中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050420

方「圓」百里，必「定」無敵

學校名稱：國立嘉義女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳姿妤 高二 蕭妤真	黃國書

關鍵詞：正 n 邊形外接圓、複數的 n 次方根、

托勒密定理

壹、摘要

本研究作品主要在探討「正N邊形外接圓弧上一動點，至各頂點距離關係的定值性質」，並在利用托勒密定理和三角函數、複數極式的運算性質得證後，更進一步去探究調整某些條件後，是否依然具有定值關係，以及試著尋找在這些長度所圍成的三角形面積所展現的定值關係。

貳、研究動機

我們在校內數學競賽培訓試題中，看到一題要證明一個正五邊形外接圓弧上一動點，至各頂點距離關係的定值性質，題目如下：設P為正五邊形$ABCDE$外接圓弧AE上的動點，證明：$\dfrac{\overline{PA}+\overline{PE}}{\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}}$，恆為定值。以及在研究此題的過程中另外發現的題目：設P為正角形ABC外接圓弧AC上的動點，試求$\overline{PA}\cdot\overline{PB}+\overline{PB}\cdot\overline{PC}-\overline{PA}\cdot\overline{PC}=$？

這兩道題目引發了我們的好奇心，使我們著手探討對於這些距離的定值關係是否在所有正N邊形外接圓均可適用？

參、研究目的

一、了解並證明此定值關係在正三、四、五、六邊形外接圓上的成立。

二、試著證明此定值關係在正偶數邊形和正奇數邊形外接圓上是否均成立？

三、試著尋找除了此性質外，其他模式的定值關係，並證明之。

四、試著尋找出是否有面積相關的定值關係，並證明之。

肆、研究設備及器材

紙、筆、計算機、筆電、WolframAlpha 網頁、GeoGebra

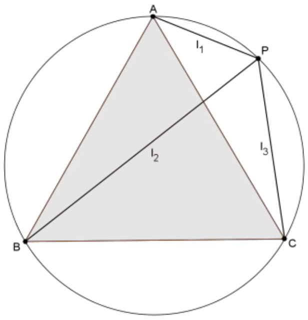
伍、研究過程或方法

一、首先探討正三角形外接圓的狀況

設正三角形ABC外接一圓，P為其外接圓弧上一動點，由P向各頂點A,B,C作連線，分別為$\overline{PA}=l_1,\overline{PB}=l_2,\overline{PC}=l_3$，證明：$\dfrac{l_1+l_3}{l_2}$為定值。

$pf.$

不失一般性，我們假設邊長為 1， P 點於 AC 上，如右圖。



$\because$ $ABCP$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

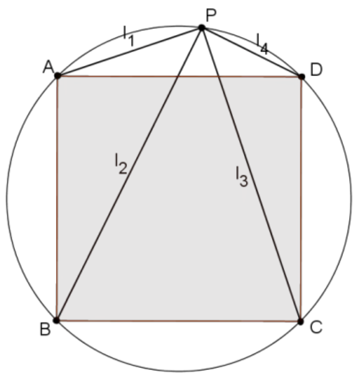
$l_1 \times \overline{BC} + l_3 \times \overline{AB} = l_2 \times \overline{AC} \quad \Rightarrow \quad l_1 \times 1 + l_3 \times 1 = l_2 \times 1$ ($\because$ 邊長為 1)

可得 $\dfrac{l_1 + l_3}{l_2} = 1$ (定值)，得證。

二、探究正四邊形外接圓的狀況

設正四邊形 $ABCD$ 外接一圓， P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 A,B,C,D 作連線，分別為 $\overline{PA} = l_1, \overline{PB} = l_2, \overline{PC} = l_3, \overline{PD} = l_4$ ，證明： $\dfrac{l_1 + l_4}{l_2 + l_3}$ 為定值。

$pf.$



不失一般性，我們假設邊長為 1， P 點於 AD 上，如右圖。

$\because$ $PABC$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$l_1 \times \overline{BC} + l_3 \times \overline{AB} = l_2 \times \overline{AC}$

$\Rightarrow \quad l_1 \times 1 + l_3 \times 1 = l_2 \times \sqrt{2}$ ($\because$ 邊長為1， $\overline{AC} = \sqrt{2}$)

$\Rightarrow \quad l_1 = \sqrt{2} \cdot l_2 - l_3 \quad \cdots\cdots(1)$

$\because$ $PBCD$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$l_2 \times \overline{CD} + l_4 \times \overline{BC} = l_3 \times \overline{BD}$

$\Rightarrow \quad l_2 \times 1 + l_4 \times 1 = l_3 \times \sqrt{2}$ ($\because$ 邊長為1， $\overline{BD} = \sqrt{2}$)

$\Rightarrow \quad l_4 = \sqrt{2} \cdot l_3 - l_2 \quad \cdots\cdots(2)$

將 $(1)+(2)$ 得 $l_1 + l_4 = \left(\sqrt{2}-1\right) \cdot l_3 + \left(\sqrt{2}-1\right) \cdot l_2 = \left(\sqrt{2}-1\right) \cdot \left(l_2 + l_3\right)$

故 $\dfrac{l_1 + l_4}{l_2 + l_3} = \sqrt{2} - 1$ (定值)，得證。

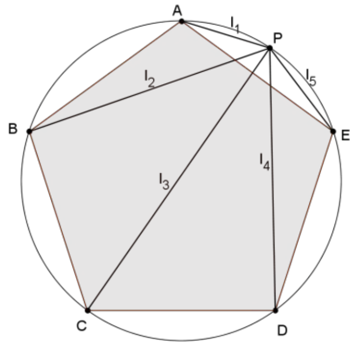
三、證明正五邊形外接圓的狀況

設正五邊形 $ABCDE$ 外接一圓，如右圖， P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 A,B,C,D,E 作連線，分別為 $\overline{PA} = l_1, \overline{PB} = l_2, \overline{PC} = l_3, \overline{PD} = l_4, \overline{PE} = l_5$ ，

證明： $\dfrac{l_1 + l_5}{l_2 + l_3 + l_4}$ 為定值。

$pf.$

不失一般性，我們假設邊長為 1，P 點於 AE 上，如右圖。



且$\because$邊長為1，$\therefore\ \overline{AC}=\overline{BD}=\overline{CE}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\because$ $ABCP$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_1\times\overline{BC}+l_3\times\overline{AB}=l_2\times\overline{AC}\ \Rightarrow\ l_1+l_3=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times l_2\ \cdots\cdots(1)$$

$\because$ $BCDP$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_2\times\overline{CD}+l_4\times\overline{BC}=l_3\times\overline{BD}\ \Rightarrow\ l_2+l_4=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times l_3\ \cdots\cdots(2)$$

$\because$ $CDEP$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_3\times\overline{DE}+l_5\times\overline{CD}=l_4\times\overline{CE}\ \Rightarrow\ l_3+l_5=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times l_4\ \cdots\cdots(3)$$

將$(1)+(3)$得 $l_1+2l_3+l_5=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(l_2+l_4)=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}l_3\right)\ \Rightarrow l_1+l_5=\left[(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2})^2-2\right]l_3$

故 $\dfrac{l_1+l_5}{l_2+l_3+l_4}=\dfrac{\left[(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2})^2-2\right]l_3}{(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+1)l_3}=\sqrt{5}-2$ (定值)，得證。

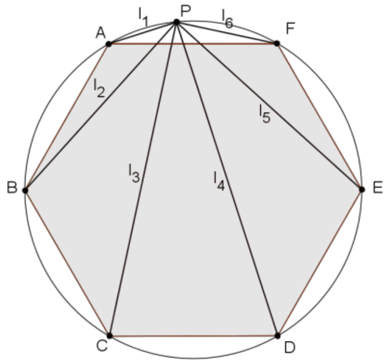
四、證明正六邊形外接圓的狀況

設正六邊形 $ABCDEF$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 A,B,C,D,E,F 作連線，分別為 $\overline{PA}=l_1,\overline{PB}=l_2,\overline{PC}=l_3,\overline{PD}=l_4,\overline{PE}=l_5,\overline{PF}=l_6$，

證明：$\dfrac{l_1+l_6}{l_2+l_3+l_4+l_5}$ 為定值。

$pf.$

不失一般性，我們假設邊長為 1，P 點於 AF 上，如右圖。



且$\because$邊長為1，$\therefore\ \overline{AC}=\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{DF}=\sqrt{3}$

$\because$ $PABC$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_1\times\overline{BC}+l_3\times\overline{AB}=l_2\times\overline{AC}\ \Rightarrow\ l_1+l_3=l_2\times\sqrt{3}\ \cdots\cdots(1)$$

$\because$ $PBCD$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_2\times\overline{CD}+l_4\times\overline{BC}=l_3\times\overline{BD}\ \Rightarrow\ l_2+l_4=l_3\times\sqrt{3}\ \cdots\cdots(2)$$

$\because$ $PCDE$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_3\times\overline{DE}+l_5\times\overline{CD}=l_4\times\overline{CE}\quad\Rightarrow\quad l_3+l_5=l_4\times\sqrt{3}\ \cdots\cdots(3)$$

$\because$ $PDEF$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_4\times\overline{EF}+l_6\times\overline{DE}=l_5\times\overline{DF}\quad\Rightarrow\quad l_4+l_6=l_5\times\sqrt{3}\ \cdots\cdots(4)$$

將 $(2)+(3)$ 得 $l_2+l_5=\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(l_3+l_4\right)$

將 $(1)+(4)$ 得 $l_1+l_6=\sqrt{3}\cdot\left(l_2+l_5\right)-\left(l_3+l_4\right)=\sqrt{3}\cdot\left\lfloor\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(l_3+l_4\right)\right\rfloor-\left(l_3+l_4\right)$

$$=\left\lfloor\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)-1\right\rfloor\left(l_3+l_4\right)=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(l_3+l_4\right)$$

故 $\dfrac{l_1+l_6}{l_2+l_3+l_4+l_5}=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(l_3+l_4\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(l_3+l_4\right)+\left(l_3+l_4\right)}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (定值)，得證。

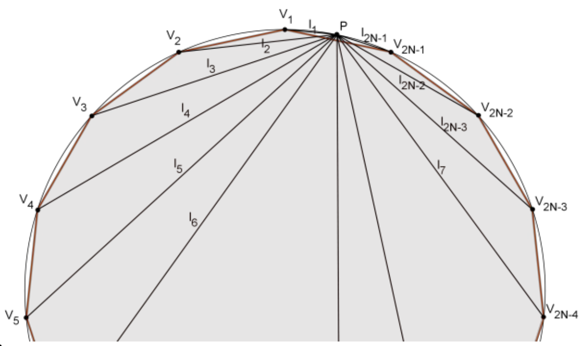
由上述的討論與證明可發現，圓內接正偶數邊形與圓內接正奇數邊形的推論模式大致相同，但最終的整理會有些許差異。因此我們先行討論圓內接正奇數邊形的情況後，發現似乎有其遞迴關係，故可用相同的模式，嘗試推廣至所有圓內接正奇數邊形圓上一點 P 對於各頂點距離關係的定值性質。

五、總結正 $2N-1$ 邊形外接圓的狀況

(一) 定值性質敘述：

設正 $2N-1$ 邊形外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $V_1,V_2,\cdots,V_{2N-1}$ 作連線，分別為 $\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\overline{PV_3}=l_3,\cdots,\overline{PV_{2N-1}}=l_{2N-1}$，試證 $\dfrac{l_1+l_{2N-1}}{l_2+l_3+\cdots+l_{2N-2}}$ 為定值。

(二) 證明：



$pf.$

不失一般性，我們假設正 $2N-1$ 邊形邊長為 1，P 點於 V_1V_{2N-1} 上，如右圖。且另外假設 $\overline{V_1V_3}=\overline{V_2V_4}=\overline{V_3V_5}=\cdots=\overline{V_{2N-3}V_{2N-1}}=m$ (m 為定值)

$\because$ $V_1V_2V_3P$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_1\times\overline{V_2V_3}+l_3\times\overline{V_1V_2}=l_2\times\overline{V_1V_3}\quad\Rightarrow\quad l_1+l_3=m\times l_2\ \cdots\cdots(1)$$

$\because$ $V_2V_3V_4P$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_2 \times \overline{V_3V_4} + l_4 \times \overline{V_2V_3} = l_3 \times \overline{V_2V_4} \quad \Rightarrow \quad l_2 + l_4 = m \times l_3 \ \cdots\cdots(2)$$

$\cdots\cdots$以此類推

$\because V_{2N-3}V_{2N-2}V_{2N-1}P$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_{2N-3} \times \overline{V_{2N-2}V_{2N-1}} + l_{2N-1} \times \overline{V_{2N-3}V_{2N-2}} = l_{2N-2} \times \overline{V_{2N-3}V_{2N-1}}$$

$\Rightarrow l_{2N-3} + l_{2N-1} = m \times l_{2N-2} \ \cdots\cdots(2N-3)$

第$(N-1)$為 $l_{N-1} + l_{N+1} = m \times l_N$

將$(N-2)+(N)$得 $l_{N-2} + l_{N+2} = m(l_{N-1} + l_N) - 2l_N = (m^2 - 2)l_N$

將$(N-3)+(N+1)$得 $l_{N-3} + l_{N+1} = m(l_{N-2} + l_{N+2}) - (l_{N-1} + l_{N+1}) = (m^3 - 3m)l_N$

$\cdots\cdots$以此類推

將$(1)+(2N-3)$得 $l_1 + l_{2N-1} = m(l_2 + l_{2N-2}) - (l_3 + l_{2N-3})$

經整理後，我們假設數列$\langle a_i \rangle$為$\begin{cases} a_1 = l_{N-1} + l_{N+1} = ml_N \\ a_2 = l_{N-2} + l_{N+2} = (m^2 - 2)l_N \\ a_3 = l_{N-3} + l_{N+3} \\ \vdots \\ a_{N-1} = l_1 + l_{2N-1} \end{cases}$，

推導此數列時獲得其遞迴關係式：$a_i = ma_{i-1} - a_{i-2}$，

解此二階遞迴關係式，其特徵方程式為 $x^2 = mx - 1$，兩根

$\alpha = \dfrac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}, \beta = \dfrac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}$ 為其特徵根($\alpha \neq \beta$ 且 α, β 為定值)。

可令一般式 $a_i = A\alpha^i + B\beta^i$，帶入 $a_1 = ml_N$ 及 $a_2 = (m^2 - 2)l_N$，可解得 $A = B = l_N$。

故 $\dfrac{l_1 + l_{2N-1}}{l_2 + l_3 + \cdots + l_{2N-2}} = \dfrac{a_{N-1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-2} + l_N}$

$$= \frac{l_N\left(\alpha^{N-1} + \beta^{N-1}\right)}{l_N(\alpha + \beta) + l_N\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + \cdots + l_N\left(\alpha^{N-2} + \beta^{N-2}\right) + l_N}$$

$$= \frac{\alpha^{N-1} + \beta^{N-1}}{\left(\dfrac{\alpha^{N-1} - \alpha}{\alpha - 1} + \dfrac{\beta^{N-1} - \beta}{\beta - 1}\right) + 1}$$ (定值)，得證。

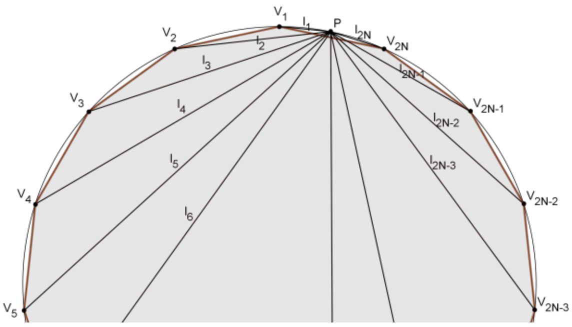
由上的證明可知，我們已可以用統一的證明方法去證正奇數邊形外接圓上任一點至各頂點距離關係 $\dfrac{l_1 + l_{2N-1}}{l_2 + l_3 + \cdots + l_{2N-2}}$ 為定值，現在我們繼續用相同的技巧去推廣正偶數邊形也成立，並且使用統一的模式去證明它。

六、總結正$2N$邊形外接圓的狀況

(一) 定值性質敘述：

設正$2N$邊形外接一圓，P為其外接圓弧上一動點，由P向各頂點$V_1,V_2,\cdots,V_{2N}$作連線，分別為$\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\overline{PV_3}=l_3,\cdots,\overline{PV_{2N}}=l_{2N}$，試證$\dfrac{l_1+l_{2N}}{l_2+l_3+\cdots+l_{2N-1}}$為定值。

(二) 證明：



$pf.$

不失一般性，我們假設正$2N$邊形邊長為 1，

P點於V_1V_{2N}上，如右圖。且另外假設

$\overline{V_1V_3}=\overline{V_2V_4}=\overline{V_3V_5}=\cdots=\overline{V_{2N-2}V_{2N}}=m$ （m為定值)

$\because V_1V_2V_3P$為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_1\times\overline{V_2V_3}+l_3\times\overline{V_1V_2}=l_2\times\overline{V_1V_3} \;\Rightarrow\; l_1+l_3=m\times l_2 \cdots\cdots(1)$$

$\because V_2V_3V_4P$為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_2\times\overline{V_3V_4}+l_4\times\overline{V_2V_3}=l_3\times\overline{V_2V_4} \;\Rightarrow\; l_2+l_4=m\times l_3 \cdots\cdots(2)$$

$\cdots\cdots$以此類推

$\because V_{2N-2}V_{2N-1}V_{2N}P$為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$$l_{2N-2}\times\overline{V_{2N-1}V_{2N}}+l_{2N}\times\overline{V_{2N-2}V_{2N-1}}=l_{2N-1}\times\overline{V_{2N-2}V_{2N}}$$

$$\Rightarrow l_{2N-2}+l_{2N}=m\times l_{2N-1} \cdots\cdots(2N-2)$$

將$(N-1)+(N)$得 $l_{N-1}+l_{N+2}=(m-1)\times(l_N+l_{N+1})$

將$(N-2)+(N+1)$得 $l_{N-2}+l_{N+3}=m(l_{N-1}+l_{N+2})-(l_N+l_{N+1})=(m^2-m-1)(l_N+l_{N+1})$

將$(N-3)+(N+2)$得 $l_{N-3}+l_{N+4}=m(l_{N-2}+l_{N+3})-(l_{N-1}+l_{N+2})=(m^3-m^2-2m+1)(l_N+l_{N+1})$

$\cdots\cdots$以此類推

將$(1)+(2N-2)$得 $l_1+l_{2N}=m(l_2+l_{2N-1})-(l_3+l_{2N-2})$

經整理後，我們假設數列$\langle a_i\rangle$為$\begin{cases}a_1=l_N+l_{N+1}\\ a_2=l_{N-1}+l_{N+2}=(m-1)(l_N+l_{N+1})\\ a_3=l_{N-2}+l_{N+3}\\ \vdots\\ a_N=l_1+l_{2N}\end{cases}$，

推導此數列時獲得其遞迴關係式：$a_i=ma_{i-1}-a_{i-2}$，

解此二階遞迴關係式，其特徵方程式為 $x^2 = mx - 1$，兩根

$\alpha = \dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}, \beta = \dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}$ 為其特徵根($\alpha \neq \beta$ 且 α, β 為定值)。

可令一般式 $a_i = A\alpha^i + B\beta^i$，帶入 $a_1 = l_N + l_{N+1}$ 及 $a_2 = (m-1)(l_N + l_{N+1})$，

可解得 $A = \dfrac{-(\beta-1)}{\alpha-\beta}(l_N + l_{N+1})$，$B = \dfrac{\alpha-1}{\alpha-\beta}(l_N + l_{N+1})$。

故 $\dfrac{l_1 + l_{2N}}{l_2 + l_3 + \cdots + l_{2N-1}} = \dfrac{a_N}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}}$

$$= \frac{\left[-(\beta-1)\alpha^N + (\alpha-1)\beta^N\right]}{\left[-(\beta-1)\alpha + (\alpha-1)\beta\right] + \left[-(\beta-1)\alpha^2 + (\alpha-1)\beta^2\right] + \cdots + \left[-(\beta-1)\alpha^{N-1} + (\alpha-1)\beta^{N-1}\right]}$$

$$= \frac{\left[-(\beta-1)\right]\alpha^N + (\alpha-1)\beta^N}{\left[-(\beta-1)\right]\left(\dfrac{\alpha^N - \alpha}{\alpha-1}\right) + (\alpha-1)\left(\dfrac{\beta^N - \beta}{\beta-1}\right)}$$ (定值)，得證。

由上的證明可知，我們已可以用如同證正奇數邊形外接圓的證明方法，去證正偶數邊形外接圓上任一點至各頂點距離關係 $\dfrac{l_1 + l_{2N}}{l_2 + l_3 + \cdots + l_{2N-1}}$ 為定值，但因使用的二階遞迴關係式去算出一般式，計算過於龐大，而且也需要使用代號去簡潔我們的書寫模式，因此我們萌生了一個不一樣的念頭，難道只有這個方法能去證明定值嗎？

後來在寫競賽考古題時，三角函數的部分，老師額外教了我們第五冊的複數的極式及棣美弗定理，課程裡有複數的 n 次方根，也因此我們突然驚覺是否可以用複數平面的概念來證明上面的這些定值性質？再利用正三角形的外接圓嘗試證明出式子後，先藉由 WolframAlpha 網頁的計算測試，發現動點 P 的變動不影響其距離關係的定值，也因此為我們的猜測安心。下面就呈現我們另外的思考證法以及推廣至一般形式定值性質的證明。

七、為了方便我們後面的推廣證明，我們先行寫下引理，並證明之。

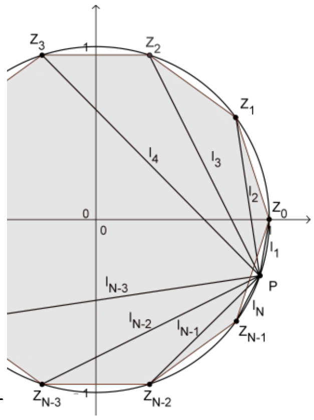
引理一：

正 N 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{N-1}$ 的外接圓，建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，不失一般性，將 P 點落在 Z_0Z_{N-1} 上，如下圖所示，

則 $\overline{PZ_k} = |P - Z_k| = 2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{k\pi}{N}\right)$，$k = 0,1,2,\cdots,N-1$。

證明：

不失一般性，可令 $Z_k=\cos\left(\dfrac{2k}{N}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{2k}{N}\pi\right)$ ，$k=0,1,2,\cdots,N-1$



，且設 $P=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ ，$0\le\theta\le\dfrac{2\pi}{N}$

則 $\overline{PZ_k}=|P-Z_k|=\left|\left[\cos(-\theta)-\cos\left(\dfrac{2k}{N}\pi\right)\right]+i\left[\sin(-\theta)-\sin\left(\dfrac{2k}{N}\pi\right)\right]\right|$

$$=\sqrt{\left[\cos(-\theta)-\cos\left(\frac{2k}{N}\pi\right)\right]^2+\left[\sin(-\theta)-\sin\left(\frac{2k}{N}\pi\right)\right]^2}$$

$$=\sqrt{2-2\cos\left(-\theta-\frac{2k}{N}\pi\right)}=\sqrt{2\left[1-\cos\left(\theta+\frac{2k}{N}\pi\right)\right]}$$

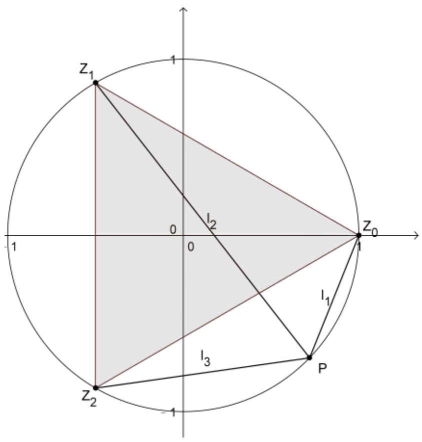
$$=\sqrt{2^2\cdot\sin^2\left(\theta+\frac{2k}{N}\pi\right)}=\left|2\sin\left(\theta+\frac{2k}{N}\pi\right)\right|\text{，}k=0,1,2,\cdots,N-1$$

$\because\ \ 0\le\theta\le\dfrac{2\pi}{N}\ \Rightarrow\ 0\le\dfrac{\theta}{2}\le\dfrac{\pi}{N}\ \Rightarrow\ 0\le\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k}{N}\pi\le\pi$ ，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

$\therefore\ \ \sin\left(\theta+\dfrac{2k}{N}\pi\right)>0$ ，故 $\overline{PZ_k}=|P-Z_k|=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{N}\right)$ ，$k=0,1,2,\cdots,N-1$ ，得證。

八、另外的思考證法由正奇數邊形外接圓探討並推廣總結：

(一) 我們將正三角形 $Z_0Z_1Z_2$ 建構在複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 Z_0,Z_1,Z_2 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3$ ，試證 $\dfrac{l_1+l_3}{l_2}$ 為定值。



$pf.$

不失一般性，將 P 點落在 Z_0Z_2 上，如右圖。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{3}\right)$ ，$k=0,1,2$

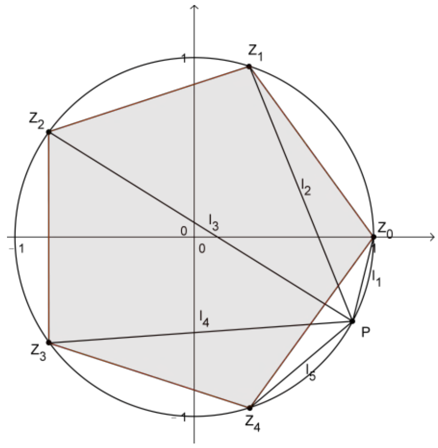
故 $\dfrac{l_1+l_3}{l_2}=\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$ (利用和差化積整理)

$=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$(定值)，得證。

(二) 我們將正五邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3Z_4$ 建構在複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 Z_0,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4 作連線，分別為

$\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3,\overline{PZ_3}=l_4,\overline{PZ_4}=l_5$，試證 $\dfrac{l_1+l_5}{l_2+l_3+l_4}$ 為定值。

$pf.$



不失一般性，將 P 點落在 Z_0Z_4 上，如右圖。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{5}\right)$，$k=0,1,2,3,4$

$$\text{故}\ \frac{l_1+l_5}{l_2+l_3+l_4}=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)}\ \text{(利用和差化積整理)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)}{\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)\right]\cdot\left[2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+1\right]}=\frac{2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+1}\ \text{(定值)，得證。}$$

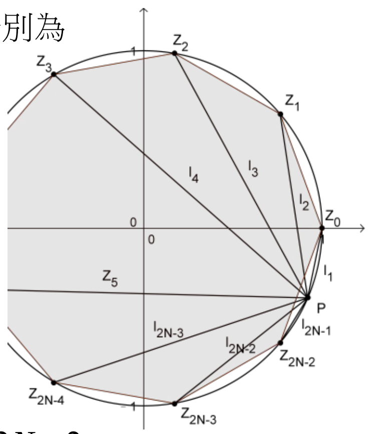
(三) 探究正 $2N-1$ 邊形外接圓的狀況：

將正 $2N-1$ 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{2N-2}$ 建構在複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $Z_0,Z_1,\cdots,Z_{2N-2}$ 作連線，分別為

$\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3,\cdots\cdots,\overline{PZ_{2N-2}}=l_{2N-1}$，

試證 $\dfrac{l_1+l_{2N-1}}{l_2+l_3+\ldots+l_{2N-2}}$ 為定值。

$pf.$



不失一般性，將 P 點落在 Z_0Z_{2N-2} 上，如右圖。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{2N-1}\right)$，$k=0,1,2,\cdots,2N-2$

$$\text{故}\ \frac{l_1+l_{2N-1}}{l_2+l_3+\ldots+l_{2N-2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-2}{2N-1}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2N-1}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-3}{2N-1}\pi\right)}$$

(利用和差化積整理)

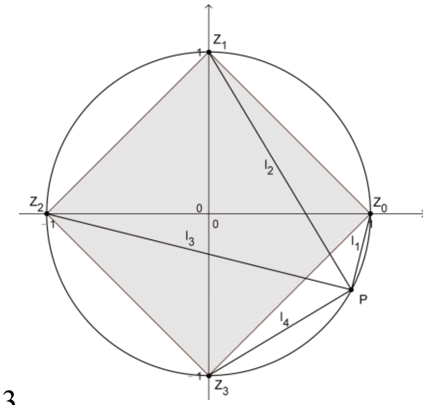
$$=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{N-2}{2N-1}\pi\right)+2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{N-3}{2N-1}\pi\right)+\ldots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)}$$

$$=\frac{2\cos\left(\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{2N-1}\right)+\ldots+2\cos\left(\frac{N-2}{2N-1}\pi\right)+1}$$

$$=\frac{2\cos\left(\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)}{1+2\sum_{k=1}^{N-2}\cos\left(\frac{k}{2N-1}\pi\right)}$$ (定值)，得證。

九、另外的思考證法由正偶數邊形外接圓探討並推廣總結：

(一) 我們將正四邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3$ 建構在複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 Z_0,Z_1,Z_2 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3$ $,\overline{PZ_3}=l_4$，試證 $\frac{l_1+l_4}{l_2+l_3}$ 為定值。



$pf.$

不失一般性，將 P 點落在 Z_0Z_3 上，如右圖。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{4}\right)$，$k=0,1,2,3$

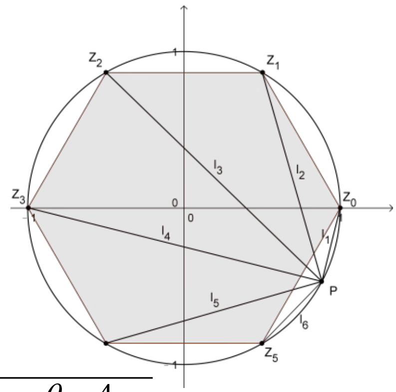
故 $$\frac{l_1+l_4}{l_2+l_3}=\frac{\sin(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{4}\pi)}{\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\pi)+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{4}\pi)}=\frac{2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{8}\pi)\cdot\cos(\frac{3}{8}\pi)}{2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{8}\pi)\cdot\cos(\frac{1}{8}\pi)}$$ (利用和差化積整理)

$$=\frac{\cos(\frac{3}{8}\pi)}{\cos(\frac{1}{8}\pi)}=\sqrt{2}-1$$(定值)，得證。

(二) 我們將正六邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ 建構在複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 Z_0,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5 作連線，分別為

$\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3,\overline{PZ_3}=l_4,\overline{PZ_4}=l_5,\overline{PZ_5}=l_6$，試證 $\frac{l_1+l_6}{l_2+l_3+l_4+l_5}$ 為定值。

pf.



不失一般性，將 P 點落在 Z_0Z_5 上，如右圖。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{6}\right)$，$k=0,1,2,3,4,5$

故 $\frac{l_1+l_6}{l_2+l_3+l_4+l_5}=\frac{\sin(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{6}\pi)}{\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{6}\pi)+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{6}\pi)+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{6}\pi)+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{6}\pi)}$

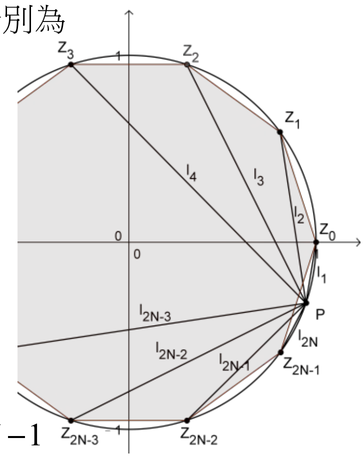
$$=\frac{2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{12}\pi)\cdot\cos(\frac{5}{12}\pi)}{2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{12}\pi)\cdot\cos(\frac{3}{12}\pi)+2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{12}\pi)\cdot\cos(\frac{1}{12}\pi)}$$ (利用和差化積整理)

$$=\frac{\cos(\frac{5}{12}\pi)}{\cos(\frac{3}{12}\pi)+\cos(\frac{1}{12}\pi)}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$ (定值)，得證。

(三) 探究正 $2N$ 邊形外接圓的狀況：

將正 $2N$ 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{2N-1}$ 建構在複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $Z_0,Z_1,\cdots,Z_{2N-1}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3,\cdots\cdots,\overline{PZ_{2N-1}}=l_{2N}$，

試證 $\frac{l_1+l_{2N}}{l_2+l_3+\ldots+l_{2N-1}}$ 為定值。



pf.

不失一般性，將 P 點落在 Z_0Z_{2N-1} 上，如右圖。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{2N}\right)$，$k=0,1,2,\cdots,2N-1$

故 $\frac{l_1+l_{2N}}{l_2+l_3+\ldots+l_{2N-1}}=\frac{\sin(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-1}{2N}\pi)}{\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2N}\pi)+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2N}\pi)+\ldots+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-3}{2N}\pi)+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-2}{2N}\pi)}$

(利用和差化積整理)

$$=\frac{2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-1}{4N}\pi)\cdot\cos(\frac{2N-1}{4N}\pi)}{2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-1}{4N}\pi)\cdot\cos(\frac{2N-3}{4N}\pi)+2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-1}{4N}\pi)\cdot\cos(\frac{2N-5}{4N}\pi)+\cdots+2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-1}{4N}\pi)\cdot\cos(\frac{\pi}{4N})}$$

$$=\frac{\cos(\frac{2N-1}{4N}\pi)}{\cos(\frac{\pi}{4N})+\cos(\frac{3\pi}{4N})+\cdots+\cos(\frac{2N-3}{4N}\pi)}=\frac{\cos\left(\frac{2N-1}{4N}\pi\right)}{\sum_{k=1}^{N-1}\cos\left(\frac{2k-1}{4N}\pi\right)}$$ (定值)，得證。

至此我們已經將所有正 N 邊形外接圓上一動點 P，與對各頂點距離的定值關係給予一般化的證明模式完成，並且還完成了兩種證明方法，對此項目的探討也終告結束。由於此項目一開始我們想去證明前是利用 GeoGebra 先進行某些正 N 邊形的試驗，進而發現均為定值才開啟我們的證明路程。此時我們突然想說對於這些距離 $(l_1,l_2,\cdots\cdots,l_N)$，是否又存在某些關係式能形成定值？利用 GeoGebra 先進行某些運算的猜測，結果有了令人興奮的結果，讓我們發現了一種運算模式也都能形成定值。以下就將我們的發現呈現出來並證明之。

十、為了後續的推廣證明，我們寫下一個引理，並證明之。

引理二：

$\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\theta+\frac{2k}{N}\pi\right)=0$，$\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)=0$；$\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)=0$，

$\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)=0$，$k=0,1,\cdots,N-1$

證明：

設複數方程式 $Z^N=\cos(N\theta)+i\sin(N\theta)$，$N$ 屬於正整數

可令複數 $Z=\cos\phi+i\sin\phi$，則 $(\cos\phi+i\sin\phi)^N=\cos(N\theta)+i\sin(N\theta)$

由棣美佛定理可知， $\cos(N\phi)+i\sin(N\phi)=\cos(N\theta)+i\sin(N\theta)$

$$N\phi=N\theta+2k\pi\text{，}k=0,1,\cdots,N-1\quad\Rightarrow\quad\phi=\frac{N\theta+2k\pi}{N}=\theta+\frac{2k\pi}{N}\text{，}k=0,1,\cdots,N-1$$

故可得 $Z_k=\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)$，$k=0,1,\cdots,N-1$ 為其複數方程式

$Z^N=\cos(N\theta)+i\sin(N\theta)$，的 N 個複數根。由於複數的 N 次方根和為 0，

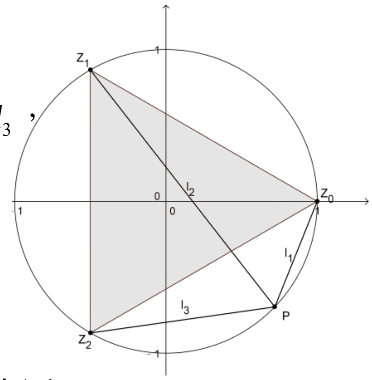
$$\therefore\sum_{k=0}^{N-1}Z_k=0\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=0}^{N-1}\left(\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)\right)=0$$

故 $\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)=0$ 且 $\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)=0$，$k=0,1,\cdots,N-1$

同理可證，$\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)=0$，$\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)=0$，$k=0,1,\cdots,N-1$，得證。

十一、探討點 P 向各頂點做距離的定值關係式

(一) 探討正三角形外接圓上動點 P 點向各頂點做距離的定值關係式



設正三角形 $Z_0Z_1Z_2$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，

由 P 向各頂點 Z_0, Z_1, Z_2 作連線，分別為 $\overline{PZ_0} = l_1, \overline{PZ_1} = l_2, \overline{PZ_2} = l_3$，

試證 $l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_1$ 為定值。

$pf.$

不失一般性，將正三角形 Z_0, Z_1, Z_2 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 點於 Z_0Z_2 上，如右圖。

由引理一，可令 $l_{k+1} = \overline{PZ_k} = 2 \cdot \sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{k\pi}{3}\right)$，$k = 0,1,2$

故 $l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_1$

$$= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{3\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

(利用積化和差化簡)

$$= 2\left\{2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{3\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right]\right\}$$

$$= 2\left\{2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{3\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{5\pi}{3}\right)\right]\right\}$$

$$= 2\left\{3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{3\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right]\right\}$$

由引理二可得，$\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \cos\left(\theta + \frac{2k+1}{3}\pi\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{3\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{5\pi}{3}\right) = 0$

因此 $l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_1 = 2 \times 3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 6\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3$ (定值)，得證。

(二) 探討正四邊形外接圓上動點 P 點向各頂點做距離的定值關係式

設正四邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 Z_0, Z_1, Z_2

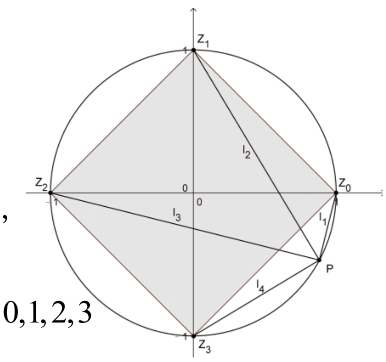
$, Z_3$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0} = l_1, \overline{PZ_1} = l_2, \overline{PZ_2} = l_3, \overline{PZ_3} = l_4$，

試證 $l_1l_2 + l_2l_3 + l_3l_4 - l_4l_1$ 為定值。

$pf.$

不失一般性，我們將正四邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 點於 Z_0Z_3 上，



如右圖。由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{4}\right)$，$k=0,1,2,3$

故 $l_1l_2+l_2l_3+l_3l_4-l_4l_1$

$$=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)+2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$-2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left.-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2\left\{3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)\right]\right\}$$

$$=2\left\{3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\theta+\frac{7\pi}{4}\right)\right]\right\}$$

由引理二可得，

$$\sum_{k=0}^{3}\cos\left(\theta+\frac{2k+1}{4}\pi\right)=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\theta+\frac{7\pi}{4}\right)=0$$

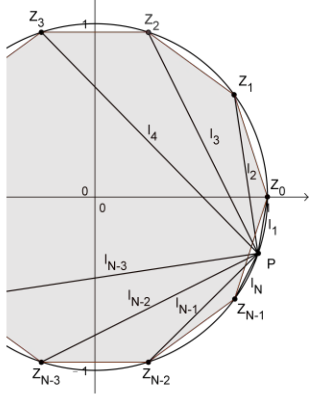
因此 $l_1l_2+l_2l_3+l_3l_4-l_4l_1=2\times 4\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=8\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}$ (定值)，得證。

(三) 探討正 N 邊形外接圓上動點 P 點向各頂點做距離的定值關係式

設正 N 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{N-1}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點

$Z_0,Z_1,\cdots,Z_{N-1}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\cdots,\overline{PZ_{N-1}}=l_N$，

試證 $l_1l_2+l_2l_3+\ldots+l_{N-1}l_N-l_Nl_1$ 為定值。



$pf.$

不失一般性，我們將正 N 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{N-1}$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 點於 Z_0Z_{N-1} 上

，如右圖。由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)$，$k=0,1,2,...,N-1$

故 $l_1l_2+l_2l_3+...+l_{N-1}l_N-l_Nl_1$

$$=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{N}\right)+2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{N}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{N}\right)+\cdots-2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{N}\pi\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+\cdots-\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)+\cos\left(\theta+\frac{N-1}{N}\pi\right)\right]$$

$$=2\left\{(N-1)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)-\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+\cdots+\right.\right.$$

$$\left.\left.\cos\left(\theta+\frac{(2N-3)}{N}\pi\right)-\cos\left(\theta+\frac{(N-1)}{N}\pi\right)\right]\right\}$$

$$=2\left\{(N-1)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{(2N-3)\pi}{N}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos\left[\theta+\frac{(2N-1)\pi}{N}\right]\right]\right\}$$

由引理二可得，

$$\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{2N-1}{N}\pi\right)=0$$

因此 $l_1l_2+l_2l_3+...+l_{N-1}l_N-l_Nl_1=2\times N\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)=2N\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$(定值)，得證。

我們將額外發現的關係式也給予了推廣的一般化證明，對此項目的探討也終告結束。其實先前利用 GeoGebra 進行某些運算的猜測，發現有很多關係式都有定值的性質，例如：這些距離的平方和、四方和等等，但這些在我們尋找文獻資料的過程中發現已經有作品發表過了，故我們也就不再呈現。但在一次觀看圖形時，我們突然看到這些距離 $(l_1,l_2,\cdots\cdots,l_N)$ 會圍成多個三角形，然而這些三角形面積是否也有些關聯呢？這驅使著我們往下一個目標去尋找邁進。這次我們同樣先利用 GGB 去進行面積的猜測，突然發現了一種模式也會形成定值，現在我們就將其呈現並推廣證明之。

十二、為了往後的推廣證明，我們再證明一引理

引理三：

$\prod_{k=1}^{N}\cos\left(\frac{2^{k-1}}{2^N+1}\pi\right)=1$，$N$ 為大於 1 的正整數。

證明：

令$S=\prod_{k=1}^{N}2^N\cos\left(\frac{2^{k-1}}{2^N+1}\pi\right)=2^N\cos\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{2^N+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{2^{N-1}}{2^N+1}\pi\right)$

兩邊同乘$\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)$，

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot S=\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot\left[2^N\cos\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{2^N+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{2^{N-1}}{2^N+1}\pi\right)\right]$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot S=2\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot\left[2^{N-1}\cos\left(\frac{2\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{2^N+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{2^{N-1}}{2^N+1}\pi\right)\right]$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot S=\sin\left(\frac{2\pi}{2^N+1}\right)\left[2^{N-1}\cos\left(\frac{2\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{2^N+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{2^{N-1}}{2^N+1}\pi\right)\right]$$

…

依此類推，可得$\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot S=\sin\left(\frac{2^N}{2^N+1}\pi\right)$，

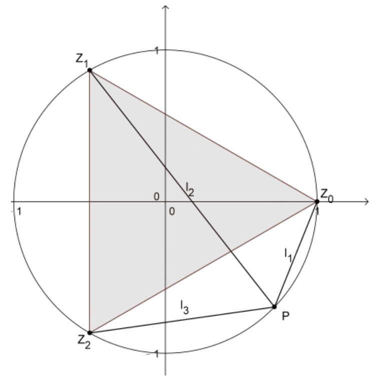
故$\prod_{k=1}^{N}\cos\left(\frac{2^{k-1}}{2^N+1}\pi\right)=S=\dfrac{\sin\left(\frac{2^N}{2^N+1}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)}=1$，得證。

十三、探討點P向各頂點連線所圍成三角形面積的定值關係式

(一) 先探討正三角形的情形

設正三角形$Z_0Z_1Z_2$外接一圓，P為其外接圓弧上一動點，由P向各頂點Z_0,Z_1,Z_2作連線，分別為$\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3$，

試證$\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}=\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_2}$ (即$\dfrac{\Delta PZ_0Z_2}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_2}{\Delta PZ_1Z_2}=1$)。



$pf.$

不失一般性，我們將正N邊形$Z_0Z_1Z_2$的外接圓，

建構於複數平面圓心為$(0,0)$的<u>單位圓上</u>，P點於Z_0Z_2上

，如右圖。由引理一，可令$l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{3}\right)$，$k=0,1,2$

且之$\angle POZ_0=\theta$，$\therefore\ \angle Z_0Z_1P=\frac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}$，$\angle PZ_0Z_2=\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}$，

並且可知正三角形的邊長為$m\left(=\sqrt{3}\right)$，

故 $\dfrac{\Delta PZ_0Z_2}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_2}{\Delta PZ_1Z_2}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\overline{Z_0Z_2}\cdot l_1\cdot\sin\angle PZ_0Z_2}{\frac{1}{2}\cdot\overline{Z_0Z_1}\cdot l_2\cdot\sin\angle Z_0Z_1P}+\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\overline{Z_0Z_2}\cdot l_1\cdot\sin\angle PZ_0Z_2}{\frac{1}{2}\cdot\overline{Z_1Z_2}\cdot l_3\cdot\sin\angle Z_1Z_2P}$

$$=\frac{\frac{1}{2}m\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{1}{2}m\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{\frac{1}{2}m\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{1}{2}m\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$$ (m 可消除)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}\left(\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)\right]$$ (利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}\left(\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)\right]$$

(又 $\because \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)$)

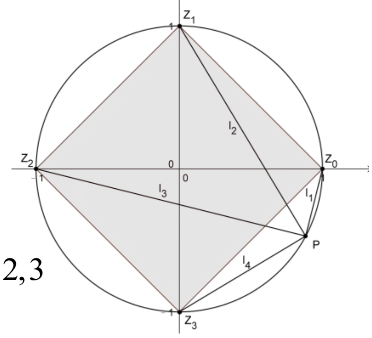
$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$，得證。

(二) 探討正四邊形的情形

設正四邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 Z_0,Z_1,Z_2 ,Z_3 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3,\overline{PZ_3}=l_4$，

試證 $\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\dfrac{1}{\Delta PZ_2Z_3}=\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_3}$ (即 $\dfrac{\Delta PZ_0Z_3}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_3}{\Delta PZ_1Z_2}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_3}{\Delta PZ_2Z_3}=1$)。

pf.



不失一般性，我們將正四邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的**單位圓上**，P 點於 Z_0Z_3 上，

如右圖。由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{4}\right)$，$k=0,1,2,3$

且之 $\angle POZ_0=\theta$，

$\therefore \angle Z_0Z_1P=\dfrac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}$，$\angle Z_2Z_3P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{2\pi}{4}$，$\angle PZ_0Z_3=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$

並且可知正三角形的邊長為 $m\left(=\sqrt{2}\right)$，

故 $\dfrac{\Delta PZ_0Z_3}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_3}{\Delta PZ_1Z_2}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_3}{\Delta PZ_2Z_3}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{Z_0Z_3}\cdot l_1\cdot\sin\angle PZ_0Z_3}{\frac{1}{2}\cdot\overline{Z_0Z_1}\cdot l_2\cdot\sin\angle Z_0Z_1P}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{Z_0Z_3}\cdot l_1\cdot\sin\angle PZ_0Z_3}{\frac{1}{2}\cdot\overline{Z_1Z_2}\cdot l_3\cdot\sin\angle Z_1Z_2P}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{Z_0Z_3}\cdot l_1\cdot\sin\angle PZ_0Z_3}{\frac{1}{2}\cdot\overline{Z_2Z_3}\cdot l_4\cdot\sin\angle Z_2Z_3P}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)}$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)}\right)+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)}\right]$$

(利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)}\right)+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)}\cdot\left(\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}\right)\right]$$

(利用積化和差整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}\right)\right]$$

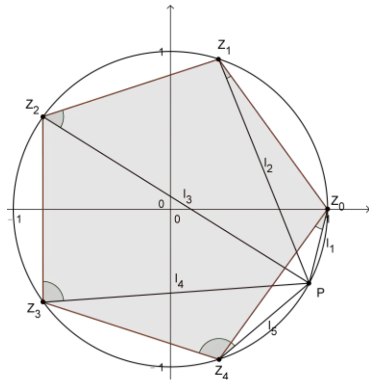
(又∵ $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)$ ， $\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$)

$=1$ ，得證。

(三) 探討正五邊形的情形

設正五邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3Z_4$ 外接一圓， P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 Z_0,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3,\overline{PZ_3}=l_4,\overline{PZ_4}=l_5$ ，

試證 $\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\dfrac{1}{\Delta PZ_2Z_3}+\dfrac{1}{\Delta PZ_3Z_4}=\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_4}$



(即證 $\dfrac{\Delta PZ_0Z_4}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_4}{\Delta PZ_1Z_2}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_4}{\Delta PZ_2Z_3}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_4}{\Delta PZ_3Z_4}=1$)。

$pf.$

不失一般性，我們將正五邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3Z_4$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的**單位圓上**，P 點於 Z_0Z_4 上。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{5}\right)$，$k=0,1,2,3,4$

且知 $\angle POZ_0=\theta$，$\therefore\ \angle Z_0Z_1P=\dfrac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{5}$，$\angle Z_2Z_3P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{2\pi}{5}$，

$\angle Z_3Z_4P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{3\pi}{5}$，$\angle PZ_0Z_4=\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\theta}{2}$，並且可令正五邊形的邊長為 m，

故 $\dfrac{\Delta PZ_0Z_4}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_4}{\Delta PZ_1Z_2}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_4}{\Delta PZ_2Z_3}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_4}{\Delta PZ_3Z_4}=\Delta PZ_0Z_4\left(\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\dfrac{1}{\Delta PZ_2Z_3}+\dfrac{1}{\Delta PZ_3Z_4}\right)$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{5}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{5}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{5}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{5}\right)}\right]$$

(利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{5}\right)}\cdot\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)}\cdot\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{5}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)}+\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{5}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{5}\right)}\right]=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)}\cdot\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{5}\right)}\right]$$

(利用積化和差整理)　(又$\because\ \sin\left(\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{4\pi}{5}\right)$)

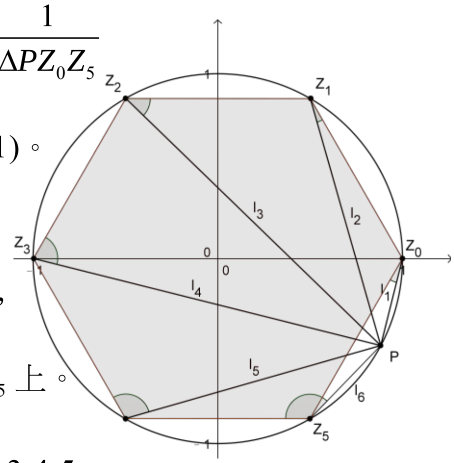
$=2^2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=1$ (由引理 3)，得證。

(四) 探討正六邊形的情形

設正六邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 Z_0,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3,\overline{PZ_3}=l_4,\overline{PZ_4}=l_5,\overline{PZ_5}=l_6$，

試證 $\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\dfrac{1}{\Delta PZ_2Z_3}+\dfrac{1}{\Delta PZ_3Z_4}+\dfrac{1}{\Delta PZ_4Z_5}=\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_5}$

(即證 $\dfrac{\Delta PZ_0Z_5}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_5}{\Delta PZ_1Z_2}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_5}{\Delta PZ_2Z_3}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_5}{\Delta PZ_3Z_4}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_5}{\Delta PZ_4Z_5}=1$)。



pf.

不失一般性，我們將正六邊形 $Z_0Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的<u>**單位圓上**</u>，P 點於 $\overset{\frown}{Z_0Z_5}$ 上。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{6}\right)$，$k=0,1,2,3,4,5$

且知 $\angle POZ_0=\theta$，$\therefore\ \angle Z_0Z_1P=\dfrac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{6}$，$\angle Z_2Z_3P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{2\pi}{6}$，

$\angle Z_3Z_4P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{3\pi}{6}$，$\angle Z_4Z_5P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{4\pi}{6}$，$\angle PZ_0Z_5=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{2}$

並且可令正六邊形的邊長為 m，故

$$\frac{\Delta PZ_0Z_5}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_5}{\Delta PZ_1Z_2}+\frac{\Delta PZ_0Z_5}{\Delta PZ_2Z_3}+\frac{\Delta PZ_0Z_5}{\Delta PZ_3Z_4}+\frac{\Delta PZ_0Z_5}{\Delta PZ_4Z_5}=\Delta PZ_0Z_5\left(\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\frac{1}{\Delta PZ_2Z_3}+\frac{1}{\Delta PZ_3Z_4}+\frac{1}{\Delta PZ_4Z_5}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{6}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{6}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}\right]$$

(利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{6}\right)}\cdot\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}\right]$$ (利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)}\cdot\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}\cdot\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)2\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)}\right]$$

(利用積化和差整理 $2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)2\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$=2\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{6\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)\right]$$

$=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{8\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{6\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)$)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{8\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{6\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)}\right]$$

(由引理二，$\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{8\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{6\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{10\pi}{6}\right)$)

(又$\because$ $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)$，$-\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{10\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)$)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)}\cdot\frac{-\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{10\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)}\right]=1$$ ，得證。

我們持續運用相同的技巧證明了正七、八、九、十、…、二十三邊形的證明，發覺證明過程中不只奇偶邊形在整理時有些許的不同，在奇、偶數邊形內又有部分的分類，而不同的原因都是因為整理時項數的關係。以下就分別由我們自行觀察分類的模式，個別去檢驗證明，將整個正 N 邊形的推廣完成。

十四、探討正奇邊形外接圓上點 P 向各頂點連線所圍成三角形面積的定值關係式

(一) 探討正奇邊形中邊數為 $2^n+1\left(n\in\mathbb{N}\right)$ 的情形

設正 2^n+1 邊形 $Z_0Z_1Z_2...Z_{2^n}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $Z_0,Z_1,Z_2,...,Z_{2^n}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,...,\overline{PZ_{2^n}}=l_{2^n+1}$ ，

試證 $\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\frac{1}{\Delta PZ_{2^n-1}Z_{2^n}}=\frac{1}{\Delta PZ_0Z_{2^n}}$

(即證 $\frac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\frac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_{2^n-1}Z_{2^n}}=1$)。

$pf.$

不失一般性，我們將正 2^n+1 邊形 $Z_0Z_1Z_2...Z_{2^n}$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的**<u>單位圓上</u>**，P 點於 $Z_0Z_{2^n}$ 上。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{2^n+1}\right)$，$k=0,1,2,...,2^n$

且知 $\angle POZ_0=\theta$，$\therefore\ \angle Z_0Z_1P=\frac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1},...,\angle Z_{2^n-1}Z_{2^n}P=\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-1)\pi}{2^n+1}$，

$\angle PZ_0Z_{2^n}=\frac{\pi}{2^n+1}-\frac{\theta}{2}$，並且可令正 2^n+1 邊形的邊長為 m，

故 $\frac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\frac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_{2^n-1}Z_{2^n}}=\Delta PZ_0Z_{2^n}\left(\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\frac{1}{\Delta PZ_{2^n-1}Z_{2^n}}\right)$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1}\right)}+...+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-1)\pi}{2^n+1}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1}\right)}+...+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-1)\pi}{2^n+1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-3)\pi}{2^n+1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-3)\pi}{2^n+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)}\right]$$

(將第一、二項通分，二、三項通分，依次類推配對通分，再利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2^n+1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2^n+1}\right)}+...+\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-3)\pi}{2^n+1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-5)\pi}{2^n+1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-5)\pi}{2^n+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)}\right]$$

……… (持續的兩兩配對整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+1}\right)\cdot2\cos\left(\frac{2\pi}{2^n+1}\right)...2\cos\left(\frac{2^{n-1}\pi}{2^n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)}\right]$$

(又 $\because\ \sin\left(\frac{\pi}{2^n+1}-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)$)

$=2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+1}\right)\cdot2\cos\left(\frac{2\pi}{2^n+1}\right)\cdot...\cdot2\cos\left(\frac{2^{n-1}\pi}{2^n+1}\right)=1$ (由引理 3)，得證。

(二) 探討正奇邊形中邊數不為 2^n+1 的情形

設正 $2N-1$ 邊形(去除邊數為 2^n+1 的情況) $Z_0Z_1Z_2...Z_{2N-2}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $Z_0,Z_1,Z_2,...,Z_{2N-2}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,...,\overline{PZ_{2N-2}}=l_{2N-1}$，

試證 $\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\dfrac{1}{\Delta PZ_{2N-3}Z_{2N-2}}=\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}$

(即證 $\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_{2N-3}Z_{2N-2}}=1$)。

$pf.$

不失一般性，我們將正 $2N-1$ 邊形 $Z_0Z_1Z_2\ldots Z_{2N-2}$ 的外接圓，建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的**<u>單位圓上</u>**，P 點於 Z_0Z_{2N-2} 上。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{2N-1}\right)$，$k=0,1,2,\ldots,(2N-2)$

且知 $\angle POZ_0=\theta$，$\therefore$ $\angle Z_0Z_1P=\dfrac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2N-1},\ldots,\angle Z_{2N-3}Z_{2N-2}P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{(2N-3)\pi}{2N-1}$，

$\angle PZ_0Z_{2N-2}=\dfrac{\pi}{2N-1}-\dfrac{\theta}{2}$，並且可令正 $2N-1$ 邊形的邊長為 m，

故 $\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_{2N-3}Z_{2N-2}}=\Delta PZ_0Z_{2N-2}\left(\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\dfrac{1}{\Delta PZ_{2N-3}Z_{2N-2}}\right)$

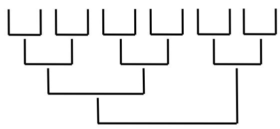
$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N-1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1}\right)}+\ldots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N-1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-3)\pi}{2N-1}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1}\right)}+\ldots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-3)\pi}{2N-1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N-1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N-1}\right)}\right]$$

(將第一、二項通分，二、三項通分，依次類推配對通分後剩 N 項，再利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N-1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2N-1}\right)}+\ldots+\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N-1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-6)\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-6)\pi}{2N-1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N-1}\right)}\right]$$

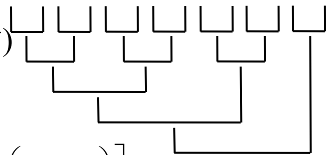
(再將此 N 項，依前一步驟方法類推配對通分，並再利用和差化積整理)



………

(持續依此模式類推配對整理，此過程中會發生項數為奇數時，

最後項就先不用配對，等待後方步驟再進行整理，配對模式示意圖如右)



$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi\pi}{2N-1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4N-3}{2N-1}\pi\right)+\ldots+\sin\left(\frac{3\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2N\pi}{2N-1}\right)}\right]$$

(Φ 為最後配對的前一項較大角度值)

(由引理二，$\dfrac{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{4N-3}{2N-1}\pi\right)+...+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\Phi\pi}{2N-1}\right)}=1$，如正六邊形的整理)

(又$\because \sin\left(\dfrac{\pi}{2N+1}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{2N\pi}{2N+1}\right)$)

$=1$ (如正六邊形的整理，最後分子分母都會抵銷)，得證。

(三) **探討正偶邊形中邊數為$2^n+2\left(n\in\mathbb{N}\right)$的情形**

設正2^n+2邊形$Z_0Z_1Z_2...Z_{2^n+1}$外接一圓，P為其外接圓弧上一動點，由P向各頂點$Z_0,Z_1,Z_2,...,Z_{2^n+1}$作連線，分別為$\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,...,\overline{PZ_{2^n+1}}=l_{2^n+2}$，

試證$\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\dfrac{1}{\Delta PZ_{2^n}Z_{2^n+1}}=\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}$

(即證$\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_{2^n}Z_{2^n+1}}=1$)。

$pf.$

不失一般性，我們將正2^n+2邊形$Z_0Z_1Z_2...Z_{2^n+1}$的外接圓，

建構於複數平面圓心為$(0,0)$的<u>單位圓上</u>，P點於$Z_0Z_{2^n+1}$上。

由引理一，可令$l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{2^n+2}\right)$，$k=0,1,2,...,\left(2^n+1\right)$

且知$\angle POZ_0=\theta$，$\therefore\ \angle Z_0Z_1P=\dfrac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2^n+2},...,\angle Z_{2^n}Z_{2^n+1}P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{2^n\pi}{2^n+2}$，

$\angle PZ_0Z_{2^n+1}=\dfrac{\pi}{2^n+2}-\dfrac{\theta}{2}$，並且可令正$2^n+2$邊形的邊長為$m$，

故$\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_{2^n}Z_{2^n+1}}=\Delta PZ_0Z_{2^n+1}\left(\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\dfrac{1}{\Delta PZ_{2^n}Z_{2^n+1}}\right)$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2^n+2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2^n+2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2^n+2}\right)}\right.$$

$$\left.+...+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)}\right|$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2^n+2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2^n+2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2^n+2}\right)}+\right.$$

$$+\ldots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)}\Bigg]$$

(將第一、二項通分，二、三項通分，依次類推配對通分，最後項先不用配對，其餘利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2^n+2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2^n+2}\right)}+\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{6\pi}{2^n+2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{8\pi}{2^n+2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2^n+2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2^n+2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{8\pi}{2^n+2}\right)}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)}\right]$$

(持續利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+2}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{2\pi}{2^n+2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2^n+2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{8\pi}{2^n+2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{8\pi}{2^n+2}\right)}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)}\right]$$

……… (除最後一項，其餘中間項均持續的兩兩配對整理，而最終式再與最後一項整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+2}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{2\pi}{2^n+2}\right)\cdot\ldots\cdot 2\cos\left(\frac{2^{n-1}\pi}{2^n+2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)}\right]$$

(再將除最後一項外，依前一步驟方法類推配對通分，並再利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)}\cdot\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+2}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{2\pi}{2^n+2}\right)\cdot\ldots\cdot 2\cos\left(\frac{2^{n-1}\pi}{2^n+2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)}\right]$$

(持續依此模式類推配對整理，最後整理完的項再與最後項進行配對整理)

………

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2^n+2}\pi\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2^n+2}\pi\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{6}{2^n+2}\pi\right)+\ldots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\cdot 2^n}{2^n+2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)}\right]$$

(由引理二，可推得知

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2^n+2}\pi\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2^n+2}\pi\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{6}{2^n+2}\pi\right)+\ldots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\cdot 2^n}{2^n+2}\pi\right)=-\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\cdot\left(2^n+1\right)}{2^n+2}\pi\right)$$)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{-\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\cdot\left(2^n+1\right)}{2^n+2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)}\right]=1$$ ，得證。

($\because \sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)$，且 $-\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\cdot\left(2^n+1\right)}{2^n+2}\pi\right)=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)$)

(四) 探討正偶邊形中邊數不為 2^n+2 的情形

設正 $2N$ 邊形(去除邊數為 2^n+2 的情況) $Z_0Z_1Z_2...Z_{2N-1}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $Z_0,Z_1,Z_2,...,Z_{2N-1}$ 作連線，分別為

$\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,...,\overline{PZ_{2N-1}}=l_{2N}$ ，

試證 $\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\frac{1}{\Delta PZ_{2N-2}Z_{2N-1}}=\frac{1}{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}$

(即證 $\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_{2N-2}Z_{2N-1}}=1$)。

$pf.$

不失一般性，我們將正 $2N$ 邊形 $Z_0Z_1Z_2...Z_{2N-1}$ 的外接圓，建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的<u>單位圓上</u>，P 點於 Z_0Z_{2N-1} 上。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{2N}\right)$，$k=0,1,2,...,(2N-1)$

且知 $\angle POZ_0=\theta$，$\therefore\ \angle Z_0Z_1P=\frac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N},...,\angle Z_{2N-2}Z_{2N-1}P=\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}$ ，

$\angle PZ_0Z_{2N-1}=\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}$，並且可令正 $2N$ 邊形的邊長為 m ，

故 $\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_{2N-2}Z_{2N-1}}=\Delta PZ_0Z_{2N-1}\left(\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+...+\frac{1}{\Delta PZ_{2N-2}Z_{2N-1}}\right)$

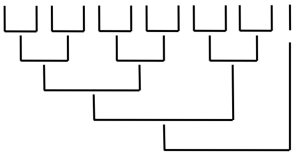
$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)}+...+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-1)\pi}{2N}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)}+...+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-3)\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-1)\pi}{2N}\right)}\right]$$

(將第一、二項通分，二、三項通分，依次類推配對通分，最後項先不用配對，其餘利用和差

化積整理)

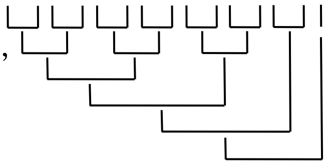
$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2N}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2N}\right)}+\ldots+\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-6)\pi}{2N}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-6)\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-1)\pi}{2N}\right)}\right]$$



(再將除最後一項外，依前一步驟方法類推配對通分，
並再利用和差化積整理)

………

(持續依此模式類推配對整理，最後整理完的項再與最後項進行配對整理，
配對模式示意圖如右)



$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi_1\pi}{2N}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi_2\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right)+\ldots+\cos\left(\frac{4N\pi}{2N}\right)\right]-\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4N}{2N}\pi\right)+\ldots+\cos\left(\frac{4\pi}{2N}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-1)\pi}{2N}\right)}\right]$$

(Φ_1,Φ_2 為與最後項配對前的項裡面的角度值)

(由引理二，$\dfrac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right)+\ldots+\cos\left(\frac{4N\pi}{2N}\right)-\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4N}{2N}\pi\right)+\ldots+\cos\left(\frac{4\pi}{2N}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi_1\pi}{2N}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi_2\pi}{2N}\right)}=1$，且分母進行積
化和差，可整理得之為 1)

(又$\because \sin\left(\dfrac{\pi}{2N}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{(2N-1)\pi}{2N}\right)$)

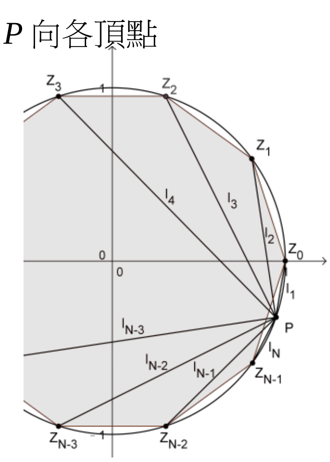
$=1$ (最後分子分母都會抵銷)，得證。

由上我們完成了所圍成三角形面積的定值關係，但在證明過程中發覺，即使我們利用相同的技巧去證明，但在不同的邊數作最後配對整理時，依然會因為邊數的關係，在最後化簡時有些許的不一致，雖不影響結論，但使得我們證明化簡的過程中只能描述其相同的技巧以及結果，而不容易書寫完整。又在偶然的情形下，我們將原先證明 $l_1l_2+l_2l_3+\ldots+l_{N-1}l_N-l_Nl_1$ 定值的式子，將其每項平方相加，結果也發覺是定值，我們將其證明如下呈現。

十五、探討 $l_1l_2+l_2l_3+\ldots+l_{N-1}l_N-l_Nl_1$ 各項平方和的定值關係

設正 N 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{N-1}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $Z_0,Z_1,\cdots,Z_{N-1}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\cdots,\overline{PZ_{N-1}}=l_N$，

試證 $(l_1l_2)^2+(l_2l_3)^2+\ldots+(l_{N-1}l_N)^2+(l_Nl_1)^2$ 為定值。



$pf.$

不失一般性，我們將正 N 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{N-1}$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為$(0,0)$的單位圓上，P點於Z_0Z_{N-1}上

，如右圖。由引理一，可令$l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)$，$k=0,1,2,...,N-1$

故$(l_1l_2)^2+(l_2l_3)^2+...+(l_{N-1}l_N)^2+(l_Nl_1)^2$

$$=\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{N}\right)\right]^2+\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{N}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{N}\right)\right]^2+\cdots+\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{N}\pi\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2$$

(利用積化和差整理)

$$=4\left\{\left[\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)\right]^2+\cdots+\left[\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)-\cos\left(\theta+\frac{N-1}{N}\pi\right)\right]^2\right\}$$

$$=4\left\{(N-1)\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)+\cos^2\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)+\left[\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+\cos^2\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+...+\cos^2\left(\theta+\frac{N-1}{N}\pi\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left[2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+...+2\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)\right]\right\}$$

(利用積化和差、半角公式整理，且$\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)=\cos^2\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)$)

$$=4\left\{N\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)+\left[\frac{1+\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{N}\right)}{2}+\frac{1+\cos\left(2\theta+\frac{6\pi}{N}\right)}{2}+...+\frac{1+\cos\left(2\theta+\frac{2(N-1)}{N}\pi\right)}{2}\right]\right.$$
$$\left.-\left[\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+...+\cos\left(\theta+\frac{2(N-1)}{N}\pi\right)+\cos\theta\right]\right\}$$

$$=4\left\{N\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)+\left[\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{6\pi}{N}\right)+...+\cos\left(2\theta+\frac{2(2N-3)}{N}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{2(N-1)}{N}\pi\right)\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left[2\left(\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{N}\right)+...+\cos\left(\theta+\frac{2(N-1)}{N}\pi\right)\right)\right]\right\}$$

$$=4\left\{N\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)+\left[\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{6\pi}{N}\right)+...+\cos\left(2\theta+\frac{2(2N-3)}{N}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{2(2N-1)}{N}\pi\right)\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left[2\left(\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{N}\right)+...+\cos\left(\theta+\frac{2(N-1)}{N}\pi\right)\right)\right]\right\}$$

由引理二可得，

$$\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{6\pi}{N}\right)+...+\cos\left(2\theta+\frac{2(2N-3)}{N}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{2(2N-1)}{N}\pi\right)=0$$

$$\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{N}\right)+...+\cos\left(\theta+\frac{2(N-1)}{N}\pi\right)=0$$

因此$(l_1l_2)^2+(l_2l_3)^2+...+(l_{N-1}l_N)^2+(l_Nl_1)^2=4N\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)+2N$ (定值)，得證。

以上我們完成了$(l_1l_2)^2+(l_2l_3)^2+...+(l_{N-1}l_N)^2+(l_Nl_1)^2$定值證明，再利用 GGB 檢測時發現 3 次方以上總和就無法形成定值了。

陸、研究結果

一、對於正N邊形外接圓周上的一動點P，P向各頂點$V_1,V_2,\cdots,V_N$作連線，分別為 $\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\cdots,\overline{PV_N}=l_N$，則$\dfrac{l_1+l_N}{l_2+l_3+\cdots+l_{N-1}}$恆為定值。

(1) 若為正奇數($2N-1$)邊形的情況下，其定值$\dfrac{l_1+l_N}{l_2+l_3+\cdots+l_{N-1}}=\dfrac{2\cos\left(\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)}{2\sum_{k=1}^{N-2}\cos\left(\frac{k}{2N-1}\pi\right)+1}$。

(2) 若為正偶數($2N$)邊形的情況下，其定值$\dfrac{l_1+l_N}{l_2+l_3+\cdots+l_{N-1}}=\dfrac{\cos\left(\frac{2N-1}{4N}\pi\right)}{\sum_{k=1}^{N-1}\cos\left(\frac{2k-1}{4N}\pi\right)}$。

二、對於正N邊形外接圓周上的一動點P，P向各頂點$V_1,V_2,\cdots,V_N$作連線，分別為 $\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\cdots,\overline{PV_N}=l_N$，且若外接圓半徑為$R$，則$l_1l_2+l_2l_3+...+l_{N-1}l_N-l_Nl_1$恆為定值，且其定值為$2R^2N\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$。

三、對於正N邊形外接圓周上的一動點P，P向各頂點$V_1,V_2,\cdots,V_N$作連線，分別為 $\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\cdots,\overline{PV_N}=l_N$，$P$與各頂點所圍成的三角形$\Delta PV_1V_2$、$\Delta PV_2V_3$、…、$\Delta PV_{N-1}V_N$、$\Delta PV_1V_N$，則$\dfrac{\Delta PV_1V_N}{\Delta PV_1V_2}+\dfrac{\Delta PV_1V_N}{\Delta PV_2V_3}+...+\dfrac{\Delta PV_1V_N}{\Delta PV_{N-1}V_N}$恆為定值 1，故面積關係為$\dfrac{1}{\Delta PV_1V_2}+\dfrac{1}{\Delta PV_2V_3}+...+\dfrac{1}{\Delta PV_{N-1}V_N}=\dfrac{1}{\Delta PV_1V_N}$。

四、對於正N邊形外接圓周上的一動點P，P向各頂點$V_1,V_2,\cdots,V_N$作連線，分別為 $\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\cdots,\overline{PV_N}=l_N$，且若外接圓半徑為$R$，則$(l_1l_2)^2+(l_2l_3)^2+...+(l_{N-1}l_N)^2+(l_Nl_1)^2$

恆為定值，且其定值為 $4N\cos^2\left(\dfrac{\pi}{N}\right)+2N$ 。

柒、討論

一、我們對正 N 邊形外接圓上一點 P 向各頂點連線的距離中，討論了 $\dfrac{l_1+l_N}{l_2+l_3+\cdots+l_{N-1}}$ 的定值關係，並做出了比較簡單的證明方法，免除了原本在二階遞迴關係式求一般式與結論過於複雜的困境。

二、我們利用數學軟體(GGB)、WolframAlpha 網頁等，猜測定值的可能，最後再透過嚴謹的證明確認其定值式子。或許能依此模式利用數學軟體做更多進一步的分析？

三、我們其實還有利用 GGB 測試 $(l_1l_2)^3+(l_2l_3)^3+\ldots+(l_{N-1}l_N)^3-(l_Nl_1)^3$ 的情況，初步的感覺是定值的，但因無法證出，故或許可以做為往後的延伸。

四、若於空間中(正多面體外接球)思考此問題，則是否依然具備這樣的定值關係？

捌、參考資料

一、王啟光。正 2n+1 邊形外接圓上一點到各頂點的距離關係。取自於師大附中 www.hs.ntnu.edu.tw/~math/files/3.doc

二、許志農(編)。高中數學 3 第一章三角。龍騰文化。

三、許志農(編)。高中選修數學(上) 第二章三角函數。龍騰文化。

【評語】050420

本作品主要在探討「正 n 邊形外接圓弧上一動點，至各頂點距離關係的定值性質」，得到的結果豐富，包括「動點到鄰近兩頂點距離和與到其他點距離和之比為定值」、「動點到兩相鄰頂點距離乘積的關係」、「動點與兩相鄰頂點構成面積倒數和的關係」、「動點到兩相鄰頂點距離乘積平方和為定值」等。推導及結果都能引起一定程度的興趣。主要的手法是：三角幾何以及複數極式來證明一些在多邊形動點到頂點的一些長度、面積定值的證明。幾何的證明主要是靠孟氏定理及托勒密定理；複數方法主要是藉助三角函數積化和差和和差化積的公式。

可以思考的問題是，這麼多相似的定理的背後是否有一些共同的地方？另外，在猜測一些定值時，應嘗試多借助數學分析，而非僅靠電腦軟體輔助。

作品海報

摘要

本研究作品主要在探討「正 N邊形外接圓弧上一動點，至各頂點距離和面積關係的定值性質」，並在透過托勒密定理和複數極式得證後，更進一步去探究調整某些條件後，是否依然具有定值關係。

壹、研究動機

我們在校內數學競賽培訓試題中，看到一題要證明正五邊形外接圓弧上一動點，至各頂點距離關係的定值性質，題目如下：設 P 為正五邊形 $ABCDE$ 外接圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的動點，證明：$\dfrac{\overline{PA}+\overline{PB}}{\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PE}}$，恆為定值。

以及在研究過程中另外發現的題目：設 P 為正三角形外接圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的動點，試求 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}+\overline{PB}\cdot\overline{PC}-\overline{PA}\cdot\overline{PC}=$ ？

貳、研究目的

一、試著證明此定值關係在正偶數邊形和正奇數邊形外接圓上是否均成立？
二、試著尋找除了此性質外，其他模式的距離定值關係，並證明之。
三、試著尋找出是否有面積相關的定值關係，並證明之。

參、研究設備及器材

紙、筆、計算機、筆電、WolframAlpha網頁、GeoGebra

肆、研究過程與方法

一、正 2N-1 邊形外接圓狀況

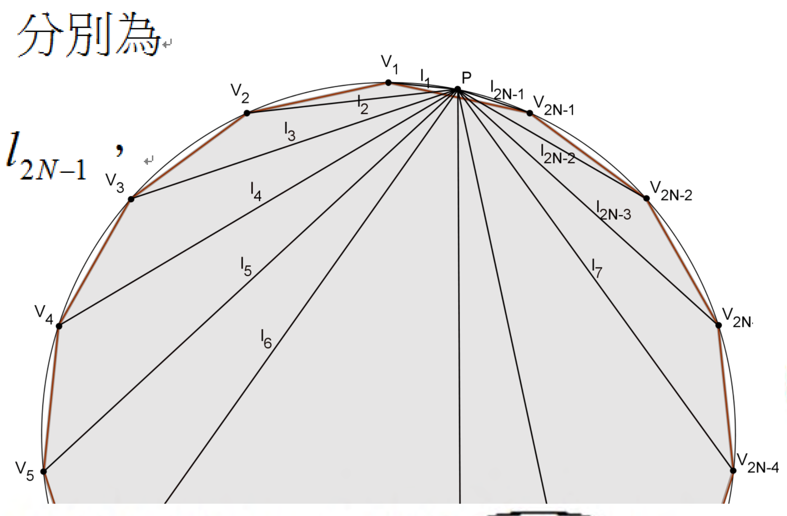
(一) 定值性質敘述：

設正 $2N-1$ 邊形外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，

由 P 向各頂點 $V_1,V_2,\cdots,V_{2N-1}$ 作連線，分別為

$\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\overline{PV_3}=l_3,\cdots,\overline{PV_{2N-1}}=l_{2N-1}$，

試證 $\dfrac{l_1+l_{2N-1}}{l_2+l_3+\cdots+l_{2N-2}}$ 為定值。



(二) 證明：

$pf.$不失一般性，我們假設正 $2N-1$ 邊形邊長為 1，P 點於 $\overset{\frown}{V_1V_{2N-1}}$ 上，

且另外假設 $\overline{V_1V_3}=\overline{V_2V_4}=\overline{V_3V_5}=\cdots=\overline{V_{2N-3}V_{2N-1}}=m$（$m$ 為定值）

$\because V_1V_2V_3P$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$l_1\times\overline{V_2V_3}+l_3\times\overline{V_1V_2}=l_2\times\overline{V_1V_3}\ \Rightarrow\ l_1+l_3=m\times l_2\ \cdots\cdots(1)$

$\because V_2V_3V_4P$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$l_2\times\overline{V_3V_4}+l_4\times\overline{V_2V_3}=l_3\times\overline{V_2V_4}\ \Rightarrow\ l_2+l_4=m\times l_3\ \cdots\cdots(2)$

$\cdots\cdots$以此類推

$\because V_{2N-3}V_{2N-2}V_{2N-1}P$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$l_{2N-3}\times\overline{V_{2N-2}V_{2N-1}}+l_{2N-1}\times\overline{V_{2N-3}V_{2N-2}}=l_{2N-2}\times\overline{V_{2N-3}V_{2N-1}}$

$\Rightarrow l_{2N-3}+l_{2N-1}=m\times l_{2N-2}\ \cdots\cdots(2N-3)$

第 $(N-1)$ 為 $l_{N-1}+l_{N+1}=m\times l_N$

將 $(N-2)+(N)$ 得 $l_{N-2}+l_{N+2}=m(l_{N-1}+l_N)-2l_N=(m^2-2)l_N$

將 $(N-3)+(N+1)$ 得 $l_{N-3}+l_{N+1}=m(l_{N-2}+l_{N+2})-(l_{N-1}+l_{N+1})=(m^3-3m)l_N$

$\cdots\cdots$以此類推

將 $(1)+(2N-3)$ 得 $l_1+l_{2N-1}=m(l_2+l_{2N-2})-(l_3+l_{2N-3})$

經整理後，我們假設數列 $\langle a_i\rangle$ 為 $\begin{cases}a_1=l_{N-1}+l_{N+1}=ml_N\\ a_2=l_{N-2}+l_{N+2}=(m^2-2)l_N\\ a_3=l_{N-3}+l_{N+3}\\ \vdots\\ a_{N-1}=l_1+l_{2N-1}\end{cases}$，

推導此數列時得一般式：

$a_i=l_N(\alpha^i+\beta^i)$，$(\alpha=\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2},\beta=\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2})$

故 $\dfrac{l_1+l_{2N-1}}{l_2+l_3+\cdots+l_{2N-2}}=\dfrac{a_{N-1}}{a_1+a_2+\cdots+a_{N-2}+l_N}$

$$=\frac{l_N(\alpha^{N-1}+\beta^{N-1})}{l_N(\alpha+\beta)+l_N(\alpha^2+\beta^2)+\cdots+l_N(\alpha^{N-2}+\beta^{N-2})+l_N}=\frac{\alpha^{N-1}+\beta^{N-1}}{(\frac{\alpha^{N-1}-\alpha}{\alpha-1}+\frac{\beta^{N-1}-\beta}{\beta-1})+1}$$

(定值)，得證。

二、正 2N 邊形外接圓狀況

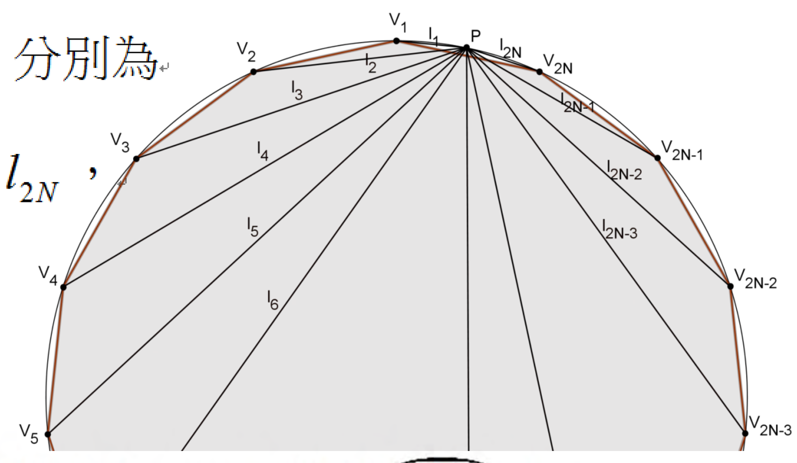
(一) 定值性質敘述：

設正 $2N$ 邊形外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，

由 P 向各頂點 $V_1,V_2,\cdots,V_{2N}$ 作連線，分別為

$\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\overline{PV_3}=l_3,\cdots,\overline{PV_{2N}}=l_{2N}$，

試證 $\dfrac{l_1+l_{2N}}{l_2+l_3+\cdots+l_{2N-1}}$ 為定值。



(二) 證明：

$pf.$不失一般性，我們假設正 $2N$ 邊形邊長為 1，P 點於 $\overset{\frown}{V_1V_{2N}}$ 上。

且另外假設 $\overline{V_1V_3}=\overline{V_2V_4}=\overline{V_3V_5}=\cdots=\overline{V_{2N-2}V_{2N}}=m$（$m$ 為定值）

$\because V_1V_2V_3P$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$l_1\times\overline{V_2V_3}+l_3\times\overline{V_1V_2}=l_2\times\overline{V_1V_3}\ \Rightarrow\ l_1+l_3=m\times l_2\ \cdots\cdots(1)$

$\because V_2V_3V_4P$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$l_2\times\overline{V_3V_4}+l_4\times\overline{V_2V_3}=l_3\times\overline{V_2V_4}\ \Rightarrow\ l_2+l_4=m\times l_3\ \cdots\cdots(2)$

$\cdots\cdots$以此類推

$\because V_{2N-2}V_{2N-1}V_{2N}P$ 為圓內接四邊形，利用托勒密定理得知：

$l_{2N-2}\times\overline{V_{2N-1}V_{2N}}+l_{2N}\times\overline{V_{2N-2}V_{2N-1}}=l_{2N-1}\times\overline{V_{2N-2}V_{2N}}$

$\Rightarrow l_{2N-2}+l_{2N}=m\times l_{2N-1}\ \cdots\cdots(2N-2)$

將 $(N-1)+(N)$ 得 $l_{N-1}+l_{N+2}=(m-1)\times(l_N+l_{N+1})$

將 $(N-2)+(N+1)$ 得 $l_{N-2}+l_{N+3}=m(l_{N-1}+l_{N+2})-(l_N+l_{N+1})=(m^2-m-1)(l_N+l_{N+1})$

將 $(N-3)+(N+2)$ 得 $l_{N-3}+l_{N+4}=m(l_{N-2}+l_{N+3})-(l_{N-1}+l_{N+2})=(m^3-m^2-2m+1)(l_N+l_{N+1})$

$\cdots\cdots$以此類推

將 $(1)+(2N-2)$ 得 $l_1+l_{2N}=m(l_2+l_{2N-1})-(l_3+l_{2N-2})$

經整理後，我們假設數列 $\langle a_i\rangle$ 為 $\begin{cases}a_1=l_N+l_{N+1}\\ a_2=l_{N-1}+l_{N+2}=(m-1)(l_N+l_{N+1})\\ a_3=l_{N-2}+l_{N+3}\\ \vdots\\ a_N=l_1+l_{2N}\end{cases}$，

推導此數列時得一般式：

$a_i=(l_N+l_{N+1})\left[\dfrac{-(\beta-1)}{\alpha-\beta}\alpha^i+\dfrac{\alpha-1}{\alpha-\beta}\beta^i\right]$ $(\alpha=\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2},\beta=\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2})$

故 $\dfrac{l_1+l_{2N}}{l_2+l_3+\cdots+l_{2N-1}}=\dfrac{a_N}{a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}}$

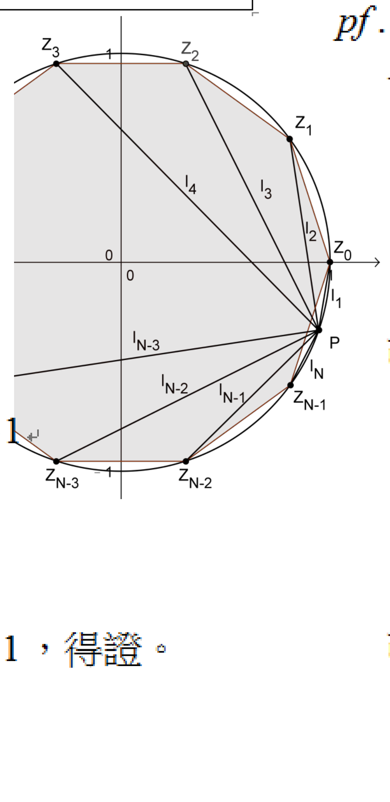
$$=\frac{[-(\beta-1)]\alpha^N+(\alpha-1)\beta^N}{[-(\beta-1)\alpha+(\alpha-1)\beta]+[-(\beta-1)\alpha^2+(\alpha-1)\beta^2]+\cdots+[-(\beta-1)\alpha^{N-1}+(\alpha-1)\beta^{N-1}]}$$

$$=\frac{[-(\beta-1)]\alpha^N+(\alpha-1)\beta^N}{[-(\beta-1)]\left(\frac{\alpha^N-\alpha}{\alpha-1}\right)+(\alpha-1)\left(\frac{\beta^N-\beta}{\beta-1}\right)}$$

(定值)，得證。

引理一

正 N 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{N-1}$ 的外接圓，建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，不失一般性，將 P 點落在 $\overset{\frown}{Z_0Z_{N-1}}$ 上，如下圖所示，則 $\overline{PZ_k}=|P-Z_k|=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{N}\right)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$。



$pf.$不失一般性，可令 $Z_k=\cos\left(\dfrac{2k}{N}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{2k}{N}\pi\right)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

，且設 $P=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$，$0\le\theta\le\dfrac{2\pi}{N}$

則 $\overline{PZ_k}=|P-Z_k|=\left\|\left[\cos(-\theta)-\cos\left(\dfrac{2k}{N}\pi\right)\right]+i\left[\sin(-\theta)-\sin\left(\dfrac{2k}{N}\pi\right)\right]\right\|$

$=\sqrt{2^2\cdot\sin^2\left(\theta+\dfrac{2k}{N}\pi\right)}=\left|2\sin\left(\theta+\dfrac{2k}{N}\pi\right)\right|$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

$\because\ 0\le\theta\le\dfrac{2\pi}{N}\ \Rightarrow\ 0\le\dfrac{\theta}{2}\le\dfrac{\pi}{N}\ \Rightarrow\ 0\le\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k}{N}\pi\le\pi$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

$\therefore\ \sin\left(\theta+\dfrac{2k}{N}\pi\right)>0$，故 $\overline{PZ_k}=|P-Z_k|=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{N}\right)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$，得證。

引理二

$\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\theta+\dfrac{2k}{N}\pi\right)=0$，$\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{N}\right)=0$；$\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\theta+\dfrac{2k+1}{N}\pi\right)=0$，$\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\theta+\dfrac{2k+1}{N}\pi\right)=0$，

$k=0,1,\cdots,N-1$

$pf.$設複數方程式 $Z^N=\cos(N\theta)+i\sin(N\theta)$，$N$ 屬於正整數

可令複數 $Z=\cos\phi+i\sin\phi$，則 $(\cos\phi+i\sin\phi)^N=\cos(N\theta)+i\sin(N\theta)$

由棣美佛定理可知，$\cos(N\phi)+i\sin(N\phi)=\cos(N\theta)+i\sin(N\theta)$

$N\phi=N\theta+2k\pi$，$k=0,1,\cdots,N-1\ \Rightarrow\ \phi=\dfrac{N\theta+2k\pi}{N}=\theta+\dfrac{2k\pi}{N}$，$k=0,1,\cdots,N-1$

故可得 $Z_k=\cos\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{N}\right)+i\sin\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{N}\right)$，$k=0,1,\cdots,N-1$ 為其複數方程式

$Z^N=\cos(N\theta)+i\sin(N\theta)$，的 N 個複數根。由於複數的 N 次方根和為 0，

$\therefore\sum_{k=0}^{N-1}Z_k=0\ \Rightarrow\ \sum_{k=0}^{N-1}\left(\cos\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{N}\right)+i\sin\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{N}\right)\right)=0$

故 $\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{N}\right)=0$ 且 $\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{N}\right)=0$，$k=0,1,\cdots,N-1$

同理可證，$\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\theta+\dfrac{2k+1}{N}\pi\right)=0$，$\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\theta+\dfrac{2k+1}{N}\pi\right)=0$，$k=0,1,\cdots,N-1$，得證。

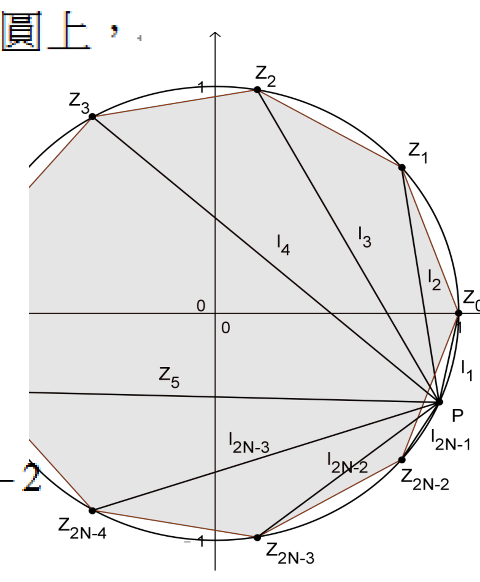
三、另外思考證法(複數平面)推廣正奇數邊形外接圓

將正 $2N-1$ 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{2N-2}$ 建構在複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，

P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $Z_0,Z_1,\cdots,Z_{2N-2}$ 作

連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3,\cdots\cdots,\overline{PZ_{2N-2}}=l_{2N-1}$，

試證 $\dfrac{l_1+l_{2N-1}}{l_2+l_3+\ldots+l_{2N-2}}$ 為定值。



pf. 不失一般性，將 P 點落在 $\widehat{Z_0Z_{2N-2}}$ 上，如右圖。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{2N-1}\right)$，$k=0,1,2,\cdots,2N-2$

$$\text{故}\ \frac{l_1+l_{2N-1}}{l_2+l_3+\ldots+l_{2N-2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-2}{2N-1}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2N-1}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-3}{2N-1}\pi\right)}$$

(利用和差化積整理)

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{N-2}{2N-1}\pi\right)+2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{N-3}{2N-1}\pi\right)+\ldots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)}$$

$$=\frac{2\cos\left(\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{2N-1}\right)+\ldots+2\cos\left(\frac{N-2}{2N-1}\pi\right)+1}=\frac{2\cos\left(\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)}{1+2\sum_{k=1}^{N-2}\cos\left(\frac{k}{2N-1}\pi\right)}\ \text{(定值)，得證。}$$

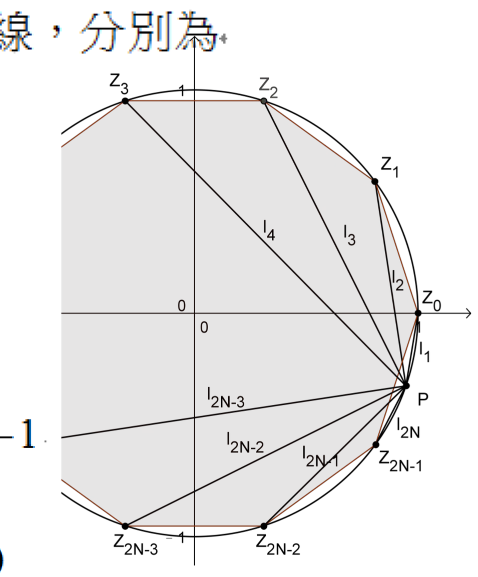
四、另外思考證法(複數平面)推廣正偶數邊形外接圓

將正 $2N$ 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{2N-1}$ 建構在複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，

P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $Z_0,Z_1,\cdots,Z_{2N-1}$ 作連線，分別為

$\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\overline{PZ_2}=l_3,\cdots\cdots,\overline{PZ_{2N-1}}=l_{2N}$，

試證 $\dfrac{l_1+l_{2N}}{l_2+l_3+\ldots+l_{2N-1}}$ 為定值。



pf. 不失一般性，將 P 點落在 $\widehat{Z_0Z_{2N-1}}$ 上，如右圖。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{2N}\right)$，$k=0,1,2,\cdots,2N-1$

$$\text{故}\ \frac{l_1+l_{2N}}{l_2+l_3+\ldots+l_{2N-1}}=\frac{\sin(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-1}{2N}\pi)}{\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2N}\pi)+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2N}\pi)+\ldots+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-3}{2N}\pi)+\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-2}{2N}\pi)}$$

(利用和差化積整理)

$$=\frac{2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-1}{4N}\pi)\cdot\cos(\frac{2N-1}{4N}\pi)}{2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-1}{4N}\pi)\cdot\cos(\frac{2N-3}{4N}\pi)+2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-1}{4N}\pi)\cdot\cos(\frac{2N-5}{4N}\pi)+\cdots+2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2N-1}{4N}\pi)\cdot\cos(\frac{\pi}{4N})}$$

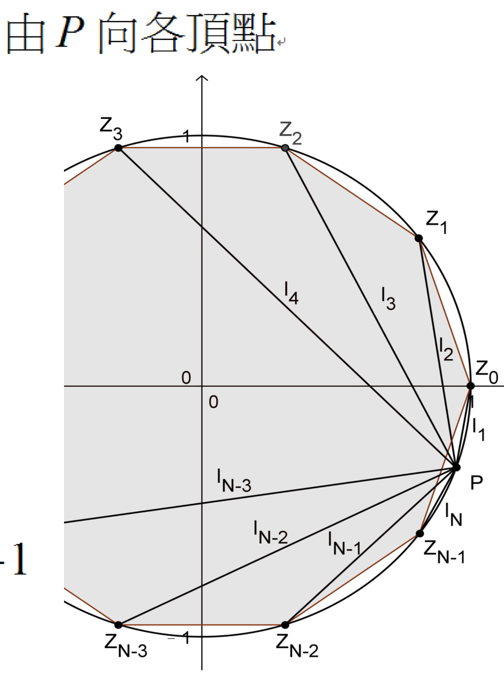
$$=\frac{\cos(\frac{2N-1}{4N}\pi)}{\cos(\frac{\pi}{4N})+\cos(\frac{3\pi}{4N})+\cdots+\cos(\frac{2N-3}{4N}\pi)}=\frac{\cos\left(\frac{2N-1}{4N}\pi\right)}{\sum_{k=1}^{N-1}\cos\left(\frac{2k-1}{4N}\pi\right)}\text{(定值)，得證。}$$

五、探討點 P 向各頂點做距離的情況

設正 N 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{N-1}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點

$Z_0,Z_1,\cdots,Z_{N-1}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\cdots,\overline{PZ_{N-1}}=l_N$，

試證 $l_1l_2+l_2l_3+\ldots+l_{N-1}l_N-l_Nl_1$ 為定值。



pf. 不失一般性，我們將正 N 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{N-1}$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 點於 $\widehat{Z_0Z_{N-1}}$。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{N}\right)$，$k=0,1,2,\ldots,N-1$

故 $l_1l_2+l_2l_3+\ldots+l_{N-1}l_N-l_Nl_1$

$$=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{N}\right)+2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{N}\right)\cdot2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{N}\right)+\cdots-2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{N}\pi\right)\cdot2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+\cdots-\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)+\cos\left(\theta+\frac{N-1}{N}\pi\right)\right]$$

$$=2\left\{(N-1)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)-\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{(2N-3)}{N}\pi\right)-\cos\left(\theta+\frac{(N-1)}{N}\pi\right)\right]\right\}$$

$$=2\left\{(N-1)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{(2N-3)\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{(2N-1)}{N}\pi\right)\right]\right\}$$

由引理二可得，

$$\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{2N-1}{N}\pi\right)=0$$

因此 $l_1l_2+l_2l_3+\ldots+l_{N-1}l_N-l_Nl_1=2\times N\cos\left(\dfrac{\pi}{N}\right)=2N\cos\left(\dfrac{\pi}{N}\right)$ (定值)，得證。

六、探討點 P 向各頂點做距離的平方情況

設正 N 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{N-1}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點

$Z_0,Z_1,\cdots,Z_{N-1}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\cdots,\overline{PZ_{N-1}}=l_N$，

試證 $(l_1l_2)^2+(l_2l_3)^2+\ldots+(l_{N-1}l_N)^2+(l_Nl_1)^2$ 為定值。

pf. 不失一般性，我們將正 N 邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_{N-1}$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 點於 $\widehat{Z_0Z_{N-1}}$。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{N}\right)$，$k=0,1,2,\ldots,N-1$

故 $(l_1l_2)^2+(l_2l_3)^2+\ldots+(l_{N-1}l_N)^2+(l_Nl_1)^2$

$$=\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{N}\right)\right]^2+\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{N}\right)\cdot2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{N}\right)\right]^2+\cdots+\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{N-1}{N}\pi\right)\cdot2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2$$

(利用積化和差整理)

$$=4\left\{\left[\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)\right]^2+\cdots+\left[\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)-\cos\left(\theta+\frac{N-1}{N}\pi\right)\right]^2\right\}$$

$$=4\left\{(N-1)\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)+\cos^2\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)+\left[\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+\cos^2\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+\ldots+\cos^2\left(\theta+\frac{N-1}{N}\pi\right)\right]\right.$$

$$\left.-\left[2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{N}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{N}\right)+\ldots+2\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)\right]\right\}$$

(利用積化和差、半角公式整理，且 $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{N}\right)=\cos^2\left(\dfrac{N-1}{N}\pi\right)$)

$$=4\left\{N\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)+\left[\frac{1+\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{N}\right)}{2}+\frac{1+\cos\left(2\theta+\frac{6\pi}{N}\right)}{2}+\ldots+\frac{1+\cos\left(2\theta+\frac{2(N-1)}{N}\pi\right)}{2}\right]\right.$$

$$\left.-\left[\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\ldots+\cos\left(\theta+\frac{2(N-1)}{N}\pi\right)+\cos\theta\right]\right\}$$

$$=4\left\{N\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)+\left[\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{6\pi}{N}\right)+\ldots+\cos\left(2\theta+\frac{2(2N-3)}{N}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{2(2N-1)}{N}\pi\right)\right)\right]\right.$$

$$\left.-\left[2\left(\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{N}\right)+\ldots+\cos\left(\theta+\frac{2(N-1)}{N}\pi\right)\right)\right]\right\}$$

由引理二可得，

$$\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{6\pi}{N}\right)+\ldots+\cos\left(2\theta+\frac{2(2N-3)}{N}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{2(2N-1)}{N}\pi\right)=0$$

$$\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{N}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{N}\right)+\ldots+\cos\left(\theta+\frac{2(N-1)}{N}\pi\right)=0$$

因此 $(l_1l_2)^2+(l_2l_3)^2+\ldots+(l_{N-1}l_N)^2+(l_Nl_1)^2=4N\cos^2\left(\dfrac{\pi}{N}\right)+2N$ (定值)，得證。

引理三

$\displaystyle\prod_{k=1}^{N}2^N\cos\left(\frac{2^{k-1}}{2^N+1}\pi\right)=1$，$N$ 為大於 1 的正整數。

$$pf.\ \text{令}\ S=\prod_{k=1}^{N}2^N\cos\left(\frac{2^{k-1}}{2^N+1}\pi\right)=2^N\cos\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{2^N+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{2^{N-1}}{2^N+1}\pi\right)$$

兩邊同乘 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^N+1}\right)$，

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot S=\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot\left[2^N\cos\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{2^N+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{2^{N-1}}{2^N+1}\pi\right)\right]$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot S=2\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot\left[2^{N-1}\cos\left(\frac{2\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{2^N+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{2^{N-1}}{2^N+1}\pi\right)\right]$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot S=\sin\left(\frac{2\pi}{2^N+1}\right)\left[2^{N-1}\cos\left(\frac{2\pi}{2^N+1}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{2^N+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{2^{N-1}}{2^N+1}\pi\right)\right]$$

…

依此類推，可得 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^N+1}\right)\cdot S=\sin\left(\dfrac{2^N}{2^N+1}\pi\right)$，

$$\text{故}\prod_{k=1}^{N}\cos\left(\frac{2^{k-1}}{2^N+1}\right)=S=\frac{\sin\left(\frac{2^N}{2^N+1}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^N+1}\right)}=1\text{，得證。}$$

七、探討正奇邊形外接圓上點 P向各頂點連線所圍成三角形面積的定值關係式

(一) 探討正奇邊形中邊數為 $2^n+1(n\in\mathbb{N})$ 的情形

設正 2^n+1 邊形 $Z_0Z_1Z_2\ldots Z_{2^n}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點

$Z_0,Z_1,Z_2,\ldots,Z_{2^n}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\ldots,\overline{PZ_{2^n}}=l_{2^n+1}$，

試證 $\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\dfrac{1}{\Delta PZ_{2^n-1}Z_{2^n}}=\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_{2^n}}$ (即證 $\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_{2^n-1}Z_{2^n}}=1$)。

pf. 不失一般性，我們將正 2^n+1 邊形 $Z_0Z_1Z_2\ldots Z_{2^n}$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 點於 $\widehat{Z_0Z_{2^n}}$ 上。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{2^n+1}\right)$，$k=0,1,2,\ldots,2^n$

且知 $\angle POZ_0=\theta$，$\therefore\ \angle Z_0Z_1P=\dfrac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2^n+1},\ldots,\angle Z_{2^n-1}Z_{2^n}P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{(2^n-1)\pi}{2^n+1}$，

$\angle PZ_0Z_{2^n}=\dfrac{\pi}{2^n+1}-\dfrac{\theta}{2}$，並且可令正 2^n+1 邊形的邊長為 m，

$$\text{故}\ \frac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\frac{\Delta PZ_0Z_{2^n}}{\Delta PZ_{2^n-1}Z_{2^n}}=\Delta PZ_0Z_{2^n}\left(\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\frac{1}{\Delta PZ_{2^n-1}Z_{2^n}}\right)$$

八、探討正偶邊形外接圓上點 P向各頂點連線所圍成三角形面積的定值關係式

(一) 探討正偶邊形中邊數為 $2^n+2(n\in\mathbb{N})$ 的情形

設正 2^n+2 邊形 $Z_0Z_1Z_2\ldots Z_{2^n+1}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點

$Z_0,Z_1,Z_2,\ldots,Z_{2^n+1}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\ldots,\overline{PZ_{2^n+1}}=l_{2^n+2}$，

試證 $\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\dfrac{1}{\Delta PZ_{2^n}Z_{2^n+1}}=\dfrac{1}{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}$ (即證 $\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_0Z_1}+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\dfrac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_{2^n}Z_{2^n+1}}=1$)。

pf. 不失一般性，我們將正 2^n+2 邊形 $Z_0Z_1Z_2\ldots Z_{2^n+1}$ 的外接圓，

建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 點於 $\widehat{Z_0Z_{2^n+1}}$ 上。

由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k\pi}{2^n+2}\right)$，$k=0,1,2,\ldots,(2^n+1)$

且知 $\angle POZ_0=\theta$，$\therefore\ \angle Z_0Z_1P=\dfrac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2^n+2},\ldots,\angle Z_{2^n}Z_{2^n+1}P=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{2^n\pi}{2^n+2}$，

$\angle PZ_0Z_{2^n+1}=\dfrac{\pi}{2^n+2}-\dfrac{\theta}{2}$，並且可令正 2^n+2 邊形的邊長為 m，

$$\text{故}\ \frac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\frac{\Delta PZ_0Z_{2^n+1}}{\Delta PZ_{2^n}Z_{2^n+1}}=\Delta PZ_0Z_{2^n+1}\left(\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\ldots+\frac{1}{\Delta PZ_{2^n}Z_{2^n+1}}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1}\right)}+\dots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-1)\pi}{2^n+1}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+1}\right)}+\dots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-1)\pi}{2^n+1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-2)\pi}{2^n+1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2^n-2)\pi}{2^n+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)}\right]$$

(將第一、二項通分，三、四項通分，依次類推配對通分，再利用和差化積整理。持續的兩兩配對整理。)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+1}\right)\cdot2\cos\left(\frac{2\pi}{2^n+1}\right)\dots2\cos\left(\frac{2^{n-1}\pi}{2^n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)}\right]$$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{2^n+1}\right)\cdot2\cos\left(\frac{2\pi}{2^n+1}\right)\cdot\ldots\cdot2\cos\left(\frac{2^{n-1}\pi}{2^n+1}\right)=1$ (由引理 3)，得證。

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+2}\right)}+\dots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2^n+2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2^n+2}\right)}+\dots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)}\right]$$

(將第一、二項通分，三、四項通分，依次類推配對通分，最後項先不用配對，
其餘利用和差化積整理。持續兩兩配對。)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2^n+2}\pi\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2^n+2}\pi\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{6}{2^n+2}\pi\right)+\dots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\cdot2^n}{2^n+2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)}\right]$$

由引理二，可得知

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n+2}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{-\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\cdot(2^n+1)}{2^n+2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n}{2^n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2^n+1}{2^n+2}\pi\right)}\right]=1$$，得證。

(二) 探討正奇邊形中邊數不為 2^n+1 的情形

設正 $2N-1$ 邊形(去除邊數為 2^n+1 的情況) $Z_0Z_1Z_2\dots Z_{2N-2}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $Z_0,Z_1,Z_2,\dots,Z_{2N-2}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\dots,\overline{PZ_{2N-2}}=l_{2N-1}$

試證 $\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\dots+\frac{1}{\Delta PZ_{2N-3}Z_{2N-2}}=\frac{1}{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}$ (即證 $\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_1Z_2}+\dots+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_{2N-3}Z_{2N-2}}=1$)

pf. 不失一般性，我們將正 $2N-1$ 邊形 $Z_0Z_1Z_2\dots Z_{2N-2}$ 的外接圓，
建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 點於 $\widehat{Z_0Z_{2N-2}}$ 上。
由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{2N-1}\right)$，$k=0,1,2,\dots,(2N-2)$

且知 $\angle POZ_0=\theta$，∴ $\angle Z_0Z_1P=\frac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1},\dots,\angle Z_{2N-3}Z_{2N-2}P=\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-3)\pi}{2N-1}$，
$\angle PZ_0Z_{2N-2}=\frac{\pi}{2N-1}-\frac{\theta}{2}$，並且可令正 $2N-1$ 邊形的邊長為 m，

故 $\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_1Z_2}+\dots+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-2}}{\Delta PZ_{2N-3}Z_{2N-2}}=\Delta PZ_0Z_{2N-2}\left(\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\dots+\frac{1}{\Delta PZ_{2N-3}Z_{2N-2}}\right)$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N-1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1}\right)}+\dots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N-1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-3)\pi}{2N-1}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N-1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N-1}\right)}+\dots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-3)\pi}{2N-1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N-1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N-1}\right)}\right]$$

(將第一、二項通分，三、四項通分，依次類推配對通分後剩 N 項，再利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N-1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2N-1}\right)}+\dots+\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N-1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-6)\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-6)\pi}{2N-1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N-1}\right)}\right]$$

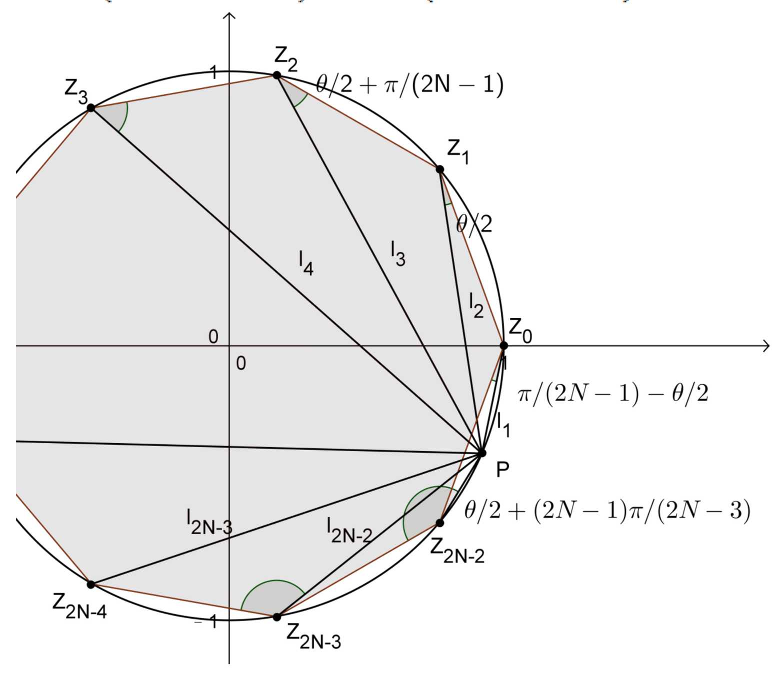
(再將此 N 項，依前一步驟方法類推配對通分，並再利用和差化積整理，持續依此模式類推配對整理，此過程中會發生項數為奇數時，最後項就先不用配對，等待後方步驟再進行整理)

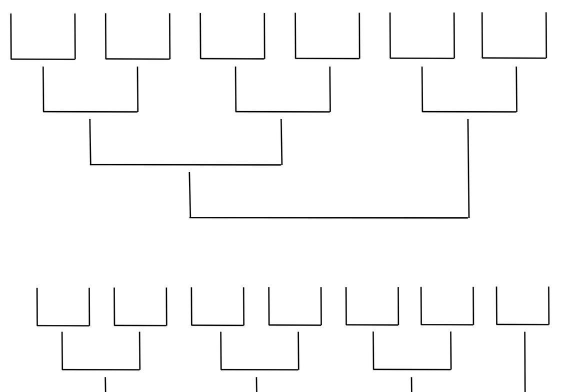
$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi\pi}{2N-1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4N-3}{2N-1}\pi\right)+\dots+\sin\left(\frac{3\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2N\pi}{2N-1}\right)}\right]$$

($\Phi\pi$ 為最後配對的前一項較大角度值)

(由引理二，$\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4N-3}{2N-1}\pi\right)+\dots+\sin\left(\frac{3\pi}{2N-1}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi\pi}{2N-1}\right)}=1$，如正六邊形的整理)

(又∵ $\sin\left(\frac{\pi}{2N+1}-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2N\pi}{2N+1}\right)$)$=1$ (如正六邊形的整理，最後分子分母都會抵銷)，得證。





(二) 探討正偶邊形中邊數不為 2^n+2 的情形

設正 $2N$ 邊形(去除邊數為 2^n+2 的情況) $Z_0Z_1Z_2\dots Z_{2N-1}$ 外接一圓，P 為其外接圓弧上一動點，由 P 向各頂點 $Z_0,Z_1,Z_2,\dots,Z_{2N-1}$ 作連線，分別為 $\overline{PZ_0}=l_1,\overline{PZ_1}=l_2,\dots,\overline{PZ_{2N-1}}=l_{2N}$，

試證 $\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\dots+\frac{1}{\Delta PZ_{2N-2}Z_{2N-1}}=\frac{1}{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}$ (即證 $\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_1Z_2}+\dots+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_{2N-2}Z_{2N-1}}=1$)。

pf. 不失一般性，我們將正 $2N$ 邊形 $Z_0Z_1Z_2\dots Z_{2N-1}$ 的外接圓，
建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上，P 點於 $\widehat{Z_0Z_{2N-1}}$ 上。
由引理一，可令 $l_{k+1}=\overline{PZ_k}=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{2N}\right)$，$k=0,1,2,\dots,(2N-1)$

且知 $\angle POZ_0=\theta$，∴ $\angle Z_0Z_1P=\frac{\theta}{2}$，$\angle Z_1Z_2P=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N},\dots,\angle Z_{2N-2}Z_{2N-1}P=\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}$，

$\angle PZ_0Z_{2N-1}=\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}$，並且可令正 $2N$ 邊形的邊長為 m，

故 $\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_1Z_2}+\dots+\frac{\Delta PZ_0Z_{2N-1}}{\Delta PZ_{2N-2}Z_{2N-1}}=\Delta PZ_0Z_{2N-1}\left(\frac{1}{\Delta PZ_0Z_1}+\frac{1}{\Delta PZ_1Z_2}+\dots+\frac{1}{\Delta PZ_{2N-2}Z_{2N-1}}\right)$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)}+\dots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-1)\pi}{2N}\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N}\right)}+\dots+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-3)\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-1)\pi}{2N}\right)}\right]$$

(將第一、二項通分，三、四項通分，依次類推配對通分，最後項先不用配對，
其餘利用和差化積整理)

$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2N}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2N}\right)}+\dots+\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-4)\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-6)\pi}{2N}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-6)\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-2)\pi}{2N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-1)\pi}{2N}\right)}\right]$$

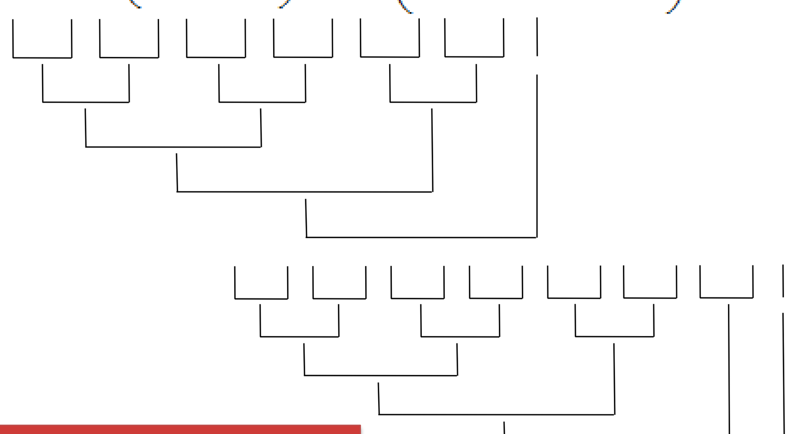
(再將除最後一項外，依前一步驟方法類推配對通分，並再利用和差化積整理，
持續依此模式類推配對整理，最後整理完的項再與最後項進行配對整理)

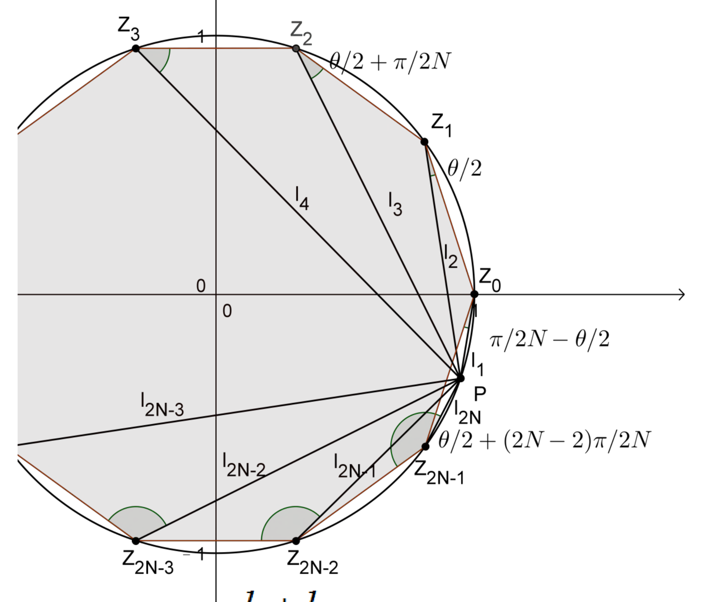
$$=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi_1\pi}{2N}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi_2\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right)+\dots+\cos\left(\frac{4N\pi}{2N}\right)\right]-\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4N}{2N}\pi\right)+\dots+\cos\left(\frac{4\pi}{2N}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-1)\pi}{2N}\right)}\right]$$

($\Phi_1\pi,\Phi_2\pi$ 為與最後項配對前的項裡面的角度值)

(由引理二，$\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right)+\dots+\cos\left(\frac{4N\pi}{2N}\right)-\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4N}{2N}\pi\right)+\dots+\cos\left(\frac{4\pi}{2N}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi_1\pi}{2N}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\Phi_2\pi}{2N}\right)}=1$，
且分母進行積化和差，可整理得之為 1)

(又∵ $\sin\left(\frac{\pi}{2N}-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2N-1)\pi}{2N}\right)$)$=1$ (最後分子分母都會抵銷)，得證。





陸、研究結果

一、對於正 N 邊形外接圓周上的一動點 P，P 向各頂點 $V_1,V_2,\cdots,V_N$ 作連線，分別為 $\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\cdots,\overline{PV_N}=l_N$，則 $\frac{l_1+l_N}{l_2+l_3+\cdots+l_{N-1}}$ 恆為定值。

(1) 若為正奇數($2N-1$)邊形的情況下，其定值 $\frac{l_1+l_N}{l_2+l_3+\cdots+l_{N-1}}=\frac{2\cos\left(\frac{N-1}{2N-1}\pi\right)}{2\sum_{k=1}^{N-2}\cos\left(\frac{k}{2N-1}\pi\right)+1}$。

(2) 若為正偶數($2N$)邊形的情況下，其定值 $\frac{l_1+l_N}{l_2+l_3+\cdots+l_{N-1}}=\frac{\cos\left(\frac{2N-1}{4N}\pi\right)}{\sum_{k=1}^{N-1}\cos\left(\frac{2k-1}{4N}\pi\right)}$。

二、對於正 N 邊形外接圓周上的一動點 P，P 向各頂點 $V_1,V_2,\cdots,V_N$ 作連線，分別為 $\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\cdots,\overline{PV_N}=l_N$，
且若外接圓半徑為 R，則 $l_1l_2+l_2l_3+\dots+l_{N-1}l_N-l_Nl_1$ 恆為定值，且其定值為 $2R^2N\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$。

三、對於正 N 邊形外接圓周上的一動點 P，P 向各頂點 $V_1,V_2,\cdots,V_N$ 作連線，分別為 $\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\cdots,\overline{PV_N}=l_N$，
P 與各頂點所圍成的三角形 ΔPV_1V_2、ΔPV_2V_3、…、$\Delta PV_{N-1}V_N$、ΔPV_1V_N，
則 $\frac{\Delta PV_1V_N}{\Delta PV_1V_2}+\frac{\Delta PV_1V_N}{\Delta PV_2V_3}+\dots+\frac{\Delta PV_1V_N}{\Delta PV_{N-1}V_N}$ 恆為定值 1，故面積關係為 $\frac{1}{\Delta PV_1V_2}+\frac{1}{\Delta PV_2V_3}+\dots+\frac{1}{\Delta PV_{N-1}V_N}=\frac{1}{\Delta PV_1V_N}$。

四、對於正 N 邊形外接圓周上的一動點 P，P 向各頂點 $V_1,V_2,\cdots,V_N$ 作連線，分別為 $\overline{PV_1}=l_1,\overline{PV_2}=l_2,\cdots,\overline{PV_N}=l_N$，
且若外接圓半徑為 R，則 $(l_1l_2)^2+(l_2l_3)^2+\dots+(l_{N-1}l_N)^2+(l_Nl_1)^2$ 恆為定值，且其定值為 $4N\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)+2N$。

柒、討論

一、我們其實還利用GGB測試 $(l_1l_2)^3+(l_2l_3)^3+\dots+(l_{N-1}l_N)^3-(l_Nl_1)^3$，初步感覺是定值，但因無法證出，故或許可以做為往後延伸。

二、若於空間中(正多面體外接球)思考此問題，則是否依然具備這樣的定值關係？

捌、參考資料

一、王啟光。正 2 n +1邊形外接圓上一點到各頂點的距離關係。取自於師大附中www.hs.ntnu.edu.tw/~math/files/3.doc
二、許志農(編)。高中數學2 第一章 數列與級數；高中數學3 第一章 三角。龍騰文化。
三、許志農(編)。高中選修數學(上) 第二章三角函數。龍騰文化。