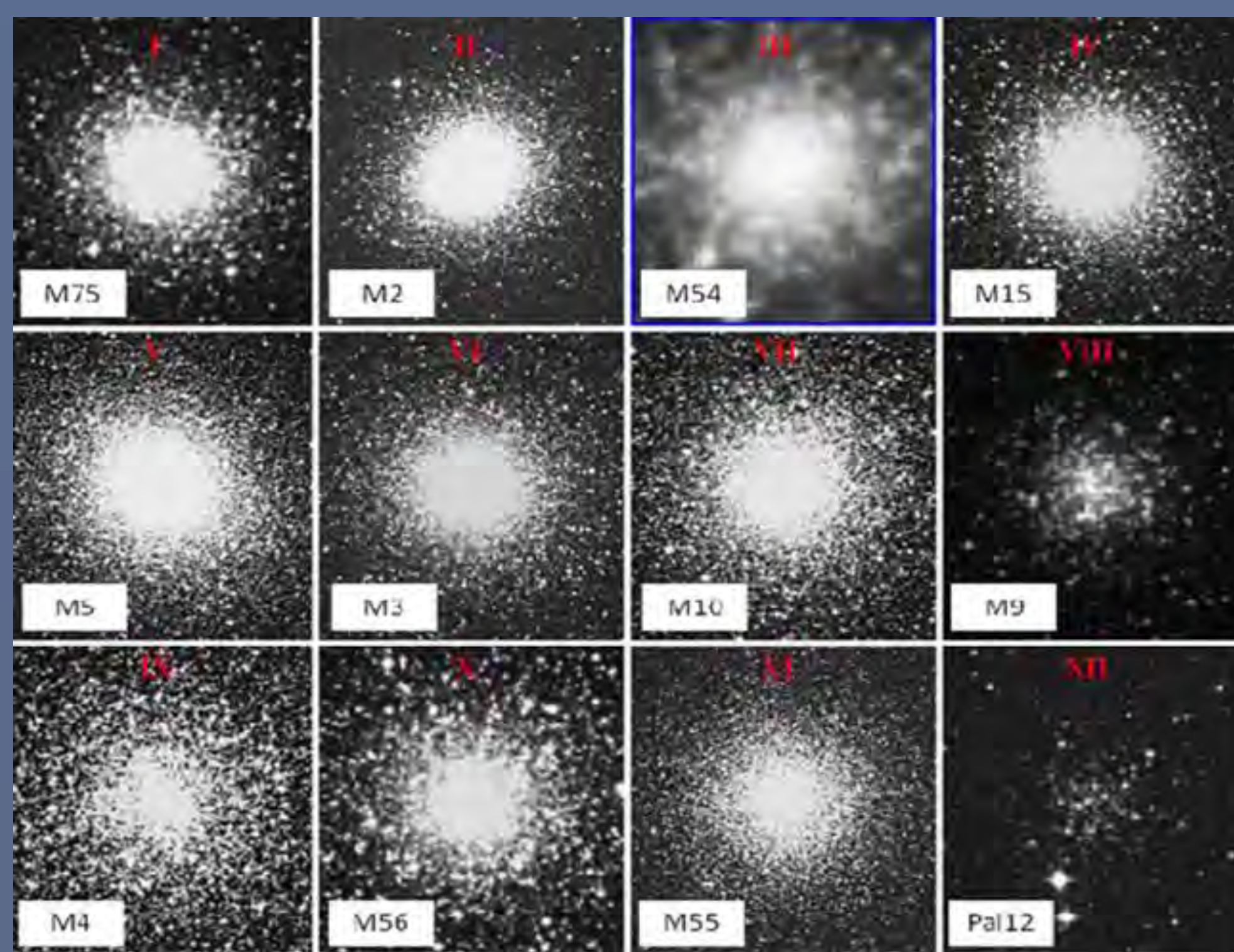


圖2：夏普力·索耶集中度分類法各類代表球狀星團

貳、研究目的

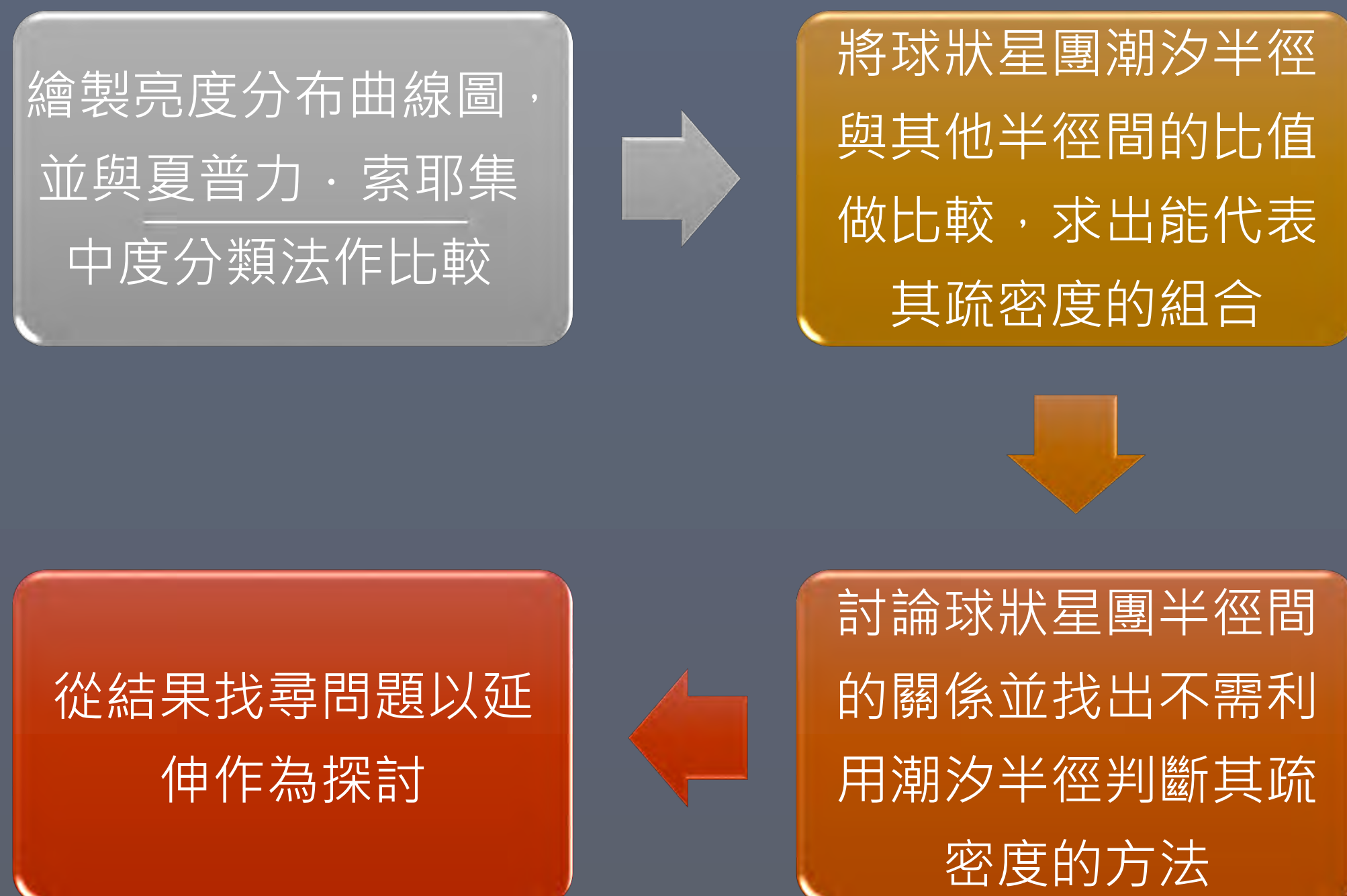
- 一、探討夏普力·索耶集中度分類法之相關依據
- 二、找尋以球狀星團各半徑定量描述其疏密程度之方法
- 三、半光度半徑與核半徑之關係並從中推測能代表球狀星團樹密度的方法

參、研究設備

DSS數位巡天資料庫 (Digital sky survey)、SAOImage DS9天文影像處理軟體、SIMBAD線上天文資料庫、Microsoft Office Word 2016、Excel 2016、筆記型電腦

肆、研究過程及方法

流程圖



名詞釋義

- 核半徑 (R_c)：表面光度降為中心一半的核心距離
- 半光度半徑 (R_h)：總光度達到整個星團一半區域的半徑
- 半質量半徑 (R_m)：由中心至包含星團一半質量的距離
- 潮汐半徑 (R_t)：此範圍內星團本身重力影響大於銀河系之影響
- 相關係數：用於比較兩筆數據之相關性的工具，其值範圍為 $1 \geq r \geq -1$ 。

研究方法

- 一、以「亮度分布曲線圖」探討球狀星團的分布疏密度：
 1. 由DSS資料庫中下載球狀星團的觀測影像。
 2. 以DS9天文影像處理軟體進行亮度測量，如圖3。
 3. 利用Microsoft Excel繪出球狀星團「亮度分布曲線圖」。
 4. 探討不同星團間「亮度分布曲線圖」。

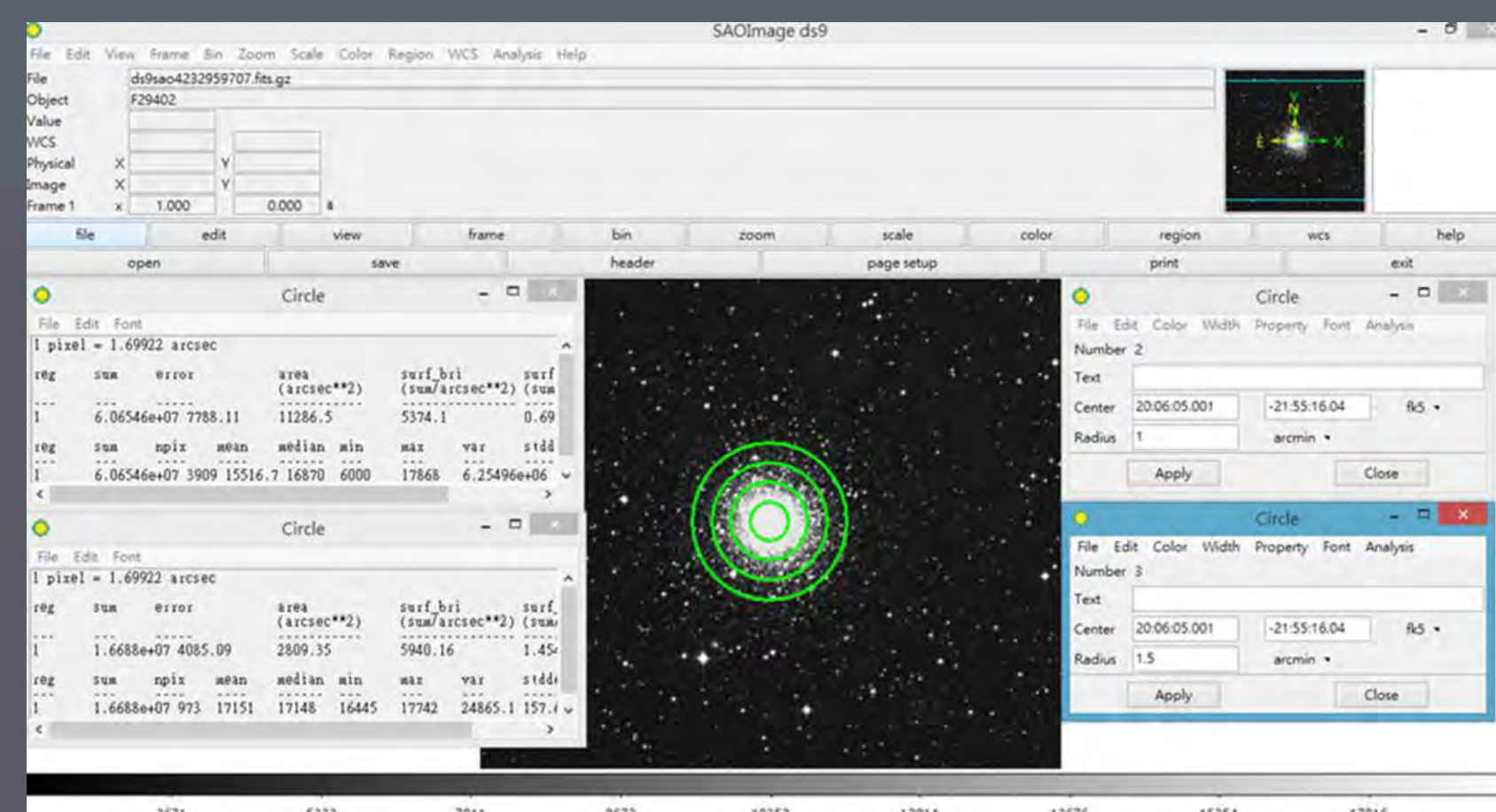


圖3：以DS9測量星團亮度

- 二、以「核半徑與潮汐半徑之間的比值」探討球狀星團的分布疏密度：
 1. 利用SIMBAD天文線上資料庫中的數據來計算球狀星團的潮汐半徑。
 2. 計算潮汐半徑與核半徑的比值，並與夏普力·索耶集中度分類作比較。
- 三、以「潮汐半徑與半光度半徑、半質量半徑之比值」探討球狀星團的分布疏密度：
 1. 由學術論文中引用出我們需要的球狀星團之半光度半徑及半質量半徑資料。
 2. 計算潮汐半徑與半光度半徑、半質量半徑的比值(定作 C_h 與 C_m)，並與C作比較。
- 四、以「半光度半徑與核半徑之間的比值」探討球狀星團的分布疏密度：
 1. 計算半光度半徑與核半徑之間的比值 φ
 2. 將 φ 與C作比較。

伍、研究結果

- 一、以「亮度分布曲線圖」探討球狀星團的分布疏密度：

先以球狀星團M75與M4的結果，可發現M75亮度由中心至0.5核半徑距離才開始大幅度遞減，並有明顯斜率邊界，而M4光度則是從0.2核半徑便開始衰減，卻無明顯斜率邊界，因此M75中心應較為密集，而M4則是較分散的平均分布。可以從此例看出以亮度分布曲線圖應可判斷球狀星團疏密度。

藉由以上內容延伸至夏普利分類法的十一種星團，所得出之表面亮度變化表如圖5，多數球狀星團的表面亮度變化符合夏普力的分類順序，但少部分球狀星團(M54、M56、M55)未符合排列順序，故以「亮度分布曲線圖」來探討球狀星團疏密的分布，雖有少數天體與夏普利分類法不符，但大致趨勢一樣。

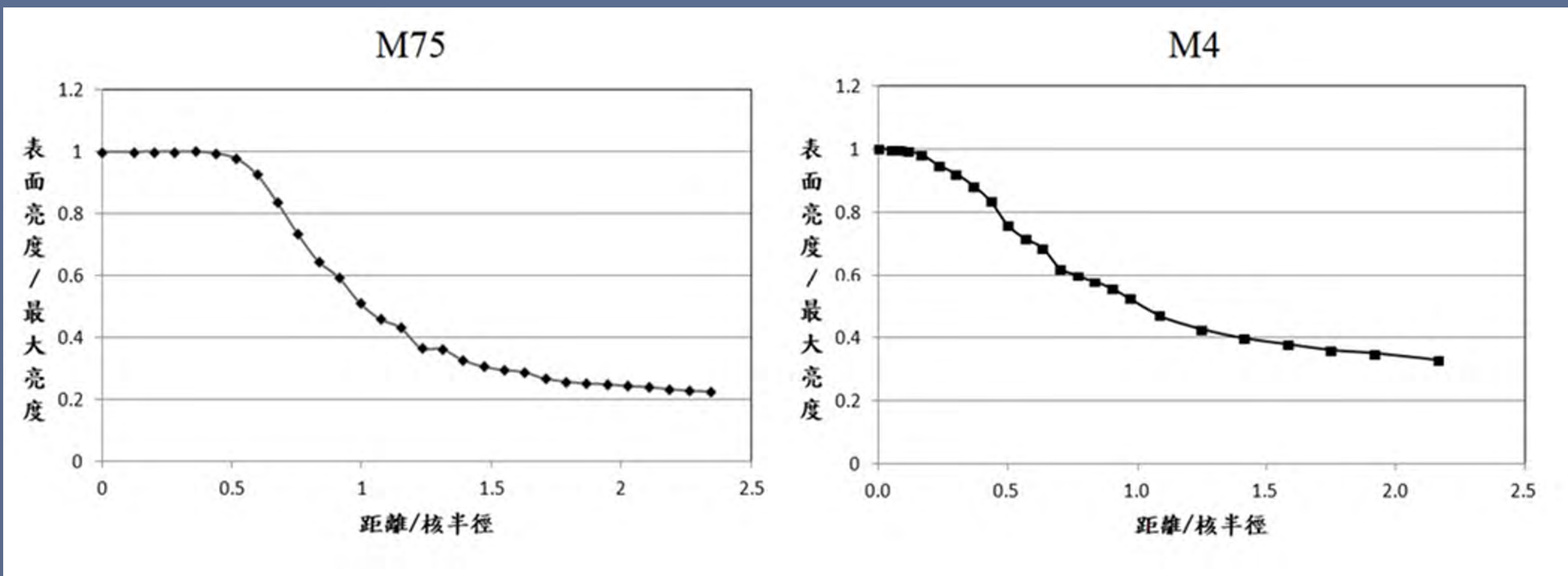


圖4：以DS9測量星團亮度

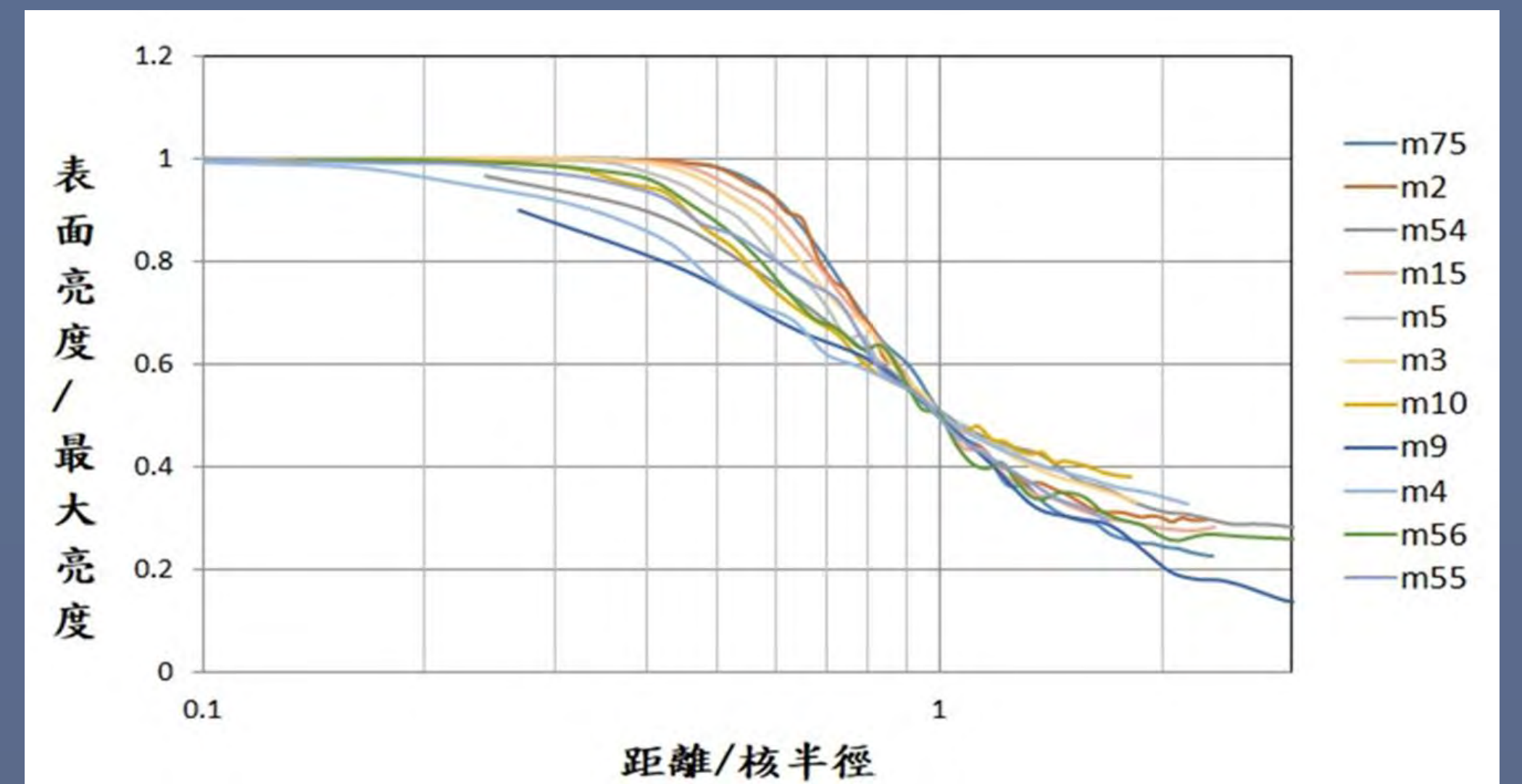


圖5：以DS9測量星團亮度

- 二、以「潮汐半徑與核半徑之間的比值」探討球狀星團的分布疏密度：

為了能找出更定性的描述球狀星團疏密度之方法，我們改使用球狀星團的核半徑與潮汐半徑之間的比值作為探討，其中球狀星團的潮汐半徑代表星團實際大小，其公式如下：

$$r_t = k \cdot \left(\frac{M_c}{2M_{gc}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_{gc}$$

而核半徑代表星團密集區大小，故取核半徑與潮汐半徑的比值代表該球狀星團中心密集程度。而為了數字處理方便，我們將比值取對數，並暫稱為核密度，如下：

$$\text{核密度} = \log \frac{r_t}{r_c}$$

核密度愈大代表星團中心愈密集，反之，愈小愈疏。下圖以三個球狀星團作為範例計算C值：



圖6：NGC6388(C=1.75) NGC6723(C=1.11) Terzan(C=0.57)

我們計算夏普利分類法中之球狀星團的比值，並將所得結果列於表1，並按夏普利分類法的順序作出圖7，結果發現夏普利分類法與核密度無明顯相關性。

族	球狀星團名稱	R:(pc)	Rt:(pc)	Rt/Rc	log(Rt/Rc)
I	M75	0.008	0.036	4.737	0.676
II	M2	0.011	0.042	3.986	0.601
III	M54	0.005	0.073	14.569	1.163
IV	M15	0.009	0.085	9.689	0.986
V	M5	0.010	0.053	5.169	0.713
VI	M3	0.011	0.081	7.378	0.868
VII	M10	0.005	0.025	4.764	0.678
VIII	M9	0.001	0.016	12.659	1.102
IX	M4	0.002	0.031	16.704	1.223
X	M56	0.005	0.029	5.733	0.758
XI	M55	0.006	0.021	3.428	0.535
XII	無				

表1：夏普利各族相關數據表

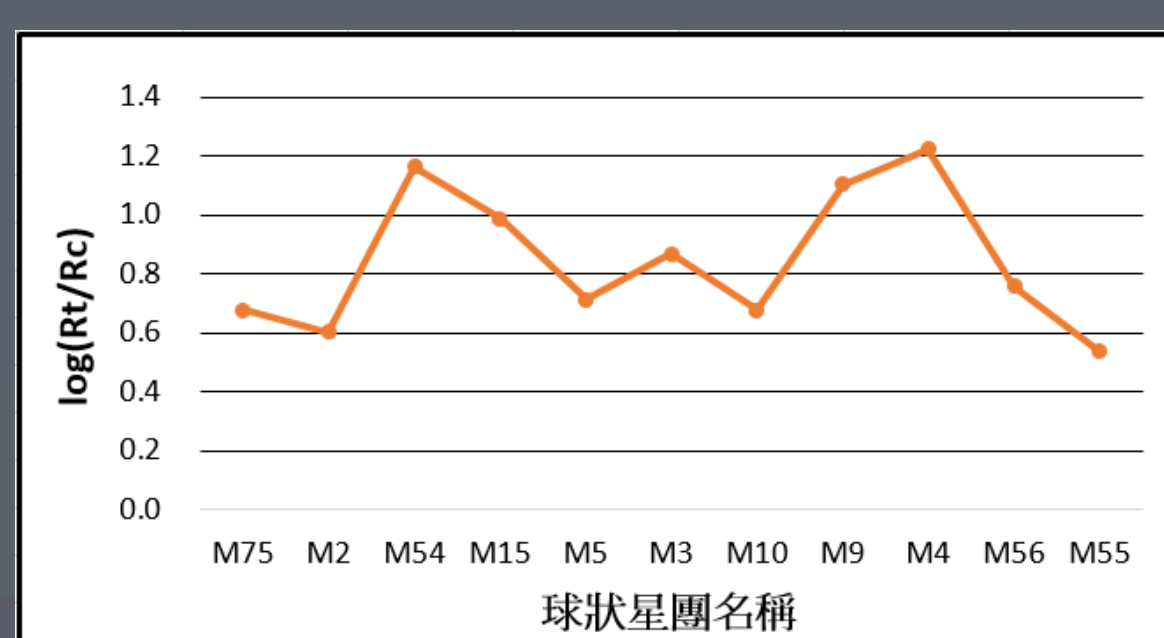


圖7：核密度排序表

後續相關資料搜尋中，發現(Ivan R. King, 1966)藉由 $C = \log \frac{r_t}{r_c}$ 作為判定球狀星團疏密之依據，表示可利用此公式計算後的值做為後續疏密相關性判定之準則，且為了方便討論，後續將相關數據簡稱為C。

- 三、以「潮汐半徑與半光度半徑之比值」探討球狀星團的分布疏密度：

改以半光度半徑取代核半徑，其公式如下：

$$C_h = \log \frac{r_t}{r_h}$$

並稱此為 C_h ，將其計算結果如表2，並作圖以比較 C_h 與C之相關性，如圖8所示，相關係數為0.87，得知 C_h 可作為判斷球狀星團疏密度方式之一。

名稱	C	Rt/Rc	Ch	名稱	C	Rt/Rc	Ch
NGC 288	0.99	5.91	0.77	Ton 17Pictus 26	1.30	8.28	0.92
Endicott	1.10	6.85	0.84	NGC 6388	1.75	12.98	1.11
M 79	1.70	12.34	1.09	NGC 6401	1.69	6.41	0.81
NGC 2298	1.38	7.59	0.88	Pal 6	1.10	6.93	0.84
pyxis	0.65	4.56	0.66	NGC 6426	1.70	14.16	1.15
E 3	0.75	5.01	0.70	Terran 9	2.50	12.17	1.09
NGC 3201	1.29	8.18	0.91	Terzan 12	1.50	9.94	1.00
NGC 4372	1.30	8.93	0.95	NGC 6517	1.82	7.92	0.90
Rup 106	0.70	4.77	0.68	NGC 6522	2.50	15.81	1.20
NGC 4833	1.25	7.38	0.87	NGC 6553	1.16	7.44	0.87
IC 4499	1.21	7.96	0.90	IC 1276Pal 7	1.33	9.07	0.96
NGC 5927	1.60	13.20	1.18	Terran 12	0.57	4.11	0.61
Pal 14(AvdB)	0.80	4.24	0.63	MGC 6569	1.31	8.94	0.95
NGC 6144	1.55	20.46	1.31	M 28	1.67	5.70	0.76
Terran 3	0.70	4.73	0.67	M 69	1.38	9.43	0.97
M 107	1.53	10.97	1.04	NGC 6642	1.99	13.38	1.13
M 12	1.34	9.76	0.99	M 22	1.38	9.49	0.98
Pal 15	0.60	4.35	0.64	Pal 9	2.07	13.82	1.14
M 19	1.53	11.04	1.04	NGC 6723	1.11	6.99	0.84
NGC 6304	1.80	9.33	0.97	NGC 6752	2.50	28.15	1.45
NGC 6325	2.50	15.06	1.18	NGC 6780	1.65	11.96	1.08
NGC 6342	2.50	21.66	1.34	Pal 10	0.58	3.11	0.49
NGC 6356	1.59	11.53	1.06	Terran 8	0.60	4.19	0.62
NGC 6352	1.10	5.10	0.71	M 71	1.15	5.33	0.73
NGC 6355	2.50	17.97	1.25	NGC 6934	1.53	10.80	1.03
Ton 1	1.55	16.30	1.21	M30	2.50	18.42	1.27

表2：半光度半徑相關數據

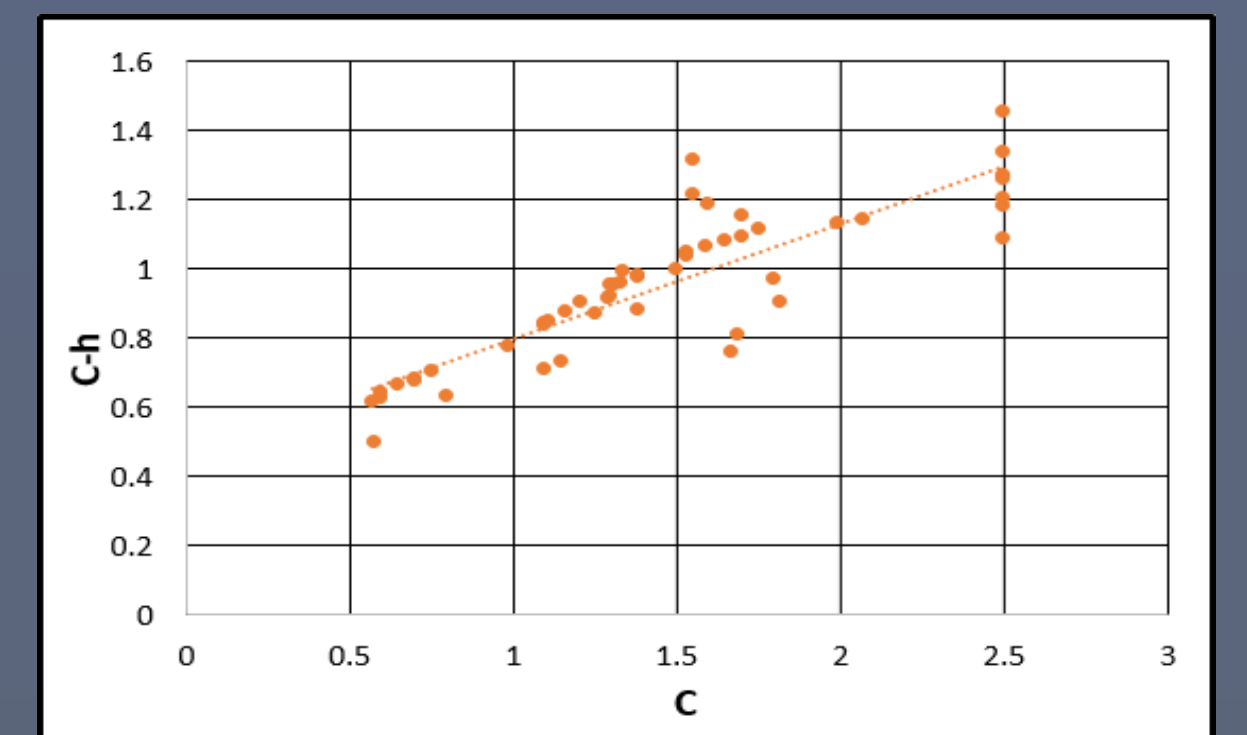


圖8：C_h與C之相關係數

- 四、以「潮汐半徑與半質量半徑之比值」探討球狀星團的分布疏密度：

改以半質量半徑取代核半徑，其公式如下：

$$C_m = \log \frac{r_t}{r_m}$$

並稱此為 C_m ，將其計算結果如表3，並作圖以比較 C_m 與C之相關性，如圖9所示，相關係數為0.81，得知 C_m 亦可作為判斷球狀星團疏密度方式之一。

ID	C	Rt/Rm	Cm	ID	C	Rt/Rm	Cm
NGC 288	0.99	5.94	0.77	Ton 17Pictus 26	1.30	9.97	1.00
Endicott	1.10	7.88	0.90	NGC 6388	1.75	10.07	1.00
M 79	1.70	10.03	1.00	NGC 6401	1.69	6.41	0.81
NGC 2298	1.38	9.54	0.98	Pal 6	1.10	7.84	0.89
pyxis	0.65	4.56	0.66	NGC 6426	1.70	13.57	1.13
E 3	0.75	5.11	0.71	Terran 9	2.50	12.17	1.09
NGC 3201	1.29	9.46	0.98	Terzan 12	1.50	12.58	1.10
NGC 4372	1.30	8.95	0.95	NGC 6517	1.82	6.39	0.81
Rup 106	0.70	4.55	0.66	NGC 6522	2.50	15.20	1.18
NGC 4833	1.25	7.38	0.87	NGC 6553	1.16	6.94	0.69
IC 4499	1.21	9.08	0.96	IC 1276Pal 7	1.33	9.19	0.96
NGC 5927	1.60	14.54	1.16	Terran 12	0.57	3.67	0.56
Pal 14(AvdB)	0.80	4.50	0.65	MGC 6569	1.31	5.38	0.73
NGC 6144	1.55	20.59	1.31	M 28	1.67	7.20	0.86
Terran 3	0.70	4.55	0.66	M 69	1.38	9.54	0.98
M 107	1.53	7.03	0.85	NGC 6642	1.99	13.38	1.13
M 12	1.34	8.00	0.90	M 22	1.38	9.79	0.99
Pal 15	0.60	3.95	0.60	Pal 9	2.07	13.82	1.14
M 19	1.53	11.66	1.07	NGC 6723	1.11	6.64	0.82
NGC 6304	1.80	9.40	0.97	NGC 6752	2.50	22.97	1.36
NGC 6325	2.50	10.10	1.00	NGC 6780	1.65	6.97	0.84
NGC 6342	2.50	17.97	1.25	Pal 10	0.58	3.11	0.49
NGC 6356	1.59	12.62	1.10	Terran 8	0.60	3.98	0.60
NGC 6352	1.10	5.23	0.72	M 71	1.15	5.39	0.73
NGC 6355	2.50	18.17	1.26	NGC 6934	1.53	12.42	1.09
Ton 1	1.55	16.08	1.21	M30	2.50	16.50	1.22

表3：半質量半徑相關數據

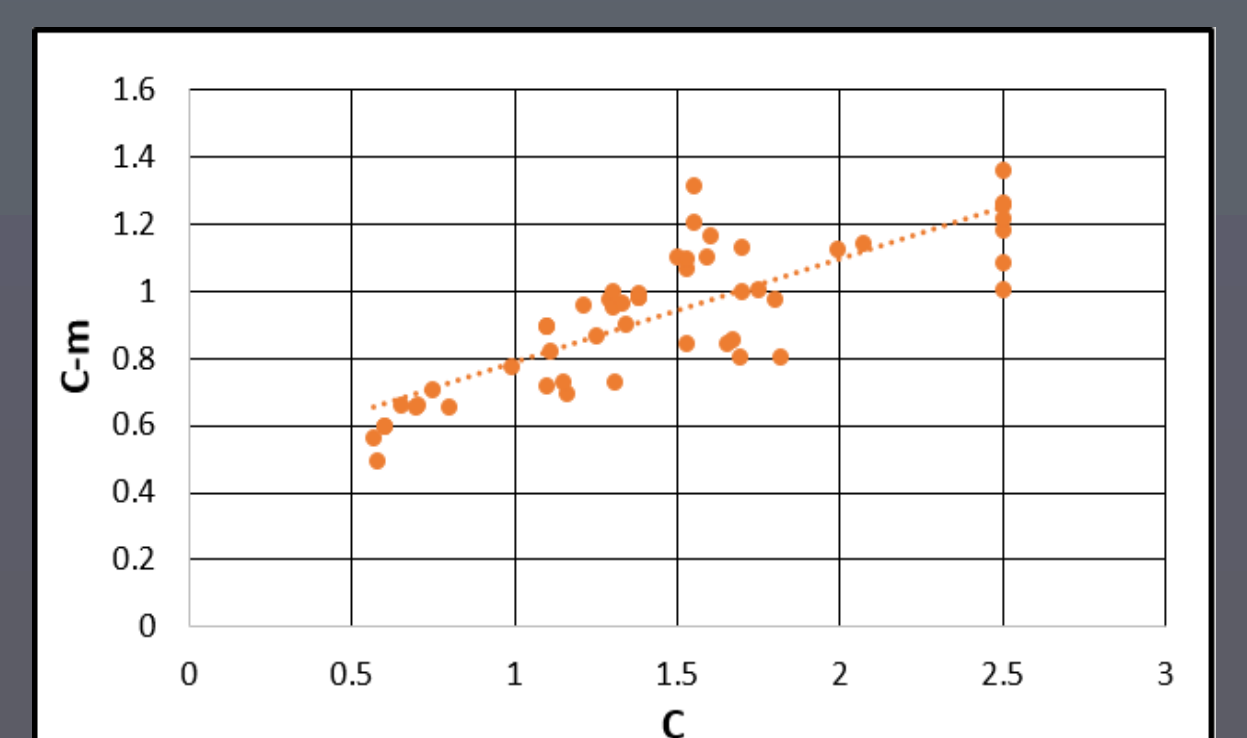


圖9：C_m與C相關係數

陸、討論

一、探討核半徑與半光度半徑的相關性

圖10為球狀星團NGC 6569的半徑示意圖，我們發現大部份球狀星團之半光度半徑大於核半徑，僅少數的球狀星團之核半徑大於半光度半徑。原因為半光度半徑是由總光度所定出，與總發光面積有關，而核半徑是由表面光度所定出的，只考慮單位面積的光度，只要面積夠大，延伸至外圍時半光度半徑大於核半徑是合理的。而圖11為M75、M28、與NGC5694的亮度分布曲線的比較，M28的 R_h/R_c 比值為8.21、M75的 R_h/R_c 比值為5.11，而NGC5694則為0.67。由下圖可明顯看出 R_h/R_c 比值大小與亮度分布曲線的形狀有關係。

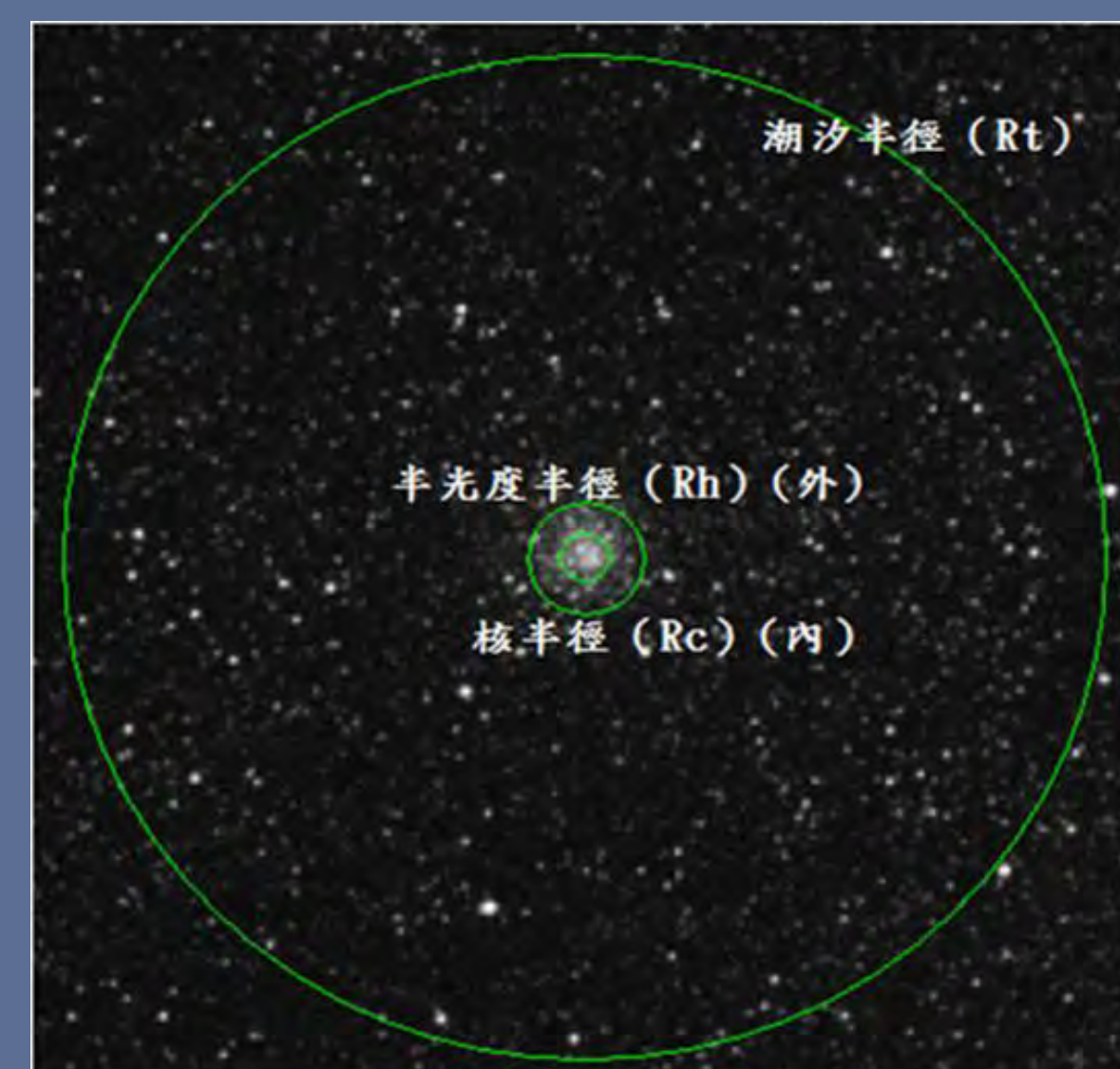


圖10：NGC 6569示意圖



圖11-1：M75，比值為5.11

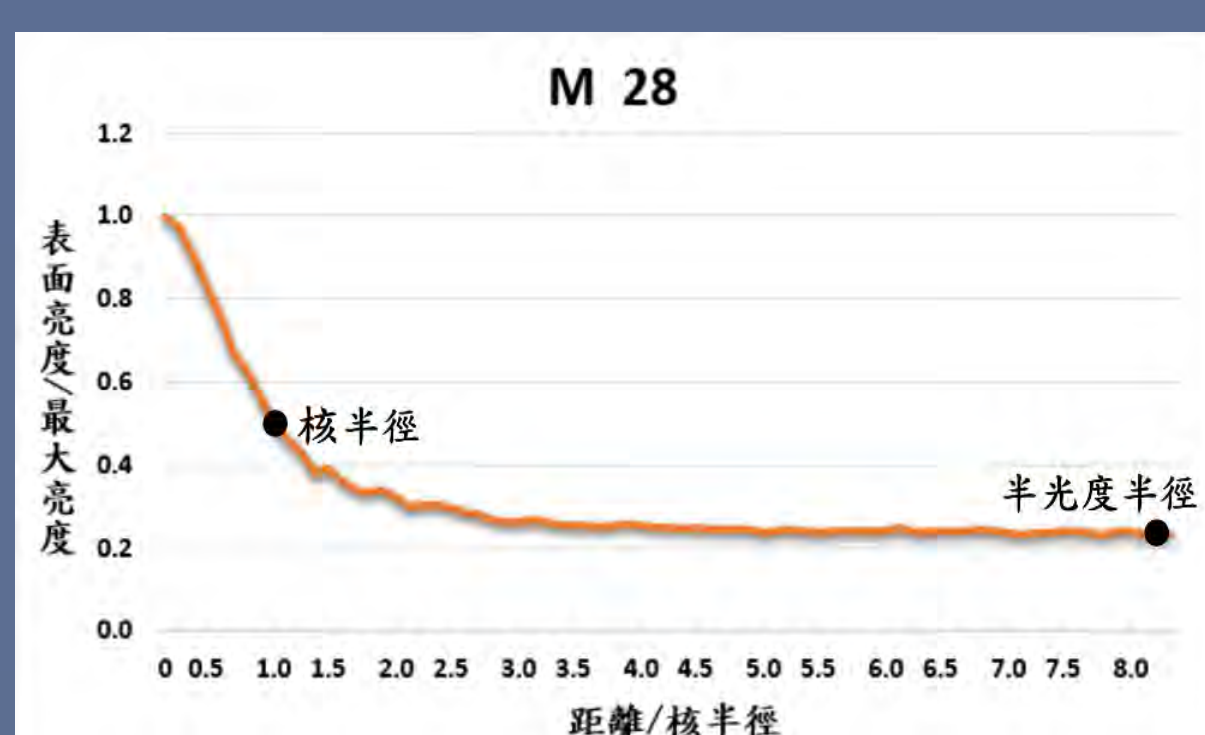


圖11-2：M28，比值為8.21

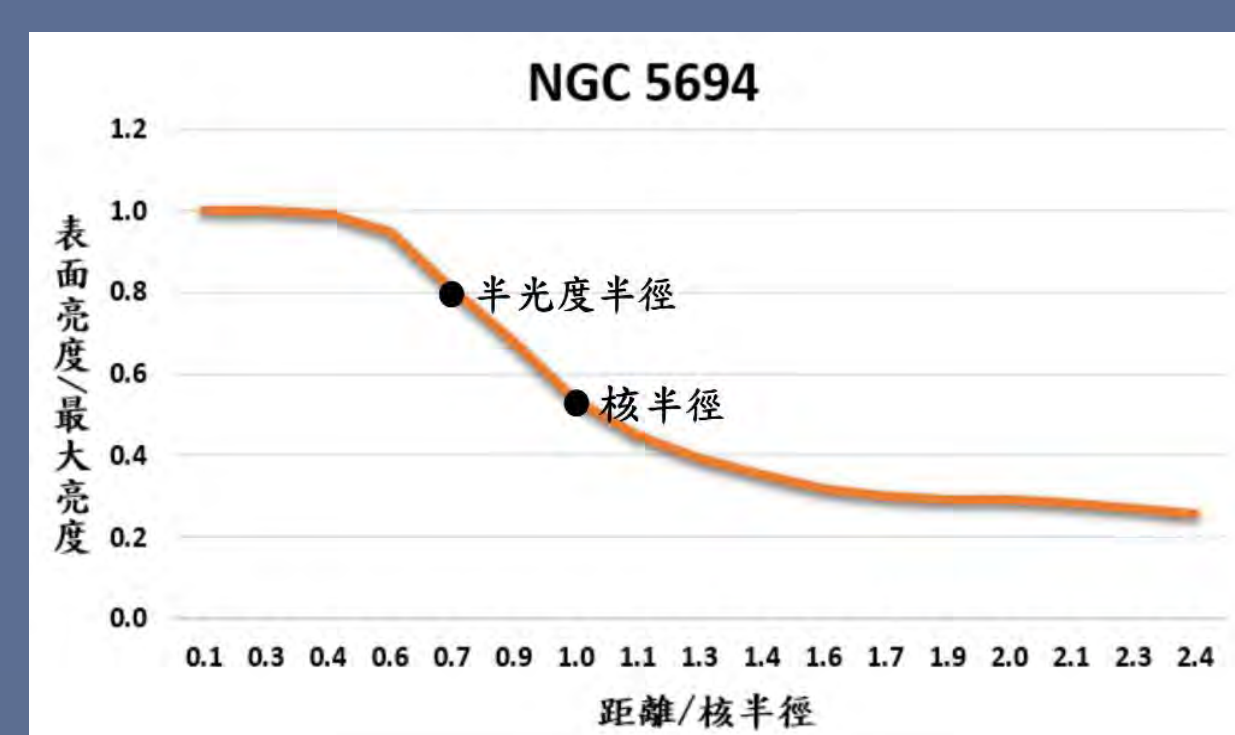


圖11-3：NGC5694，比值為0.67

半光度半徑和核半徑皆與光度有關，具有直接觀測的特性，並由上述看來與疏密度具有一定關係，故使用這兩種半徑來做比值取對數，稱之為 ϕ

$$\phi = \log \frac{r_h}{r_c}$$

並將前述的球狀星團其計算 ϕ 並與C作比較，如圖12，其相關係數為0.96，為非常高的正相關，證明此方法相較 C_h 與 C_m 更有利於判斷球狀星團疏密度程度，且相較於前面的討論，此方法不需涉及潮汐半徑即可辨別出球狀星團的疏密程度，且由數值大小即可辨別出球狀星團的分佈狀況。我們將計算結果與實際相片做比對，整理後將各球狀星團大致分類如下表所示。

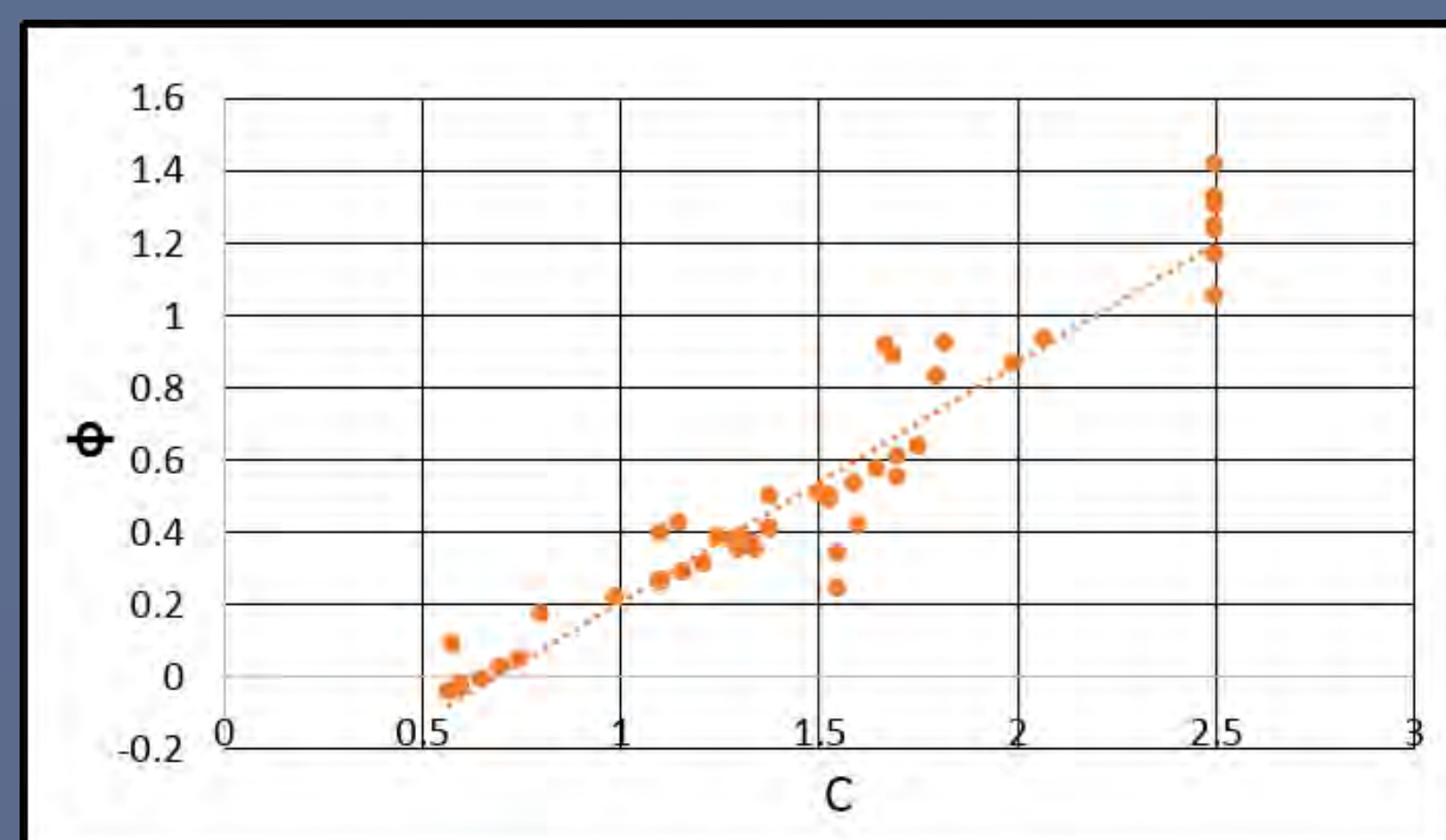


圖12：C與 ϕ 的關係圖

分類	描述	範本	
A族 $\phi \geq 0.85$	僅能觀測到核心一點，恆星數目相對於B、C族較少，難以識別為球狀星團。		
B族 $0.85 > \phi \geq 0.35$	明顯觀測到為球狀星團，整體明亮，核心區域亮度較周圍高。		
C族 $0.35 > \phi \geq 0.2$	明顯觀測到為球狀星團，整體明亮，核心區域亮度稍高於周圍，部分球狀星團不易觀測明顯核心。		
D族 $\phi < 0.2$	疏散，難以判斷為球狀星團。		

表4： ϕ 值疏密分類表

柒、結論

我們的研究找出了五種能夠「定量」判斷球狀星團疏密程度的方法，分別是球狀星團的亮度分布曲線、C（潮汐半徑與核半徑的比值）、 C_h （潮汐半徑與半光度半徑的比值）、 C_m （潮汐半徑與半質量半徑的比值）、與 ϕ （半光度半徑與核半徑的比值）等方法，其中 C_h 、 C_m 與 ϕ 為未曾使用過的數值。我們也發現夏普力、索耶分類之依據比較接近由亮度分布曲線來判斷，但與我們的結果有些許差異。特別的是，在本研究提出的 ϕ 值中，用以判斷疏密的兩種半徑皆具有直接測量的性質，應較接近真實情況，且用理論模型計算出的潮汐半徑或許無法完整表示球狀星團恆星實際分布範圍，因此我們使用不須潮汐半徑的 ϕ 來表示球狀星團的疏密度，應更具物理意義。並且我們整理53個球狀星團樣本，大致歸納後得出一個球狀星團的「 ϕ 值疏密分類表」，可作為觀測球狀星團時的簡易判斷方法。

參考資料

- Maurizio Salaris, Santi Cassisi. (2005) Evolution of Stars and Stellar Populations (pp.138-140)
- Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 347, Issue 1 (pp.119-124), (1 January 2004)
- Vasily Belokurov. (2016) King Models, Towards models of real star clusters. Lowered isothermal models (pp.34-51)
- William E. Harris, McMaster University. (2010 December), Catalog of parameters for Milky way globular clusters: The database
- William E. Harris, McMaster University. (2003 February), Catalog of parameters for Milky way globular clusters: The database