# 中華民國第58屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

---

高級中等學校組　數學科

## 第二名

050419

## 圓周上跳躍回歸問題之研究

學校名稱：國立鳳山高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 楊品賢<br>高二 張維倫 | 黃佩瑜<br>顏祥益 |

關鍵詞：圓周、跳躍、回歸

# 摘要

圓周上相異$n$個點，將圓周分割成$n$段弧，每次每個點沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點經$m$次變換後回到初始點，則$m$的最小值以及$m$的所有可能值為何？我們發現，$m$的最小值為$n+2$。更進一步發現，$m$的充要條件為$m \geq n+2$且$m \neq kn-1, kn, kn+1$，其中$k$為正奇數。接著，我們將問題一般化，圓周上相異$n$個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之$p:q$處，若某點經$m$次變換後回到初始點，則$m$的最小值以及$m$的所有可能值為何？同時，我們也針對$n$個點具特殊初始位置座標來研究其回歸性質。


## 壹、研究動機

第 27 屆環球城市數學競賽試題中，有一個關於圓周上跳躍問題：「12 隻蚱蜢處於圓周上的不同點，牠們將圓周分割成 12 段弧，每步每隻蚱蜢同時沿順時針方向跳到以牠為端點的弧之中點，得到新的 12 段弧，繼續這樣的跳步，則是否能在 12 步後至少有一隻蚱蜢回到初始點？」我們對這樣的回歸性質感到好奇，便展開一連串的研究。

## 貳、研究目的

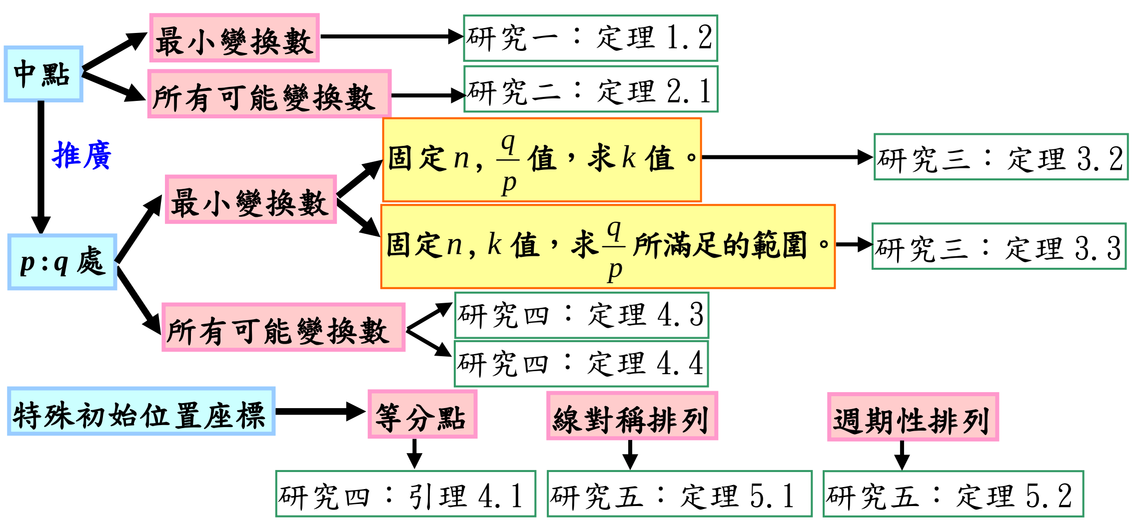
一、圓周上相異$n$個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的最小變換數。
二、圓周上相異$n$個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的所有可能變換數。
三、圓周上相異$n$個點變換成與下一點所成弧之$p:q$處，求某點回歸的最小變換數。
四、圓周上相異$n$個點變換成與下一點所成弧之$p:q$處，求某點回歸的所有可能變換數。
五、圓周上相異$n$個點在特殊初始位置座標之回歸性質研究。

## 參、研究器材

紙、筆、電腦、GeoGebra、Mathematica、C++

## 肆、研究過程與方法

研究架構：

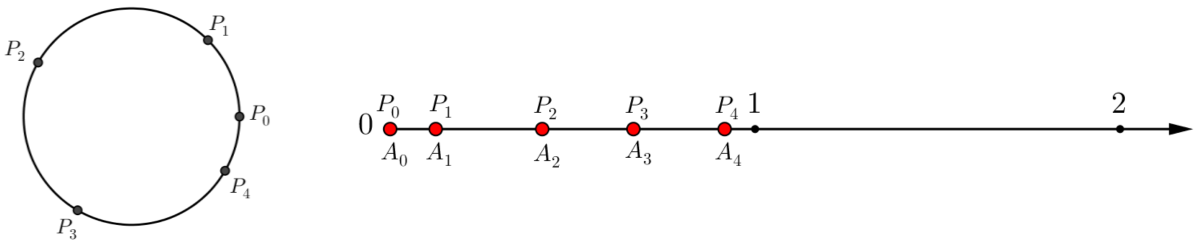


說明：為了方便以**極座標**撰寫程式，我們將 $n$ 隻蚱蜢改成以逆時針方向排序在圓周上，並以逆時針方向跳躍。同時，將此跳躍問題轉化成數學問題：「圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點經 $m$ 次變換後回到初始點，求 $m$ 的最小值。」

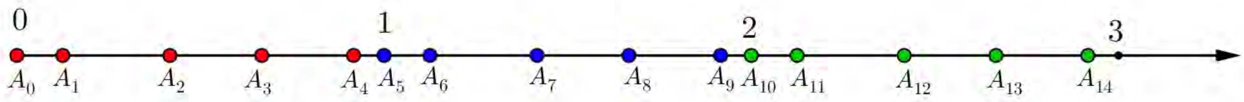
文獻探討：對於圓周上的跳躍問題，我們搜尋了許多資料，目前尚未有人有相關問題探討。文獻[2]為我們針對**特殊初始位置**的回歸問題之研究，而此篇作品，主要是針對**任意初始位置**的回歸問題作延伸探討。

符號與名詞定義：

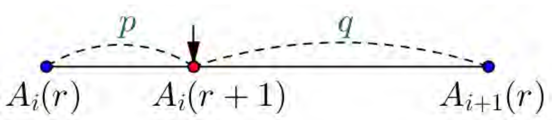
**【定義一】** 圓周上相異 $n$ 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$，將圓周展開成以 $P_0$ 為起始點的射線，以 $P_0$ 為原點，單位長為 1 圓周長，若 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ 為 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ 在此射線上的座標，則稱 $[A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}]$ 為 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ 之位置座標。（如下圖）

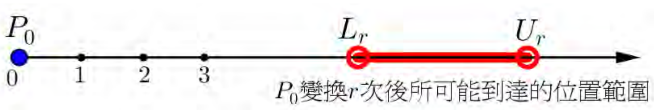



**【定義二】** 定義數列 $\langle A_i \rangle$，$A_i$ 為點 $P_i$ 的初始位置座標且滿足 $|A_{i+n} - A_i| = 1, \forall i \in N \cup \{0\}$。其中位置座標差為整數的任意兩個點在圓周上重合。




**【定義三】** 圓周上相異 $n$ 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，稱為一次變換。設點 $P_i$ 的初始位置座標為 $A_i$，$P_i$ 變換 $r$ 次後的點之位置坐標為 $A_i(r)$，其中 $A_i(0) = A_i$。由分點公式知，$A_i(r+1) = \dfrac{qA_i(r) + pA_{i+1}(r)}{p+q}$。（下左圖）

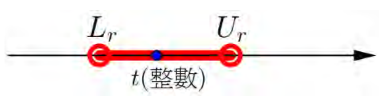



**【定義四】** 若某點經變換 $r$ 次後回到初始位置，則稱此點變換 $r$ 次後回歸。

**【定義五】** 設點 $P_i$ 變換 $r$ 次後的點之位置坐標為 $A_i(r)$，若 $A_i(r)$ 的所有可能值之範圍為開區間 $(L_r, U_r)$，稱 $L_r$ 為 $A_i(r)$ 的最小極端值，$U_r$ 為 $A_i(r)$ 的最大極端值。（如上右圖）

**【解題技巧】**




$A_0(r)$ 的 $(L_r, U_r)$ 含整數點 $\Rightarrow P_0$ 可能回歸


$A_0(r)$ 的 $(L_r, U_r)$ 不含整數點 $\Rightarrow P_0$ 不可能回歸

研究一：圓周上相異$n$個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的最小變換數。

**一、推導$P_i$變換$r$次後的點之位置坐標$A_i(r)$之公式：**（由定義三知：$A_i(r+1)=\dfrac{A_i(r)+A_{i+1}(r)}{2}$）

以$n=3$來觀察：設圓周上相異三個點$P_0,P_1,P_2$，其初始位置座標$[A_0,A_1,A_2]$。

(1)1 次變換：$A_0(1)=\dfrac{A_0(0)+A_1(0)}{2}=\dfrac{A_0+A_1}{2}$；同理$A_1(1)=\dfrac{A_1+A_2}{2}$；$A_2(1)=\dfrac{A_2+A_3}{2}$。

(2)2 次變換：$A_0(2)=\dfrac{A_0(1)+A_1(1)}{2}=\dfrac{\frac{A_0+A_1}{2}+\frac{A_1+A_2}{2}}{2}=\dfrac{1}{4}(A_0+2A_1+A_2)$

同理$A_1(2)=\dfrac{1}{4}(A_1+2A_2+A_3)$；$A_2(2)=\dfrac{1}{4}(A_2+2A_3+A_4)$。

(3)3 次變換：$A_0(3)=\dfrac{A_0(2)+A_1(2)}{2}=\dfrac{\frac{1}{4}(A_0+2A_1+A_2)+\frac{1}{4}(A_1+2A_2+A_3)}{2}=\dfrac{1}{8}(A_0+3A_1+3A_2+A_3)$

同理　$A_1(3)=\dfrac{1}{8}(A_1+3A_2+3A_3+A_4)$；$A_2(3)=\dfrac{1}{8}(A_2+3A_3+3A_4+A_5)$。

(4) 4 次變換：

$$A_0(4)=\frac{A_0(3)+A_1(3)}{2}=\frac{\frac{1}{8}(A_0+3A_1+3A_2+A_3)+\frac{1}{8}(A_1+3A_2+3A_3+A_4)}{2}=\frac{1}{16}(A_0+4A_1+6A_2+4A_3+A_4)$$

同理$A_1(4)=\dfrac{1}{16}(A_1+4A_2+6A_3+4A_4+A_5)$；$A_2(4)=\dfrac{1}{16}(A_2+4A_3+6A_4+4A_5+A_6)$。

由以上可觀察出以下公式：

**定理 1.1**：圓周上相異$n$個點$P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，其初始位置座標為$[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點處，若$P_i$變換$r$次後的點之位置坐標為$A_i(r)$，則

$$A_i(r)=\frac{1}{2^r}\left(C_0^rA_i+C_1^rA_{i+1}+C_2^rA_{i+2}+\cdots\cdots+C_r^rA_{i+r}\right)=\frac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^rA_{i+k}$$ 。

【證明】

(1)當$r=1$時，$A_i(1)=\dfrac{1}{2^1}\left(C_0^1A_i+C_1^1A_{i+1}\right)$原式成立。

(2)假設$r=t$時原式成立，即$A_i(t)=\dfrac{1}{2^t}\left(C_0^tA_i+C_1^tA_{i+1}+C_2^tA_{i+2}+\cdots\cdots+C_t^tA_{i+t}\right)$

則$r=t+1$時

$$A_i(t+1)=\frac{A_i(t)+A_{i+1}(t)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^t}\left(C_0^tA_i+C_1^tA_{i+1}+C_2^tA_{i+2}+\cdots\cdots+C_t^tA_{i+t}\right)+\frac{1}{2^t}\left(C_0^tA_{i+1}+C_1^tA_{i+2}+C_2^tA_{i+3}+\cdots\cdots+C_t^tA_{i+t+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^{t+1}}\left[\underbrace{C_0^t}_{C_0^{t+1}}A_i+\underbrace{\left(C_1^t+C_0^t\right)}_{C_1^{t+1}}A_{i+1}+\underbrace{\left(C_2^t+C_1^t\right)}_{C_2^{t+1}}A_{i+2}+\cdots\cdots+\underbrace{\left(C_t^t+C_{t-1}^t\right)}_{C_t^{t+1}}A_{i+t}+\underbrace{C_t^t}_{C_{t+1}^{t+1}}A_{i+t+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{t+1}}\left(C_0^{t+1}A_i+C_1^{t+1}A_{i+1}+C_2^{t+1}A_{i+2}+\cdots\cdots+C_{t+1}^{t+1}A_{i+t+1}\right)$$

由(1)(2)及數學歸納法得證。■　　　註：巴斯卡公式：$C_k^{n+1}=C_k^n+C_{k-1}^n$。

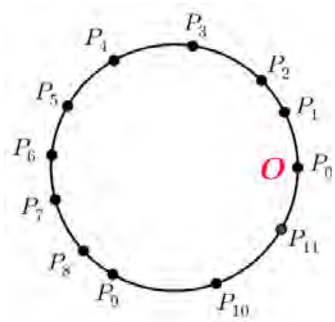
說明：由 $A_0(r)$ 的通式可觀察到，對於某個固定值 $r$，初始位置座標 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$ 為滿足 $0=A_0<A_1<\cdots<A_{n-1}<1$ 的任意實數，取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$ 時，可得 $A_0(r)$ 的最小極端值 $L_r$，取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$ 時，可得 $A_0(r)$ 的最大極端值 $U_r$，若任取一實數 $t\in(L_r,U_r)$，則必存在一組初始位置座標 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$，使得 $A_0(r)=t$。

## 二、解決原始問題：

**問題：12 隻蚱蜢處於圓周上的不同點，牠們將圓周分割成 12 段弧，每步每隻蚱蜢同時沿逆時針方向跳到以牠為端點的弧之中點，得到新的 12 段弧，繼續這樣的跳步，則是否能在 12 步後至少有一隻蚱蜢回到初始點？**

【解】沒有任何一隻蚱蜢可以經由跳躍 12 步後回到初始點！

(事實上，跳躍 1~12 步皆不存在任何蚱蜢可以回歸。)




【直觀證明】

若 12 隻蚱蜢為 $P_0,P_1,\cdots\cdots,P_{11}$，不妨假設 $P_0$ 經過跳躍 12 步後回歸。

令 $P_0$ 的初始位置為 $O$ 點，則可觀察到以下性質：

（一）每次跳躍後，$P_0,P_1,\cdots\cdots,P_{11}$ 之次序皆不改變。

（二）若 $P_0$ 在跳躍 12 步後回到 $O$ 點，則 $P_1,P_2,\cdots\cdots,P_{11}$ 每隻會至少越過或踩上 $O$ 點 1 次。

（三）每跳躍 1 步，至多 1 隻蚱蜢會越過或踩上 $O$ 點。

（四）第一步跳躍時，無任何蚱蜢會越過或踩上 $O$ 點。

由（三）（四）可推得，跳躍 12 次後至多 11 隻蚱蜢越過或踩上 $O$ 點。

然而由（二）知，跳躍 12 步後，12 隻蚱蜢皆各越過或踩上 $O$ 點一次，因此矛盾！

【代數證明】

令 $P_0,P_1,\cdots,P_{11}$ 之初始位置座標為 $[A_0,A_1,\cdots,A_{11}]$，顯然 $0=A_0<A_1<\cdots<A_{11}<1$

不妨觀察 $P_0$ 的回歸情形。由定理 1.1 的公式知：

$$A_0(12)=\frac{1}{2^{12}}\left(C_0^{12}\underbrace{A_0}_{0}+C_1^{12}A_1+C_2^{12}A_2+\cdots\cdots+C_{11}^{12}A_{11}+C_{12}^{12}\underbrace{A_{12}}_{1}\right)$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{11}=1$，

$A_0(12)$ 有最大極端值 $U_{12}=\dfrac{1}{2^{12}}\left(C_1^{12}+C_2^{12}+\cdots\cdots+C_{11}^{12}+C_{12}^{12}\right)<\dfrac{2^{12}}{2^{12}}=1$

即 $P_0$ 跳躍 12 步後仍在第一圈內，因此不可能回歸。■

**延伸：若存在某隻蚱蜢跳躍 $m$ 次後回到初始點，則 $m$ 的最小值為何？**

$$A_0(13)=\frac{1}{2^{13}}\left(C_0^{13}\underbrace{A_0}_{0}+C_1^{13}A_1+C_2^{13}A_2+\cdots\cdots+C_{11}^{13}A_{11}+C_{12}^{13}\underbrace{A_{12}}_{1}+C_{13}^{13}\underbrace{A_{13}}_{1+A_1}\right)$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{11}=1$，

$A_0(13)$ 有最大極端值 $U_{13}=\dfrac{1}{2^{13}}\left(C_1^{13}+C_2^{13}+\cdots\cdots+C_{12}^{13}+\underbrace{2C_{13}^{13}}_{C_0^{13}+C_{13}^{13}}\right)=\dfrac{2^{13}}{2^{13}}=1$

即 $P_0$ 跳躍 13 步後仍在第一圈內，因此不可能回歸。

$$A_0(14)=\frac{1}{2^{14}}\left(C_0^{14}\underbrace{A_0}_{0}+C_1^{14}A_1+C_2^{14}A_2+\cdots\cdots+C_{11}^{14}A_{11}+C_{12}^{14}\underbrace{A_{12}}_{1}+C_{13}^{14}\underbrace{A_{13}}_{1+A_1}+C_{14}^{14}\underbrace{A_{14}}_{1+A_2}\right)$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{11}=0$ ， $A_0(14)$ 有最小極端值 $L_{14}=\frac{1}{2^{14}}\left(C_{12}^{14}+C_{13}^{14}+C_{14}^{14}\right)=\frac{106}{16384}<1$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{11}=1$ ， $A_0(14)$ 有最大極端值

$$U_{14}=\frac{1}{2^{14}}\left(C_1^{14}+C_2^{14}+\cdots\cdots+C_{11}^{14}+C_{12}^{14}+2C_{13}^{14}+\underbrace{2C_{14}^{14}}_{C_0^{14}+C_{14}^{14}}\right)=\frac{1}{2^{14}}\left(2^{14}+14\right)=\frac{16398}{16384}>1$$

由 $A_0(r)$ 之公式可知，當 $r=14$ ，適當的取 $[A_0,A_1,A_2,\cdots\cdots,A_{11}]$ 之值，可使得 $A_0(14)=1$ 。也就是說，若 $P_0$ 變換 $m$ 次後回歸，則 $m$ 的最小值為 14。

推論：圓周上相異 $n$ 個點，若某點變換 $m$ 次後回歸，則 $m$ 的最小值為 $n+2$ 。

**定理 1.2**：圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點變換 $m$ 次後回歸，則 $m$ 的最小值為 $n+2$ 。若已知某點在變換 $n+2$ 次後回歸，則當 $n\geq 3$ 時，此點為唯一回歸的點；當 $n=2$ 時， $n$ 個點同時回歸。

【證明】

（第一部分）證明 $m$ 的最小值為 $n+2$ 。

設圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 之初始位置座標為 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$ ，其中 $0=A_0<A_1<\cdots<A_{n-1}<1$ ，不妨觀察 $P_0$ 的回歸情形。由定理 1.1 之公式知：

$$A_0(n+1)=\frac{1}{2^{n+1}}\left(C_0^{n+1}\underbrace{A_0}_{0}+C_1^{n+1}A_1+C_2^{n+1}A_2+\cdots\cdots+C_n^{n+1}\underbrace{A_n}_{1}+C_{n+1}^{n+1}\underbrace{A_{n+1}}_{1+A_1}\right)$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$ ，

$$A_0(n+1)\text{ 有最大極端值 }U_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(C_1^{n+1}+C_2^{n+1}+\cdots\cdots+C_n^{n+1}+\underbrace{2C_{n+1}^{n+1}}_{C_0^{n+1}+C_{n+1}^{n+1}}\right)=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}=1$$

故 $P_0$ 變換 $n+1$ 次後仍在第一圈內，不可能回歸。

$$A_0(n+2)=\frac{1}{2^{n+2}}\left(C_0^{n+2}\underbrace{A_0}_{0}+C_1^{n+2}A_1+C_2^{n+2}A_2+\cdots\cdots+C_n^{n+2}\underbrace{A_n}_{1}+C_{n+1}^{n+2}\underbrace{A_{n+1}}_{1+A_1}+C_{n+2}^{n+2}\underbrace{A_{n+2}}_{1+A_2}\right)$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$ ，

$$A_0(n+2)\text{ 有最小極端值 }L_{n+2}=\frac{1}{2^{n+2}}\left(C_n^{n+2}+C_{n+1}^{n+2}+C_{n+2}^{n+2}\right)=\frac{n^2+5n+8}{2^{n+3}}<1$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n+1}=1$ ， $A_0(n+2)$ 有最大極端值

$$U_{n+2}=\frac{1}{2^{n+2}}\left(C_1^{n+2}+C_2^{n+2}+\cdots\cdots+C_n^{n+2}+2C_{n+1}^{n+2}+\underbrace{2C_{n+2}^{n+2}}_{C_0^{n+2}+C_{n+2}^{n+2}}\right)=\frac{1}{2^{n+2}}\left(2^{n+2}+n+2\right)>1$$

註：以上不等式可以數學歸納法證得，在此省略。

由 $A_0(r)$ 之公式可知，當 $r=n+2$ ，適當的取 $[A_0,A_1,\cdots\cdots,A_{n-1}]$ 之值，可使得 $A_0(n+2)=1$ 。

也就是說，若 $P_0$ 變換 $m$ 次後回歸，則 $m$ 的最小值為 $n+2$ 。

（第二部份）證明當 $n\ge 3$ 時，若 $P_0$ 變換 $n+2$ 次後回歸，則 $P_0$ 為 $n$ 個點中唯一回歸的點。

不妨假設 $P_0, P_i\ (1\le i\le \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor)$ 在跳躍 $n+2$ 步後同時回歸，

即 $A_0(n+2)=1$ 且 $A_i(n+2)-A_0(n+2)=A_i-A_0 \Rightarrow A_i(n+2)=1+A_i$

$$A_i(n+2)=\frac{1}{2^{n+2}}\Big(C_0^{n+2}A_i+C_1^{n+2}A_{i+1}+\cdots+C_{n-i-1}^{n+2}A_{n-1}+C_{n-i}^{n+2}\underbrace{A_n}_{1}+C_{n-i+1}^{n+2}\underbrace{A_{n+1}}_{1+A_1}+\cdots\cdots+C_{n-1}^{n+2}\underbrace{A_{n-1+i}}_{1+A_{i-1}}$$

$$+C_n^{n+2}\underbrace{A_{n+i}}_{1+A_i}+C_{n+1}^{n+2}\underbrace{A_{n+1+i}}_{1+A_{i+1}}+C_{n+2}^{n+2}\underbrace{A_{n+2+i}}_{1+A_{i+2}}\Big)=1+A_i$$

$$\Rightarrow 2^{n+2}-C_{n-i}^{n+2}-C_{n-i+1}^{n+2}-\cdots-C_n^{n+2}-C_{n+1}^{n+2}-C_{n+2}^{n+2}$$

$$=C_{n-i+1}^{n+2}\underbrace{A_1}_{<A_i}+C_{n-i+2}^{n+2}\underbrace{A_2}_{<A_i}+\cdots+C_{n-1}^{n+2}\underbrace{A_{i-1}}_{<A_i}+\left(C_0^{n+2}+C_n^{n+2}-2^{n+2}\right)A_i+\left(C_1^{n+2}+C_{n+1}^{n+2}\right)A_{i+1}$$

$$+\left(C_2^{n+2}+C_{n+2}^{n+2}\right)A_{i+2}+C_3^{n+2}A_{i+3}+\cdots+C_{n-i-1}^{n+2}A_{n-1}$$

$$<\left(C_{n-i+1}^{n+2}+\cdots+C_{n-1}^{n+2}+C_0^{n+2}+C_n^{n+2}-2^{n+2}\right)A_i$$

$$+\left(C_1^{n+2}+C_{n+1}^{n+2}\right)A_{i+1}+\left(C_2^{n+2}+C_{n+2}^{n+2}\right)A_{i+2}+C_3^{n+2}A_{i+3}+\cdots+C_{n-i-1}^{n+2}A_{n-1}$$

$$\Rightarrow 2^{n+2}-\left(C_{n-i}^{n+2}+C_{n-i+1}^{n+2}+\cdots+C_n^{n+2}+C_{n+1}^{n+2}+C_{n+2}^{n+2}\right)+\left(2^{n+2}-C_{n-i+1}^{n+2}-C_{n-i+2}^{n+2}-\cdots-C_{n-1}^{n+2}-C_0^{n+2}-C_n^{n+2}\right)A_i$$

$$<\left(C_1^{n+2}+C_{n+1}^{n+2}\right)A_{i+1}+\left(C_2^{n+2}+C_{n+2}^{n+2}\right)A_{i+2}+C_3^{n+2}A_{i+3}+\cdots+C_{n-i-1}^{n+2}A_{n-1}$$

$$<\left(C_1^{n+2}+C_{n+1}^{n+2}\right)+\left(C_2^{n+2}+C_{n+2}^{n+2}\right)+C_3^{n+2}+\cdots+C_{n-i-1}^{n+2}=2^{n+2}-\left(C_0^{n+2}+C_{n-i}^{n+2}+\cdots+C_n^{n+2}\right)$$

$$\Rightarrow\left(2^{n+2}-C_{n-i+1}^{n+2}-C_{n-i+2}^{n+2}-\cdots-C_{n-1}^{n+2}-C_0^{n+2}-C_n^{n+2}\right)\underbrace{A_i}_{>\frac{1}{2}}<-C_0^{n+2}+C_{n+1}^{n+2}+C_{n+2}^{n+2}=C_{n+1}^{n+2}$$

$$\Rightarrow\left(2^{n+2}-C_{n-i+1}^{n+2}-C_{n-i+2}^{n+2}-\cdots-C_{n-1}^{n+2}-C_0^{n+2}-C_n^{n+2}\right)\times\frac{1}{2}<C_{n+1}^{n+2}$$ （由 P7 討論知 $A_i\ge A_1>\frac{1}{2}$）

$$\Rightarrow 2^{n+2}<2C_{n+1}^{n+2}+C_{n-i+1}^{n+2}+C_{n-i+2}^{n+2}+\cdots+C_{n-1}^{n+2}+C_0^{n+2}+C_n^{n+2}<2^{n+2}$$ 產生矛盾。

故 $P_0, P_i\ (1\le i\le \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor)$ 在跳躍 $n+2$ 步後不可能同時回歸。

（第三部份）證明當 $n=2$ 時，若 $P_0$ 變換 4 次後回歸 $\Leftrightarrow A_0=0, A_1=\frac{1}{2}$ 且 $P_0, P_1$ 同時回歸。

$$A_0(4)=\frac{1}{2^4}\left(C_0^4\underbrace{A_0}_{0}+C_1^4A_1+C_2^4\underbrace{A_2}_{1}+C_3^4\underbrace{A_3}_{1+A_1}+C_4^4\underbrace{A_4}_{2}\right)=1\Rightarrow 8A_1+12=16\Rightarrow A_1=\frac{1}{2}$$

此時 $A_1(4)=\frac{1}{2^4}\left(C_0^4A_1+C_1^4\underbrace{A_2}_{1}+C_2^4\underbrace{A_3}_{1+A_1}+C_3^4\underbrace{A_4}_{2}+C_4^4\underbrace{A_5}_{2+A_1}\right)=\frac{3}{2}=1+A_1$。故 $P_1$ 也同時回歸。■

討論：若 $P_0$ 恰變換 $n+2$ 次即可回歸，則 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 的初始位置座標 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$ 須滿足什麼條件呢？

【說明】設 $P_0$ 在變換 $n+2$ 次後回歸，則 $A_0(n+2)=1$，即

$$A_0(n+2)=\frac{1}{2^{n+2}}\left(C_0^{n+2}\underbrace{A_0}_{0}+C_1^{n+2}A_1+C_2^{n+2}A_2+\cdots\cdots+C_n^{n+2}\underbrace{A_n}_{1}+C_{n+1}^{n+2}\underbrace{A_{n+1}}_{1+A_1}+C_{n+2}^{n+2}\underbrace{A_{n+2}}_{1+A_2}\right)$$
$$=\frac{1}{2^{n+2}}\left[(C_n^{n+2}+C_{n+1}^{n+2}+C_{n+2}^{n+2})+(C_1^{n+2}+C_{n+1}^{n+2})A_1+(C_2^{n+2}+C_{n+2}^{n+2})A_2+C_3^{n+2}A_3+\cdots+C_{n-1}^{n+2}A_{n-1}\right]=1$$

可整理得 $(2C_1^{n+2})A_1+(C_2^{n+2}+1)A_2+C_3^{n+2}A_3+\cdots+C_{n-1}^{n+2}A_{n-1}=2^{n+2}-C_0^{n+2}-C_1^{n+2}-C_2^{n+2}$

又已知 $0=A_0<A_1<A_2<\cdots\cdots<A_{n-1}<1$，故

$$\left[2C_1^{n+2}+1+\underbrace{C_2^{n+2}+C_3^{n+2}+\cdots+C_{n-1}^{n+2}}_{2^{n+2}-C_0^{n+2}-C_1^{n+2}-C_n^{n+2}-C_{n+1}^{n+2}-C_{n+2}^{n+2}}\right]A_1<(2C_1^{n+2})A_1+(C_2^{n+2}+1)A_2+C_3^{n+2}A_3+\cdots+C_{n-1}^{n+2}A_{n-1}$$
$$=2^{n+2}-C_0^{n+2}-C_1^{n+2}-C_2^{n+2}\Rightarrow\left[2n+5+2^{n+2}-1-n-2-C_2^{n+2}-n-2-1\right]A_1<2^{n+2}-n-3-C_2^{n+2}$$
$$\Rightarrow\left[2^{n+2}-C_2^{n+2}-1\right]A_1<2^{n+2}-n-3-C_2^{n+2}$$
$$\Rightarrow A_1<\frac{2^{n+2}-n-3-C_2^{n+2}}{2^{n+2}-C_2^{n+2}-1}=\frac{2^{n+3}-n^2-5n-8}{2^{n+3}-n^2-3n-4}=1-\frac{2n+4}{2^{n+3}-n^2-3n-4}$$

$$(2C_1^{n+2})A_1+(C_2^{n+2}+1)A_2+C_3^{n+2}A_3+\cdots\cdots+C_{n-1}^{n+2}A_{n-1}=2^{n+2}-C_0^{n+2}-C_1^{n+2}-C_2^{n+2}$$
$$\Rightarrow(2n+4)A_1=2^{n+2}-n-3-C_2^{n+2}-(C_2^{n+2}+1)A_2-C_3^{n+2}A_3-\cdots\cdots-C_{n-1}^{n+2}A_{n-1}$$
$$>2^{n+2}-n-3-C_2^{n+2}-(C_2^{n+2}+1)-C_3^{n+2}-\cdots\cdots-C_{n-1}^{n+2}$$
$$=2^{n+2}-n-4-C_2^{n+2}-(\underbrace{C_2^{n+2}+C_3^{n+2}+\cdots\cdots+C_{n-1}^{n+2}}_{2^{n+2}-C_0^{n+2}-C_1^{n+2}-C_n^{n+2}-C_{n+1}^{n+2}-C_{n+2}^{n+2}})=n+2\Rightarrow A_1>\frac{n+2}{2n+4}=\frac{1}{2}$$

結論：若 $P_0$ 變換 $n+2$ 次後回歸，則當 $n\geq 3$ 時，$P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 的初始位置座標 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$ 必須滿足 $(2C_1^{n+2})A_1+(C_2^{n+2}+1)A_2+C_3^{n+2}A_3+\cdots+C_{n-1}^{n+2}A_{n-1}=2^{n+2}-C_0^{n+2}-C_1^{n+2}-C_2^{n+2}$，此時 $\frac{1}{2}<A_1<1-\frac{2n+4}{2^{n+3}-n^2-3n-4}$。

【例】已知圓上相異3個點 $P_0,P_1,P_2$，其初始位置座標 $[A_0,A_1,A_2]$，若 $P_0$ 變換 5 次後回歸，則 $A_0=0$ 且 $10A_1+11A_2=16$。更進一步發現，此時 $\frac{1}{2}<A_1<\frac{16}{21}$。因此若取 $A_1=\frac{6}{10},A_2=\frac{10}{11}$，則 $P_0$ 變換 5 次後即可回歸，此時，$P_0$ 為3個點中唯一會回歸的點。

## 研究二：圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的所有可能變換數。

由研究一的結果，我們知道若圓周上相異 $n$ 個點，某點經 $m$ 次變換後回歸，則 $m$ 的最小值為 $n+2$。那麼是否所有變換次數大於等於 $n+2$，都有可能存在某點回歸呢？經過實際測試發現，在有些變換次數下，無論此 $n$ 個點在圓周上的初始位置為何，都不可能有任何點回歸。以 $n=3$ 為例，在變換次數為 $1,2,3,4$ 時，所有點位置均仍在第一圈內，不可能回歸。而變換次數為 $5$ 時，由定理 1.2 討論知，若此 $3$ 個點 $P_0,P_1,P_2$ 之初始位置座標 $[A_0,A_1,A_2]$ 滿足 $A_0=0$ 且 $10A_1+11A_2=16$ 時，則恰有一個點 $P_0$ 回歸。而變換次數為 $6,7$ 時，我們以 GeoGebra 所寫的程式，拉動初始位置，都可得到存在某點回歸的情形。但當變換次數為 $8$ 時，無論我們如何拉動初始值，完全無法得到有任何點回歸。最後我們發現，當變換次數為 $8,9,10,14,15,16,20,21,22,\cdots$ 時，不存在任何點可回歸。於是我們有了以下猜測：

問題：**若某點經 $m$ 次變換後回歸，求 $m$ 的所有可能值。**

推論：$m$ 不可能的值為 $1,2,\cdots\cdots,n-1,n,n+1,\ 3n-1,3n,3n+1,\ 5n-1,5n,5n+1\cdots\cdots$，
其餘皆可能存在某點回歸。

**定理 2.1**：圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點經 $m$ 次變換後回歸，則 $m$ 之充要條件為 $m\ge n+2$ 且 $m\ne kn-1,kn,kn+1$，其中 $k$ 為正奇數。

【證明】

由定理 1.2 知，$m\ge n+2$。

（第一部份）證明當 $m=kn-1,kn,kn+1$ 時，其中 $k$ 為正奇數，不存在任何點可回歸。

(1)**欲證：若某點經 $m$ 次變換後回歸，則 $m\ne kn-1$。**

$$A_0(kn-1)=\frac{1}{2^{kn-1}}\left(C_0^{kn-1}A_0+C_1^{kn-1}A_1+\cdots+C_n^{kn-1}\underbrace{A_n}_{1}+\cdots+C_{2n}^{kn-1}\underbrace{A_{2n}}_{2}+\cdots\cdots+C_{(k-1)n}^{kn-1}\underbrace{A_{(k-1)n}}_{k-1}+\cdots+C_{kn-1}^{kn-1}\underbrace{A_{kn-1}}_{(k-1)+A_{n-1}}\right)$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2^{kn-1}}\Big[\left(C_n^{kn-1}+C_{n+1}^{kn-1}+\cdots+C_{2n-1}^{kn-1}\right)+\left(2C_{2n}^{kn-1}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn-1}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn-1}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn-1}\right)\\&\quad+\left(C_1^{kn-1}+C_{n+1}^{kn-1}+\cdots+C_{(k-1)n+1}^{kn-1}\right)A_1+\cdots+\left(C_{n-1}^{kn-1}+C_{2n-1}^{kn-1}+\cdots+C_{kn-1}^{kn-1}\right)A_{n-1}\Big]\end{aligned}$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$，$A_0(kn-1)$ 有最小極端值

$$L_{kn-1}=\frac{1}{2^{kn-1}}\left[\left(C_n^{kn-1}+C_{n+1}^{kn-1}+\cdots+C_{2n-1}^{kn-1}\right)+\left(2C_{2n}^{kn-1}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn-1}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn-1}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn-1}\right)\right]$$

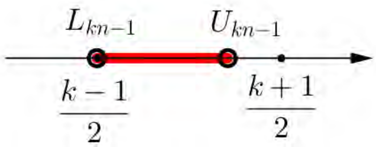
$$=\frac{1}{2^{kn-1}}\left[\frac{k-1}{2}\left(\underbrace{C_0^{kn-1}+C_1^{kn-1}+\cdots+C_{kn-1}^{kn-1}}_{2^{kn-1}}\right)\right]=\frac{k-1}{2}$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$，$A_0(kn-1)$ 有最大極端值

$$U_{kn-1}=\frac{1}{2^{kn-1}}\Big[\left(C_n^{kn-1}+C_{n+1}^{kn-1}+\cdots+C_{2n-1}^{kn-1}\right)+\left(2C_{2n}^{kn-1}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn-1}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn-1}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn-1}\right)$$

$$+\underbrace{\left(C_1^{kn-1}+C_{n+1}^{kn-1}+\cdots+C_{(k-1)n+1}^{kn-1}\right)+\cdots+\left(C_{n-1}^{kn-1}+C_{2n-1}^{kn-1}+\cdots+C_{kn-1}^{kn-1}\right)}_{2^{kn-1}-(C_0^{kn-1}+C_n^{kn-1}+\cdots+C_{(k-1)n}^{kn-1})}\Big]<\frac{1}{2^{kn-1}}\left[\frac{k-1}{2}\cdot 2^{kn-1}+2^{kn-1}\right]=\frac{k+1}{2}$$

故 $\dfrac{k-1}{2}<A_0(kn-1)<\dfrac{k+1}{2}$，即 $A_0(kn-1)$ 不可能為正整數。




(2)**欲證：若某點經 $m$ 次變換後回歸，則 $m\neq kn$。**

$$A_0(kn)=\frac{1}{2^{kn}}\left(C_0^{kn}A_0+C_1^{kn}A_1+\cdots+C_n^{kn}\underbrace{A_n}_{1}+\cdots+C_{2n}^{kn}\underbrace{A_{2n}}_{2}+\cdots\cdots+C_{(k-1)n}^{kn}\underbrace{A_{(k-1)n}}_{k-1}+\cdots+C_{kn-1}^{kn}\underbrace{A_{kn-1}}_{(k-1)+A_{n-1}}+C_{kn}^{kn}\underbrace{A_{kn}}_{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{kn}}\Big[\left(C_n^{kn}+C_{n+1}^{kn}+\cdots+C_{2n-1}^{kn}\right)+\left(2C_{2n}^{kn}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn}\right)+kC_{kn}^{kn}$$

$$+\left(C_1^{kn}+C_{n+1}^{kn}+\cdots+C_{(k-1)n+1}^{kn}\right)A_1+\cdots+\left(C_{n-1}^{kn}+C_{2n-1}^{kn}+\cdots+C_{kn-1}^{kn}\right)A_{n-1}\Big]$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$，

① $n$ 為偶數， $A_0(kn)$ 有最小極端值

$$L_{kn}=\frac{1}{2^{kn}}\Big[\left(C_n^{kn}+C_{n+1}^{kn}+\cdots+C_{2n-1}^{kn}\right)+\left(2C_{2n}^{kn}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn}\right)+kC_{kn}^{kn}\Big]$$

$$=\frac{1}{2^{kn}}\Big[\left(kC_0^{kn}+(k-1)C_1^{kn}+\cdots+(k-1)C_{n-1}^{kn}\right)+\left(kC_n^{kn}+(k-1)C_{n+1}^{kn}+\cdots+(k-1)_{2n-1}^{kn}\right)+\cdots\cdots+$$

$$\left(kC_{\frac{k-1}{2}n}^{kn}+(k-1)C_{\frac{k-1}{2}n+1}^{kn}+\cdots+(k-1)_{\frac{k}{2}n-1}^{kn}\right)+\frac{k-1}{2}C_{\frac{k}{2}n}^{kn}\Big]=\frac{1}{2^{kn}}\left[\frac{k-1}{2}\cdot 2^{kn}+\left(C_0^{kn}+C_n^{kn}+\cdots+C_{\frac{k-1}{2}n}^{kn}\right)\right]>\frac{k-1}{2}$$

② $n$ 為奇數， $A_0(kn)$ 有最小極端值

$$L_{kn}=\frac{1}{2^{kn}}\Big[\left(C_n^{kn}+C_{n+1}^{kn}+\cdots+C_{2n-1}^{kn}\right)+\left(2C_{2n}^{kn}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn}\right)+kC_{kn}^{kn}$$

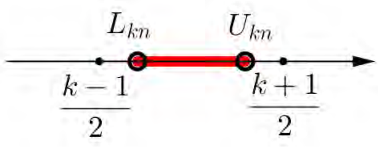
$$=\frac{1}{2^{kn}}\Big[\left(kC_0^{kn}+(k-1)C_1^{kn}+\cdots+(k-1)C_{n-1}^{kn}\right)+\left(kC_n^{kn}+(k-1)C_{n+1}^{kn}+\cdots+(k-1)C_{2n-1}^{kn}\right)+\cdots\cdots+$$

$$\left(kC_{\frac{k-1}{2}n}^{kn}+(k-1)C_{\frac{k-1}{2}n+1}^{kn}+\cdots+(k-1)C_{\frac{kn-1}{2}}^{kn}\right)\Big]=\frac{1}{2^{kn}}\left[\frac{k-1}{2}\cdot 2^{kn}+\left(C_0^{kn}+C_n^{kn}+\cdots+C_{\frac{k-1}{2}n}^{kn}\right)\right]>\frac{k-1}{2}$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$， $A_0(kn)$ 有最大極端值

$$U_{kn}=\frac{1}{2^{kn}}\Bigg[\underbrace{\left(C_n^{kn}+C_{n+1}^{kn}+\cdots+C_{2n-1}^{kn}\right)+\left(2C_{2n}^{kn}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn}\right)+kC_{kn}^{kn}}_{\frac{k-1}{2}2^{kn}+C_0^{kn}+C_n^{kn}+\cdots+C_{\frac{k-1}{2}n}^{kn}}$$

$$+\underbrace{\left(C_1^{kn}+C_{n+1}^{kn}+\cdots+C_{(k-1)n+1}^{kn}\right)+\cdots+\left(C_{n-1}^{kn}+C_{2n-1}^{kn}+\cdots+C_{kn-1}^{kn}\right)}_{2^{kn}-\left(C_0^{kn}+C_n^{kn}+\cdots+C_{kn}^{kn}\right)}\Bigg]<\frac{k+1}{2}$$




故 $\dfrac{k-1}{2}<A_0(kn)<\dfrac{k+1}{2}$，即 $A_0(kn)$ 不可能為正整數。

(3)欲證：若某點經 $m$ 次變換後回歸，則 $m \neq kn+1$。

$$A_0(kn+1)=\frac{1}{2^{kn+1}}\left(C_0^{kn+1}A_0+C_1^{kn+1}A_1+\cdots+C_n^{kn+1}\underbrace{A_n}_{1}+\cdots+C_{2n}^{kn+1}\underbrace{A_{2n}}_{2}+\cdots\cdots+C_{(k-1)n}^{kn+1}\underbrace{A_{(k-1)n}}_{k-1}+\cdots\right.$$

$$\left.+C_{kn-1}^{kn+1}\underbrace{A_{kn-1}}_{(k-1)+A_{n-1}}+C_{kn}^{kn+1}\underbrace{A_{kn}}_{k}+C_{kn+1}^{kn+1}\underbrace{A_{kn+1}}_{k+A_1}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{kn+1}}\Big[\left(C_n^{kn+1}+C_{n+1}^{kn+1}+\cdots+C_{2n-1}^{kn+1}\right)+\left(2C_{2n}^{kn+1}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn+1}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn+1}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn+1}\right)$$

$$+kC_{kn}^{kn+1}+kC_{kn+1}^{kn+1}+\left(C_1^{kn+1}+C_{n+1}^{kn+1}+\cdots+C_{(k-1)n+1}^{kn+1}+C_{kn+1}^{kn+1}\right)A_1+\cdots+\left(C_{n-1}^{kn+1}+C_{2n-1}^{kn+1}+\cdots+C_{kn-1}^{kn+1}\right)A_{n-1}\Big]$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$，

① $n$ 為偶數，$A_0(kn+1)$ 有最小極端值

$$L_{kn+1}=\frac{1}{2^{kn+1}}\Big[\left(C_n^{kn+1}+C_{n+1}^{kn+1}+\cdots+C_{2n-1}^{kn+1}\right)+\left(2C_{2n}^{kn+1}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn+1}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn+1}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn+1}\right)+kC_{kn}^{kn+1}+kC_{kn+1}^{kn+1}\Big]$$

$$=\frac{1}{2^{kn+1}}\Big[\left(kC_0^{kn+1}+kC_1^{kn+1}+(k-1)C_2^{kn+1}+\cdots+(k-1)C_{n-1}^{kn+1}\right)+\left(kC_n^{kn+1}+kC_{n+1}^{kn+1}+(k-1)C_{n+2}^{kn+1}+\cdots+(k-1)C_{2n-1}^{kn+1}\right)$$

$$+\cdots\cdots+kC_{\frac{k-1}{2}n}^{kn+1}+kC_{\frac{k-1}{2}n+1}^{kn+1}+\cdots+(k-1)C_{\frac{k}{2}n}^{kn+1}\Big]$$

$$=\frac{1}{2^{kn+1}}\left[\left(C_0^{kn+1}+C_1^{kn+1}\right)+\left(C_n^{kn+1}+C_{n+1}^{kn+1}\right)+\cdots+\left(C_{\frac{k-1}{2}n}^{kn+1}+C_{\frac{k-1}{2}n+1}^{kn+1}\right)+(k-1)\underbrace{\left(C_0^{kn+1}+C_1^{kn+1}+\cdots+C_{\frac{kn}{2}}^{kn+1}\right)}_{\frac{2^{kn+1}}{2}}\right]>\frac{k-1}{2}$$

② $n$ 為奇數，$A_0(kn+1)$ 有最小極端值

$$L_{kn+1}=\frac{1}{2^{kn+1}}\Big[\left(C_n^{kn+1}+C_{n+1}^{kn+1}+\cdots+C_{2n-1}^{kn+1}\right)+\left(2C_{2n}^{kn+1}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn+1}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn+1}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn+1}\right)+kC_{kn}^{kn+1}+kC_{kn+1}^{kn+1}\Big]$$

$$=\frac{1}{2^{kn+1}}\Big[\left(kC_0^{kn+1}+kC_1^{kn+1}+(k-1)C_2^{kn+1}+\cdots+(k-1)C_{n-1}^{kn+1}\right)+\left(kC_n^{kn+1}+kC_{n+1}^{kn+1}+(k-1)C_{n+2}^{kn+1}+\cdots+(k-1)_{2n-1}^{kn+1}\right)$$

$$+\cdots\cdots+kC_{\frac{k-1}{2}n}^{kn+1}+kC_{\frac{k-1}{2}n+1}^{kn+1}+\cdots+(k-1)C_{\frac{kn-1}{2}}^{kn+1}+\frac{k-1}{2}C_{\frac{kn+1}{2}}^{kn+1}\Big]$$

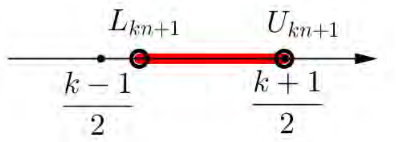
$$=\frac{1}{2^{kn+1}}\Big[\left(C_0^{kn+1}+C_1^{kn+1}\right)+\left(C_n^{kn+1}+C_{n+1}^{kn+1}\right)+\cdots+\left(C_{\frac{k-1}{2}n}^{kn+1}+C_{\frac{k-1}{2}n+1}^{kn+1}\right)+$$

$$(k-1)\underbrace{\left(C_0^{kn+1}+C_1^{kn+1}+\cdots+C_{\frac{kn-1}{2}}^{kn+1}\right)}_{\frac{2^{kn+1}-C_{\frac{kn+1}{2}}^{kn+1}}{2}}+\frac{k-1}{2}C_{\frac{kn+1}{2}}^{kn+1}\Big]>\frac{k-1}{2}$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$，$A_0(kn+1)$ 有最大極端值

$$U_{kn+1}=\frac{1}{2^{kn+1}}\Bigg[\underbrace{\left(C_n^{kn+1}+\cdots+C_{2n-1}^{kn+1}\right)+\left(2C_{2n}^{kn+1}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn+1}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn+1}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn+1}\right)+kC_{kn}^{kn+1}+kC_{kn+1}^{kn+1}}_{\frac{k-1}{2}2^{kn+1}+C_0^{kn+1}+C_1^{kn+1}+C_n^{kn+1}+C_{n+1}^{kn+1}+\cdots+C_{\frac{k-1}{2}n}^{kn+1}+C_{\frac{k-1}{2}n+1}^{kn+1}}$$

$$+\underbrace{\left(C_1^{kn+1}+C_{n+1}^{kn+1}+\cdots+C_{(k-1)n+1}^{kn+1}\right)+\cdots+\left(C_{n-1}^{kn+1}+C_{2n-1}^{kn+1}+\cdots+C_{kn-1}^{kn+1}\right)}_{2^{kn+1}-\left(C_0^{kn+1}+C_n^{kn+1}+\cdots+C_{kn}^{kn+1}\right)}\Bigg]=\frac{k+1}{2}$$




故 $\frac{k-1}{2}<A_0(kn+1)<\frac{k+1}{2}$，即 $A_0(kn+1)$ 不可能為正整數。

（第二部分）證明當 $kn+2\le r\le kn+(2n-2)$ 時，其中 $k$ 為正奇數，存在某點可回歸。

(1)當 $r=kn+s$　其中 $2\le s\le n-1$ 時

$$A_0(kn+s)=\frac{1}{2^{kn+s}}\Bigg[C_0^{kn+s}A_0+\cdots+C_n^{kn+s}\underbrace{A_n}_{1}+\cdots+C_{2n}^{kn+s}\underbrace{A_{2n}}_{2}+\cdots+C_{(k-1)n}^{kn+s}\underbrace{A_{(k-1)n}}_{k-1}+\cdots$$

$$+C_{kn}^{kn+s}\underbrace{A_{kn}}_{k}+C_{kn+1}^{kn+s}\underbrace{A_{kn+1}}_{k+A_1}+\cdots+C_{kn+s}^{kn+s}\underbrace{A_{kn+s}}_{k+A_s}\Bigg]$$

$$=\frac{1}{2^{kn+s}}\Big[\left(C_n^{kn+s}+\cdots+C_{2n-1}^{kn+s}\right)+\left(2C_{2n}^{kn+s}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn+s}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn+s}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn+s}\right)$$

$$+kC_{kn}^{kn+s}+kC_{kn+1}^{kn+s}+\cdots+kC_{kn+s}^{kn+s}+\left(C_1^{kn+s}+C_{n+1}^{kn+s}+\cdots+C_{kn+1}^{kn+s}\right)A_1+\cdots+\left(C_s^{kn+s}+C_{n+s}^{kn+s}+\cdots+C_{kn+s}^{kn+s}\right)A_s$$

$$+\left(C_{s+1}^{kn+s}+C_{n+s+1}^{kn+s}+\cdots+C_{(k-1)n+s+1}^{kn+s}\right)A_{s+1}+\cdots+\left(C_{n-1}^{kn+s}+C_{2n-1}^{kn+s}+\cdots+C_{kn-1}^{kn+s}\right)A_{n-1}\Big]$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$，

① $kn+s$ 為偶數， $A_0(kn+s)$ 有最小極端值

$$L_{kn+s}=\frac{1}{2^{kn+s}}\Big[\left(C_n^{kn+s}+\cdots+C_{2n-1}^{kn+s}\right)+\left(2C_{2n}^{kn+s}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn+s}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn+s}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn+s}\right)$$

$$+kC_{kn}^{kn+s}+kC_{kn+1}^{kn+s}+\cdots+kC_{kn+s}^{kn+s}\Big]$$

$$=\frac{1}{2^{kn+s}}\Big[\left(kC_0^{kn+s}+kC_1^{kn+s}+\cdots+kC_s^{kn+s}+(k-1)C_{s+1}^{kn+s}+\cdots\right)+\left(kC_n^{kn+s}+kC_{n+1}^{kn+s}+\cdots+kC_{n+s}^{kn+s}+(k-1)C_{n+s+1}^{kn+s}+\cdots\right)$$

$$+\cdots\cdots+\left(kC_{\frac{k-1}{2}n}^{kn+s}+kC_{\frac{k-1}{2}n+1}^{kn+s}+\cdots+kC_{\frac{k-1}{2}n+s}^{kn+s}+(k-1)C_{\frac{k-1}{2}n+s+1}^{kn+s}+\cdots\right)+\left(\frac{k-1}{2}\right)C_{\frac{kn+s}{2}}^{kn+s}\Big]$$

$$=\frac{1}{2^{kn+s}}\left[\left(C_0^{kn+s}+\cdots+C_s^{kn+s}\right)+\left(C_n^{kn+s}+\cdots+C_{n+s}^{kn+s}\right)+\cdots+\left(C_{\frac{k-1}{2}n}^{kn+s}+\cdots+C_{\frac{k-1}{2}n+s}^{kn+s}\right)+\frac{k-1}{2}2^{kn+s}\right]$$

$$<\frac{1}{2^{kn+s}}\left[2^{kn+s}+\frac{k-1}{2}2^{kn+s}\right]=\frac{k+1}{2}$$

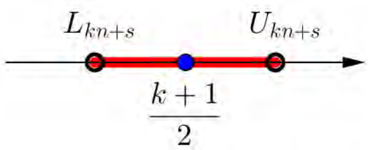
② $kn+s$ 為奇數， $A_0(kn+s)$ 有最小極端值

$$L_{kn+s}=\frac{1}{2^{kn+s}}\Big[\left(C_{n}^{kn+s}+\cdots+C_{2n-1}^{kn+s}\right)+\left(2C_{2n}^{kn+s}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn+s}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn+s}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn+s}\right)$$
$$+kC_{kn}^{kn+s}+kC_{kn+1}^{kn+s}+\cdots+kC_{kn+s}^{kn+s}\Big]$$
$$=\frac{1}{2^{kn+s}}\Big[\left(kC_{0}^{kn+s}+kC_{1}^{kn+s}+\cdots+kC_{s}^{kn+s}+(k-1)C_{s+1}^{kn+s}+\cdots\right)+\left(kC_{n}^{kn+s}+kC_{n+1}^{kn+s}+\cdots+kC_{n+s}^{kn+s}+(k-1)C_{n+s+1}^{kn+s}+\cdots\right)$$
$$+\cdots\cdots+kC_{\frac{k-1}{2}n}^{kn+s}+kC_{\frac{k-1}{2}n+1}^{kn+s}+\cdots+kC_{\frac{k-1}{2}n+s}^{kn+s}+(k-1)C_{\frac{k-1}{2}n+s+1}^{kn+s}+\cdots\cdots+(k-1)C_{\frac{kn+s-1}{2}}^{kn+s}\Big]$$
$$=\frac{1}{2^{kn+s}}\left[\left(C_{0}^{kn+s}+\cdots+C_{s}^{kn+s}\right)+\left(C_{n}^{kn+s}+\cdots+C_{n+s}^{kn+s}\right)+\cdots+\left(C_{\frac{k-1}{2}n}^{kn+s}+\cdots+C_{\frac{k-1}{2}n+s}^{kn+s}\right)+\frac{k-1}{2}2^{kn+s}\right]$$
$$<\frac{1}{2^{kn+s}}\left[2^{kn+s}+\frac{k-1}{2}2^{kn+s}\right]=\frac{k+1}{2}$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$， $A_0(kn+s)$ 有最大極端值

$$U_{kn+s}=\frac{1}{2^{kn+s}}\Big[\left(C_{n}^{kn+s}+\cdots+C_{2n-1}^{kn+s}\right)+\left(2C_{2n}^{kn+s}+\cdots+2C_{3n-1}^{kn+s}\right)+\cdots+\left((k-1)C_{(k-1)n}^{kn+s}+\cdots+(k-1)C_{kn-1}^{kn+s}\right)$$
$$+kC_{kn}^{kn+s}+kC_{kn+1}^{kn+s}+\cdots+kC_{kn+s}^{kn+s}+\left(C_{1}^{kn+s}+C_{n+1}^{kn+s}+\cdots+C_{kn+1}^{kn+s}\right)+\cdots+\left(C_{s}^{kn+s}+C_{n+s}^{kn+s}+\cdots+C_{kn+s}^{kn+s}\right)$$
$$+\left(C_{s+1}^{kn+s}+C_{n+s+1}^{kn+s}+\cdots+C_{(k-1)n+s+1}^{kn+s}\right)+\cdots+\left(C_{n-1}^{kn+s}+C_{2n-1}^{kn+s}+\cdots+C_{kn-1}^{kn+s}\right)\Big]$$
$$=\frac{1}{2^{kn+s}}\Big[\left(C_{0}^{kn+s}+\cdots+C_{s}^{kn+s}\right)+\left(C_{n}^{kn+s}+\cdots+C_{n+s}^{kn+s}\right)+\cdots+\left(C_{\frac{k-1}{2}n}^{kn+s}+\cdots+C_{\frac{k-1}{2}n+s}^{kn+s}\right)+\frac{k-1}{2}2^{kn+s}$$
$$+2^{kn+s}-C_{0}^{kn+s}-C_{n}^{kn+s}-\cdots-C_{kn}^{kn+s}\Big]>\frac{k+1}{2}$$

由 $A_0(r)$ 之公式可知，適當的取 $[A_0,A_1,A_2,\cdots\cdots,A_{n-1}]$ 之值，可使得 $A_0(kn+s)=\dfrac{k+1}{2}$ 。




**(2)當 $r=hn+s$ 　其中 $h$ 為偶數且 $0\le s\le n-2$ 時**

$$A_0(hn+s)=\frac{1}{2^{hn+s}}\Big[C_{0}^{hn+s}\underbrace{A_0}_{0}+\cdots+C_{n}^{hn+s}\underbrace{A_n}_{1}+\cdots+C_{2n}^{hn+s}\underbrace{A_{2n}}_{2}+\cdots+C_{(h-1)n}^{hn+s}\underbrace{A_{(h-1)n}}_{h-1}+\cdots$$
$$+C_{hn}^{hn+s}\underbrace{A_{hn}}_{h}+C_{hn+1}^{hn+s}\underbrace{A_{hn+1}}_{h+A_1}+\cdots+C_{hn+s}^{hn+s}\underbrace{A_{hn+s}}_{h+A_s}\Big]$$
$$=\frac{1}{2^{hn+s}}\Big[\left(C_{n}^{hn+s}+\cdots+C_{2n-1}^{hn+s}\right)+\left(2C_{2n}^{hn+s}+\cdots+2C_{3n-1}^{hn+s}\right)+\cdots+\left((h-1)C_{(h-1)n}^{hn+s}+\cdots+(h-1)C_{hn-1}^{hn+s}\right)$$
$$+hC_{hn}^{hn+s}+hC_{hn+1}^{hn+s}+\cdots+hC_{hn+s}^{hn+s}+\left(C_{1}^{hn+s}+C_{n+1}^{hn+s}+\cdots+C_{hn+1}^{hn+s}\right)A_1+\cdots+\left(C_{s}^{hn+s}+C_{n+s}^{hn+s}+\cdots+C_{hn+s}^{hn+s}\right)A_s$$
$$+\left(C_{s+1}^{hn+s}+C_{n+s+1}^{hn+s}+\cdots+C_{(h-1)n+s+1}^{hn+s}\right)A_{s+1}+\cdots+\left(C_{n-1}^{hn+s}+C_{2n-1}^{hn+s}+\cdots+C_{hn-1}^{hn+s}\right)A_{n-1}\Big]$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$ ，

① $hn+s$ 為偶數， $A_0(hn+s)$ 有最小極端值

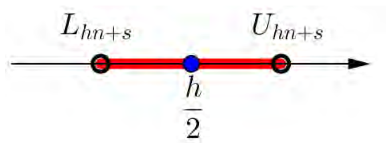
$$L_{hn+s}=\frac{1}{2^{hn+s}}\Big[\big(C_n^{hn+s}+\cdots+C_{2n-1}^{hn+s}\big)+\big(2C_{2n}^{hn+s}+\cdots+2C_{3n-1}^{hn+s}\big)+\cdots+\big((h-1)C_{(h-1)n}^{hn+s}+\cdots+(h-1)C_{hn-1}^{hn+s}\big)$$
$$+hC_{hn}^{hn+s}+hC_{hn+1}^{hn+s}+\cdots+hC_{hn+s}^{hn+s}\Big]$$
$$=\frac{1}{2^{hn+s}}\Big[\big(hC_0^{hn+s}+hC_1^{hn+s}+\cdots+hC_s^{hn+s}+(h-1)C_{s+1}^{hn+s}+\cdots\big)+\big(hC_n^{hn+s}+hC_{n+1}^{hn+s}+\cdots+hC_{n+s}^{hn+s}+(h-1)C_{n+s+1}^{hn+s}+\cdots\big)$$
$$+\cdots\cdots+hC_{\frac{hn}{2}}^{hn+s}+hC_{\frac{hn}{2}+1}^{hn+s}+\cdots+hC_{\frac{hn+s}{2}-1}^{hn+s}+\frac{h}{2}C_{\frac{hn+s}{2}}^{hn+s}\Big]$$
$$=\frac{1}{2^{hn+s}}\left[\frac{h}{2}\cdot 2^{hn+s}-\left(C_{s+1}^{hn+s}+\cdots+C_{n-1}^{hn+s}\right)-\left(C_{n+s+1}^{hn+s}+\cdots+C_{2n-1}^{hn+s}\right)-\cdots-\left(C_{(\frac{h}{2}-1)n+s+1}^{hn+s}+\cdots+C_{\frac{h}{2}n-1}^{hn+s}\right)\right]<\frac{h}{2}$$

② $hn+s$ 為奇數， $A_0(hn+s)$ 有最小極端值

$$L_{hn+s}=\frac{1}{2^{hn+s}}\Big[\big(C_n^{hn+s}+\cdots+C_{2n-1}^{hn+s}\big)+\big(2C_{2n}^{hn+s}+\cdots+2C_{3n-1}^{hn+s}\big)+\cdots+\big((h-1)C_{(h-1)n}^{hn+s}+\cdots+(h-1)C_{hn-1}^{hn+s}\big)$$
$$+hC_{hn}^{hn+s}+hC_{hn+1}^{hn+s}+\cdots+hC_{hn+s}^{hn+s}\Big]$$
$$=\frac{1}{2^{hn+s}}\Big[\big(hC_0^{hn+s}+hC_1^{hn+s}+\cdots+hC_s^{hn+s}+(h-1)C_{s+1}^{hn+s}+\cdots\big)+\big(hC_n^{hn+s}+hC_{n+1}^{hn+s}+\cdots+hC_{n+s}^{hn+s}+(h-1)C_{n+s+1}^{hn+s}+\cdots\big)$$
$$+\cdots\cdots+hC_{\frac{hn}{2}}^{hn+s}+hC_{\frac{hn}{2}+1}^{hn+s}+\cdots+hC_{\frac{hn+s-1}{2}}^{hn+s}\Big]$$
$$=\frac{1}{2^{hn+s}}\left[\frac{h}{2}\cdot 2^{hn+s}-\left(C_{s+1}^{hn+s}+\cdots+C_{n-1}^{hn+s}\right)-\left(C_{n+s+1}^{hn+s}+\cdots+C_{2n-1}^{hn+s}\right)-\cdots-\left(C_{(\frac{h}{2}-1)n+s+1}^{hn+s}+\cdots+C_{\frac{h}{2}n-1}^{hn+s}\right)\right]<\frac{h}{2}$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$， $A_0(hn+s)$ 有最大極端值

$$U_{hn+s}=\frac{1}{2^{hn+s}}\Big[\frac{h}{2}\cdot 2^{hn+s}-\left(C_{s+1}^{hn+s}+\cdots+C_{n-1}^{hn+s}\right)-\left(C_{n+s+1}^{hn+s}+\cdots+C_{2n-1}^{hn+s}\right)-\cdots-\left(C_{(\frac{h}{2}-1)n+s+1}^{hn+s}+\cdots+C_{\frac{h}{2}n-1}^{hn+s}\right)$$
$$+2^{hn+s}-C_0^{hn+s}-C_n^{hn+s}-\cdots-C_{hn}^{hn+s}\Big]>\frac{h}{2}$$




由 $A_0(r)$ 之公式可知，適當的取 $[A_0,A_1,A_2,\cdots\cdots,A_{n-1}]$ 之值，

可使得 $A_0(hn+s)=\frac{h}{2}$ 。■

**研究三：圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，求某點回歸的最小變換數。**

**定理 3.1**：圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ ，其初始位置座標為 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$ ，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若 $P_i$ 變換 $r$ 次後的點之位置座標為 $A_i(r)$ ，則

$$A_i(r)=\frac{1}{(p+q)^r}\left[C_0^r q^r A_i+C_1^r pq^{r-1}A_{i+1}+C_2^r p^2q^{r-2}A_{i+2}+\cdots\cdots+C_r^r p^r A_{i+r}\right]$$
$$=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^r p^k q^{r-k}A_{i+k}$$

【證明】

(1)當 $r=1$ 時， $A_i(1)=\dfrac{1}{(p+q)^1}\left[C_0^1 qA_i+C_1^1 pA_{i+1}\right]$ 原式成立。

(2)假設 $r=t$ 時成立，

即 $A_i(t)=\dfrac{1}{(p+q)^t}\left[C_0^t q^t A_i+C_1^t pq^{t-1}A_{i+1}+C_2^t p^2q^{t-2}A_{i+2}+\cdots\cdots+C_t^t p^t A_{i+t}\right]$

則 $r=t+1$ 時

$$A_i(t+1)=\frac{qA_i(t)+pA_{i+1}(t)}{p+q}$$

$$=\frac{1}{p+q}\left[\frac{q}{(p+q)^t}\left(C_0^t q^t A_i+C_1^t pq^{t-1}A_{i+1}+C_2^t p^2q^{t-2}A_{i+2}+\cdots\cdots+C_t^t p^t A_{i+t}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{p}{(p+q)^t}\left(C_0^t q^t A_{i+1}+C_1^t pq^{t-1}A_{i+2}+C_2^t p^2q^{t-2}A_{i+3}+\cdots\cdots+C_t^t p^t A_{i+t+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(p+q)^{t+1}}\left[\underbrace{C_0^t}_{C_0^{t+1}} q^{t+1}A_i+\underbrace{\left(C_1^t+C_0^t\right)}_{C_1^{t+1}}pq^t A_{i+1}+\underbrace{\left(C_2^t+C_1^t\right)}_{C_2^{t+1}}p^2q^{t-1}A_{i+2}+\cdots\cdots+\underbrace{C_t^t}_{C_{t+1}^{t+1}}p^{t+1}A_{i+t+1}\right]$$

$$=\frac{1}{(p+q)^{t+1}}\left[C_0^{t+1}q^{t+1}A_i+C_1^{t+1}pq^t A_{i+1}+C_2^{t+1}p^2q^{t-1}A_{i+2}+\cdots\cdots+C_{t+1}^{t+1}p^{t+1}A_{i+t+1}\right]$$

由(1)(2)及數學歸納法得證。■

首先，我們先整理出 $A_0(r)$ 的最小極端值 $L_r$ 與最大極端值 $U_r$ 的通式（ $L_r<A_0(r)<U_r$ ）。

由定理 3.1 知： $A_0(r)=\dfrac{1}{(p+q)^r}\left[C_0^r q^r \underbrace{A_0}_{0}+C_1^r pq^{r-1}A_1+C_2^r p^2q^{r-2}A_2+\cdots\cdots+C_r^r p^r A_r\right]$

(1)取 $A_0=0$ 且 $A_1=A_2=\cdots=A_{n-1}=0$ 時， $A_0(r)$ 會有最小極端值 $L_r$ ：

$$L_r=\frac{1}{(p+q)^r}\left[\left[\left(C_n^r p^n q^{r-n}+\cdots+C_{2n-1}^r p^{2n-1}q^{r-(2n-1)}\right)+\left(2C_{2n}^r p^{2n}q^{r-2n}+\cdots+2C_{3n-1}^r p^{3n-1}q^{r-(3n-1)}\right)+\cdots+\left\lfloor\frac{r}{n}\right\rfloor C_r^r p^r\right]\right.$$

$$=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{i=n}^{r}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor\cdot C_i^r p^i q^{r-i}$$

(2)取 $A_0=0$ 且 $A_1=A_2=\cdots=A_{n-1}=1$ 時， $A_0(r)$ 會有最大極端值 $U_r$ ：

$$U_r=\frac{1}{(p+q)^r}\left[\left(C_1^r pq^{r-1}+\cdots+C_n^r p^n q^{r-n}\right)+\left(2C_{n+1}^r p^{n+1}q^{r-n+1}+\cdots+2C_{2n}^r p^{2n}q^{r-2n}\right)+\cdots+\left\lfloor\frac{r+n-1}{n}\right\rfloor C_r^r p^r\right]$$

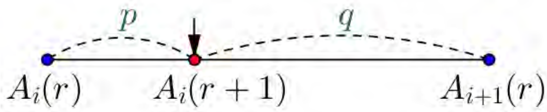
$$=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{i=1}^{r}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor\cdot C_i^r p^i q^{r-i}$$

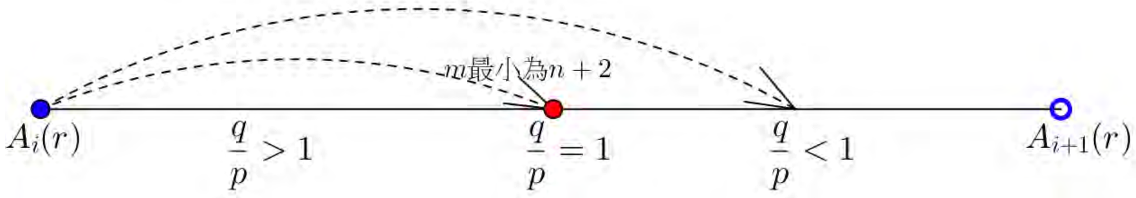
圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若某點經 $m$ 次變換後回歸，假設 $m$ 的最小值為 $n+k$ 。則以下性質會成立：

**性質一**：當 $\dfrac{q}{p}$ 越小時，$k$ 會越小。**即當 $P_i$ 每次跳躍跳離原位置越遠時，會越快可能回歸**。

**性質二**：無論 $p,q$ 為何，且無論 $n$ 個點之初始位置為何，在變換 $n$ 次後皆仍在第一圈內，不可能有任何點回歸。（同理 P4.直觀證明）

**性質三**：若 $\dfrac{q}{p}=1$時，$k=2$。（定理 1.2）




由以上性質，我們可以合理猜測當 $\dfrac{q}{p}<1$時，$m$ 的最小值應為 $n+1$或 $n+2$。我們利用電腦程式跑了幾個特殊值，並記錄其結果如下：（設 $m$ 的最小值為 $n+k$ ）

| | $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ 的最小值 $(n+k)$ | $\frac{q}{p}=\frac{1}{2}$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| | $\frac{q}{p}=\frac{1}{3}$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| | $\frac{q}{p}=\frac{1}{4}$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

由以上的表格我們可觀察到，當 $\dfrac{q}{p}<1$時，$m$ 的最小值應該是 $n+1$。

那當 $\dfrac{q}{p}>1$時，會是什麼情形呢？ （設 $m$ 的最小值為 $n+k$ ）

| | $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ 的最小值 $(n+k)$ | $\frac{q}{p}=2$ | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 22 |
| | $\frac{q}{p}=3$ | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 | 17 | 19 | 20 | 22 | 24 | 25 | 27 | 29 |
| | $\frac{q}{p}=4$ | 8 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 |

由以上表格我們可觀察到，**固定 $\dfrac{q}{p}$，隨著 $n$ 值的增加，$k$ 之值會變大。而固定 $n$，隨著 $\dfrac{q}{p}$ 變大，$k$ 之值也會變大。也就是 $k$ 值會隨著 $n$ 與 $\dfrac{q}{p}$ 而變動而非定值，因此 $k$、$n$、$\dfrac{q}{p}$ 必定有一個關係式存在**，我們的目的是要把它找出來，並分析其意義。以下分成兩大方向探討。

**(已知圓周上相異 $n$ 個點，變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，某點回歸最小變換次數為 $n+k$。)**

方向一：固定 $n,\dfrac{q}{p}$ 值，求 $k$ 值。(定理 3.2)

方向二：固定 $n,k$ 值，求 $\dfrac{q}{p}$ 所滿足的範圍限制。(定理 3.3)

**定理 3.2**：圓周上相異$n$個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之$p:q$處，若某點經$m$次變換後回歸，則：

(1)當$\dfrac{q}{p}<1$時，$m$的最小值為$n+1$。

(2)當$\dfrac{q}{p}=1$時，$m$的最小值為$n+2$。

(3)當$\dfrac{q}{p}>1$且$k$為最小自然數滿足$\dfrac{1}{(p+q)^{n+k}}\sum_{i=1}^{n+k}\left\lfloor\dfrac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}>1$時，$m$的最小值為$n+k$。此時$k\geq 2$。

【證明】

(2)部分即為定理 1.2。我們只需證(1)和(3)部分即可，不失一般性只需觀察$P_0$是否回歸。

$\boxed{\text{(1)部分證明}}$：由定理 3.1 知，$A_0(r)=\dfrac{1}{(p+q)^r}\left[C_0^rq^rA_0+C_1^rpq^{r-1}A_1+C_2^rp^2q^{r-2}A_2+\cdots\cdots+C_r^rp^rA_r\right]$。

a.當$P_0$變換$n$次後，$A_0(n)$的最大極端值為

$$U_n=\frac{1}{(p+q)^n}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor\cdot C_i^np^iq^{n-i}<\frac{1}{(p+q)^n}\sum_{i=0}^{n}C_i^np^iq^{n-i}=\frac{(p+q)^n}{(p+q)^n}=1$$

故$P_0$變換$n$次後仍在第一圈內，不可能回歸！

b.當$P_0$變換$n+1$次後，$A_0(n+1)$的最小極端值與最大極端值分別為

$$L_{n+1}=\frac{1}{(p+q)^{n+1}}\sum_{i=n}^{n+1}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor\cdot C_i^{n+1}p^iq^{n+1-i}=\frac{1}{(p+q)^{n+1}}\left[C_n^{n+1}p^nq+C_{n+1}^{n+1}p^{n+1}\right]<\frac{(p+q)^{n+1}}{(p+q)^{n+1}}=1$$

$$U_{n+1}=\frac{1}{(p+q)^{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor\cdot C_i^{n+1}p^iq^{n+1-i}$$

$$=\frac{1}{(p+q)^{n+1}}\left[C_1^{n+1}pq^n+C_2^{n+1}p^2q^{n-1}+\cdots\cdots+C_n^{n+1}p^nq+\underbrace{2C_{n+1}^{n+1}p^{n+1}}_{C_{n+1}^{n+1}p^{n+1}+C_{n+1}^{n+1}p^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{(p+q)^{n+1}}\left[(p+q)^{n+1}-C_0^{n+1}q^{n+1}+C_{n+1}^{n+1}p^{n+1}\right]=\frac{1}{(p+q)^{n+1}}\left[(p+q)^{n+1}+\left(p^{n+1}-q^{n+1}\right)\right]$$

若$p\leq q$，則$U_{n+1}\leq 1$，可知$A_0(n+1)<1$，即$P_0$變換$n+1$次後仍在第一圈內，不可能回歸。

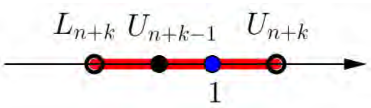
若$p>q$，則$U_{n+1}>1$，即可透過適當取$[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$之值，使得$A_0(n+1)=1$。■

$\boxed{\text{(3)部分證明}}$：首先，我們先找出$A_0(n+k)$的最小極端值$L_{n+k}$與最大極端值$U_{n+k}$。

當$P_0$變換$n+k$次後，$A_0(n+k)$的最小極端值與最大極端值分別為

$$L_{n+k}=\frac{1}{(p+q)^{n+k}}\sum_{i=n}^{n+k}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}\quad;\quad U_{n+k}=\frac{1}{(p+q)^{n+k}}\sum_{i=1}^{n+k}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}\text{。}$$

【分析】若$m$的最小值為$n+k$，則其充要條件為$L_{n+k}<A_0(n+k)<U_{n+k}$滿足$L_{n+k}<1$、$U_{n+k}>1$，且$U_{n+k-1}\leq 1$。




若$k$為最小自然數滿足$U_{n+k}=\dfrac{1}{(p+q)^{n+k}}\sum_{i=1}^{n+k}\left\lfloor\dfrac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}>1$

則$U_{n+k-1}=\dfrac{1}{(p+q)^{n+k-1}}\sum_{i=1}^{n+k-1}\left\lfloor\dfrac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}\leq 1$。

【分析】若可以再證得 $L_{n+k}<1$，即可完成證明，然而直接去比較 $L_{n+k}$ 與1之大小關係並不容易，因此我們想透過比較 $L_{n+k}$ 與 $U_{n+k-1}$ 之大小關係，來證得 $L_{n+k}<U_{n+k-1}\le 1$。

即須先證 $\dfrac{1}{(p+q)^{n+k-1}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}>\dfrac{1}{(p+q)^{n+k}}\displaystyle\sum_{i=n}^{n+k}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}$。

$$(p+q)\sum_{i=1}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}$$

$$=(p+q)\left[C_1^{n+k-1}pq^{n+k-2}+\cdots+\underbrace{\left\lfloor\frac{i+n-2}{n}\right\rfloor C_{i-1}^{n+k-1}p^{i-1}q^{n+k-i}}_{\text{第}(i-1)\text{項}}+\underbrace{\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}}_{\text{第}i\text{項}}+\right.$$

$$\left.\cdots\cdots+\left\lfloor\frac{2n+k-2}{n}\right\rfloor C_{n+k-1}^{n+k-1}p^{n+k-1}\right]$$

鎖定相鄰兩項 $(\boxed{p}+q)\left\lfloor\dfrac{i+n-2}{n}\right\rfloor C_{i-1}^{n+k-1}p^{i-1}q^{n+k-i}+(p+\boxed{q})\left\lfloor\dfrac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}$

其中 $i=2\sim n+k-1$。觀察前項的 $p$ 倍加後項的 $q$ 倍為

$$p\left\lfloor\frac{i+n-2}{n}\right\rfloor C_{i-1}^{n+k-1}p^{i-1}q^{n+k-i}+q\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}$$

$$=\left\lfloor\frac{i+n-2}{n}\right\rfloor C_{i-1}^{n+k-1}p^iq^{n+k-i}+\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-i}$$

$$\ge\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor\left(C_{i-1}^{n+k-1}+C_i^{n+k-1}\right)p^iq^{n+k-i}=\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}$$

故 $(p+q)\displaystyle\sum_{i=1}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}$

$$=q\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor C_1^{n+k-1}pq^{n+k-2}+\sum_{i=2}^{n+k-1}\left(p\times\left\lfloor\frac{i+n-2}{n}\right\rfloor C_{i-1}^{n+k-1}p^{i-1}q^{n+k-i}+q\times\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}\right)$$

$$+p\left\lfloor\frac{2n+k-2}{n}\right\rfloor C_{n+k-1}^{n+k-1}p^{n+k-1}>\sum_{i=2}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}+\left\lfloor\frac{2n+k-2}{n}\right\rfloor\cdot p^{n+k}$$

$$\ge\sum_{i=n}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}+\left\lfloor\frac{n+k}{n}\right\rfloor\cdot p^{n+k}=\sum_{i=n}^{n+k}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}$$

$\boxed{\text{註}}$ $i=2\sim n-1$ 時，$\left\lfloor\dfrac{i}{n}\right\rfloor=0$；$2n+k-2\ge n+k,\forall n\ge 2$。

故可得 $(p+q)\displaystyle\sum_{i=1}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}>\sum_{i=n}^{n+k}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}$

同除以 $(p+q)^{n+k}$ 得 $\dfrac{1}{(p+q)^{n+k-1}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}>\dfrac{1}{(p+q)^{n+k}}\sum_{i=n}^{n+k}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}$

故 $L_{n+k}<U_{n+k-1}\le 1$。■

接下來，我們想探討，若給定 $n$、$k$ 值，在什麼樣時機或是條件下，會存在某個點回歸的最小可能變換數為 $n+k$？我們針對 $1<\dfrac{q}{p}\le 2.5$ 的範圍觀察幾筆程式數據，整理如下表：

【註】藍色部分為可回歸的最小變換數為 $n+2$ 的情形；黃色部分為可回歸的最小變換數為 $n+3$ 的情形；紅色部分為可回歸的最小變換數為 $n+4$ 的情形。(下表)

| $m$ 的最小值 $n+k$ \ $q/p$ \ $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 | 28 | 30 | 31 | 33 |
| 2.4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 | 26 | 28 | 29 | 31 | 32 |
| 2.3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 23 | 24 | 26 | 27 | 28 | 30 | 31 |
| 2.2 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 26 | 28 | 29 | 30 |
| 2.1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | 26 | 27 | 28 | 30 |
| 2.0 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 22 | 24 | 25 | 26 | 27 | 29 |
| 1.9 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 | 27 | 28 |
| 1.8 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 21 | 22 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 1.7 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 1.6 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 25 | 26 |
| 1.5 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 23 | 24 | 25 |
| 1.4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 1.3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 1.2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 1.1 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |

由以上表格我們可以觀察到，當 $n=3$ 時，$\frac{q}{p}$ 約在 1.1~1.5 間，某點回歸的最小變換數為 $n+2$；而 $\frac{q}{p}$ 約在 1.6~2.0 間，某點回歸的最小變換數為 $n+3$。我們的目的在找出**某點回歸的最小變換次數為 $n+k$ 時，$\frac{q}{p}$ 的範圍為何？**以下為我們研究的結果：

**定理 3.3**：圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $R=\frac{q}{p}>1$，若存在某點回歸的最小變換次數為 $n+k$，對於某個自然數 $k\geq 2$，則 $R$ 須滿足不等式 $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i-1}{n}\right\rfloor C_{n+k-i-1}^{n+k-1}(R)^{n+k-i}\leq(R)^{n+k}<\sum_{i=n+1}^{n+k}\left\lfloor\frac{i-1}{n}\right\rfloor C_{n+k-i}^{n+k}(R)^{n+k-i}$。

【證明】

由定理 3.2 知，若某點回歸的最小變換次數為 $n+k$，則須滿足兩大條件：

1. $U_{n+k-1}\leq 1$（即 $\displaystyle\frac{1}{(p+q)^{n+k-1}}\sum_{i=1}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k-1}p^iq^{n+k-1-i}\leq 1$）

$$\frac{1}{(p+q)^{n+k-1}}\left[C_1^{n+k-1}pq^{n+k-2}+\cdots+2C_{n+1}^{n+k-1}p^{n+1}q^{k-2}+\cdots+\left\lfloor\frac{n+k+n-2}{n}\right\rfloor C_{n+k-1}^{n+k-1}p^{n+k-1}\right]$$

$$=\frac{1}{(p+q)^{n+k-1}}\left[(p+q)^{n+k-1}-C_0^{n+k-1}q^{n+k-1}+C_{n+1}^{n+k-1}p^{n+1}q^{k-2}+\cdots+\left\lfloor\frac{n+k-2}{n}\right\rfloor C_{n+k-1}^{n+k-1}p^{n+k-1}\right]\leq 1$$

$$\Rightarrow -C_0^{n+k-1}q^{n+k-1}+C_{n+1}^{n+k-1}p^{n+1}q^{k-2}+\cdots+\left\lfloor\frac{n+k-2}{n}\right\rfloor C_{n+k-1}^{n+k-1}p^{n+k-1}\leq 0$$

同除以 $p^{n+k-1}$ 且令 $R=\frac{q}{p}$ 可整理得

$$C_{k-2}^{n+k-1}R^{k-2}+\cdots+\left\lfloor\frac{n+k-3}{n}\right\rfloor C_1^{n+k-1}R+\left\lfloor\frac{n+k-2}{n}\right\rfloor\leq R^{n+k-1}$$

$$\Rightarrow C_{k-2}^{n+k-1}R^{k-1}+\cdots+\left\lfloor\frac{n+k-3}{n}\right\rfloor C_1^{n+k-1}R^2+\left\lfloor\frac{n+k-2}{n}\right\rfloor R\leq R^{n+k}\ ---(1)$$

2. $U_{n+k}>1$（即$\dfrac{1}{(p+q)^{n+k}}\sum_{i=1}^{n+k}\left\lfloor\dfrac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}>1$）

$$\frac{1}{(p+q)^{n+k}}\left[C_1^{n+k}pq^{n+k-1}+\cdots+2C_{n+1}^{n+k}p^{n+1}q^{k-1}+\cdots+\left\lfloor\frac{n+k+n-1}{n}\right\rfloor C_{n+k}^{n+k}p^{n+k}\right]$$

$$=\frac{1}{(p+q)^{n+k}}\left[(p+q)^{n+k}-C_0^{n+k}q^{n+k}+C_{n+1}^{n+k}p^{n+1}q^{k-1}+\cdots+\left\lfloor\frac{n+k-1}{n}\right\rfloor C_{n+k}^{n+k}p^{n+k}\right]>1$$

$$\Rightarrow -C_0^{n+k}q^{n+k}+C_{n+1}^{n+k}p^{n+1}q^{k-1}+\cdots+\left\lfloor\frac{n+k-1}{n}\right\rfloor C_{n+k}^{n+k}p^{n+k}>0$$

同除以 $p^{n+k}$ 且令 $R=\dfrac{q}{p}$ 可整理得 $C_{k-1}^{n+k}R^{k-1}+\cdots+\left\lfloor\dfrac{n+k-2}{n}\right\rfloor C_1^{n+k}R+\left\lfloor\dfrac{n+k-1}{n}\right\rfloor>R^{n+k}$ ---(2)

由(1)(2)可知

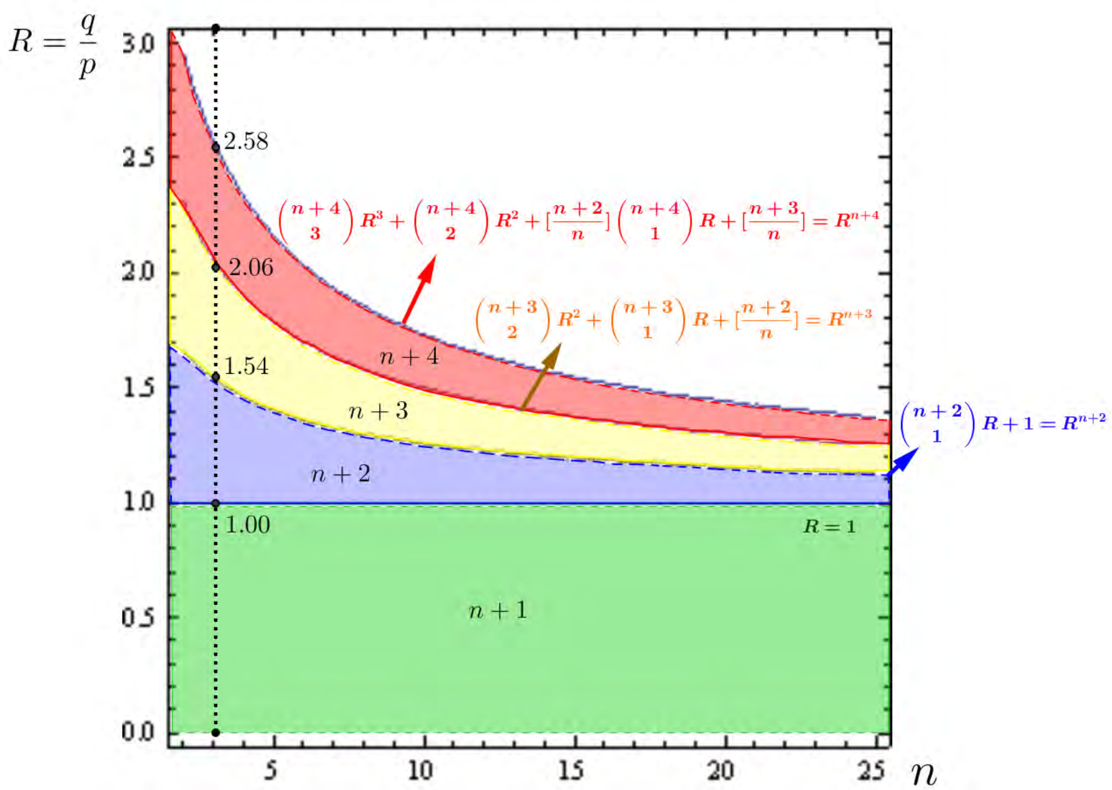
$$C_{k-2}^{n+k-1}R^{k-1}+\cdots+\left\lfloor\frac{n+k-3}{n}\right\rfloor C_1^{n+k-1}R^2+\left\lfloor\frac{n+k-2}{n}\right\rfloor R\le R^{n+k}<C_{k-1}^{n+k}R^{k-1}+\cdots+\left\lfloor\frac{n+k-2}{n}\right\rfloor C_1^{n+k}R+\left\lfloor\frac{n+k-1}{n}\right\rfloor$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=n+1}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i-1}{n}\right\rfloor C_{n+k-i-1}^{n+k-1}(R)^{n+k-i}\le(R)^{n+k}<\sum_{i=n+1}^{n+k}\left\lfloor\frac{i-1}{n}\right\rfloor C_{n+k-i}^{n+k}(R)^{n+k-i}}$$

此式即為某點回歸的最小變換次數為 $n+k$ 之條件。■

【例】圓周上相異3個點，若存在某點回歸的最小變換次數為 6 $(k=3)$，則 $R=\dfrac{q}{p}$ 須滿足不等式 $\sum_{i=4}^{5}\left\lfloor\dfrac{i-1}{3}\right\rfloor C_{5-i}^{5}(R)^{6-i}\le(R)^6<\sum_{i=4}^{6}\left\lfloor\dfrac{i-1}{3}\right\rfloor C_{6-i}^{6}(R)^{6-i}$。整理得 $5R^2+R\le R^6\le 15R^2+6R+1$，可解得 $1.54\cdots\le R<2.06\cdots$。

以下為 Mathematica 程式所畫出的 $k$ 、$n$ 、$\dfrac{q}{p}$ 之關係圖：**(可觀察到與表一之數據圖一致)**



## 研究四：圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，求某點回歸的所有可能變換數。

由定理 2.1 知，圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點經 $m$ 次變換後回歸，則 $m$ 之充要條件為 $m \ge n+2$ 且 $m \ne kn-1, kn, kn+1$，其中 $k$ 為正奇數。

在這個定理的證明中，我們善用了 $C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n = 2^n$ 以及 $C_k^n = C_{n-k}^n$ 這兩個組合公式，成功證明了 $m$ 值的充要條件。那麼若變換成任意 $p:q$ 處，是否也有如此漂亮的結論？

首先我們先觀察 $A_0(r)$ 的值所在的範圍 $(L_r, U_r)$，其中 $L_r = \dfrac{1}{(p+q)^r}\sum_{i=n}^{r}\left\lfloor \dfrac{i}{n} \right\rfloor \cdot C_i^r p^i q^{r-i}$ 且 $U_r = \dfrac{1}{(p+q)^r}\sum_{i=1}^{r}\left\lfloor \dfrac{i+n-1}{n} \right\rfloor \cdot C_i^r p^i q^{r-i}$。若 $(L_r, U_r)$ 涵蓋某個整數值，則 $P_0$ 變換 $r$ 次後可能回歸，反之則否。我們嘗試針對各種不同的 $n, p, q$ 值，利用 Mathematica 寫程式跑出 $L_r, U_r$ 來觀察其值之變化，有了非常驚人的發現：***當 $r$ 足夠大時，$L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分會週期性的趨近於某些定值。即 $L_r$ 與 $U_r$ 對應到圓上的位置會週期性接近某些定點。故 $P_0$ 變換 $r$ 次後可否回歸也能被預期。***

以下列出幾個例子：

【例 1】以 $n=3$、 $p:q=1:1$ 為例：(以下數值為四捨五入至小數點後第二位之結果)

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_r$ | 0 | 0 | 0 | 0.13 | 0.31 | 0.50 | 0.67 | 0.84 | 1.00 | 1.17 | 1.33 | 1.50 |
| $U_r$ | 0 | 0.5 | 0.75 | 0.88 | 1.00 | 1.16 | 1.33 | 1.50 | 1.67 | 1.83 | 2.00 | 2.17 |
| 可否回歸 | 否 | 否 | 否 | 否 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 否 | 否 | 可 |
| $r$ | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| $L_r$ | 1.67 | 1.83 | 2.00 | 2.17 | 2.33 | 2.50 | 2.67 | 2.83 | 3.00 | 3.17 | 3.33 | 3.50 |
| $U_r$ | 2.33 | 2.50 | 2.67 | 2.83 | 3.00 | 3.17 | 3.33 | 3.50 | 3.67 | 3.83 | 4.00 | 4.17 |
| 可否回歸 | 可 | 可 | 否 | 否 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 否 | 否 | 可 |

【說明】當 $r$ 足夠大時，$L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分以 6 個變換數為週期趨近於某些定值。我們特別針對 $r=6k(k \in N \cup \{0\})$ 去觀察 $L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分到第 10 位，更可清楚看到其收斂的性質。

| $r$ | $L_r$ | $U_r$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.0000000000 | 0.0000000000 |
| 6 | 0.6718750000 | 1.3281250000 |
| 12 | 1.6667480469 | 2.3332519531 |
| 18 | 2.6666679382 | 3.3333320618 |
| 24 | 3.6666666865 | 4.3333333135 |
| | ⋮ | ⋮ |

【註】由以上表格的數據可說明定理 2.1 所證明的結論。

【例 2】以 $n=3$ 、 $p:q=2:1$ 為例 (以下數值為四捨五入至小數點後第二位之結果)

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_r$ | 0 | 0 | 0 | 0.3 | 0.59 | 0.79 | 0.99 | 1.22 | 1.45 |
| $U_r$ | 0 | 0.67 | 0.89 | 0.96 | 1.19 | 1.46 | 1.68 | 1.88 | 2.11 |
| 可否回歸 | 否 | 否 | 否 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 可 |
| $r$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| $L_r$ | 1.67 | 1.89 | 2.11 | 2.33 | 2.56 | 2.78 | 2.99- | 3.22 | 3.44 |
| $U_r$ | 2.33 | 2.56 | 2.78 | 2.99- | 3.22 | 3.44 | 3.67 | 3.89 | 4.11 |
| 可否回歸 | 可 | 可 | 否 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 可 |
| $r$ | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| $L_r$ | 3.67 | 3.89 | 4.11 | 4.33 | 4.56 | 4.78 | 5.00- | 5.22 | 5.44 |
| $U_r$ | 4.33 | 4.56 | 4.78 | 5.00- | 5.22 | 5.44 | 5.67 | 5.89 | 6.11 |
| 可否回歸 | 可 | 可 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 否 | 可 |

【說明】當 $r$ 足夠大時，$L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分以 9 個變換數為週期趨近於某些定值。我們特別針對 $r=9k(k\in N\cup\{0\})$ 去觀察 $L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分到第 10 位，更可清楚看到其收斂的性質。

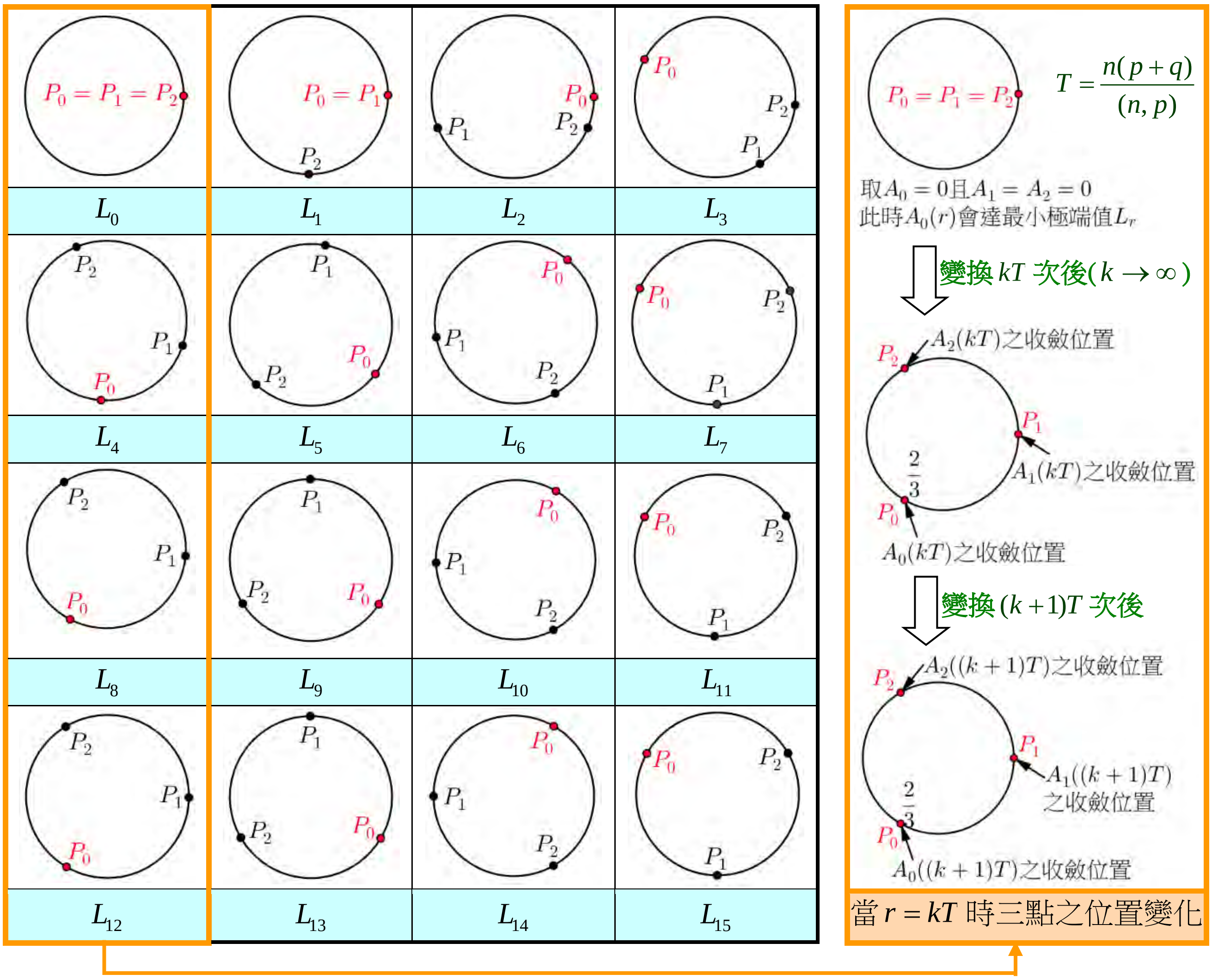
| $r$ | $L_r$ | $U_r$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.0000000000 | 0.0000000000 |
| 9 | 1.6680384088 | 2.3347050754 |
| 18 | 3.6666497316 | 4.3333502684 |
| 27 | 5.6666665970 | 6.3333332636 |
| 36 | 7.6666666675 | 8.3333333325 |
| | ⋮ | ⋮ |

【例 3】以 $n=3$ 、 $p:q=3:1$ 為例 (以下數值為四捨五入至小數點後第二位之結果)

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_r$ | 0 | 0 | 0 | 0.42 | 0.74 | 0.90 | 1.14 | 1.43 | 1.67 | 1.91 | 2.17 | 2.42 |
| $U_r$ | 0 | 0.75 | 0.94 | 0.98 | 1.31 | 1.63 | 1.83 | 2.06 | 2.34 | 2.59 | 2.83 | 3.08 |
| 可否回歸 | 否 | 否 | 否 | 否 | 可 | 可 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 可 |
| $r$ | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| $L_r$ | 2.67 | 2.91 | 3.17 | 3.42 | 3.67 | 3.92 | 4.17 | 4.42 | 4.67 | 4.92 | 5.17 | 5.42 |
| $U_r$ | 3.34 | 3.58 | 3.83 | 4.08 | 4.33 | 4.58 | 4.83 | 5.08 | 5.33 | 5.58 | 5.83 | 6.08 |
| 可否回歸 | 可 | 可 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 可 |

【說明】當 $r$ 足夠大時，$L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分以 4 個變換數為週期趨近於某些定值。

為了更清楚瞭解 $A_0(r)$ 的最小極端值 $L_r$ 對應到圓上的位置變化，我們做出 $L_0 \sim L_{15}$ 的位置圖：




綜合上面結論，可觀察到以下性質：

**性質一**：若同時觀察圓上相異 $n$ 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ 的位置變化，可發現當 $r$ 足夠大時，無論 $p,q$ 值為何，此 $n$ 個點的位置會趨近於圓上 $n$ 等分點。

**性質二**：若單獨觀察 $P_0$ 的位置變化（ $A_0(r)$ 的值），當 $r$ 足夠大時，其 $L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分以週期為 $T = \dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 個變換數趨近於某些定值，而這些定值對應到圓周上位置恰為圓上 $T$ 等分點。

**性質三**：特別觀察 $A_0(r)$ 的極端值 $L_r, U_r$ ，在 $r = kT (k \in N)$ ，其中 $T = \dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 時，無論 $p,q$ 值為何，當 $k$ 趨近於無限大時，$L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分皆會趨近於某一定值。以 $n=3$ 為例(由例 1~例 3 之表格可知)，此定值分別為 $\dfrac{2}{3}$ 與 $\dfrac{1}{3}$ 。

為了解釋以上現象，我們必須先了解以下幾個引理，再得出定理 4.3

**引理 4.1**：圓周上 $n$ 等分點 $P_0, P_1 \cdots\cdots P_{n-1}$ ，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $p,q \in N, (p,q)=1$ ，則此 $n$ 個點以週期為 $\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 個變換數全部回歸。

【證明】

令 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 的初始位置座標為 $\left[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}\right]$，其中 $A_i=\dfrac{i}{n},0\le i\le n-1$，

則可得數列 $\langle A_i\rangle$， $A_i=\dfrac{i}{n},\forall i\in N\cup\{0\}$。

$$A_i(r)=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^r p^k q^{r-k}A_{i+k}=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^r p^k q^{r-k}\frac{i+k}{n}=\frac{1}{n(p+q)^r}\left(i\underbrace{\sum_{k=0}^{r}C_k^r p^k q^{r-k}}_{\text{註1}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{r}kC_k^r p^k q^{r-k}}_{\text{註2}}\right)$$

$$=\frac{1}{n(p+q)^r}\left[i(p+q)^r+pr(p+q)^{r-1}\right]=\frac{i}{n}+\frac{pr}{n(p+q)}$$

【註 1】 $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}C_k^r p^k q^{r-k}=(p+q)^r$

【註 2】 $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}kC_k^r p^k q^{r-k}=\sum_{k=1}^{r}k\cdot\frac{r!}{k!(r-k)!}p^k q^{r-k}=\sum_{k=1}^{r}\frac{r\cdot(r-1)!}{(k-1)!(r-k)!}p^k q^{r-k}$

$$=pr\sum_{k=1}^{r}C_{k-1}^{r-1}p^{k-1}q^{r-k}=pr(p+q)^{r-1}$$

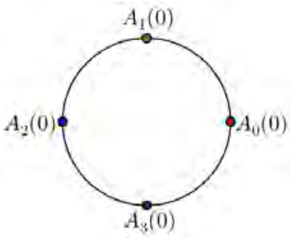
若 $P_i$ 在變換 $r$ 次後回歸，則 $\dfrac{pr}{n(p+q)}\in N$

若 $(n,p)=d$ ，令 $n=ds,p=dt,(s,t)=1$，則 $\dfrac{pr}{n(p+q)}=\dfrac{dt\cdot r}{ds(p+q)}=\dfrac{tr}{s(p+q)}$

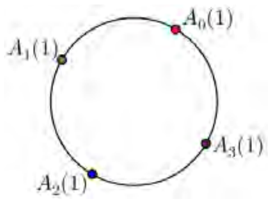
又 $(s,t)=1$，故滿足 $\dfrac{pr}{n(p+q)}\in N$ 的最小 $r$ 值為 $s(p+q)=\dfrac{n(p+q)}{d}$

因此 $P_i$ 以週期為 $\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 個變換數全部回歸。

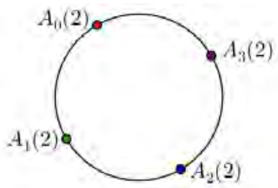
【例】 $n=4,p=2,q=1$：



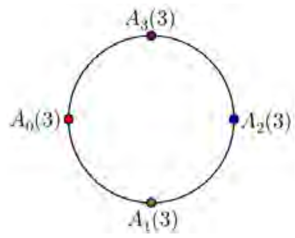

初始位置



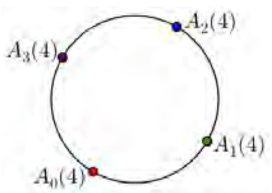

變換 1 次後



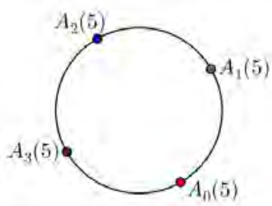

變換 2 次後



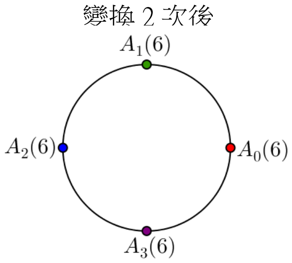

變換 3 次後




變換 4 次後




變換 5 次後




變換 6 次後

【說明】圓周上 4 等分點 $P_0,P_1,P_2,P_3$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $2:1$ 處，因

$(4,2)=2$ 故此 4 個點以週期為 $\dfrac{4(2+1)}{2}=6$ 個變換數全部回歸。

**引理 4.2**：圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若 $P_i$ 變換 $r$ 次後的點之位置坐標為 $A_i(r)$，則 $\lim_{r\to\infty}\left[A_i(r)-A_{i-1}(r)\right]=\frac{1}{n},\forall 1\le i\le n,i\in N$。換句話說，無論 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 之初始位置座標為何，在無限次變換後，此 $n$ 個點終將變換至圓上 $n$ 等分點。

【證明】

令 $\left|A_i(r)-A_{i-1}(r)\right|=s_i^{(r)}$，$\forall 1\le i\le n,i\in N$，其中 $A_n(r)=1+A_0(r)$。

則此 $n$ 點間距變換之轉移矩陣為 $T=\begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} & 0 & \cdots & 0 & \frac{q}{p+q} \end{bmatrix}_{n\times n}$

若 $S=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ 為穩定狀態，則 $TS=S\Rightarrow T=\begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} & 0 & \cdots & 0 & \frac{q}{p+q} \end{bmatrix}_{n\times n}\times\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{q}{p+q}s_1+\frac{p}{p+q}s_2 \\ \frac{q}{p+q}s_2+\frac{p}{p+q}s_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{q}{p+q}s_n+\frac{p}{p+q}s_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}\Rightarrow s_1=s_2=\cdots=s_n$，又 $s_1+s_2+\cdots+s_n=1$，故 $s_1=s_2=\cdots=s_n=\frac{1}{n}$。

故圓周上相異 $n$ 個點，在無限次變換後，此 $n$ 個點終將變換至圓上 $n$ 等分點。■

【註】若 $T$ 是一個 $n$ 階轉移矩陣，且 $T$ 或 $T$ 的某一次方之所有元都是正實數，則會存在穩定狀態。

**定理 4.3**：圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $p,q\in N$，$(p,q)=1$，當變換次數 $r$ 足夠大時，此 $n$ 個點的位置會收斂至圓周上 $n$ 等分點。同時，此 $n$ 個點會在變換 $T=\frac{n(p+q)}{(n,p)}$ 次後再次收斂至相同的位置。

【證明】

由引理 4.2 知，當變換次數 $r$ 足夠大時，此 $n$ 個點的位置會收斂至圓周上 $n$ 等分點。

由引理 4.1 知，此 $n$ 個點會在變換 $T=\frac{n(p+q)}{(n,p)}$ 次後再次收斂至相同的位置。■

最後我們對於當$n=3$且$r=kT$時，其中$T=\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$，無論$p,q$值為何，$P_0$的$L_r$在圓上對應座標會趨近於$\dfrac{2}{3}$的收斂位置相當好奇，顯然它並不受$p,q$值影響，那麼與$n$值有關嗎？我們利用 Mathematica 程式跑出更多更多的數據(詳細過程記錄於研究日誌)，得到以下結果：

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{k\to\infty}\left(L_{kT}-[L_{kT}]\right)$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{7}{12}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{11}{20}$ |
| $\lim\limits_{k\to\infty}\left(U_{kT}-[U_{kT}]\right)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{9}{20}$ |

由以上表格，可觀察到$L_r$和$U_r$的小數部分收斂值具有非常漂亮的規律，證明如下：

**定理 4.4**：圓周上相異$n$個點$P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若$P_0$變換$r$次後的點之位置坐標$A_0(r)$的最小極端值為$L_r$，最大極端值為$U_r$，$T=2n$，則$\lim\limits_{k\to\infty}\left(L_{kT}-[L_{kT}]\right)=\dfrac{n+1}{2n}$；$\lim\limits_{k\to\infty}\left(U_{kT}-[U_{kT}]\right)=\dfrac{n-1}{2n}$。

【證明】

已知 $L_r=\dfrac{1}{(p+q)^r}\displaystyle\sum_{i=n}^{r}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor\cdot C_i^r p^i q^{r-i}$；$U_r=\dfrac{1}{(p+q)^r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor\cdot C_i^r p^i q^{r-i}$

$$L_r=\frac{1}{2^r}\sum_{i=n}^{r}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor\cdot C_i^r=\frac{1}{2^r}\left(C_n^r+C_{n+1}^r+\cdots+2C_{2n}^r+2C_{2n+1}^r+\cdots+3C_{3n}^r+3C_{3n+1}^r+\cdots\cdots\right)$$

故當$r=(2n)k$ 時

$$L_{2nk}=\frac{1}{2^{2nk}}\sum_{i=n}^{2nk}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor\cdot C_i^{2nk}=\frac{1}{2^{2nk}}\Big(C_n^{2nk}+C_{n+1}^{2nk}+\cdots+2C_{2n}^{2nk}+2C_{2n+1}^{2nk}+\cdots+3C_{3n}^{2nk}+3C_{3n+1}^{2nk}+\cdots$$
$$+(2k-1)C_{(2k-1)n}^{2nk}+(2k-1)C_{(2k-1)n+1}^{2nk}+\cdots+2kC_{2kn}^{2nk}\Big)$$

$$L_{2nk}-[L_{2nk}]=1-\frac{1}{2^{2nk}}\left[\left(C_1^{2nk}+\cdots+C_{n-1}^{2nk}\right)+\left(C_{n+1}^{2nk}+\cdots+C_{2n-1}^{2nk}\right)+\cdots+\left(C_{(k-1)n+1}^{2nk}+\cdots+C_{kn-1}^{2nk}\right)\right]$$

已知

$$\frac{1}{2^{2nk}}\Big[C_0^{2nk}+\boxed{\left(C_1^{2nk}+\cdots+C_{n-1}^{2nk}\right)}+C_n^{2nk}+\boxed{\left(C_{n+1}^{2nk}+\cdots+C_{2n-1}^{2nk}\right)}+\cdots+\boxed{\left(C_{(k-1)n+1}^{2nk}+\cdots+C_{kn-1}^{2nk}\right)}+C_{kn}^{2nk}$$
$$+\left(C_{kn+1}^{2nk}+\cdots+C_{(k+1)n-1}^{2nk}\right)+\cdots+\left(C_{(2k-2)n+1}^{2nk}+C_{(2k-1)n-1}^{2nk}\right)+C_{(2k-1)n}^{2nk}+\left(C_{(2k-1)n+1}^{2nk}+C_{2kn-1}^{2nk}\right)+C_{2kn}^{2nk}\Big]=1$$

因為 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2^{2nk}}\left[C_0^{2nk}+C_n^{2nk}+C_{2n}^{2nk}+\cdots+C_{2kn}^{2nk}\right]=\dfrac{1}{n}$，且

$$\left(C_1^{2nk}+\cdots+C_{n-1}^{2nk}\right)=\left(C_{(2k-1)n+1}^{2nk}+\cdots+C_{2kn-1}^{2nk}\right),\left(C_{n+1}^{2nk}+\cdots+C_{2n-1}^{2nk}\right)=\left(C_{(2k-2)n+1}^{2nk}+\cdots+C_{(2k-1)n-1}^{2nk}\right)$$
$$,\cdots,\left(C_{(k-1)n+1}^{2nk}+\cdots+C_{kn-1}^{2nk}\right)=\left(C_{kn+1}^{2nk}+\cdots+C_{(k+1)n-1}^{2nk}\right)$$

$$\therefore \boxed{\left(C_1^{2nk}+\cdots+C_{n-1}^{2nk}\right)}+\boxed{\left(C_{n+1}^{2nk}+\cdots+C_{2n-1}^{2nk}\right)}+\cdots+\boxed{\left(C_{(k-1)n+1}^{2nk}+C_{kn-1}^{2nk}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[2^{2nk}-\left(C_0^{2nk}+C_n^{2nk}+\cdots+C_{kn}^{2nk}+\cdots+C_{(2k-1)n}^{2nk}+C_{2kn}^{2nk}\right)\right]$$

即 $$\lim_{k\to\infty}\left(L_{2nk}-[L_{2nk}]\right)=1-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{2nk}}\cdot\frac{1}{2}\left[2^{2nk}-\left(C_0^{2nk}+C_n^{2nk}+\cdots+C_{kn}^{2nk}+\cdots+C_{(2k-1)n}^{2nk}+C_{2kn}^{2nk}\right)\right]$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}=\frac{n+1}{2n}$$

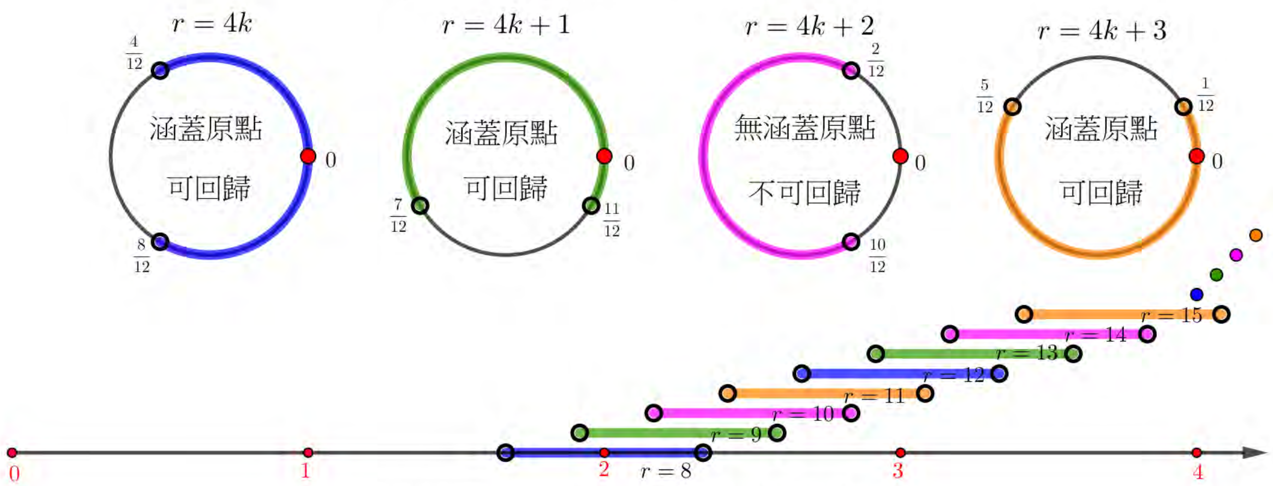
同理可證 $\lim_{k\to\infty}\left(U_{2nk}-[U_{2nk}]\right)=\frac{n-1}{2n}$。 ■

**事實上，定理 4.4 的結論在變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處時，也會成立！**

結論：圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若 $P_0$ 變換 $r$ 次後的點之位置坐標 $A_0(r)$ 的最小極端值 $L_r$ 與最大極端值 $U_r$，$T=\frac{n(p+q)}{(n,p)}$，則 $\lim_{k\to\infty}\left(L_{kT}-[L_{kT}]\right)=\frac{n+1}{2n}$；$\lim_{k\to\infty}\left(U_{kT}-[U_{kT}]\right)=\frac{n-1}{2n}$。也就是說，當 $r=kT(k\in N)$ 時，$L_r$ 與 $U_r$ 在圓周上的的收斂位置分別在 $\frac{n+1}{2n}$ 與 $\frac{n-1}{2n}$ 處，而 $r=kT+1,kT+2,\cdots\cdots$ 時，$L_r$ 與 $U_r$ 的收斂位置也隨之確定。因此，$A_0(r)$ 的值之範圍 $(L_r,U_r)$ 是否會涵蓋整數值皆可得知，則 $P_0$ 變換 $r$ 次後可否回歸也能被預期。

【例】若 $n=3,p=3,q=1$，$P_0$ 變換 $r$ 次之位置座標 $A_0(r)$ 之範圍為 $(L_r,U_r)$。由以下圖示可知，當 $r$ 足夠大，若 $r=4k,4k+1,4k+3$，$P_0$ 可能回歸。若 $r=4k+2$，$P_0$ 永不回歸。

$P_0$變換$r$次後在圓上的位置範圍($r\to\infty$)




$A_0(r)$在數線上之範圍$(L_r,U_r)$($r$足夠大時)

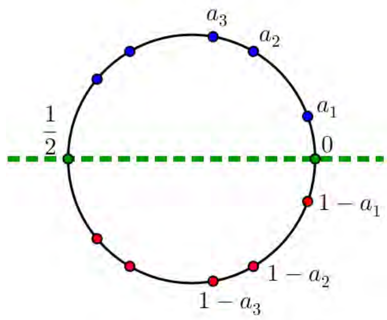
***因此，我們可以預期，圓周上相異3個點$P_0,P_1,P_2$，變換至與下一點所成弧之3:1處，則在變換 2018 次後，無論初始位置座標為何，永遠不可能有任何點可回歸！***

**研究五：圓周上相異 $n$ 個點在特殊初始位置座標之回歸性質研究。**

在文獻[2]中，我們以程式嘗試各類特殊初始位置坐標時，發現除了 $n$ 等分點有明顯的循環回歸性質外，若此 $n$ 個點的初始排列方式為線對稱或是具週期性，也同樣具有規律。為了此篇作品完整性，將部分研究內容敘述如下：

**定理 5.1**：圓周上相異 $2n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{2n-1}$，且初始位置座標為 $\left[0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},\frac{1}{2},1-a_{n-1},\cdots,1-a_2,1-a_1\right]$，其中 $0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<\frac{1}{2}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，則 $P_0$ 和 $P_n$ 在變換 $4n$ 次後會回歸。

【證明】




令 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 的初始位置座標為 $\left[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}\right]$，其中

$$A_i=\begin{cases} a_i & ,0\le i\le n-1 \\ \frac{1}{2} & ,i=n \\ 1-a_{2n-i} & ,n+1\le i\le 2n-1 \end{cases}\text{，}\ 0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<\frac{1}{2}\text{，}$$

由定理 1.1 知：$A_0(r)=\frac{1}{2^r}\left(C_0^rA_0+C_1^rA_1+\cdots+C_n^rA_n+\cdots+C_r^rA_r\right)$

$$\begin{aligned}
A_0(4n)&=\frac{1}{2^{4n}}\left(C_0^{4n}A_0+C_1^{4n}A_1+\cdots+C_n^{4n}A_n+\cdots+C_{2n}^{4n}A_{2n}\cdots+C_{3n}^{4n}A_{3n}+\cdots+C_{4n}^{4n}A_{4n}\right)\\
&=\frac{1}{2^{4n}}\Big[C_0^{4n}\times 0+C_1^{4n}\times a_1+C_2^{4n}\times a_2+\cdots+C_{n-1}^{4n}\times a_{n-1}+C_n^{4n}\times\frac{1}{2}\\
&\quad+C_{n+1}^{4n}\times\left(1-a_{n-1}\right)+\cdots+C_{2n-2}^{4n}\left(1-a_2\right)+C_{2n-1}^{4n}\left(1-a_1\right)+C_{2n}^{4n}\times 1\\
&\quad+\underbrace{C_{2n+1}^{4n}}_{C_{2n-1}^{4n}}\left(1+a_1\right)+\cdots+\underbrace{C_{3n-1}^{4n}}_{C_{n+1}^{4n}}\left(1+a_{n-1}\right)+\underbrace{C_{3n}^{4n}}_{C_n^{4n}}\times\frac{3}{2}\\
&\quad+\underbrace{C_{3n+1}^{4n}}_{C_{n-1}^{4n}}\left(2-a_{n-1}\right)+\cdots+\underbrace{C_{4n-1}^{4n}}_{C_1^{4n}}\times\left(2-a_1\right)+\underbrace{C_{4n}^{4n}}_{C_0^{4n}}\times 2\Big]\\
&=\frac{1}{2^{4n}}\left(C_0^{4n}+C_1^{4n}+\cdots+C_{4n}^{4n}\right)=\frac{2^{4n}}{2^{4n}}=1
\end{aligned}$$

。同理可證得 $A_n(4n)=\frac{3}{2}=1+A_n$。■

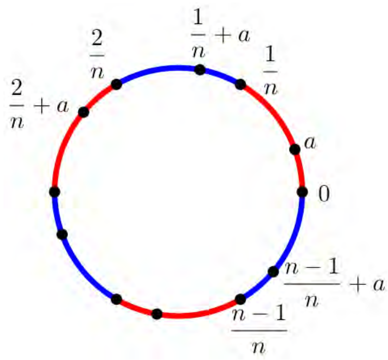
討論：若將定理 5.1 中「變換成與下一點所成弧之中點」改成「變換成與下一點所成弧之 $p:q(p\ne q)$ 處」，那麼是否有類似的回歸情形呢？

【說明】由定理 5.1 的證明過程中，我們可以觀察到，在 $r=4n$ 時，初始位置座標 $\left[0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},\frac{1}{2},1-a_{n-1},\cdots,1-a_2,1-a_1\right]$ 恰**可以利用 $C_k^n=C_{n-k}^n$ 之性質對消或是合併大部份的項**，進而得到整數這個漂亮的結果。然而，**當我們嘗試變換成與下一點所成弧之 $p:q(p\ne q)$ 處時，顯然沒有這種對消或合併的現象，因此不會產生特定循環或回歸現象**。

接著，若 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 在圓周上的排列具週期性，是否也有類似的回歸現象呢？我們利用 GeoGebra 寫出的程式，針對各種不同具週期性排列的初始位置座標去觀察，發現只有**兩間隔成一週期**時才有明顯的規律，其餘並沒有特定規律。研究結果如下：

**定理 5.2**：圓周上相異 $2n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{2n-1}$，且初始位置座標為 $\left[0,a,\frac{1}{n},\frac{1}{n}+a,\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}+a\right]$，其中 $0<a<\frac{1}{n},a\neq\frac{1}{2n}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，則一次變換後，$P_0,P_1,\cdots,P_{2n-1}$ 會變換至圓周上 $2n$ 等分點，且此 $2n$ 個點無論變換幾次永不回歸。

【證明】




令 $P_0,P_1,\cdots,P_{2n-1}$ 的初始位置座標為 $[A_0,A_1,\cdots,A_{2n-1}]$，

其中 $A_i=\frac{i}{2n}$，$i$ 為偶數，$A_i=a+\frac{i-1}{2n}$，$i$ 為奇數

因為 $A_i(r)=\frac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^rA_{i+k}$ 故 $A_i(1)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}C_k^1A_{i+k}=\frac{1}{2}(A_i+A_{i+1})$

當 $i$ 為偶數，$A_i(1)=\frac{1}{2}\left(\frac{i}{2n}+a+\frac{i}{2n}\right)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{i}{n}\right)$

當 $i$ 為奇數，$A_i(1)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{i-1}{2n}+\frac{i+1}{2n}\right)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{i}{n}\right)$

故 $A_{i+1}(1)-A_i(1)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{i+1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(a+\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{2n}$

即 $P_0,P_1,\cdots,P_{2n-1}$ 經一次變換後會為圓周上的 $2n$ 等分點。

由定理 4.1 知，之後此 $2n$ 個等分點位置皆以逆時針轉 $\frac{1}{4n}$ 的方式變換。當 $i$ 為偶數時，

$A_i(r)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{i}{n}\right)+\frac{r-1}{4n}=\frac{i}{2n}+\left(\frac{a}{2}+\frac{r-1}{4n}\right)$，若 $P_i$ 在變換 $r$ 次後回歸，則 $\left(\frac{a}{2}+\frac{r-1}{4n}\right)\in N\cup\{0\}$，

顯然除非 $a=\frac{1}{2n}$，否則此 $2n$ 個點永不回歸。同理可證 $i$ 為奇數的情形。■

$\boxed{\text{討論}}$：若將定理 5.2 中「變換成與下一點所成弧之中點」改成「變換成與下一點所成弧之 $p:q$ $(p\neq q)$ 處」，那麼是否有類似的情形呢？即圓周上相異 $2n$ 個點，若其初始位置座標為 $\left[0,a,\frac{1}{n},\frac{1}{n}+a,\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}+a\right]$，是否可能在有限次變換後，變換至圓周上 $2n$ 等分點？

【說明】因為 $A_i(r)=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^rp^kq^{r-k}A_{i+k}$ 且 $A_{i+1}(r)=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^rp^kq^{r-k}A_{i+k+1}$

不妨假設 $i,r$ 皆為偶數，則

$$A_{i+1}(r)-A_i(r)=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^rp^kq^{r-k}(A_{i+k+1}-A_{i+k})$$

$$=\frac{1}{(p+q)^r}\left[C_0^rq^r\cdot a+C_1^rpq^{r-1}\left(\frac{1}{n}-a\right)+C_2^rp^2q^{r-2}a+C_3^rp^3q^{r-3}\left(\frac{1}{n}-a\right)+\cdots+C_{r-1}^rp^{r-1}q\left(\frac{1}{n}-a\right)+C_r^rp^ra\right]$$

$$=\frac{1}{(p+q)^r}\left[a\left(\underbrace{C_0^rq^r-C_1^rpq^{r-1}+C_2^rp^2q^{r-2}-C_3^rp^3q^{r-3}+\cdots+C_r^rp^r}_{\text{註1}}\right)+\frac{1}{n}\left(\underbrace{C_1^rpq^{r-1}+C_3^rp^3q^{r-3}+\cdots+C_{r-1}^rp^{r-1}q}_{\text{註2}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(p+q)^r}\left[a\cdot(p-q)^r+\frac{1}{n}\cdot\frac{(p+q)^r-(p-q)^r}{2}\right]=\frac{1}{2n}+\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^r\cdot\left(a-\frac{1}{2n}\right)(*)$$

【註 1】 $C_0^r q^r - C_1^r pq^{r-1} + C_2^r p^2 q^{r-2} - C_3^r p^3 q^{r-3} + \cdots + C_r^r p^r = \left[p + (-q)\right]^r$

【註 2】 $C_0^r q^r + C_1^r pq^{r-1} + C_2^r p^2 q^{r-2} + C_3^r p^3 q^{r-3} + \cdots + C_r^r p^r = (p+q)^r \cdots\cdots(1)$

$$C_0^r q^r - C_1^r pq^{r-1} + C_2^r p^2 q^{r-2} - C_3^r p^3 q^{r-3} + \cdots + C_r^r p^r = (p-q)^r \cdots\cdots(2)$$

$\dfrac{(1)-(2)}{2}$ 可得 $C_1^r pq^{r-1} + C_3^r p^3 q^{r-3} + \cdots + C_{r-1}^r p^{r-1} q = \dfrac{(p+q)^r - (p-q)^r}{2}$

由(*)式可知，除非 $p=q$ 或 $a=\dfrac{1}{2n}$ 時，$P_0, P_1, \cdots, P_{2n-1}$ 才有機會變換至圓周上 $2n$ 等分點。■

## 伍、研究結果

一、**圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的最小變換數。**

圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點變換 $m$ 次後回歸，則 $m$ 的最小值為 $n+2$。（若某點在變換 $n+2$ 次後回歸，則當 $n \geq 3$ 時，此點為唯一回歸的點；當 $n=2$ 時，$n$ 個點同時回歸。）

二、**圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的所有可能變換數。**

圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點經 $m$ 次變換後回歸，則 $m$ 之充要條件為 $m \geq n+2$ 且 $m \neq kn-1, kn, kn+1$，其中 $k$ 為正奇數。

三、**圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，求某點回歸的最小變換數。**

(一)圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若某點經 $m$ 次變換後回歸，則：

(1)當 $\dfrac{q}{p}<1$ 時，$m$ 的最小可能值為 $n+1$。

(2)當 $\dfrac{q}{p}=1$ 時，$m$ 的最小可能值為 $n+2$。

(3)當 $\dfrac{q}{p}>1$ 且 $k$ 為最小自然數滿足 $\dfrac{1}{(p+q)^{n+k}}\sum_{i=1}^{n+k}\left\lfloor\dfrac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k} p^i q^{n+k-i} > 1$ 時，$m$ 的最小可能值為 $n+k$。此時 $k \geq 2$。

(二)圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $R=\dfrac{q}{p}>1$，若存在某點回歸的最小可能變換數為 $n+k$，對於某個自然數 $k \geq 2$，則 $R$ 須滿足

不等式 $\sum_{i=n+1}^{n+k-1}\left\lfloor\dfrac{i-1}{n}\right\rfloor C_{n+k-i-1}^{n+k-1}(R)^{n+k-i} \leq (R)^{n+k} < \sum_{i=n+1}^{n+k}\left\lfloor\dfrac{i-1}{n}\right\rfloor C_{n+k-i}^{n+k}(R)^{n+k-i}$。

四、**圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，求某點回歸的所有可能變換數。**

(一)圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $p,q \in N$，$(p,q)=1$，當變換次數 $r$ 足夠大時，此 $n$ 個點的位置會收斂至圓周上 $n$ 等分點。同時，此 $n$ 個點會在變換 $T=\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 次後再次收斂至相同的位置。

(二)圓周上相異 $n$ 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若 $P_0$ 變

換 $r$ 次後的點之位置坐標 $A_0(r)$ 的最小極端值為 $L_r$，最大極端值為 $U_r$，$T=\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$，則 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(L_{kT}-\left[L_{kT}\right]\right)=\dfrac{n+1}{2n}$；$\lim\limits_{k\to\infty}\left(U_{kT}-\left[U_{kT}\right]\right)=\dfrac{n-1}{2n}$。也就是說，當 $r=kT(k\in N)$ 時，$L_r$ 與 $U_r$ 在圓周上的的收斂位置分別在 $\dfrac{n+1}{2n}$ 與 $\dfrac{n-1}{2n}$ 處，而 $r=kT+1,kT+2,\cdots\cdots$ 時，$L_r$ 與 $U_r$ 的收斂位置也隨之確定。因此，$A_0(r)$ 的值之範圍 $\left(L_r,U_r\right)$ 是否會涵蓋整數值皆可得知，則 $P_0$ 變換 $r$ 次後可否回歸也能被預期。

**五、圓周上相異 $n$ 個點在特殊初始位置座標之回歸性質研究。**

圓上 $n$ 個點初始排列方式為等分點、線對稱或是具週期性，在特定條件下具有規律。

## 陸、討論與未來展望

在這篇研究中，我們針對圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處時，某點回歸之最小變換數以及所有可能變換數作探討。同時發現，當變換次數 $r$ 足夠大時，此 $n$ 個點的位置會收斂至圓周上 $n$ 等分點。當 $r=kT(k\in N)$，其中 $T=\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 時，$A_0(r)$ 的最小極端值 $L_r$ 與最大極端值 $U_r$ 在圓周上的收斂位置分別在 $\dfrac{n+1}{2n}$ 與 $\dfrac{n-1}{2n}$ 處，此收斂位置與跳躍比例 $p:q$ 無關。

事實上，任意一組初始位置座標都會對應到某一組收斂位置，舉例來說，圓周上 3 個點之初始位置座標若為 $\left[0,\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right]$，當 $r=kT(k\in N)$ 時，其在圓周上的收斂位置為 $\left[\dfrac{1}{15},\dfrac{6}{15},\dfrac{11}{15}\right]$。圓周上 5 個點之初始位置座標若為 $\left[0,\dfrac{1}{10},\dfrac{3}{10},\dfrac{5}{10},\dfrac{6}{10}\right]$，當 $r=kT(k\in N)$ 時，其在圓周上的收斂位置為 $\left[\dfrac{9}{10},\dfrac{1}{10},\dfrac{3}{10},\dfrac{5}{10},\dfrac{7}{10}\right]$。我們歸納出一個結論：圓周上相異 $n$ 個點，若其初始位置座標為 $\left[0,\dfrac{b_1}{a},\dfrac{b_2}{a},\cdots\cdots,\dfrac{b_{n-1}}{a}\right]$，無論跳躍比例 $p:q$ 為何，當 $r=kT(k\in N)$ 時，其在圓周上的收斂位置為圓周上 $n$ 等分點 $\left[c_0,c_1,\cdots\cdots,c_{n-1}\right]$，其中 $c_0$ 的值為（$\dfrac{n+1}{2n}+\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{a}\times\dfrac{1}{n}$）的小數部分 。這是個非常漂亮的關係式，值得未來繼續深入去探討。

## 柒、參考資料


1.林常(編譯)(2011)。**環球城市數學奧林匹克試題解**。杭州：浙江大學出版社。

2.楊品賢、張維倫。**圓周上跳躍回歸問題之研究－特殊初始位置之回歸情形**。全國中學生第 1061115 梯次數學類小論文。

3.許志農(主編) (2016)。**普通高級中學數學 2**。台北：龍騰文化。

4.游森棚(主編)(2016)。**普通高級中學數學 4**。台南：翰林出版。

5.馮志剛(2005)。**數學歸納法的証題方法與技巧**。上海：華東師範大學出版社。

6.林倉億(2014)。**「轉移矩陣」二三事(1)：高中課本中穩定狀態的求法**。HPM 通訊。17(5)。

## 【評語】050419

本作品探討圓周上相異 n 個點，將圓周分割成 n 段弧，每次每個點沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點經 m 次變換後回到初始點，則 m 的最小值以及 m 的所有可能值。這個問題相當有趣，作者研究架構及邏輯也很清楚，且都能關心問題內含的重要的數學問題,其中最主要是去關心 $A_i(r)$的最小極端值和最大極端值。這一部份的問題是困難的，作者主要是借助電腦工具去輔助觀察，但是，由於數列的值域不具有連通性，因此有機會在區間之中但被跳過去，而電腦卻檢查不出來，這一部數學的嚴格性仍待加強。

## 作品海報

## 壹、研究動機

第 27 屆環球城市數學競賽試題中，有一個關於圓周上跳躍問題：「12 隻蚱蜢處於圓周上的不同點，牠們將圓周分割成 12 段弧，每步每隻蚱蜢同時沿順時針方向跳到以牠為端點的弧之中點，得到新的 12 段弧，繼續這樣的跳步，則是否能在 12 步後至少有一隻蚱蜢回到初始點？」我們對這樣的回歸性質感到好奇，便展開一連串的研究。

## 貳、研究目的

一、圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的最小變換數。
二、圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的所有可能變換數。
三、圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，求某點回歸的最小變換數。
四、圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，求某點回歸的所有可能變換數。
五、圓周上相異 $n$ 個點在特殊初始位置座標之回歸性質研究。

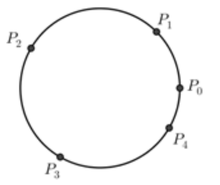
說明：為了方便以**極座標**撰寫程式，我們將 $n$ 隻蚱蜢改成以**逆時針方向排序**在圓周上，並以**逆時針方向跳躍**。同時，將此跳躍問題轉化成數學問題：「**圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點經 $m$ 次變換後回到初始點，求 $m$ 的最小值。**」

## 參、研究設備與器材

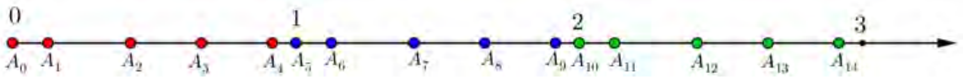
紙、筆、電腦、GeoGebra、Mathematica、C++

## 肆、研究過程與方法

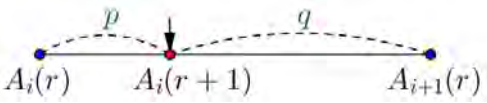
【定義一】圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，將圓周展開成以 $P_0$ 為起始點的射線，以 $P_0$ 為原點，單位長為 1 圓周長，若 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$ 為 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 在此射線上的座標，則稱 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$ 為 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 之**位置座標**。

【定義二】定義數列 $\langle A_i \rangle$，$A_i$ 為點 $P_i$ 的初始位置座標且滿足 $|A_{i+n}-A_i|=1, \forall i \in N\cup\{0\}$。其中位置座標差為整數的任意兩個點在圓周上重合。



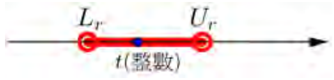
【定義三】圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，稱為**一次變換**。設點 $P_i$ 的位置座標為 $A_i$，$P_i$ 變換 $r$ 次後的點之位置坐標為 $A_i(r)$，其中 $A_i(0)=A_i$。由分點公式知，$A_i(r+1)=\dfrac{qA_i(r)+pA_{i+1}(r)}{p+q}$。



【定義四】若某點經變換 $r$ 次後回到初始位置，則稱此點**變換 $r$ 次後回歸**。

【定義五】設點 $P_i$ 變換 $r$ 次後的點之位置坐標為 $A_i(r)$，若 $A_i(r)$ 的所有可能值之範圍為開區間 $(L_r,U_r)$，稱 $L_r$ 為 $A_i(r)$ 的**最小極端值**，$U_r$ 為 $A_i(r)$ 的**最大極端值**。

【解題技巧】



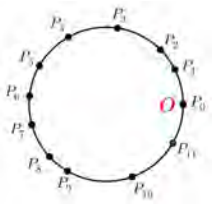

$(L_r,U_r)$ 含整數點 $\Rightarrow$ $P_0$ 可能回歸　$(L_r,U_r)$ 不含整數點 $\Rightarrow$ $P_0$ 不可能回歸

### 研究一：圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的最小變換數。

**定理 1.1**：圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，其初始位置座標為 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點處，若 $P_i$ 變換 $r$ 次後的點之位置坐標為 $A_i(r)$，則 $A_i(r)=\dfrac{1}{2^r}\left(C_0^rA_i+C_1^rA_{i+1}+C_2^rA_{i+2}+\cdots\cdots+C_r^rA_{i+r}\right)=\dfrac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^rA_{i+k}$。

**定理 1.2**：圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點變換 $m$ 次後回歸，則 $m$ 的最小值為 $n+2$。若已知某點在變換 $n+2$ 次後回歸，則當 $n\geq 3$ 時，此點為唯一回歸的點；當 $n=2$ 時，$n$ 個點同時回歸。

【原始問題】12 隻蚱蜢處於圓周上的不同點，每步每隻蚱蜢同時沿逆時針方向跳到以牠為端點的弧之中點，繼續這樣的跳步，沒有任何一隻蚱蜢可以經由跳躍 12 步後回到初始點！若存在某隻蚱蜢跳躍 $m$ 次後回到初始點，則 $m$ 的最小值為 14。



討論：若 $P_0$ 恰變換 $n+2$ 次即可回歸，則 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 的初始位置座標 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$ 須滿足什麼條件呢？

結論：若 $P_0$ 變換 $n+2$ 次後回歸，則當 $n\geq 3$ 時，$P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 的初始位置座標 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$ 必須滿足

$$(2C_1^{n+2})A_1+(C_2^{n+2}+1)A_2+C_3^{n+2}A_3+\cdots+C_{n-1}^{n+2}A_{n-1}=2^{n+2}-C_0^{n+2}-C_1^{n+2}-C_2^{n+2}$$

，此時 $\dfrac{1}{2}<A_1<1-\dfrac{2n+4}{2^{n+3}-n^2-3n-4}$。

【例】已知圓上相異 3 個點 $P_0,P_1,P_2$，其初始位置座標 $[A_0,A_1,A_2]$，若 $P_0$ 變換 5 次後回歸，則 $A_0=0$ 且 $10A_1+11A_2=16$。更進一步發現，此時 $\dfrac{1}{2}<A_1<\dfrac{16}{21}$。因此若取 $A_1=\dfrac{6}{10},A_2=\dfrac{10}{11}$，則 $P_0$ 變換 5 次後即可回歸，此時，$P_0$ 為 3 個點中唯一會回歸的點。

### 研究二：圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的所有可能變換數。

**定理 2.1**：圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點經 $m$ 次變換後回歸，則 $m$ 之充要條件為 $m\geq n+2$ 且 $m\neq kn-1,kn,kn+1$，其中 $k$ 為正奇數。

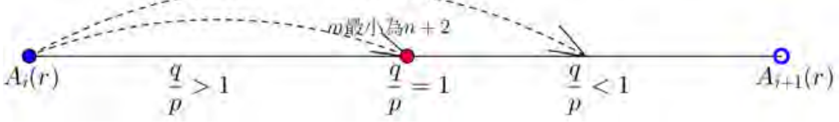
【例】圓周上相異 3 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，當變換次數為 $1,2,3,4,8,9,10,14,15,16,20,21,22,\cdots$ 時，無論初始位置座標為何，皆不存在任何點可回歸。

### 研究三：圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，求某點回歸的最小變換數。

**定理 3.1**：圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，其初始位置座標為 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若 $P_i$ 變換 $r$ 次後的點之位置座標為 $A_i(r)$，則

$$A_i(r)=\frac{1}{(p+q)^r}\left[C_0^rq^rA_i+C_1^rpq^{r-1}A_{i+1}+C_2^rp^2q^{r-2}A_{i+2}+\cdots\cdots+C_r^rp^rA_{i+r}\right]=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^rp^kq^{r-k}A_{i+k}$$。

圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若某點經 $m$ 次變換後回歸，假設 $m$ 的最小值為 $n+k$。以下性質會成立：



| | $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ 的最小值 $n+k$ | $\frac{q}{p}=\frac{1}{4}$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| | $\frac{q}{p}=\frac{1}{3}$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| | $\frac{q}{p}=\frac{1}{2}$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| | $\frac{q}{p}=2$ | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 22 |
| | $\frac{q}{p}=3$ | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 | 17 | 19 | 20 | 22 | 24 | 25 | 27 | 29 |
| | $\frac{q}{p}=4$ | 8 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 |

性質一：當 $\dfrac{q}{p}$ 越小時，$k$ 會越小。即當 $P_i$ 每次跳躍跳離原位置越遠時，會越快可能回歸。

性質二：無論 $p,q$ 為何，且無論 $n$ 個點之初始位置為何，在變換 $n$ 次後皆仍在第一圈內，不可能有任何點回歸。

性質三：若 $\dfrac{q}{p}=1$ 時，$k=2$。(定理 1.2)

結論：當 $\dfrac{q}{p}<1$ 時，$m$ 的最小值是 $n+1$。當 $\dfrac{q}{p}>1$ 時，固定 $\dfrac{q}{p}$，隨著 $n$ 值的增加，$k$ 之值會變大。而固定 $n$，隨著 $\dfrac{q}{p}$ 變大，$k$ 之值也會變大。也就是 $k$ 值會隨著 $n$ 與 $\dfrac{q}{p}$ 而變動而非定值，因此 $k$、$n$、$\dfrac{q}{p}$ 必定有一個關係式存在。以下分成兩大方向探討。

**方向一**：固定 $n, \frac{q}{p}$ 值，求 $k$ 值。

**定理 3.2**：圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若某點經 $m$ 次變換後回歸，則：

(1) 當 $\frac{q}{p}<1$ 時，$m$ 的最小值為 $n+1$。 (2) 當 $\frac{q}{p}=1$ 時，$m$ 的最小值為 $n+2$。

(3) 當 $\frac{q}{p}>1$ 且 $k$ 為最小自然數滿足 $\frac{1}{(p+q)^{n+k}}\sum_{i=1}^{n+k}\left[\frac{i+n-1}{n}\right]C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}>1$ 時，$m$ 的最小值為 $n+k$。此時 $k\ge 2$。

**方向二**：固定 $n, k$ 值，求 $\frac{q}{p}$ 所滿足的範圍限制。

**定理 3.3**：圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $R=\frac{q}{p}>1$。若存在某點回歸的最小變換次數為 $n+k$，對於某個自然數 $k\ge 2$，則 $R$ 須滿足不等式 $\sum_{i=n+1}^{n+k-1}\left[\frac{i-1}{n}\right]C_{n+k-i-1}^{n+k-1}(R)^{n+k-i}\le(R)^{n+k}<\sum_{i=n+1}^{n+k}\left[\frac{i-1}{n}\right]C_{n+k-i}^{n+k}(R)^{n+k-i}$。

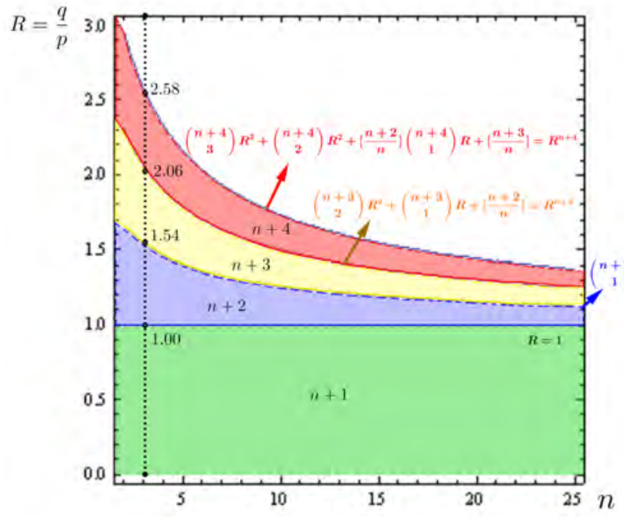
【例】圓周上相異 3 個點，若存在某點回歸的最小變換次數為 $6(k=3)$，則 $R=\frac{q}{p}$ 須滿足不等式 $\sum_{i=4}^{5}\left[\frac{i-1}{3}\right]C_{5-i}^{5}(R)^{6-i}\le(R)^6<\sum_{i=4}^{6}\left[\frac{i-1}{3}\right]C_{6-i}^{6}(R)^{6-i}$。

整理得 $5R^2+R\le R^6\le 15R^2+6R+1$，可解得 $1.54\cdots\le R<2.06\cdots$。

【程式數據】藍色部分為可回歸的最小變換數為 $n+2$ 的情形；黃色部分為可回歸的最小變換數為 $n+3$ 的情形；紅色部分為可回歸的最小變換數為 $n+4$ 的情形。

$m$ 的最小值 $n+k$

| $q/p$ \ $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 | 28 | 30 | 31 | 33 |
| 2.4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 | 26 | 28 | 29 | 31 | 32 |
| 2.3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 23 | 24 | 26 | 27 | 28 | 30 | 31 |
| 2.2 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 26 | 28 | 29 | 30 |
| 2.1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | 26 | 27 | 28 | 30 |
| 2.0 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 22 | 24 | 25 | 26 | 27 | 29 |
| 1.9 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 | 27 | 28 |
| 1.8 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 21 | 22 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 1.7 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 1.6 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 25 | 26 |
| 1.5 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 23 | 24 | 25 |
| 1.4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 1.3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 1.2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 1.1 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |




【程式函數圖形】

## 研究四：圓周上相異 $n$ 個點變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，求某點回歸的所有可能變換數。

首先我們先觀察 $A_0(r)$ 的值所在的範圍 $(L_r,U_r)$，其中 $L_r=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{i=n}^{r}\left[\frac{i}{n}\right]\cdot C_i^r p^i q^{r-i}$ 且 $U_r=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{i+n-1}{n}\right]\cdot C_i^r p^i q^{r-i}$。

若 $(L_r,U_r)$ 涵蓋某個整數值，則 $P_0$ 變換 $r$ 次後可能回歸，反之則否。我們嘗試針對各種不同的 $n,p,q$ 值，利用 Mathematica 寫程式跑出 $L_r,U_r$ 來觀察其值之變化，有了非常驚人的發現：*當 $r$ 足夠大時，$L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分會週期性的趨近於某些定值。即 $L_r$ 與 $U_r$ 對應到圓上的位置會週期性接近某些定點。故 $P_0$ 變換 $r$ 次後可否回歸也能被預期。*

【例 1】$n=3$、$p:q=1:1$（以下數值為四捨五入至小數點後第二位之結果）

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_r$ | 0 | 0 | 0 | 0.13 | 0.31 | 0.50 | 0.67 | 0.84 | 1.00 | 1.17 | 1.33 | 1.50 |
| $U_r$ | 0 | 0.5 | 0.75 | 0.88 | 1.00 | 1.16 | 1.33 | 1.50 | 1.67 | 1.83 | 2.00 | 2.17 |
| 可否回歸 | 否 | 否 | 否 | 否 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 否 | 否 | 可 |
| $r$ | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| $L_r$ | 1.67 | 1.83 | 2.00 | 2.17 | 2.33 | 2.50 | 2.67 | 2.83 | 3.00 | 3.17 | 3.33 | 3.50 |
| $U_r$ | 2.33 | 2.50 | 2.67 | 2.83 | 3.00 | 3.17 | 3.33 | 3.50 | 3.67 | 3.83 | 4.00 | 4.17 |
| 可否回歸 | 可 | 可 | 否 | 否 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 否 | 否 | 可 |

【說明】當 $r$ 足夠大時，$L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分以 6 個變換數為週期趨近於某些定值。

| $r$ | $L_r$ | $U_r$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.0000000000 | 0.0000000000 |
| 6 | 0.6718750000 | 1.3281250000 |
| 12 | 1.6667480469 | 2.3332519531 |
| 18 | 2.6666679382 | 3.3333320618 |
| 24 | 3.6666666865 | 4.3333333135 |
|  | ⋮ | ⋮ |

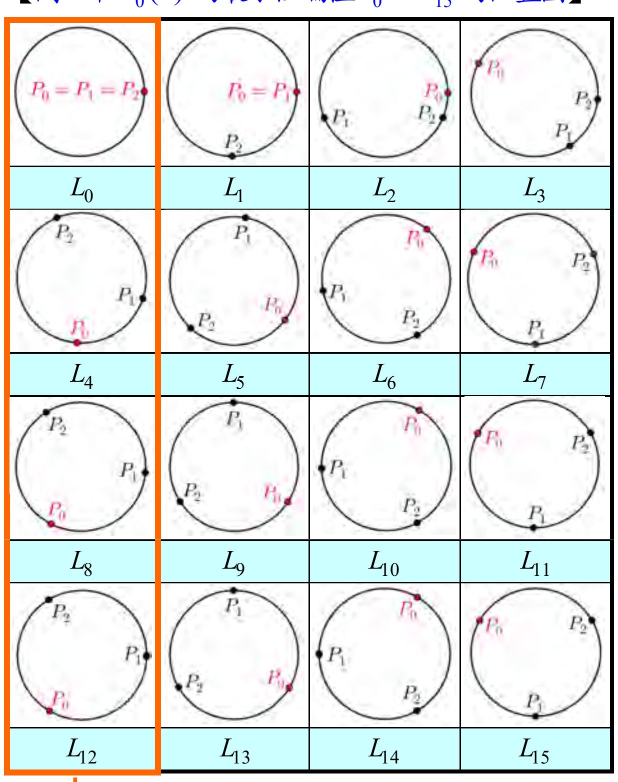
【註】由以上表格的數據可說明定理 2.1 所證明的結論。

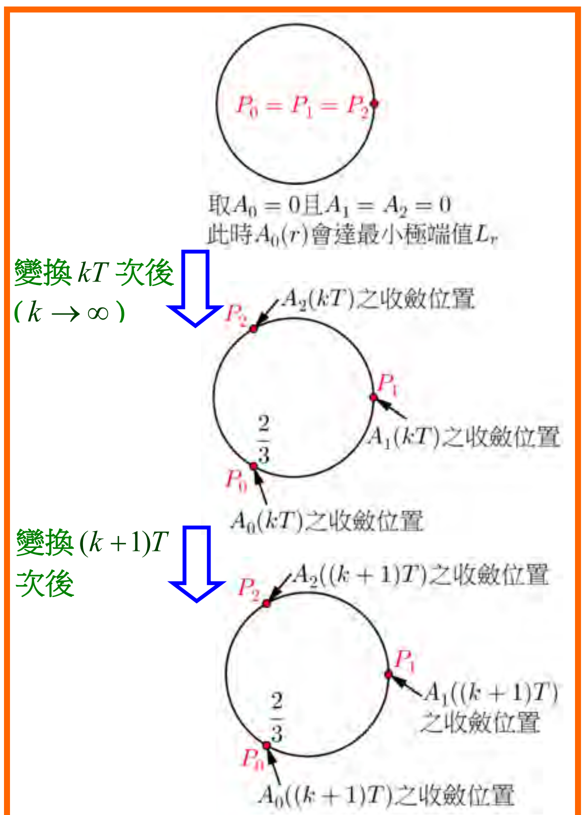
【例 2】$n=3$、$p:q=3:1$

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_r$ | 0 | 0 | 0 | 0.42 | 0.74 | 0.90 | 1.14 | 1.43 |
| $U_r$ | 0 | 0.75 | 0.94 | 0.98 | 1.31 | 1.63 | 1.83 | 2.06 |
| 可否回歸 | 否 | 否 | 否 | 否 | 可 | 可 | 否 | 可 |
| $r$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $L_r$ | 1.67 | 1.91 | 2.17 | 2.42 | 2.67 | 2.91 | 3.17 | 3.42 |
| $U_r$ | 2.34 | 2.59 | 2.83 | 3.08 | 3.34 | 3.58 | 3.83 | 4.08 |
| 可否回歸 | 可 | 可 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 可 |
| $r$ | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| $L_r$ | 3.67 | 3.92 | 4.17 | 4.42 | 4.67 | 4.92 | 5.17 | 5.42 |
| $U_r$ | 4.33 | 4.58 | 4.83 | 5.08 | 5.33 | 5.58 | 5.83 | 6.08 |
| 可否回歸 | 可 | 可 | 否 | 可 | 可 | 可 | 否 | 可 |

【說明】當 $r$ 足夠大時，$L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分以 4 個變換數為週期趨近於某些定值。

【例 2 中 $A_0(r)$ 的最小極端值 $L_0\sim L_{15}$ 的位置圖】




當 $r=kT$ 時三點之位置變化

1. 同時觀察圓上相異 $n$ 個點的位置變化，可發現當 $r$ 足夠大時，此 $n$ 個點的位置會趨近於圓上 $n$ 等分點。
2. 單獨觀察 $P_0$ 的位置變化（$A_0(r)$ 的值），當 $r$ 足夠大時，$L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分以週期為 $T=\frac{n(p+q)}{(n,p)}$ 個變換數趨近於某些定值，而這些定值對應到圓周上位置恰為圓上 $T$ 等分點。
3. 特別觀察 $A_0(r)$ 的極端值 $L_r,U_r$，在 $r=kT(k\in N)$，其中 $T=\frac{n(p+q)}{(n,p)}$ 時，無論 $p,q$ 值為何，當 $k\to\infty$ 時，$L_r$ 與 $U_r$ 的小數部分皆會趨近於某一定值。以 $n=3$ 為例，此定值分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{1}{3}$。

為了解釋以上現象，我們必須先了解以下幾個定理：

**引理 4.1**：圓周上 $n$ 等分點 $P_0, P_1 \cdots\cdots P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $p,q\in N,(p,q)=1$，則此 $n$ 個點以週期為 $\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 個變換數全部回歸。

**引理 4.2**：圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若 $P_i$ 變換 $r$ 次後的點之位置坐標為 $A_i(r)$，則 $\lim\limits_{r\to\infty}\left[A_i(r)-A_{i-1}(r)\right]=\dfrac{1}{n},\forall 1\le i\le n, i\in N$。換句話說，無論 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 之初始位置座標為何，在無限次變換後，此 $n$ 個點終將變換至圓上 $n$ 等分點。

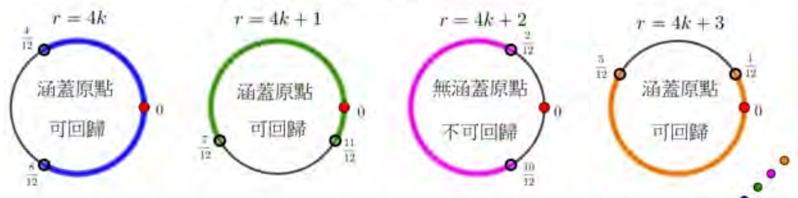
**定理 4.3**：圓周上相異 $n$ 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $p,q\in N$，$(p,q)=1$，當變換次數 $r$ 足夠大時，此 $n$ 個點的位置會收斂至圓周上 $n$ 等分點。同時，此 $n$ 個點會在變換 $T=\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 次後再次收斂至相同的位置。

**定理 4.4**：圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $p,q\in N,(p,q)=1$，若 $P_0$ 變換 $r$ 次後的點之位置坐標 $A_0(r)$ 的最小極端值 $L_r$ 與最大極端值 $U_r$，$T=\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$，則

$\lim\limits_{k\to\infty}\left(L_{kT}-\left[L_{kT}\right]\right)=\dfrac{n+1}{2n}$；$\lim\limits_{k\to\infty}\left(U_{kT}-\left[U_{kT}\right]\right)=\dfrac{n-1}{2n}$。

【例】若 $n=3,p=3,q=1$，下圖所示為 $P_0$ 變換 $r$ 次後的點之位置座標 $A_0(r)$ 之範圍 $\left(L_r,U_r\right)$。當 $r$ 足夠大時，若 $r=4k,4k+1,4k+3$，$P_0$ 可能回歸。若 $r=4k+2$，$P_0$ 永不回歸。

$P_0$ 變換 $r$ 次後在圓上的位置範圍 $(r\to\infty)$



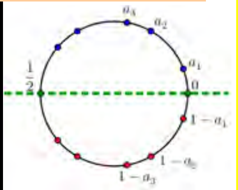

$A_0(r)$ 在數線上之範圍 $(L_r,U_r)$ ($r$ 足夠大時)

結論：圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，當 $r=kT(k\in N)$ 時，$L_r$ 與 $U_r$ 在圓周上的收斂位置分別在 $\dfrac{n+1}{2n}$ 與 $\dfrac{n-1}{2n}$ 處，而 $r=kT+1,kT+2,\cdots\cdots$ 時，$L_r$ 與 $U_r$ 的收斂位置也隨之確定。因此，$A_0(r)$ 的值之範圍 $\left(L_r,U_r\right)$ 是否會涵蓋整數值皆可得知，則 $P_0$ 變換 $r$ 次後可否回歸也能被預期。

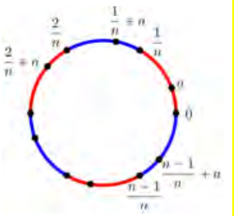
**我們可預期，圓周上相異 3 個點，變換至與下一點所成弧之 3:1 處，則在變換 2018 次後，無論初始位置座標為何，永遠不可能有任何點可回歸！**

**研究五：圓周上相異 $n$ 個點在特殊初始位置座標之回歸性質研究。**

**定理 5.1**：圓周上相異 $2n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{2n-1}$，且初始位置座標為 $\left[0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},\dfrac{1}{2},1-a_{n-1},\cdots,1-a_2,1-a_1\right]$，其中 $0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<\dfrac{1}{2}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，則 $P_0$ 和 $P_n$ 在變換 $4n$ 次後會回歸。



**定理 5.2**：圓周上相異 $2n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{2n-1}$，且初始位置座標為 $\left[0,a,\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}+a,\dfrac{2}{n},\cdots,\dfrac{n-1}{n}+a\right]$，其中 $0<a<\dfrac{1}{n},a\ne\dfrac{1}{2n}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，則一次變換後，$P_0,P_1,\cdots,P_{2n-1}$ 會變換至圓周上 $2n$ 等分點，且此 $2n$ 個點無論變換幾次永不回歸。



討論：定理 5.1、5.2 中，將「變換成與下一點所成弧之中點」改成「變換成與下一點所成弧之 $p:q$ $(p\ne q)$ 處」，並無類似的回歸情形。

## 伍、研究結果

- 中點
  - 最小變換數 → 研究一：定理 1.2
  - 所有可能變換數 → 研究二：定理 2.1
- 推廣 → $p:q$ 處
  - 最小變換數
    - 固定 $n$，$\dfrac{q}{p}$ 值，求 $k$ 值。 → 研究三：定理 3.2
    - 固定 $n$，$k$ 值，求 $\dfrac{q}{p}$ 所滿足的範圍。 → 研究三：定理 3.3
  - 所有可能變換數 → 研究四：定理 4.3；研究四：定理 4.4
- 特殊初始位置座標
  - 等分點 → 研究四：引理 4.1
  - 線對稱排列 → 研究五：定理 5.1
  - 週期性排列 → 研究五：定理 5.2

## 陸、討論與未來展望

在這篇研究中，我們針對圓周上相異 $n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處時，某點回歸之最小變換數以及所有可能變換數作探討。同時發現，當變換次數 $r$ 足夠大時，此 $n$ 個點的位置會收斂至圓周上 $n$ 等分點。當 $r=kT(k\in N)$ 時，$A_0(r)$ 的最小極端值 $L_r$ 與最大極端值 $U_r$ 在圓周上的收斂位置分別在 $\dfrac{n+1}{2n}$ 與 $\dfrac{n-1}{2n}$ 處，此收斂位置與跳躍比例 $p:q$ 無關。

事實上，任意一組初始位置座標都會對應到某一組收斂位置，舉例來說，圓周上 3 個點之初始位置座標若為 $\left[0,\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right]$，當 $r=kT(k\in N)$ 時，其在圓周上的收斂位置為 $\left[\dfrac{1}{15},\dfrac{6}{15},\dfrac{11}{15}\right]$。圓周上 5 個點之初始位置座標若為 $\left[0,\dfrac{1}{10},\dfrac{3}{10},\dfrac{5}{10},\dfrac{6}{10}\right]$，當 $r=kT(k\in N)$ 時，其在圓周上的收斂位置為 $\left[\dfrac{9}{10},\dfrac{1}{10},\dfrac{3}{10},\dfrac{5}{10},\dfrac{7}{10}\right]$。我們歸納出一個結論：圓周上相異 $n$ 個點，若其初始位置座標為 $\left[0,\dfrac{b_1}{a},\dfrac{b_2}{a},\cdots\cdots,\dfrac{b_{n-1}}{a}\right]$，無論跳躍比例 $p:q$ 為何，當 $r=kT(k\in N)$ 時，其在圓周上的收斂位置為圓上 $n$ 等分點 $\left[c_0,c_1,\cdots\cdots,c_{n-1}\right]$，其中 $c_0$ 的值為 $\left(\dfrac{n+1}{2n}+\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{a}\times\dfrac{1}{n}\right)$ 的小數部分。這是個非常漂亮的關係式，值得未來繼續深入去探討。

## 柒、參考資料


1. 林常(編譯)(2011)。**環球城市數學奧林匹克試題解**。杭州：浙江大學出版社。
2. 楊品賢、張維倫。**圓周上跳躍回歸問題之研究－特殊初始位置之回歸情形**。全國中學生第 1061115 梯次數學類小論文。
3. 許志農(主編)(2016)。**普通高級中學數學 2**。台北：龍騰文化。
4. 游森棚(主編)(2016)。**普通高中學數學 4**。台南：翰林出版。
5. 馮志剛(2005)。**數學歸納法的証題方法與技巧**。上海：華東師範大學出版社。
6. 林倉億(2014)。「**轉移矩陣」二三事(1)：高中課本中穩定狀態的求法**。HPM 通訊。17(5)。