中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050417

循「密」尋謎，「克」不容緩
—密克定理系列圖形幾何推論與證明

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者：	指導老師：
高二 張勛絜 高二 林郁傑 高二 黃偉特	徐鈞明

關鍵詞：密克定理、共圓共線共根心、類比

摘要

在數學書籍中有許多關於密克定理的資料，其中密克五圓定理有許多未被證明的性質，我們以幾何作圖為主，代數運算為輔進行研究，在我們的研究中針對原始圖形的定義產生原定義及新定義兩個部分，在原定義的圖形中，我們找到能建立在任意五邊形的五點共圓(即密克定理)，以及條件限制更多的五圓共根心、三型四點共圓及三點共線等性質，新定義圖形也能發現類似的性質，不過新定義中性質的條件與原定義完全相反，我們將原定義的幾個推論都嚴謹證明出來，也找到原定義及新定義圖形的對應關係及比較，針對新定義圖形的推論也都有了初步的想法，甚至找出一些跟我們研究較無直接關聯的特殊性質，能在未來進行更深入的研究。

壹、研究動機

在《幾何瑰寶》、《數學的魅力》中提到關於密克三圓、四圓及五圓定理，其中三圓及四圓定理都已經有相當多的學術研究，五圓定理的相關研究資料卻很缺乏，且我們在查詢相關資料的過程中，注意到許多五圓定理未被證明的推論，所以我們嘗試以密克五圓定理作為我們研究的主軸，將我們發現文獻中尚未被嚴謹證明的推論證明並針對我們額外發現的性質進行研究及延伸。

貳、研究目的

一、證明密克五圓定理圖形及其延伸定理圖形

（一）原定義五角共心圓

1.五圓共根心　2.五點共圓　3.四點共圓　4.三點共線　5.根心軌跡為類雙曲線

（二）新定義五角共心圓

1.五圓共根心　2.五點共圓　3.四點共圓　4.三點共線　5.根心軌跡為類橢圓

二、比較原定義圖形與新定義圖形，並且探討其條件

參、研究設備及器材

我們的研究是利用 GSP 與 Geogebra 等電腦動態幾何軟體，進行幾何問題的實驗，透過觀察、猜測及驗證，發掘並提出研究結果，然後加以證明。

肆、研究過程或方法

一、幾何作圖：利用 GSP 或 Geogebra 等電腦作圖軟體或將圖印成紙本利用尺規等方式，利用基本幾何的概念作圖證明，例如：圓周角、根心定理、內外冪等。

二、代數運算：將圖形中的一些數據以未知數表示，再利用代數進行運算與證明。

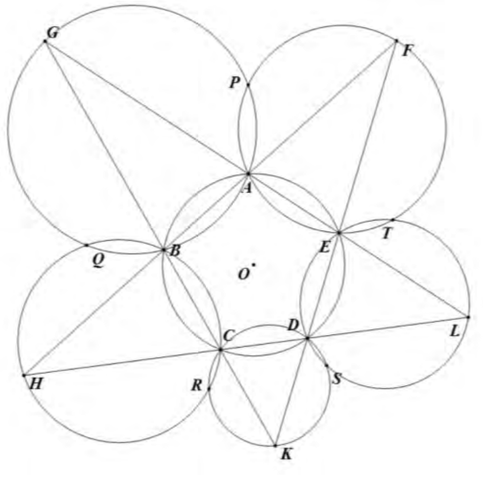
三、圖形定義：

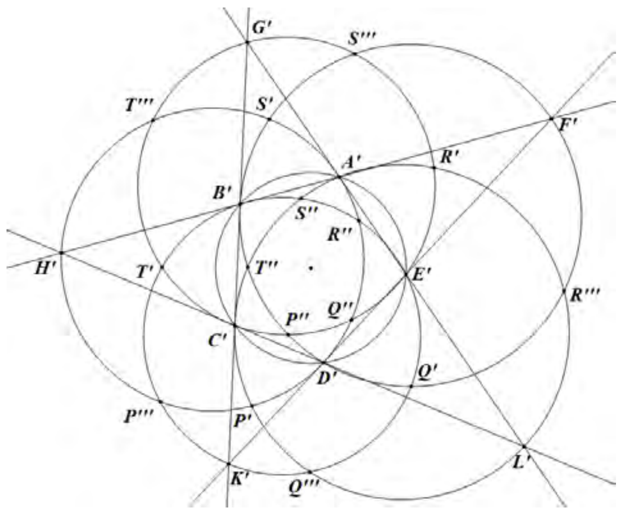
（一）原定義五角共心圓：

給定圓內接凸五邊形(ABCDE)，此圓稱為定義圓，各邊線段以直線作延伸直線，產生五芒星，五芒星外側之三角形(如GAB)作外接圓（如下左圖）

（二）新定義五角共心圓：

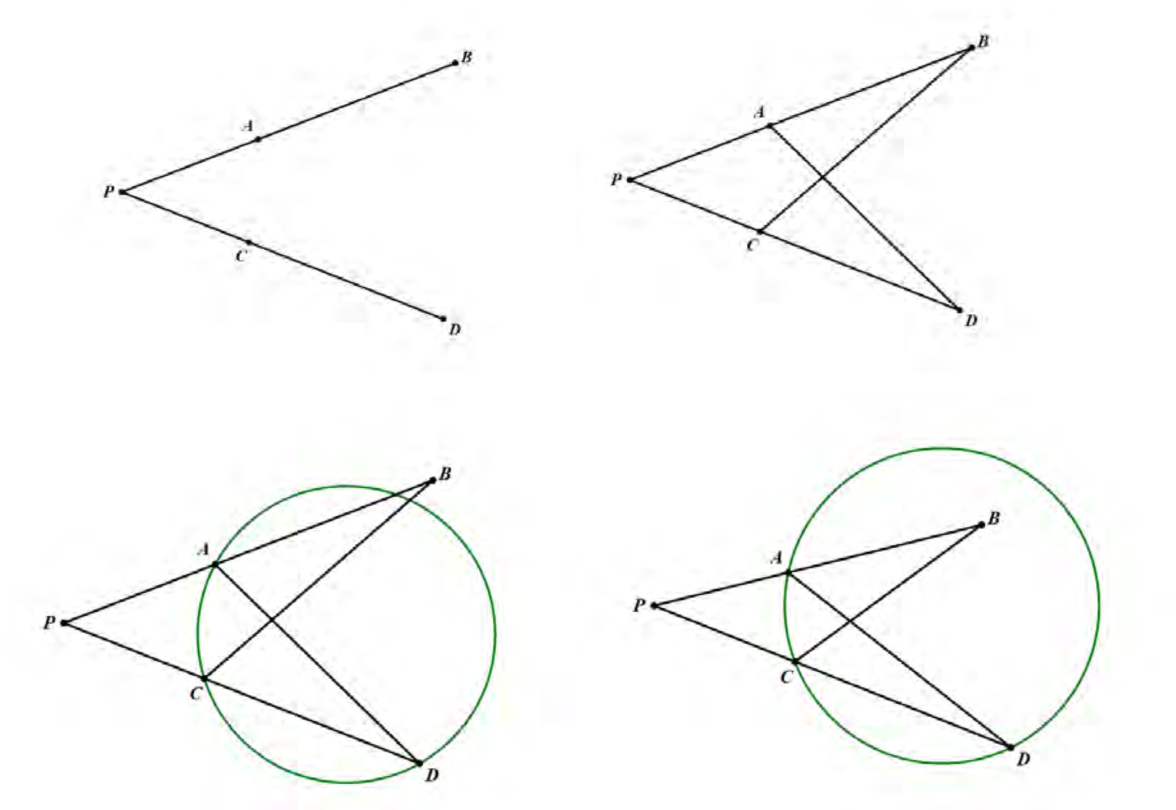
在原定義圖形中，密克五圓定理五角共心圓圖中的外接圓，是取五芒星的一個角及相鄰兩個五邊形的頂點(如GAB)做外接圓，我們試著將外接圓重新定義，改為五芒星的一個角及對面的五邊形兩頂點(如G′C′E′)作外接圓（如下右圖）





四、引理：

（一）圓外冪逆定理：



1.已知兩相異線段$\overline{PB}$和$\overline{PD}$，且點A在$\overline{PB}$上、點C在$\overline{PD}$上

連接$\overline{AD}$、$\overline{BC}$得三角形ΔPAD、ΔPBC

2.$\because \angle P=\angle P$，由$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$可得$\Delta PAD\sim\Delta PBC$(SAS相似)

$\Rightarrow \angle B=\angle D$

3.已知A、C、D三點共圓

假設點B在此圓外，則$\angle B<\frac{1}{2}AC=\angle D$，與 2. 矛盾

假設點B在此圓內，則$\angle B>\frac{1}{2}AC=\angle D$，與 2. 矛盾

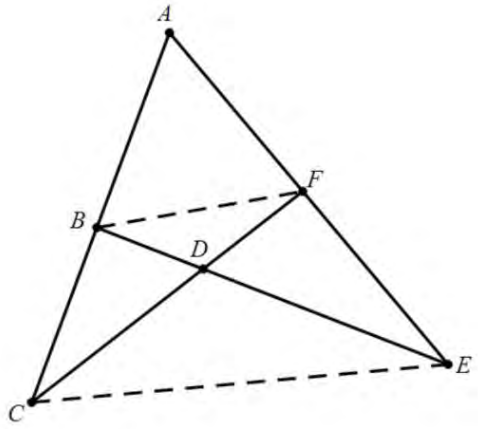
4.根據三一律可得知點B在此圓上

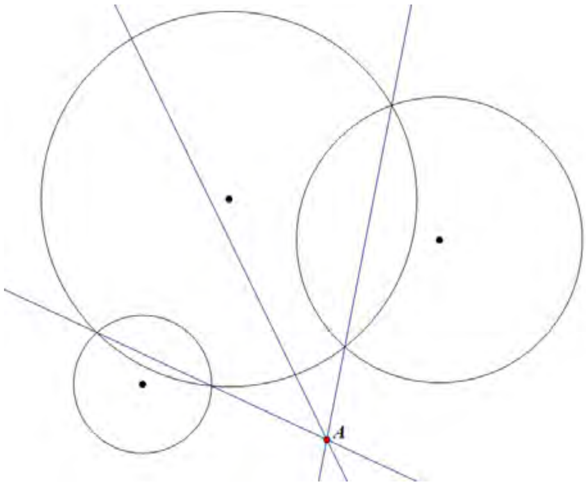
（二）孟氏定理：$\dfrac{\overline{EA}}{\overline{AF}}\times\dfrac{\overline{FC}}{\overline{CD}}\times\dfrac{\overline{DB}}{\overline{BE}}=1$（如下左圖）

（三）根心定理：三個圓心不重合且不共線的圓兩兩取根軸必交於根心（如下右圖）

註：在 n 個圓中任意取三個圓可以產生一個根心，總共有 C_3^n 個根心，

若 C_3^n 個根心重合，我們稱為 n 圓共根心。

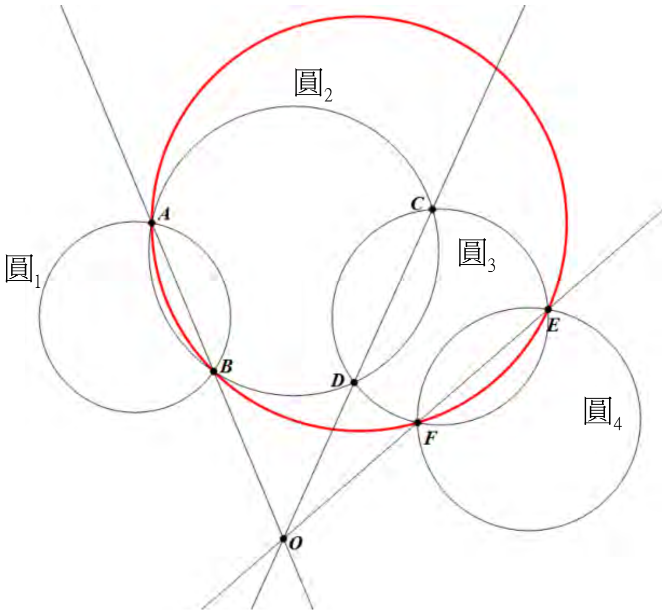




（四）根心定理及外冪逆定理之延伸：

四圓共根心，則四點共圓，其中四點為兩組的兩兩圓交點，

例如圓$_1$ 圓$_2$ 圓$_3$ 圓$_4$ 共根心於 O，則 ABFE 四點共圓（如下左圖），同理內冪亦成立



證明：

1.根據圓冪性質可知O到圓$_2$圓$_3$的冪相等

$\Rightarrow \overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OE}\times\overline{OF}$

2.根據圓外冪逆定理可知ABFE四點共圓

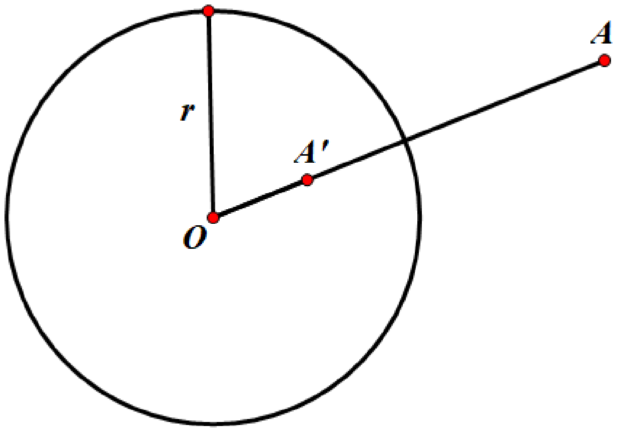
3.內冪同理可證

（五）反演定義：

平面上給定一圓心為O、半徑為 r 的圓，取異於圓心O的點A對圓作變換，

在射線$\overrightarrow{OA}$上產生另一點A'使得$\overline{OA}\times\overline{OA'}=r^2$ ，則稱A'為A對圓O的反演點。

$\Rightarrow$ 若A對圓O作反演產生A' ，則$\overline{OA}\times\overline{OA'}=r^2$



（六）根心定理及反演之延伸：

作一條線段$\overline{AB}$過點O，以A、B分別對圓O作反演產生A'、B'，

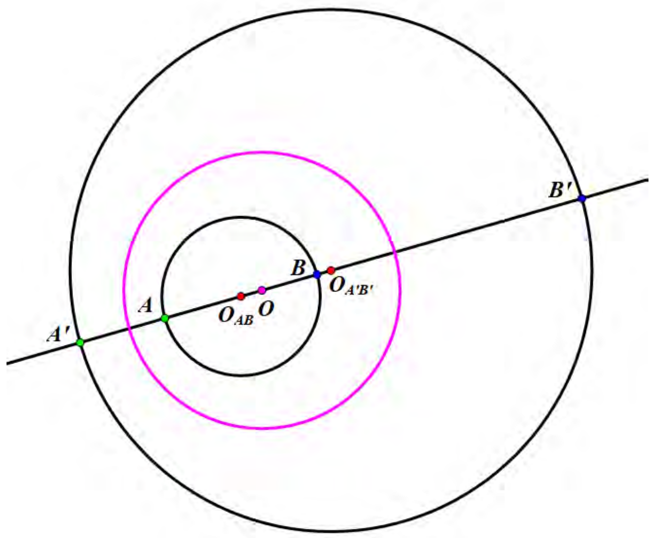
可得到A'、A、O、B、B'這五點會共線

再分別以$\overline{AB}$ 、$\overline{A'B'}$為直徑作圓O_{AB}、圓$O_{A'B'}$ $\Rightarrow$ 圓$O_{A'B'}$為圓O_{AB}對圓O作反演所產生的圓

又圓心O_{AB}與$O_{A'B'}$是$\overline{AB}$與$\overline{A'B'}$ 的中點，因此這兩點也會落在共線上

$\Rightarrow$ O、O_{AB}、$O_{A'B'}$三點共線

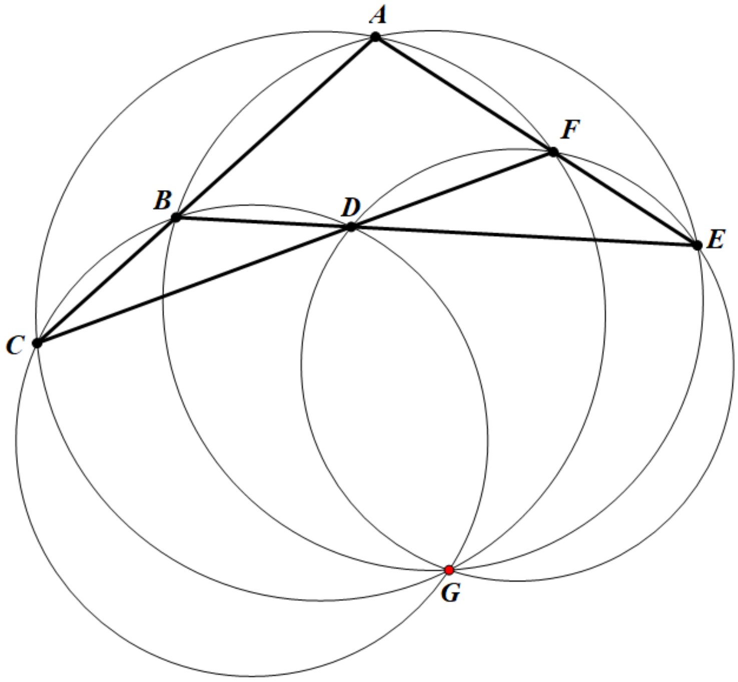
綜合上述我們可以得到若一個圓對另一個圓作反演產生一個圓，則這三圓的圓心共線



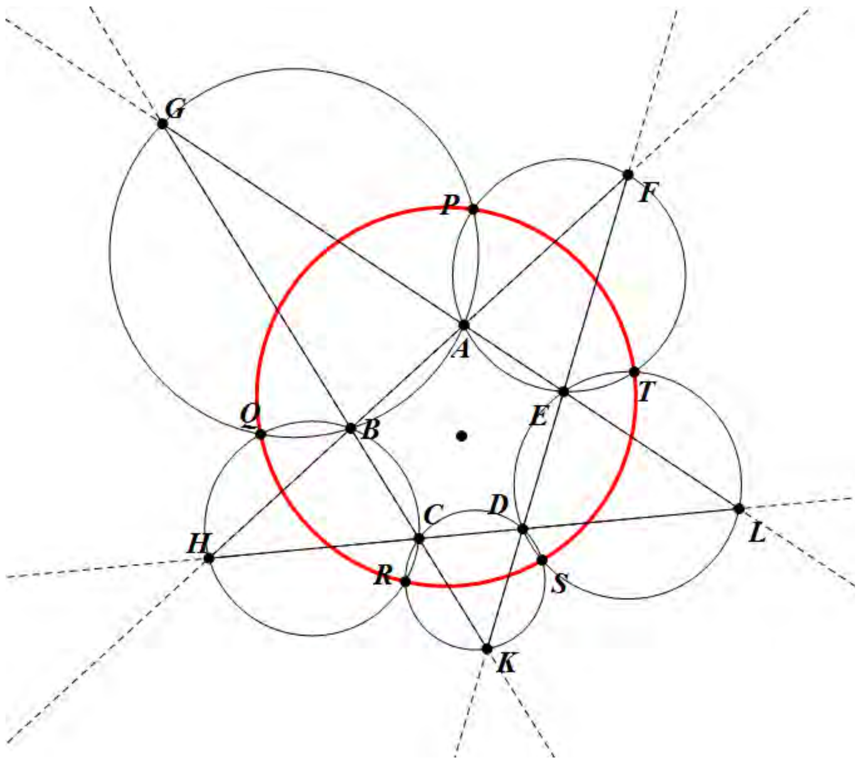
五、文獻上已知性質（文獻上已有嚴謹證明）

（一）密克四圓定理：

在完全四邊形中ΔCBD，ΔDFE，ΔACF，ΔABE的外接圓皆會過一點G



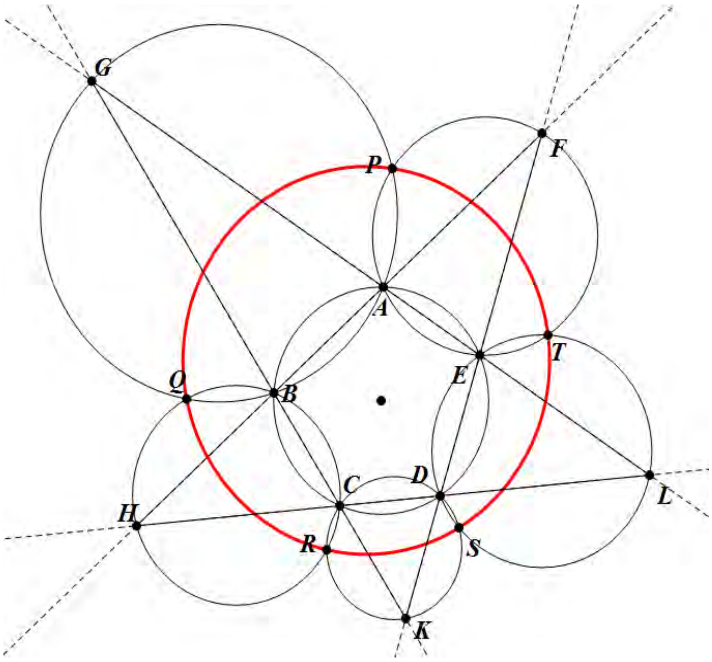
（二）密克五圓定理：ＰＱＲＳＴ五點共圓



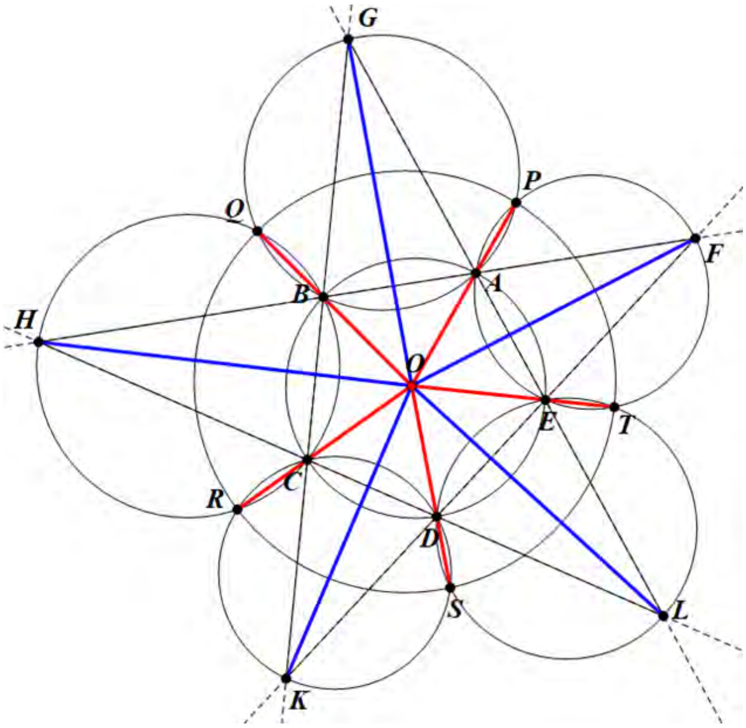
伍、研究結果

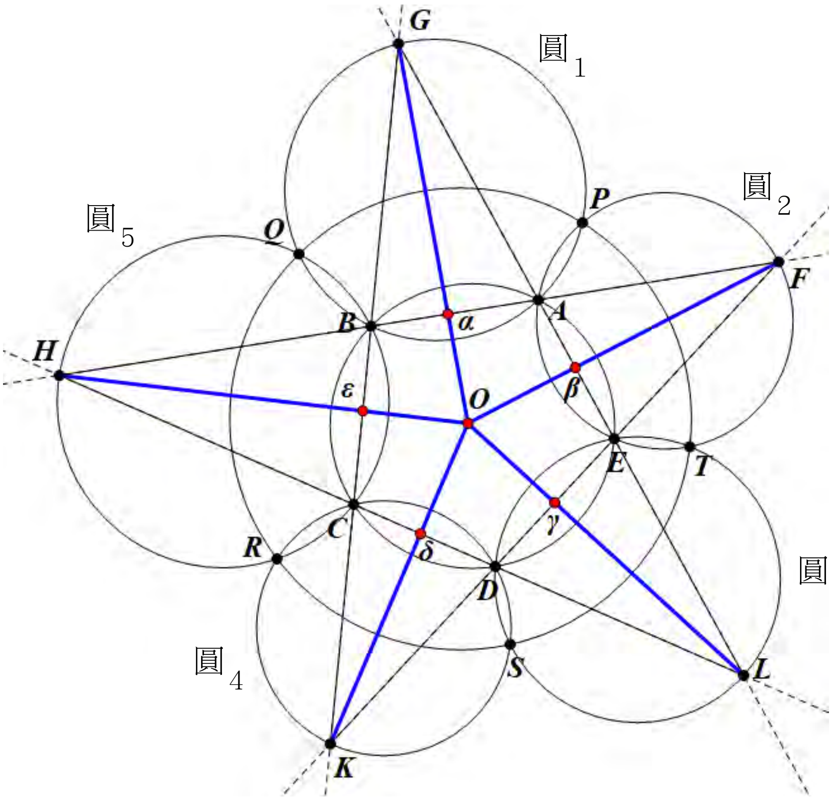
一、原定義五角共心圓

（一）五點共圓：根據密克五圓定理ＰＱＲＳＴ五點共圓，此圓稱為密克圓



（二）五圓共根心⇔十線共點：除了定義圓外的其餘五圓共根心⇔10 條根軸共點





證明：

1.根據根心定理，點G為圓$_2$ 、圓$_5$及定義圓之根心，故圓$_2$與圓$_5$之根軸必過G點

定義α為$\overline{HF}$與圓$_2$與圓$_5$之根軸之交點 同理 定義點$\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$

2.定義 O_1為$\overrightarrow{G\alpha}$與$\overrightarrow{H\varepsilon}$之交點 O_2為$\overrightarrow{G\alpha}$與$\overrightarrow{F\beta}$之交點

3.$\dfrac{\overline{GO_1}}{\overline{O_1\alpha}}=\dfrac{\overline{GO_2}}{\overline{O_2\alpha}} \Leftrightarrow O_1 \equiv O_2$

4.根據孟氏定理$\dfrac{\overline{GO_1}}{\overline{O_1\alpha}}\times\dfrac{\overline{\alpha H}}{\overline{HB}}\times\dfrac{\overline{B\varepsilon}}{\overline{\varepsilon G}}=1$ 且$\dfrac{\overline{GO_2}}{\overline{O_2\alpha}}\times\dfrac{\overline{\alpha F}}{\overline{FA}}\times\dfrac{\overline{A\beta}}{\overline{\beta G}}=1$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{GO_1}}{\overline{O_1\alpha}}\times\dfrac{\overline{\alpha H}}{\overline{HB}}\times\dfrac{\overline{B\varepsilon}}{\overline{\varepsilon G}}=\dfrac{\overline{GO_2}}{\overline{O_2\alpha}}\times\dfrac{\overline{\alpha F}}{\overline{FA}}\times\dfrac{\overline{A\beta}}{\overline{\beta G}}$

5.$\dfrac{\overline{\alpha H}}{\overline{HB}}\times\dfrac{\overline{B\varepsilon}}{\overline{\varepsilon G}}=\dfrac{\overline{\alpha F}}{\overline{FA}}\times\dfrac{\overline{A\beta}}{\overline{\beta G}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{GO_1}}{\overline{O_1\alpha}}=\dfrac{\overline{GO_2}}{\overline{O_2\alpha}}$

6.令$\overline{FA}=x_1$ ，$\overline{AB}=x_2$ ，$\overline{BH}=x_3$

$\overline{GB}=y_1$ ，$\overline{BC}=y_2$ ，$\overline{CK}=y_3$

$\overline{LE}=z_1$ ，$\overline{EA}=z_2$ ，$\overline{AG}=z_3$

7.$\because$ 點α於圓$_2$與圓$_5$之根軸上 $\therefore \overline{\alpha A}\times\overline{\alpha F}=\overline{\alpha B}\times\overline{\alpha H}$(根軸上等冪) $\Rightarrow \dfrac{\overline{\alpha F}}{\overline{\alpha H}}=\dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha A}}$

8.令$\overline{\alpha B}=\kappa$ 則$\dfrac{\overline{\alpha F}}{\overline{\alpha H}}=\dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha A}}\Rightarrow\dfrac{x_1+x_2-\kappa}{x_3+\kappa}=\dfrac{\kappa}{x_2-\kappa}$

$$\Rightarrow x_1x_2+x_2{}^2-x_2\kappa-x_1\kappa-x_2\kappa+\kappa^2=x_3\kappa+\kappa^2\Rightarrow\kappa=\frac{x_2(x_2+x_1)}{x_1+2x_2+x_3}$$

9.$\overline{\alpha H}=\overline{\alpha B}+x_3=\kappa+x_3=\dfrac{x_2(x_2+x_1)}{x_1+2x_2+x_3}+x_3$

10.同理，我們可將$\overline{\varepsilon B}$ 、$\overline{\varepsilon G}$ 、$\overline{\alpha F}$ 、$\overline{\beta A}$ 、$\overline{\beta G}$代換成

以x_1、x_2、x_3、y_1、y_2、y_3、z_1、z_2、z_3表示的形式

11.將代換後的$\overline{\alpha H}$ 、$\overline{\varepsilon B}$ 、$\overline{\varepsilon G}$ 、$\overline{\alpha F}$ 、$\overline{\beta A}$ 、$\overline{\beta G}$ 代入$\dfrac{\overline{\alpha H}}{\overline{HB}}\times\dfrac{\overline{B\varepsilon}}{\overline{\varepsilon G}}=\dfrac{\overline{\alpha F}}{\overline{FA}}\times\dfrac{\overline{A\beta}}{\overline{\beta G}}$

$\Rightarrow$若$\dfrac{\overline{\alpha H}}{\overline{HB}}\times\dfrac{\overline{B\varepsilon}}{\overline{\varepsilon G}}=\dfrac{\overline{\alpha F}}{\overline{FA}}\times\dfrac{\overline{A\beta}}{\overline{\beta G}}$成立

$$\Leftrightarrow\frac{\dfrac{x_2(x_2+x_1)}{x_1+2x_2+x_3}+x_3}{x_3}\times\frac{\dfrac{y_2(y_2+y_3)}{y_1+2y_2+y_3}}{\dfrac{y_2(y_2+y_3)}{y_1+2y_2+y_3}+y_1}=\frac{\dfrac{x_2(x_2+x_3)}{x_1+2x_2+x_3}+x_1}{x_1}\times\frac{\dfrac{z_2(z_2+z_1)}{z_1+2z_2+z_3}}{\dfrac{z_2(z_2+z_1)}{z_1+2z_2+z_3}+z_3}$$

整理後得$\dfrac{x_2+x_3}{x_3}\times\dfrac{y_2(y_2+y_3)}{(y_2+y_1)(y_1+y_2+y_3)}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1}\times\dfrac{z_2(z_2+z_1)}{(z_2+z_3)(z_1+z_2+z_3)}$

12.再根據孟氏定理$\dfrac{\overline{GC}}{\overline{CB}}\times\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HA}}\times\dfrac{\overline{AL}}{\overline{LG}}=1$ 且$\dfrac{\overline{GE}}{\overline{EA}}\times\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KG}}=1$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{GC}}{\overline{CB}}\times\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HA}}\times\dfrac{\overline{AL}}{\overline{LG}}=\dfrac{\overline{GE}}{\overline{EA}}\times\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KG}}=1$

$\Rightarrow\dfrac{y_1+y_2}{y_2}\times\dfrac{x_3}{x_2+x_3}\times\dfrac{z_1+z_2}{z_1+z_2+z_3}=\dfrac{z_2+z_3}{z_2}\times\dfrac{x_1}{x_1+x_2}\times\dfrac{y_2+y_3}{y_1+y_2+y_3}=1$

整理後得 $\dfrac{x_2+x_3}{x_3}\times\dfrac{y_2(y_2+y_3)}{(y_2+y_1)(y_1+y_2+y_3)}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1}\times\dfrac{z_2(z_2+z_1)}{(z_2+z_3)(z_1+z_2+z_3)}=1$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{\alpha \mathrm{H}}}{\overline{\mathrm{HB}}} \times \dfrac{\overline{\mathrm{B}\varepsilon}}{\overline{\varepsilon \mathrm{G}}} = \dfrac{\overline{\alpha \mathrm{F}}}{\overline{\mathrm{FA}}} \times \dfrac{\overline{\mathrm{A}\beta}}{\overline{\beta \mathrm{G}}}$成立$\Rightarrow \mathrm{O}_1 \equiv \mathrm{O}_2 \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{G}\alpha}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{H}\varepsilon}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{F}\beta}$三線共點於點O

$\Rightarrow$同理 $\overrightarrow{\mathrm{G}\alpha}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{H}\varepsilon}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{F}\beta}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{K}\delta}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{L}\gamma}$五線共點於點O

$\Rightarrow$ O點到圓$_1$ 、圓$_2$ 、圓$_3$ 、圓$_4$ 、圓$_5$等冪

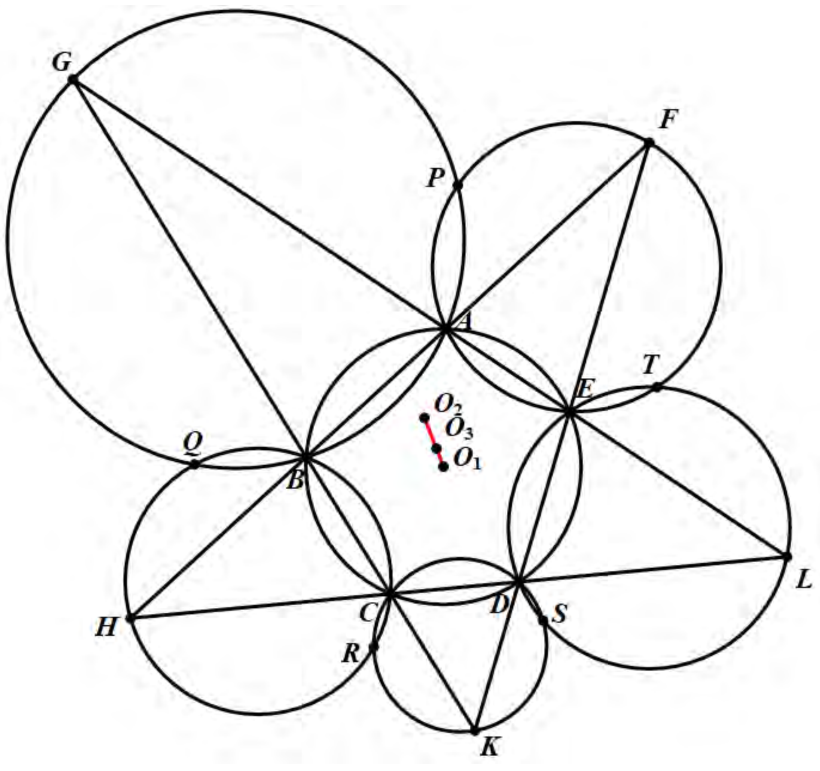
14.$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$為圓$_1$、圓$_2$等冪軸 ，則必過點O $\Rightarrow$ 同理 $\overline{\mathrm{QB}}$ 、$\overline{\mathrm{RC}}$ 、$\overline{\mathrm{SD}}$ 、$\overline{\mathrm{TE}}$ 皆過點O

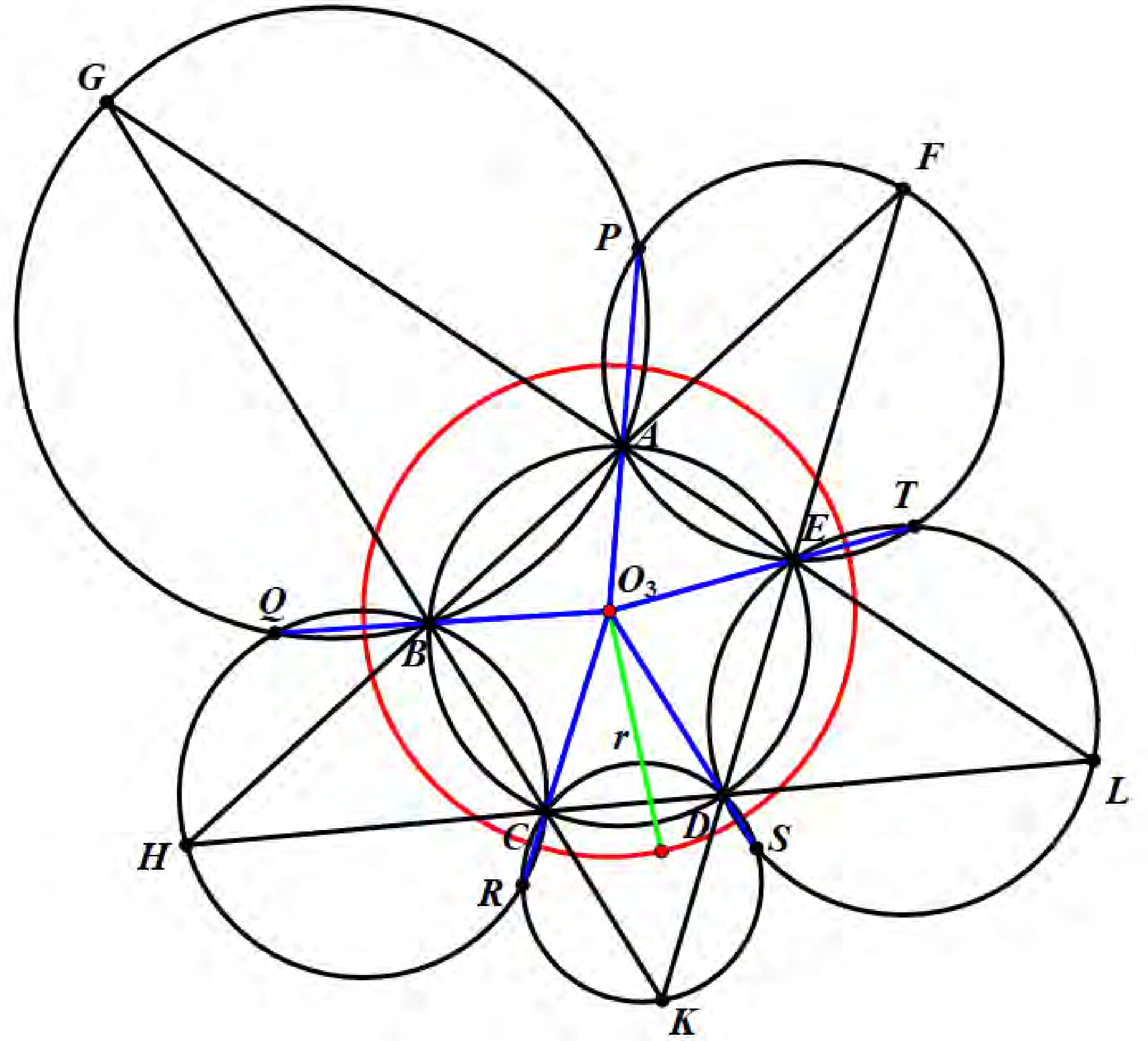
15.則$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{QB}}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{RC}}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{SD}}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{TE}}$ 五線共點

16.點O到圓$_1$ 、圓$_2$ 、圓$_3$ 、圓$_4$ 、圓$_5$等冪

17.則 圓$_1$、圓$_2$、圓$_3$、圓$_4$、圓$_5$五圓共根心得證

（三）三點共線： 定義圓圓心(O_1) 、密克圓圓心(O_2) 、五圓共根心(O_3)三點共線





證明：

1.以O_3為圓心作一個圓使得點P對此圓反演可產生點A，並稱此圓為$(P、A)$ 的反演圓

根據反演定義可得知此圓半徑 $r=\sqrt{\overline{O_3A}\times\overline{O_3P}}$

同理作出另外四組$(Q、B)$ 、$(R、C)$ 、$(S、D)$ 、$(T、E)$的反演圓

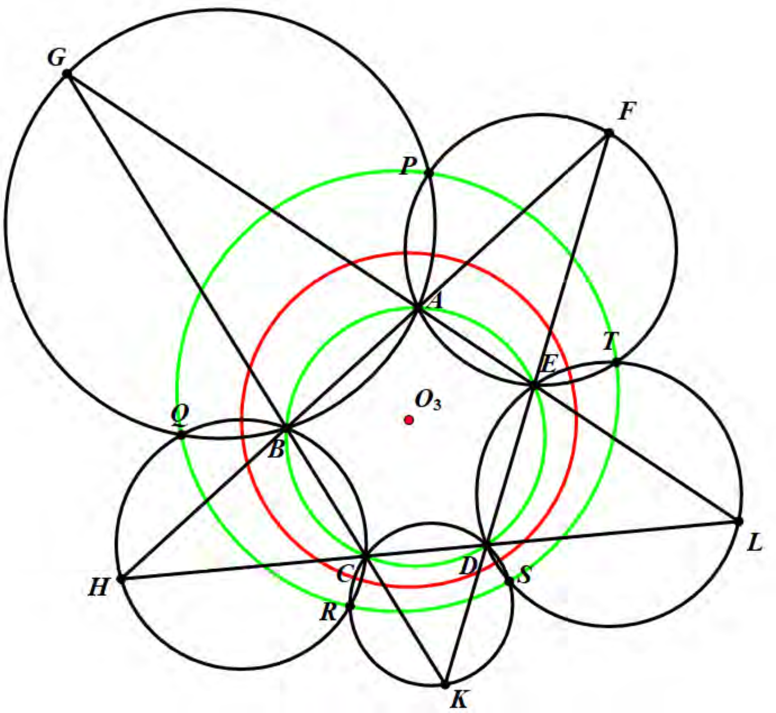
2.根據五圓共根心可得到$\overline{O_3A}\times\overline{O_3P}=\overline{O_3B}\times\overline{O_3Q}=\overline{O_3C}\times\overline{O_3R}=\overline{O_3D}\times\overline{O_3S}=\overline{O_3E}\times\overline{O_3T}$

而五個反演圓的半徑分別為

$\sqrt{\overline{O_3A}\times\overline{O_3P}}$ 、 $\sqrt{\overline{O_3B}\times\overline{O_3Q}}$ 、 $\sqrt{\overline{O_3C}\times\overline{O_3R}}$ 、 $\sqrt{\overline{O_3D}\times\overline{O_3S}}$ 、 $\sqrt{\overline{O_3E}\times\overline{O_3T}}$

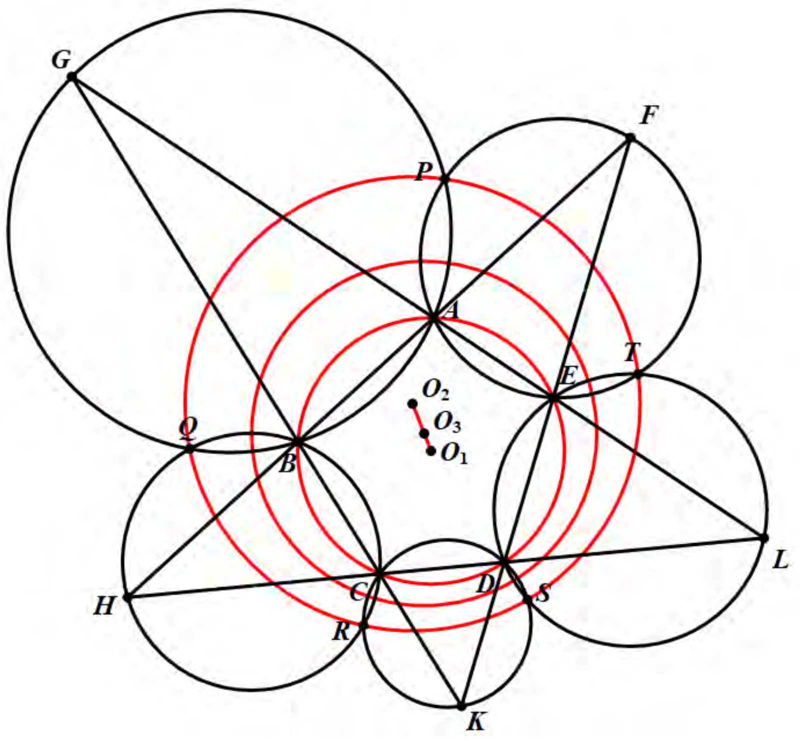
$\Rightarrow$ 五個反演圓的半徑相等

$\Rightarrow$ 五個反演圓會重合



3.再分別作 圓ABCDE（定義圓）與 圓PQRST（密克圓）

⇒圓PQRST對圓O_3作反演就會是圓ABCDE

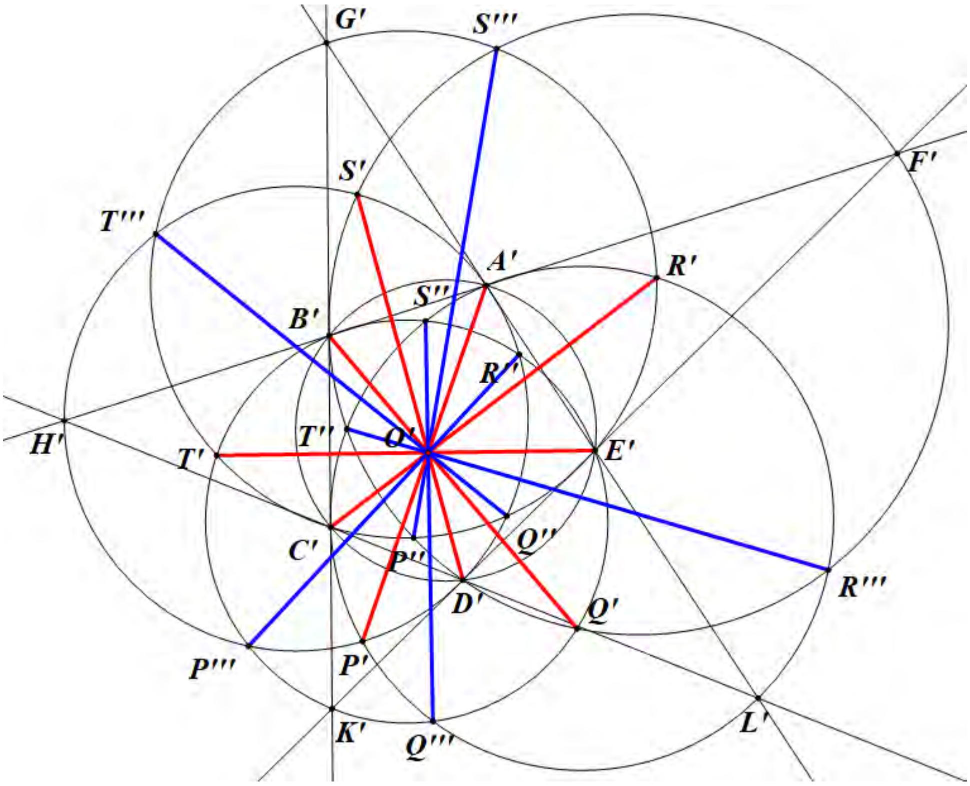


4.最後，根據根心定理及反演之延伸可知 圓ABCDE、圓PQRST、反演圓 三圓的圓心會共線

⇒即定義圓圓心(O_1)、密克圓圓心(O_2)、五圓共根心(O_3)三點共線

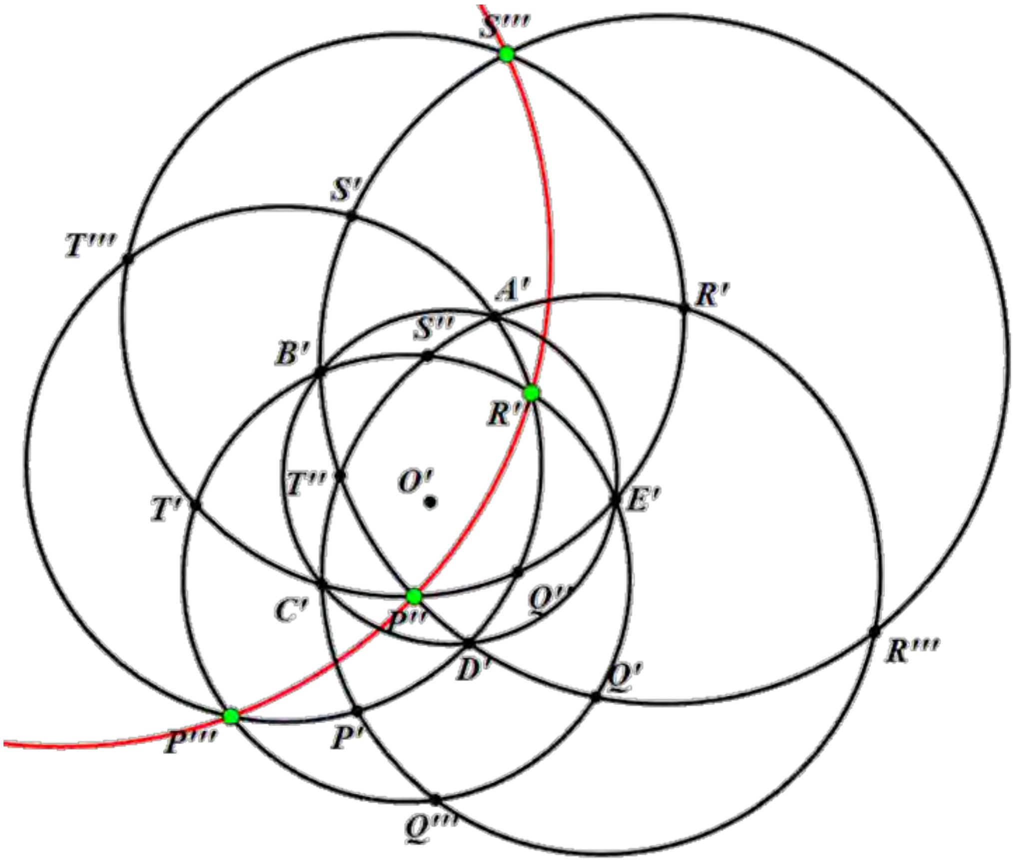
二、新定義五角共心圓

（一）五圓共根心⇔十線共點：除了定義圓外的其餘五圓共根心⇔10 條根軸共點

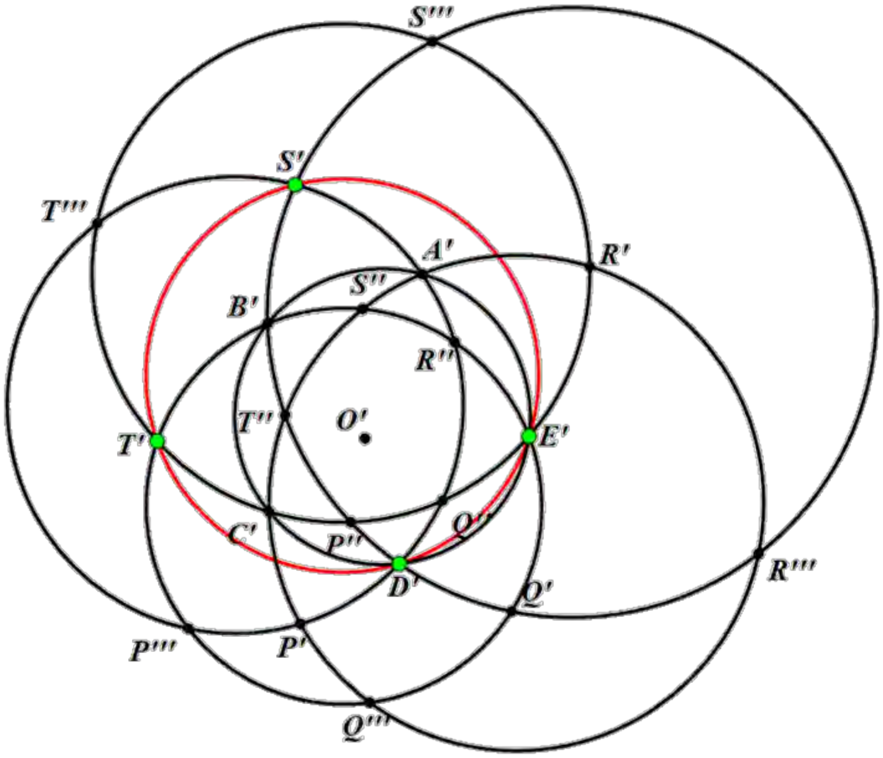


（二）四點共圓：共分三型，每一型有五組

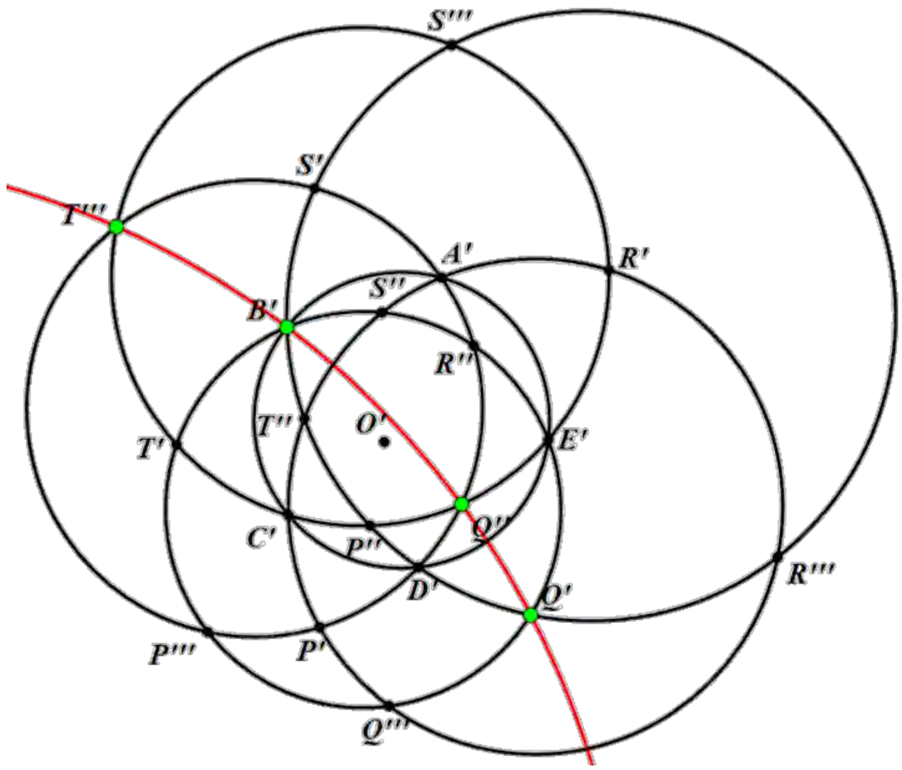
1.第一型四點共圓：S‴R′P″P‴四點共圓



2.第二型四點共圓：S′E′D′T′四點共圓



3.第三型四點共圓：T‴B′Q″Q′四點共圓



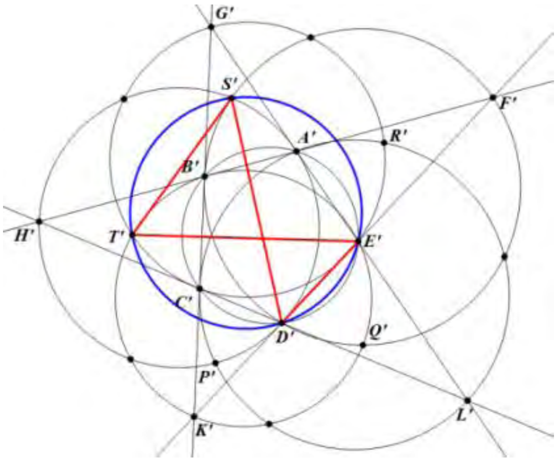
證明：根據五圓共根心〔p13 伍、二、（一）〕可知四圓共根心⇒四點共圓

（∵根心定理及外冪逆定理之延伸）

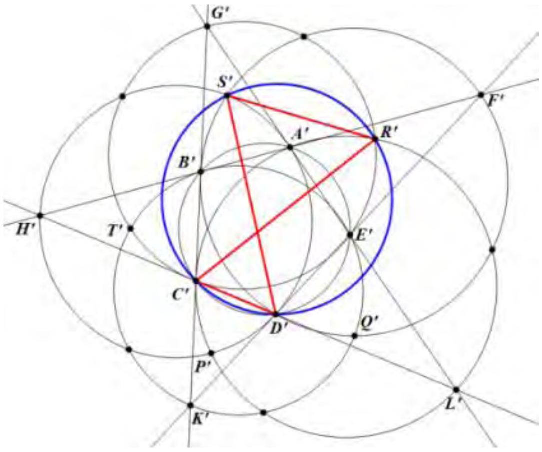
（三）五點共圓：$P'Q'R'S'T'$五點共圓

證明：1.根據第二型四點共圓〔p13 伍、二、（二）〕可知以下三點

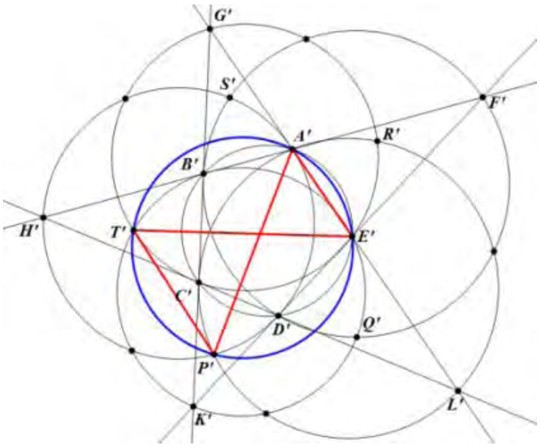
(1) $\angle T'S'D' = \angle T'E'D'$



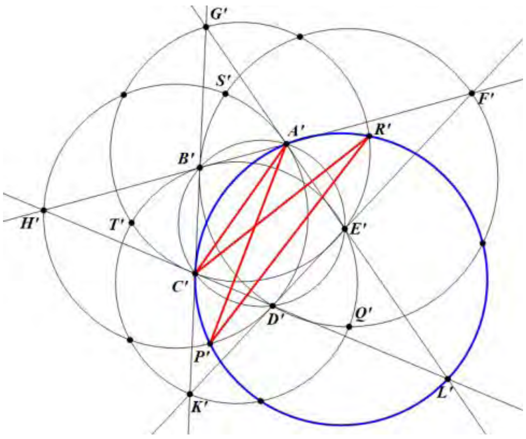
(2) $\angle D'S'R' = \angle D'C'R'$



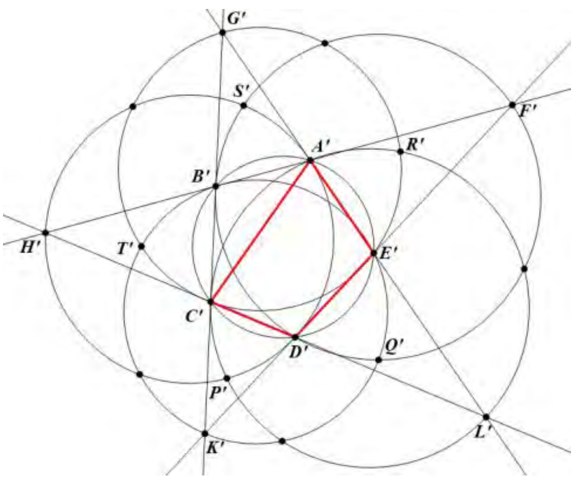
(3) $\angle T'P'A' = \angle T'E'A'$



2.又 $\angle A'P'R' = \angle A'C'R'$



3.已知 $\angle A'E'D' + \angle A'C'D' = 180^\circ$



4.整合上述三點

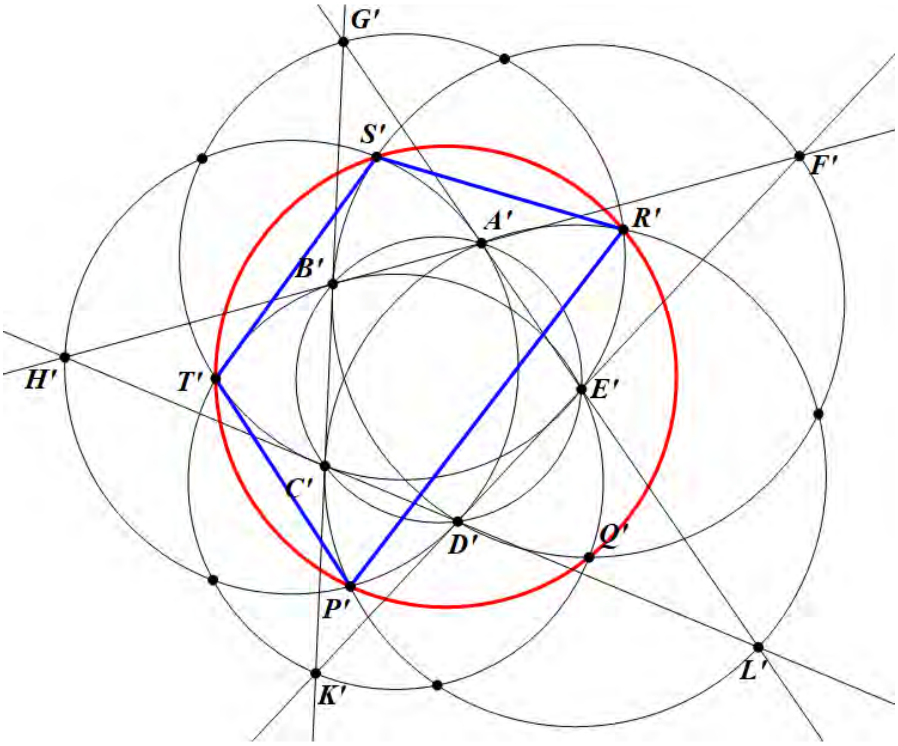
$$\angle T'S'D' + \angle D'S'R' + \angle T'P'A' + \angle A'P'R'$$

$$= \angle T'E'D' + \angle D'C'R' + \angle T'E'A' + \angle A'C'R'$$

$$= \angle A'E'D' + \angle A'C'D' = 180^\circ$$

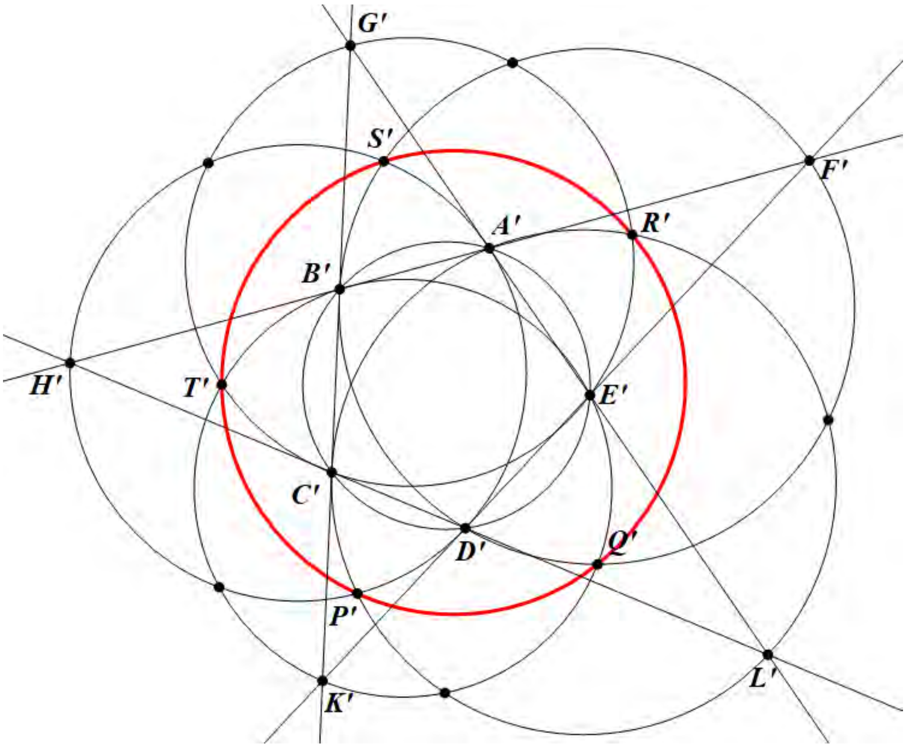
$5.\ \angle T'S'R' + \angle T'P'R' = \angle T'S'D' + \angle D'S'R' + \angle T'P'A' + \angle A'P'R' = 180^\circ$

$\Rightarrow$ T′、S′、R′、P′四點共圓



6.同理可證P'、Q'、R'、S'四點共圓

7.由 5. 和 6. 可知P'、Q'、R'、S'、T'五點共圓



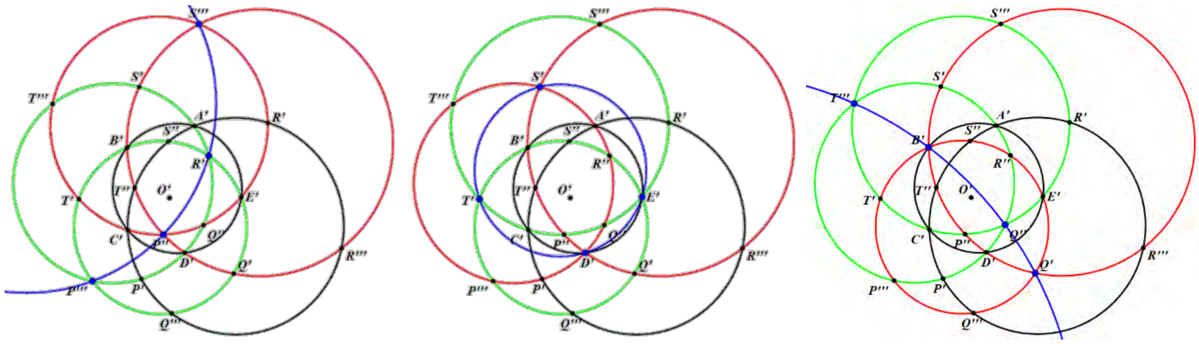
陸、討論

一、我們可以知道三型四點共圓中，是先以外部的五圓中任取四圓，再將其分成2組二圓，

而任意相交兩圓會有兩個交點，因此這2組會產生四個交點，而這四點就會共圓，

所以根據我們的取法：1.五圓中任取四圓 $\Rightarrow C_4^5=5 \Rightarrow$ 會產生5組

2.任取四圓，再將其分成2組二圓 $\Rightarrow \dfrac{C_2^4C_2^2}{2!}=3 \Rightarrow$ 會有3型



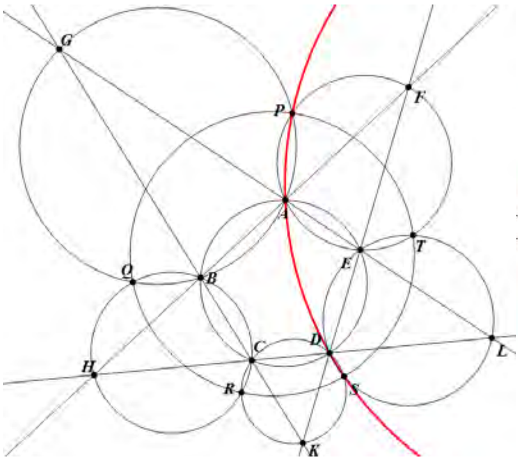
二、原定義五角共心圓與新定義五角共心圓上性質的關聯性

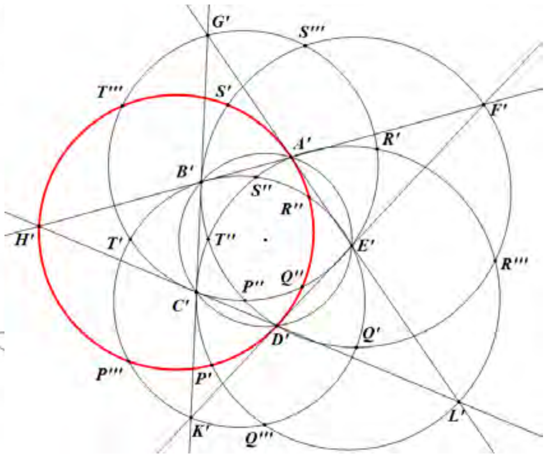
在新定義圖形中，我們比照原定義之圖形，將與 A′同樣兩圓交點的點命名為 P′，同理，以下列表格對應的方法命名其他的點，

A'	B'	C'	D'	E'
⇓	⇓	⇓	⇓	⇓
P'	Q'	R'	S'	T'

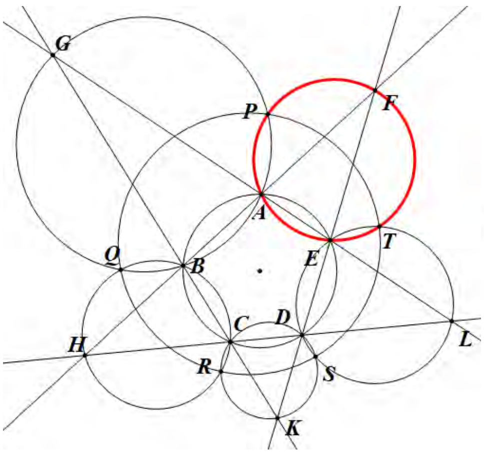
在這樣的設定之下，我們發現原定義圖形中的某些性質，能透過點的定義與新定義圖形產生對應關係，以下是我們找到的三組對應關係：

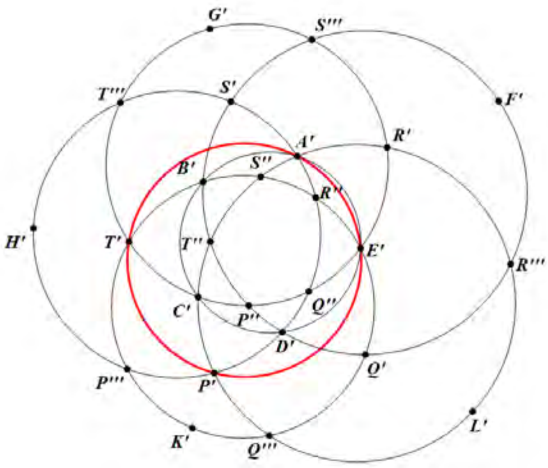
（一）在原定義圖形上五組第 I 型四點共圓類比對應到新定義圖形上原始五組外接圓及原定義圖形上原始五組外接圓類比對應到新定義圖形上五組第 I 型四點共圓





在上面兩張圖中，我們可以發現原定義圖形上的 SDAP 四點共圓(第 I 型四點共圓)，而對應到新定義圖形之後，可以發現 S′D′A′P′四點也共圓，即原始定義下的外接圓

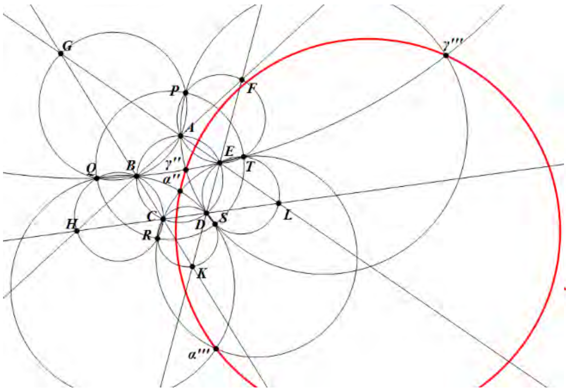


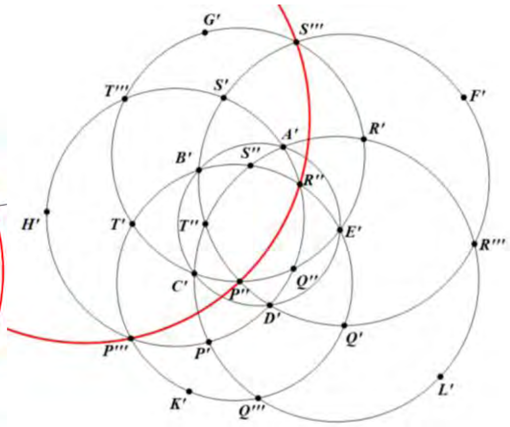


而在上面兩張圖中，我們可以發現原定義圖形上原始的 AETP 四點共圓，而對應到新定義圖形之後，可以發現 A′E′T′P′四點也共圓，即新定義圖形上第 I 型四點共圓

（二）原定義圖形上五組第Ⅱ型四點共圓類比對應到新定義圖形上第Ⅱ型四點共圓：

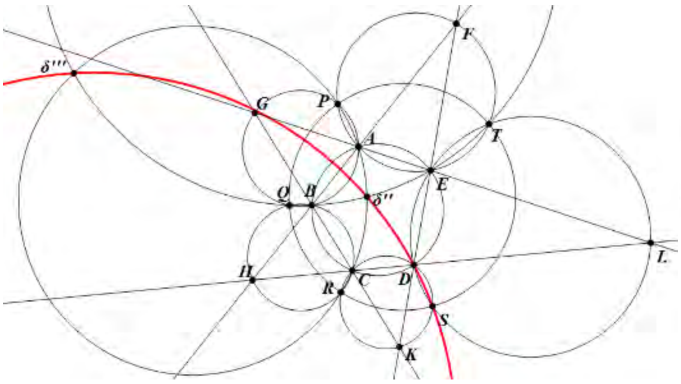
在(一)找到了第Ⅰ型四點共圓的相互對應關係之後，由於原定義圖形上外接圓的交點相較新定義圖形較少，因此我們透過觀察新定義圖形後判斷出，由於新定義圖形上第Ⅱ型四點共圓是新定義圖形上原始的五組外接圓的交點共圓，而新定義圖形上原始的外接圓又對應到原定義圖形上第Ⅰ型四點共圓，且原定義圖形上五組第Ⅰ型四點共圓的交點亦共圓，即原定義圖形上第Ⅱ型四點共圓（如下二圖）

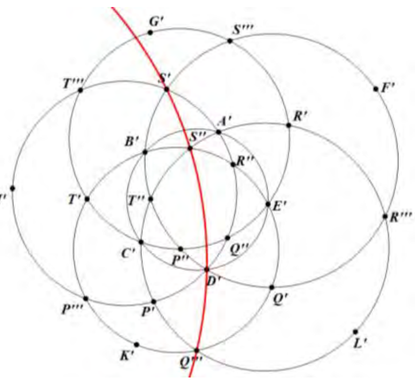




（三）原定義圖形上五組第Ⅲ型四點共圓類比對應到新定義圖形上第Ⅲ型四點共圓：

透過與 1.同樣的邏輯，我們也能發現第Ⅲ型四點共圓也相互對應（如下二圖）

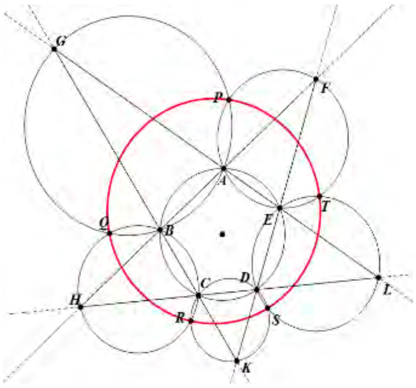
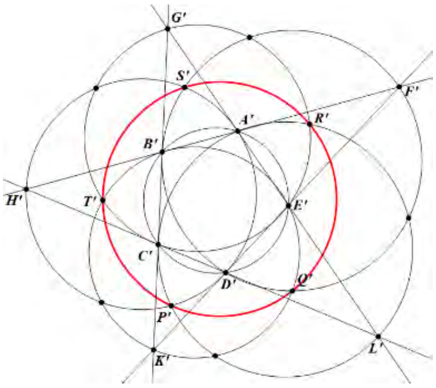
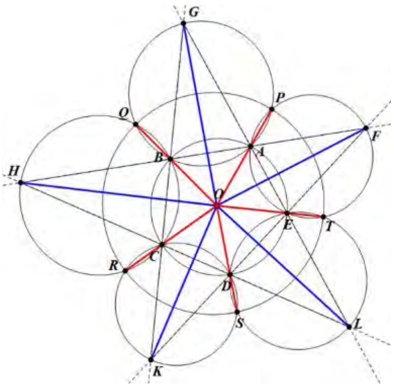
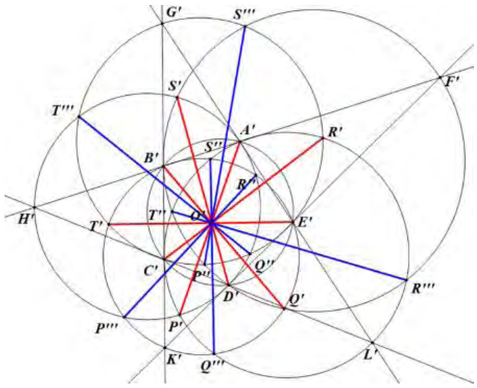
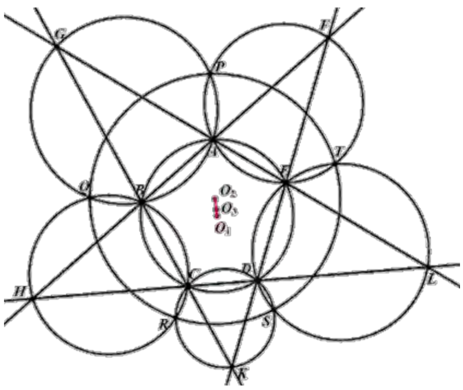
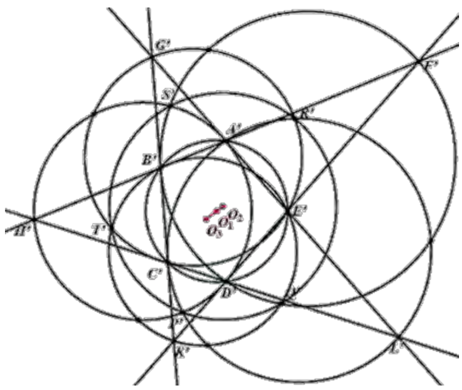


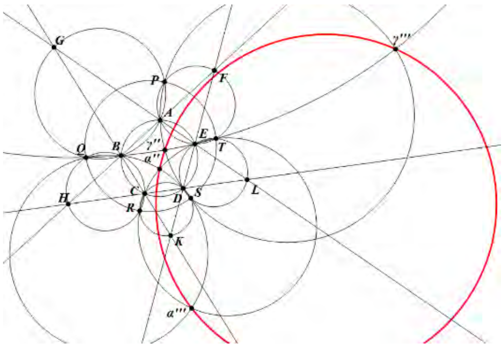
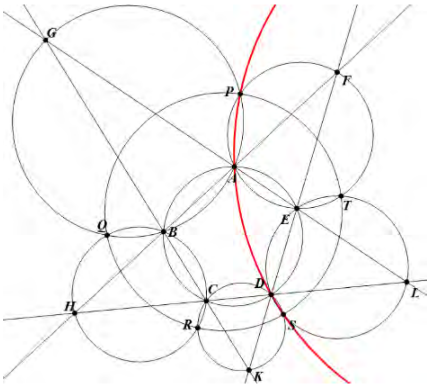
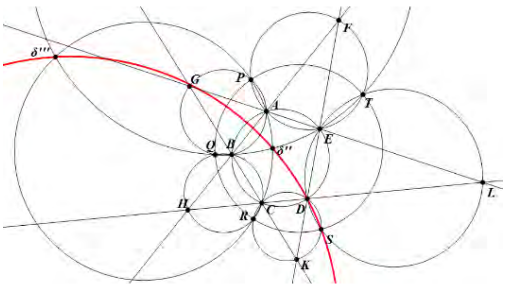
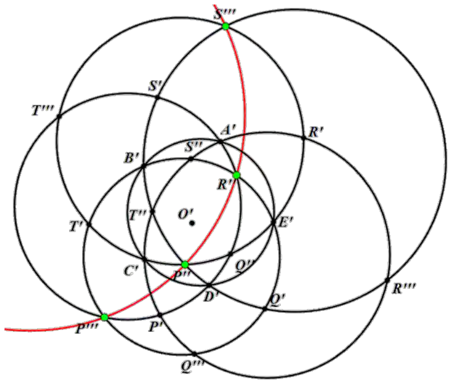
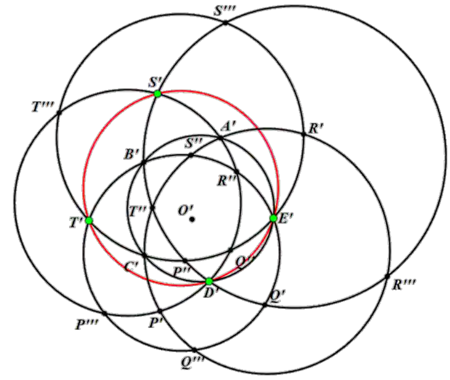
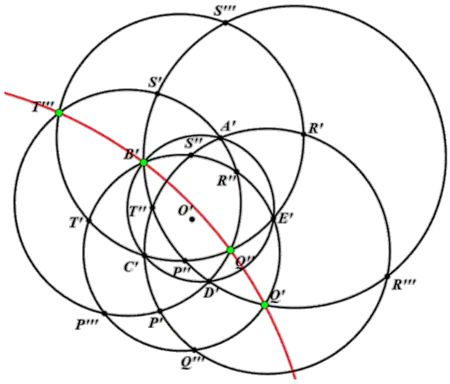
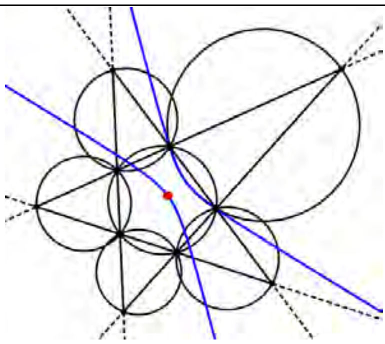
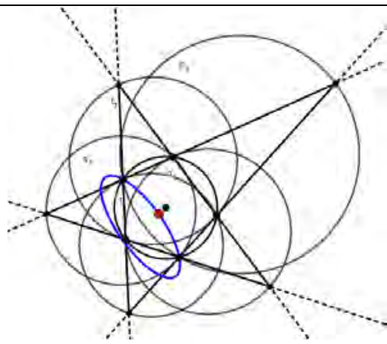


三、原定義五角共心圓與新定義五角共心圓的比較

原定義五角共心圓與新定義五角共心圓雖然定義不同，但仍有許多相似的性質，

我們將其整理成表格如下：

<table>
<tr><th></th><th>原定義五角共心圓</th><th>新定義五角共心圓</th></tr>
<tr><td>五點共圓</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>五圓共根心</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>三點共線</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

	原定義五角共心圓	新定義五角共心圓
四點共圓	  	  
根心軌跡	 定義圓上任取一點在圓周上移動，其餘四點固定，則根心的軌跡類似於雙曲線	 定義圓上任取一點在圓周上移動，其餘四點固定，則根心的軌跡類似於橢圓

四、試證明新定義五圓共根心

（一）類比：利用原定義的圖形直接類比到新定義的圖形

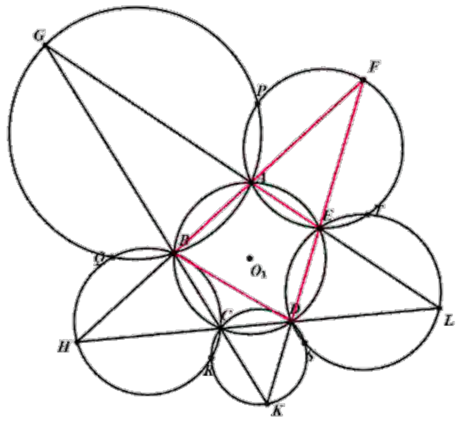
（二）相似：

根據外冪性質可以知道$\overline{FA}\times\overline{FB}=\overline{FE}\times\overline{FD}\Rightarrow\dfrac{\overline{FA}}{\overline{FD}}=\dfrac{\overline{FE}}{\overline{FB}}$ 又$\angle AFE=\angle DFB$

$\Rightarrow$ $\Delta AFE\sim\Delta DFB$（SAS相似）

使得原定義與新定義中外部的五個圓都相似

因此我們想要利用相似的方法去證明此性質



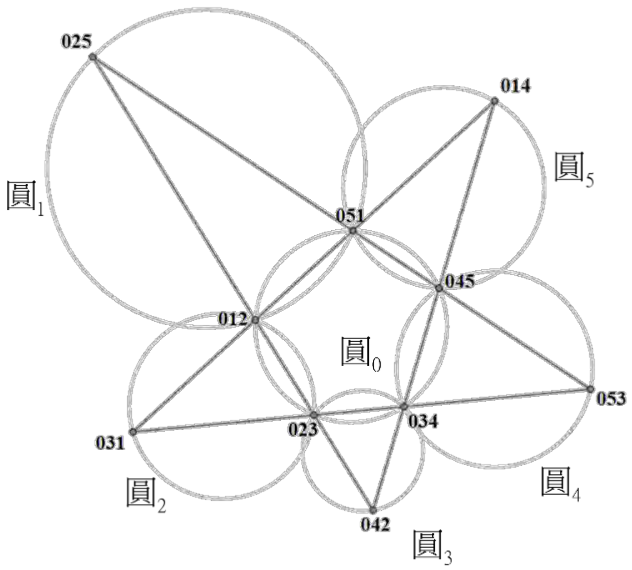
（三）五芒星之根心推定：

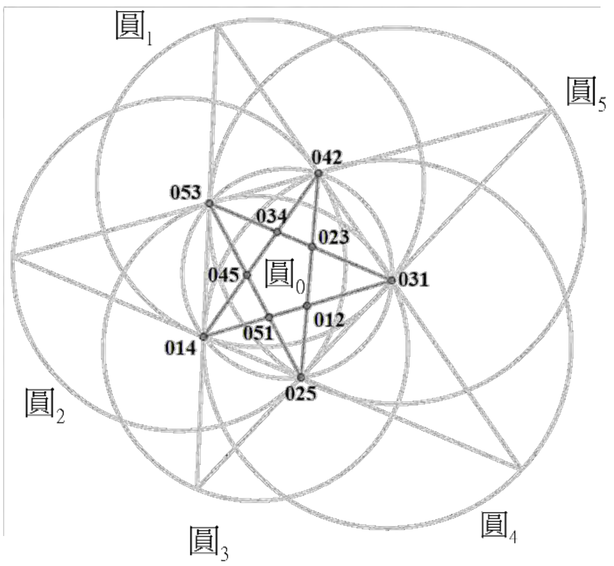
若我們將圓用以下方法命名，並再將五芒星的所有點都標示成根心，並以哪幾個圓所產生的來命名，我們可以從點的名稱觀察到一些關係：

1.在原定義與新定義中的五芒星是一模一樣的

2.同一個圓與其他圓所做的所有根心會落在同一直線上，如 025、051、045、053

$\Rightarrow$因此我們猜想不管是在原定義或新定義都會有一樣的性質



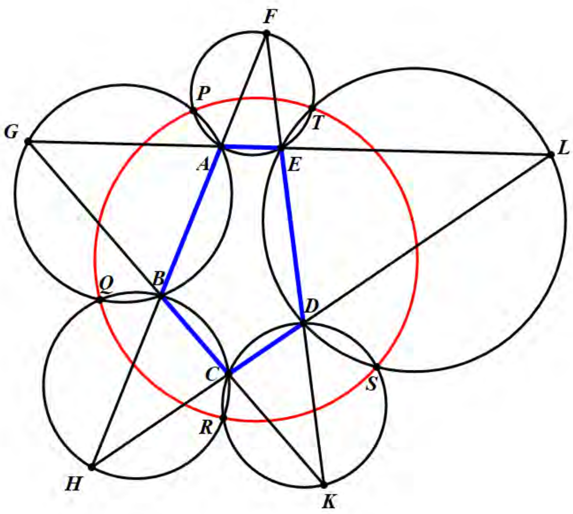


柒、結論

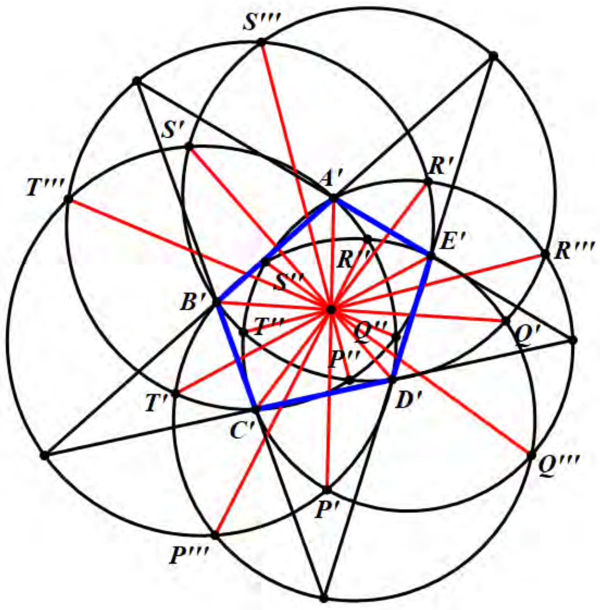
在我們前面的討論中，都是以圓內接五邊形作為我們統一的定義，進而進行比較及證明，但事實上並不是所有的圖形性質都要以圓內接五邊形作為條件才會成立，任意五邊形同樣成立，像是密克五圓定理〔p5 肆、五、（二）〕再任意五邊形亦會成立，針對上述情況，以下是我們的總整理。

一、任意五邊形亦成立之圖形

（一）原定義五點共圓：五邊形 ABCDE 為任意五邊形（爾後我們稱之為大五點共圓）

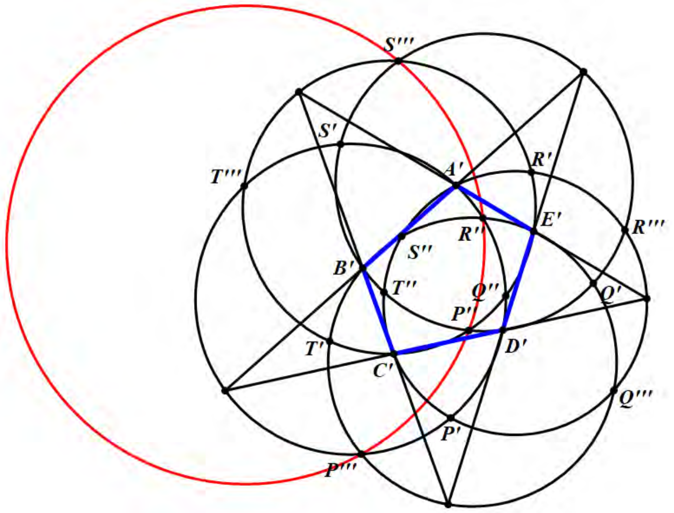


（二）新定義五圓共根心：五邊形 A′B′C′D′E′ 為任意五邊形

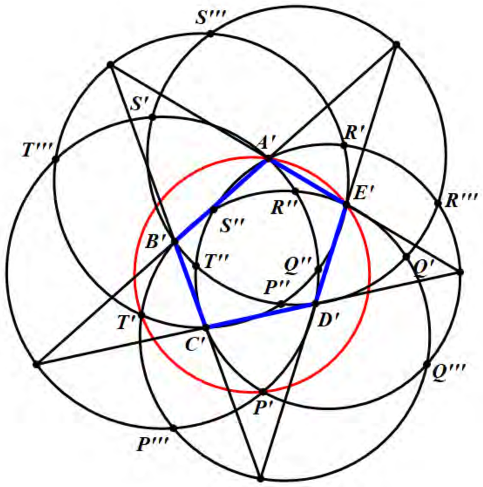


（三）新定義四點共圓：五邊形 A′B′C′D′E′ 為任意五邊形（共三型）

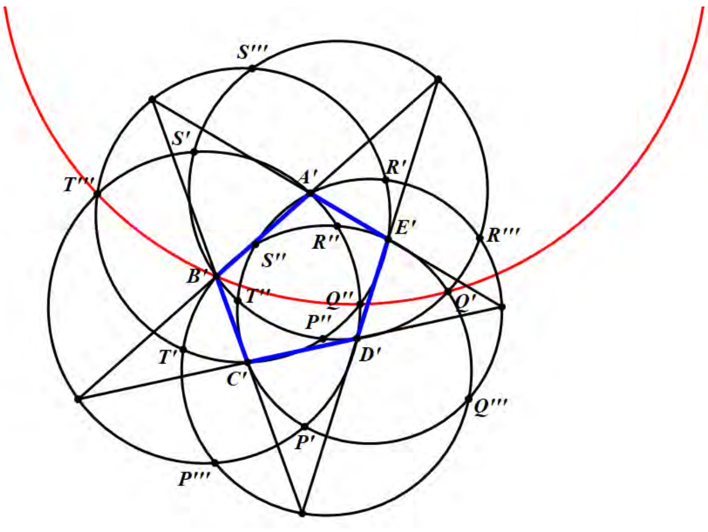
1.第一型新定義四點共圓：五邊形 A′B′C′D′E′ 為任意五邊形



2.第二型新定義四點共圓：五邊形 A′B′C′D′E′ 為任意五邊形

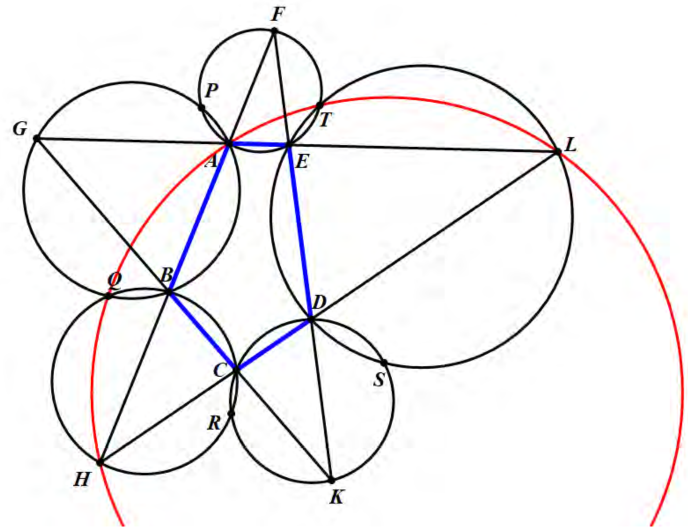


3.第三型新定義四點共圓：五邊形 A′B′C′D′E′ 為任意五邊形



（四）原定義巨五點共圓：五邊形 ABCDE 為任意五邊形

（證明大五點共圓之先備性質，文獻上已有嚴謹證明）



二、所有圖形總整理

我們的所有圖形並非各自獨立，彼此間都有相對應的關係，或許從圖形上沒辦法直接看出，但從證明就可以間接觀察其奧秘，像新定義圖形中五點共圓就有用到四點共圓的先備條件〔p14 伍、二、(三) 1.〕或者是原定義圖形中三點共線就利用五點共圓和五圓共根心的結果〔p11 伍、一、(三)〕，根據圓冪，五圓共根心和四點共圓其實是等價關係，整理表如下：

	任意五邊形	圓內接五邊形
原定義	巨五點共圓 ⇒ 大五點共圓 ⇒	五圓共根心 ⇔ 四點共圓
	↘ ↙ 三 點 共 線 ↗ ↖	
新定義	四點共圓 ⇔ 五圓共根心 ⇒	大五點共圓 ⇒ 巨五點共圓(未發現)

捌、參考資料及其他

一、《几何瑰宝》：沈文选、杨清桃(2010)、哈爾濱工業大學出版社。

二、《数学的魅力》：沈康身、上海辞书出版社

三、〈Solution〉Nguyen Van Linh,11A2 Math, Highshool for gifted student, Ha Noi University of Science, Vietnam

四、《五点共圆问题与 Clifford 链定理》北京师范大学张英伯，叶彩娟、2007 年 4 月

【評語】050417

1. 本作品題材源自描述密克定理的資料，有關密克五圓定理有許多未被證明的性質，作者以幾何作圖為主，代數運算為輔進行研究。本研究中亦針對原始圖形的定義產生原定義及新定義兩個部分，在原定義的圖形中，作者建立密克定理，即在任意五邊形的五點共圓，以及條件限制更多的五圓共根心、三型四點共圓及三點共線等性質，新定義圖形也發現類似的性質，有作嚴謹證明，並比較原定義及新定義圖形的對應關係及比較，唯需對新定義圖形的推論要再進一步去探討此部分。

2. 有列出四筆參考文獻，唯須交代本作品哪些是已知部分，那些是自行完成。

3. 作者主要是利用已知的密克五圓定理、根心定理、外冪逆定理等去衍生出一些在圓內接五邊形上多個圓之共圓、共心、共線等性質。但是在結論上卻說明，有一些性質是任意五邊形就可以成立的。這一點宣稱在數學上並不明顯。相反的，作者應該著重在一些任意五邊形的作圖和證明，讓讀者清楚看出圓內接五邊形並非是一個必要的條件，這樣才能顯示出作者數學的成熟度。

4. 需要新定義的原因為何？新舊定義的差異所造成的性質差異為何？又新定義對於 4 個點有影響嗎？可以再延伸推廣到 6 個點嗎？或更一般化嗎？

5. 在新定義五角共心圓性質以畫圖為主，論述較為簡略。

作品海報

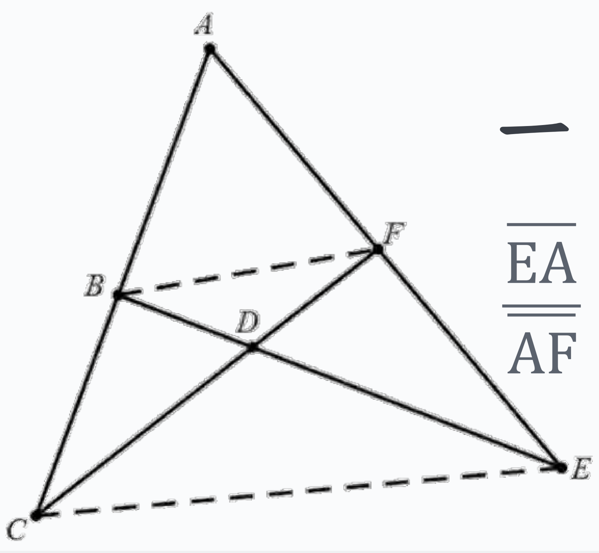
壹、研究動機與目的

我們在許多數學書籍中都多次地閱讀到密克定理，密克定理分成三圓、四圓以及五圓，其中三圓及四圓的研究資料都非常豐富，性質的證明也已完備，但五圓的研究資料卻非常缺乏，只有推測，沒有證明，因此，我們研究的三大目的：

1.嚴謹證明未被證明的推測　2.證明自行發現的幾何關係　3.探討性質間的**關聯**與**比較**

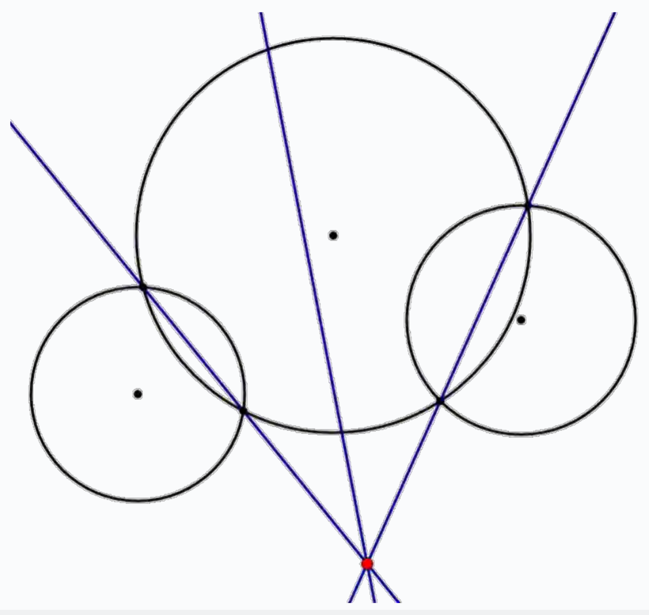
貳、先備知識

數學性質



一、孟氏定理

$$\frac{EA}{AF}\times\frac{FC}{CD}\times\frac{DB}{BE}=1$$

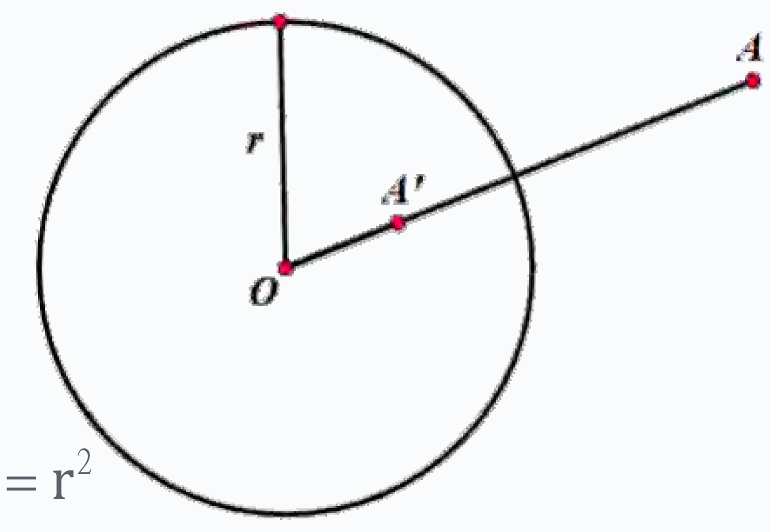


二、根心定理

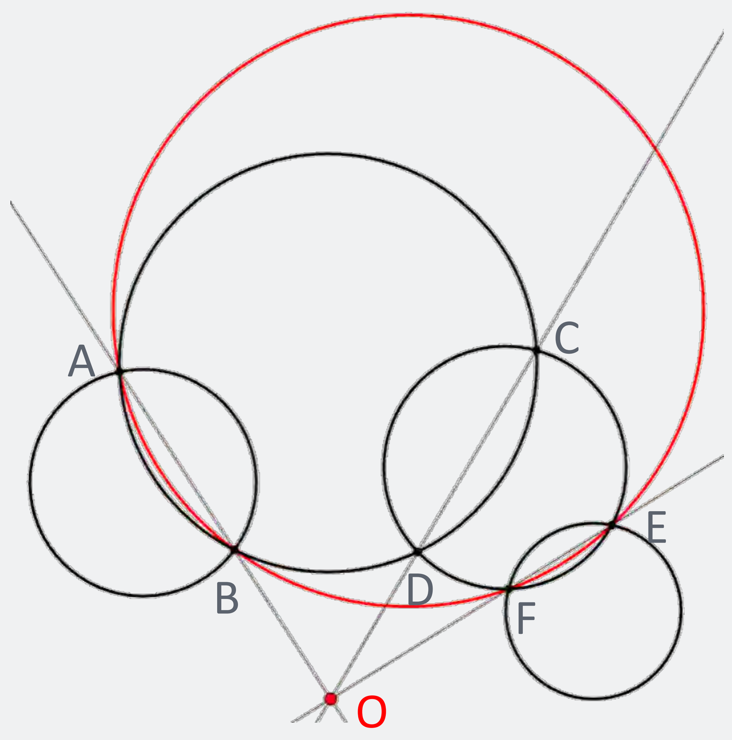
圓心不共線三圓作三根軸必交於一點

三、反演

若A對圓O作反演產生A′，則$\overline{OA}\times\overline{OA'}=r^2$



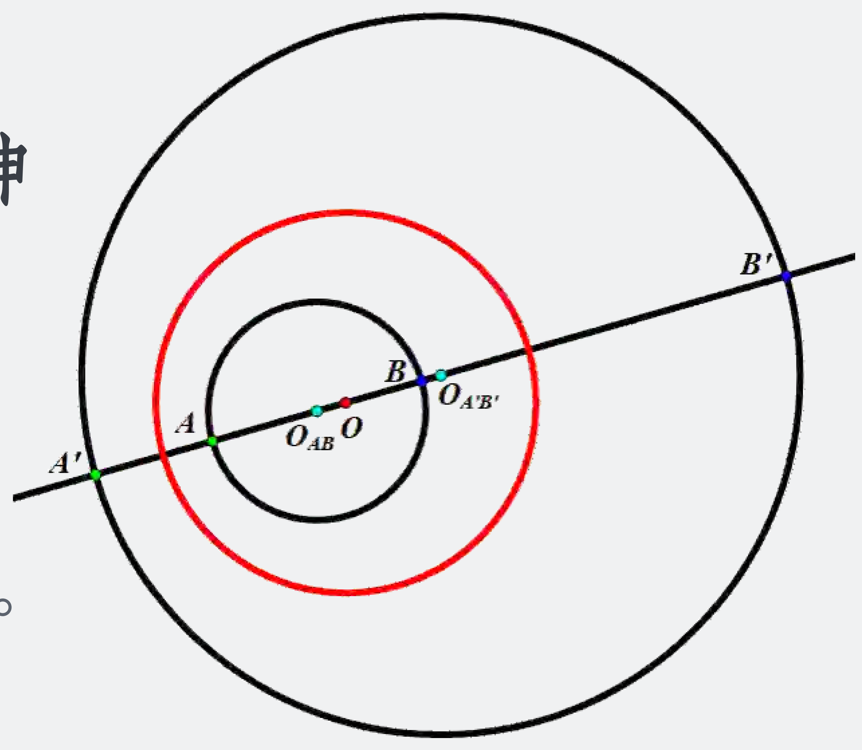
前置研究



四、根心及圓冪延伸

說明：

若四圓共根心，則四點共圓，其中這四點為兩組的兩兩圓交點。



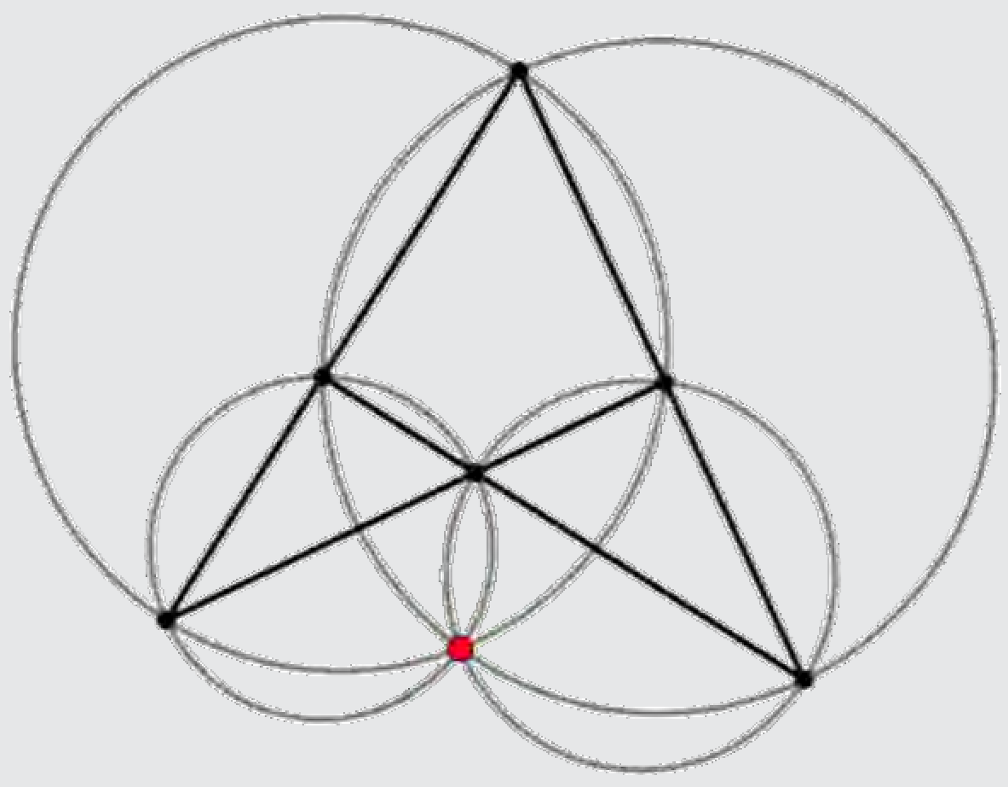
五、反演之延伸

說明：

若一圓對另一圓作反演產生一個圓，則此三圓的圓心會共線。

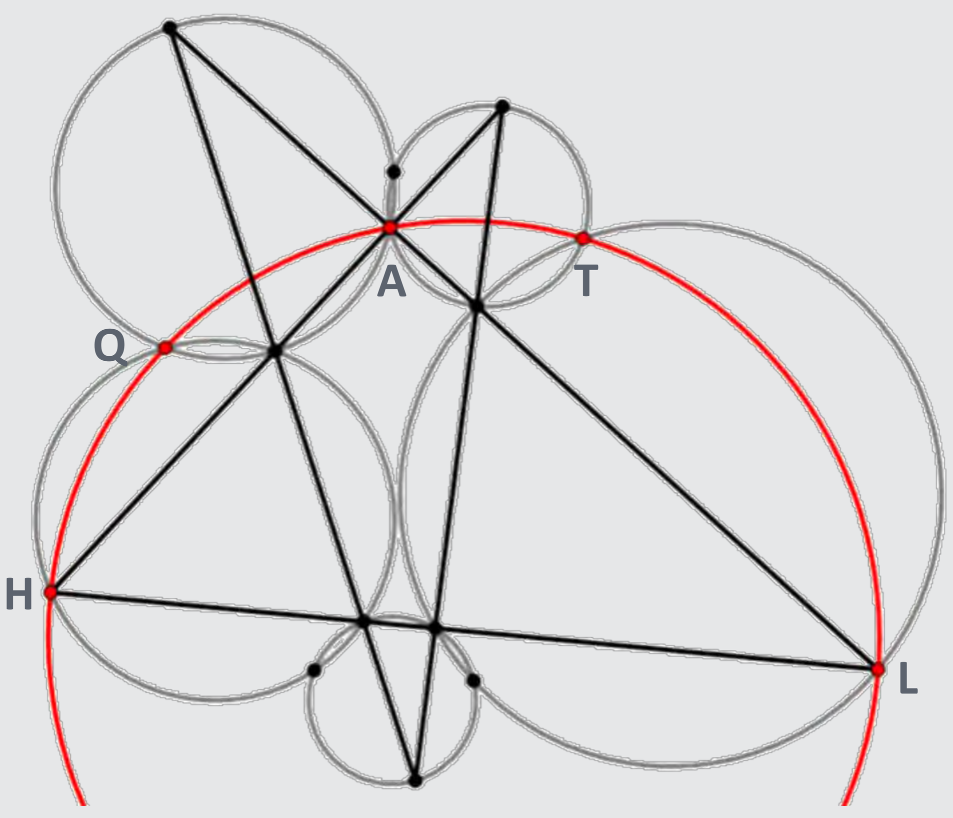
已知定理

六、密克四圓定理



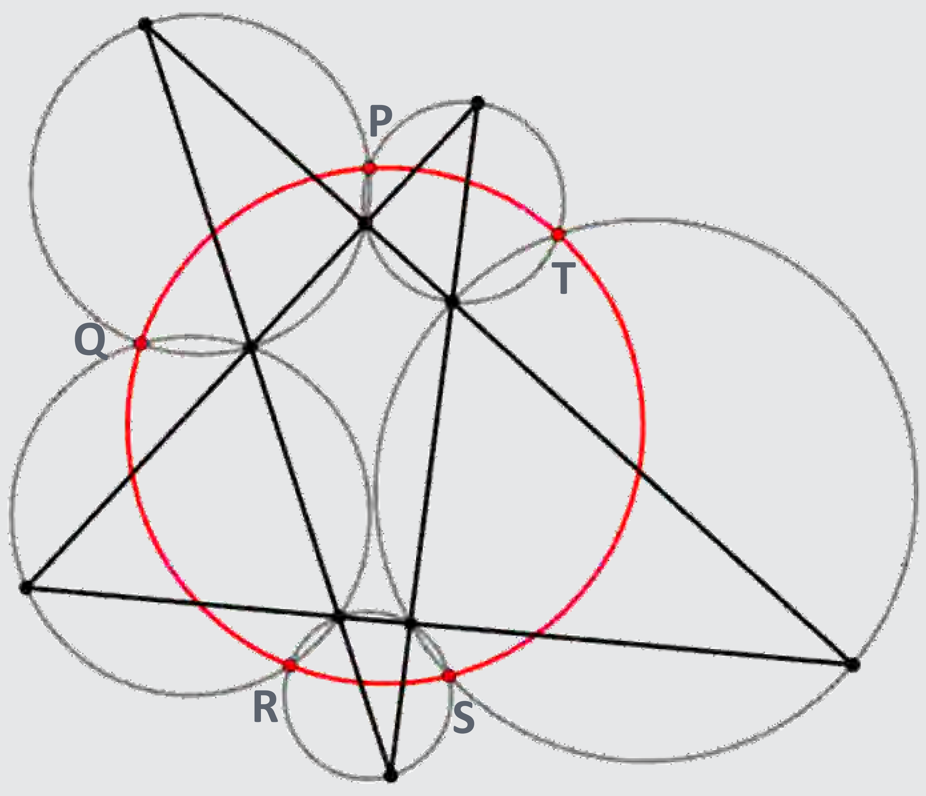
說明：四外接圓交於密克點

七、巨五點共圓



說明：HQATL五點共圓

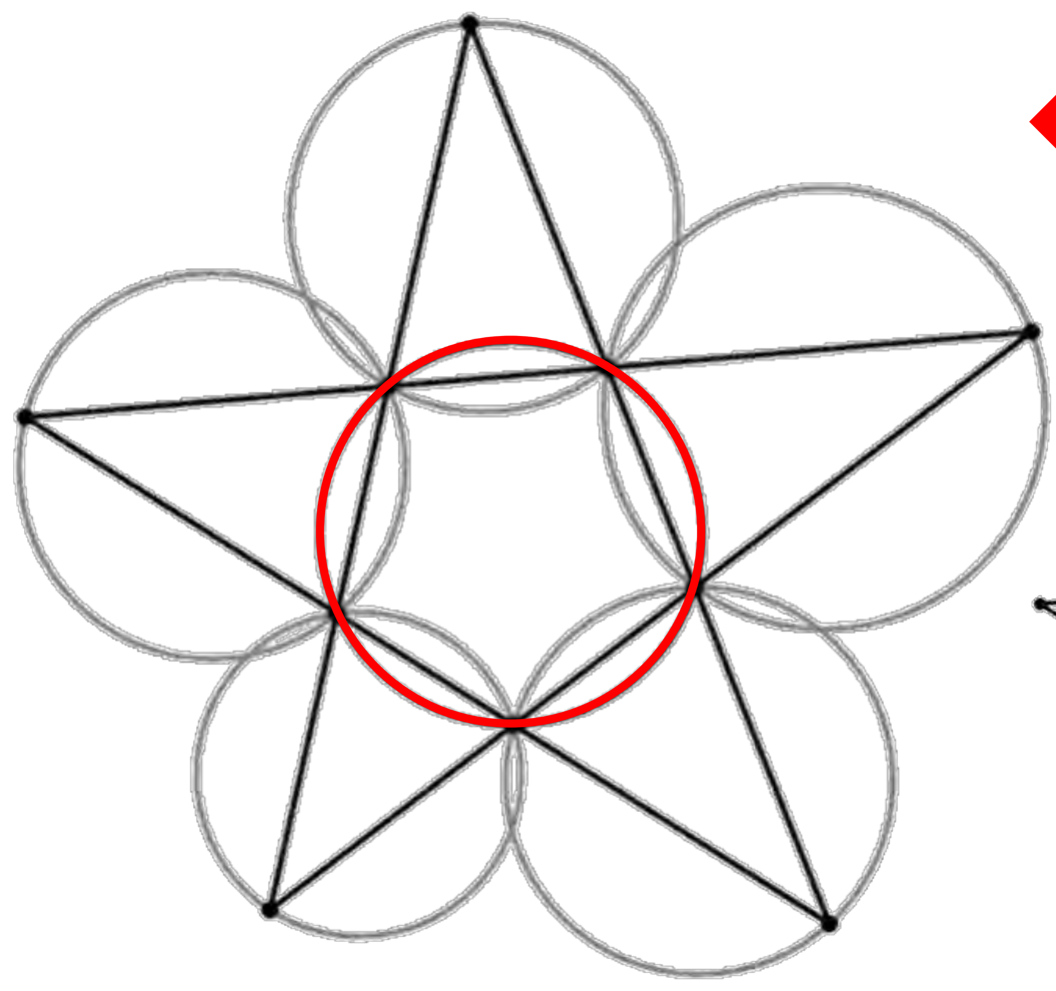
八、密克五圓定理

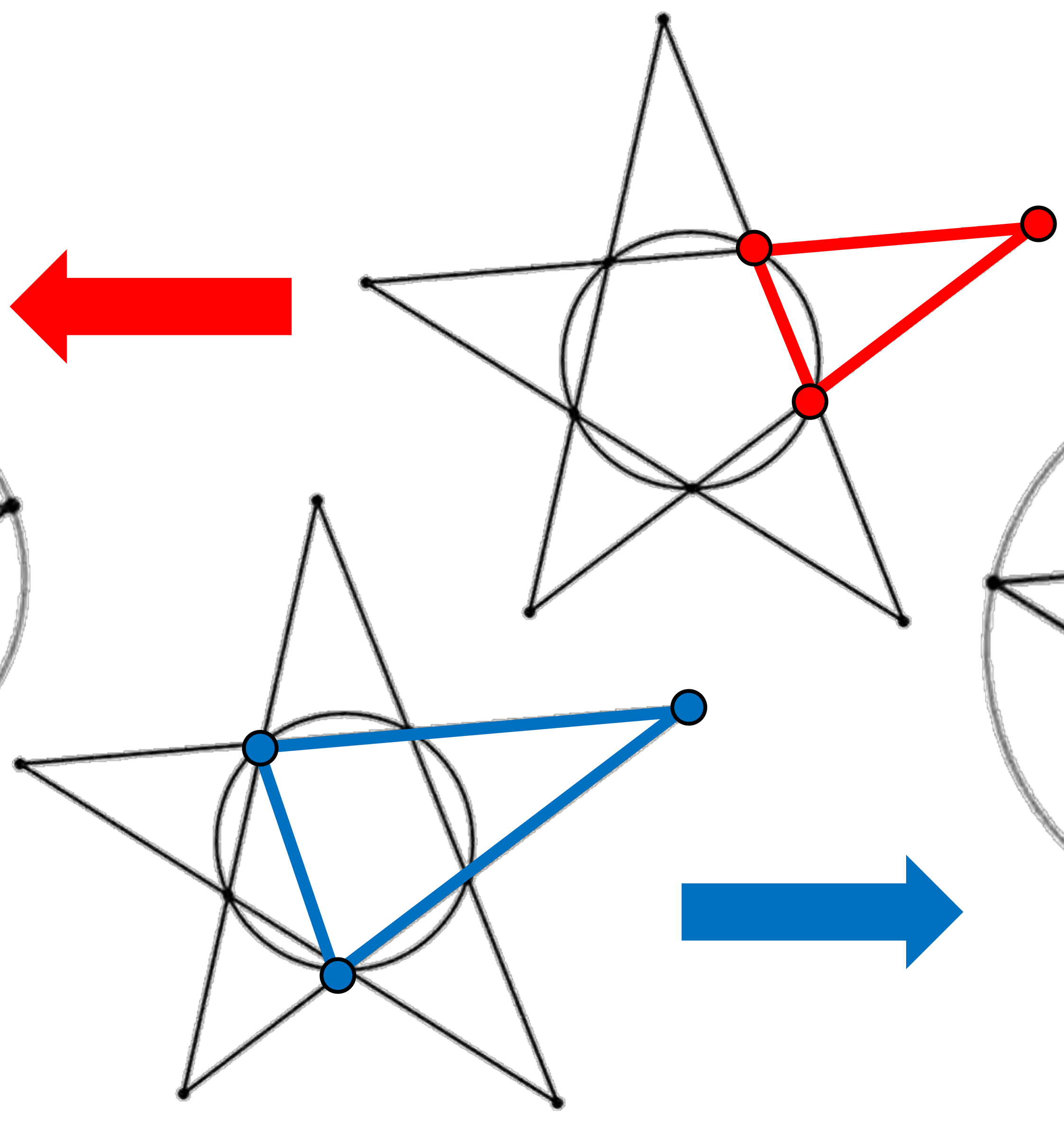


說明：PQRST五點共圓

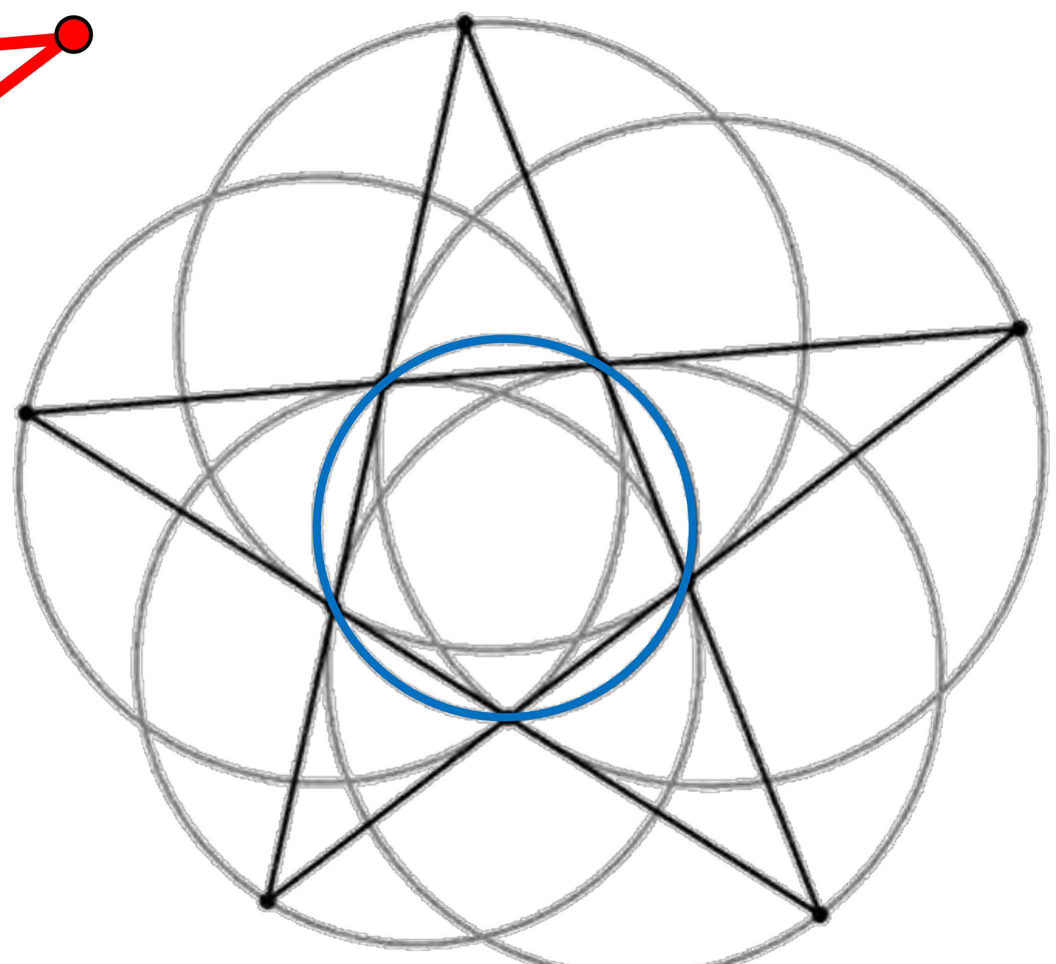
參、圖形定義

一、原定義五角共心圓





二、新定義五角共心圓



肆、研究過程與結果

一、五圓共根心

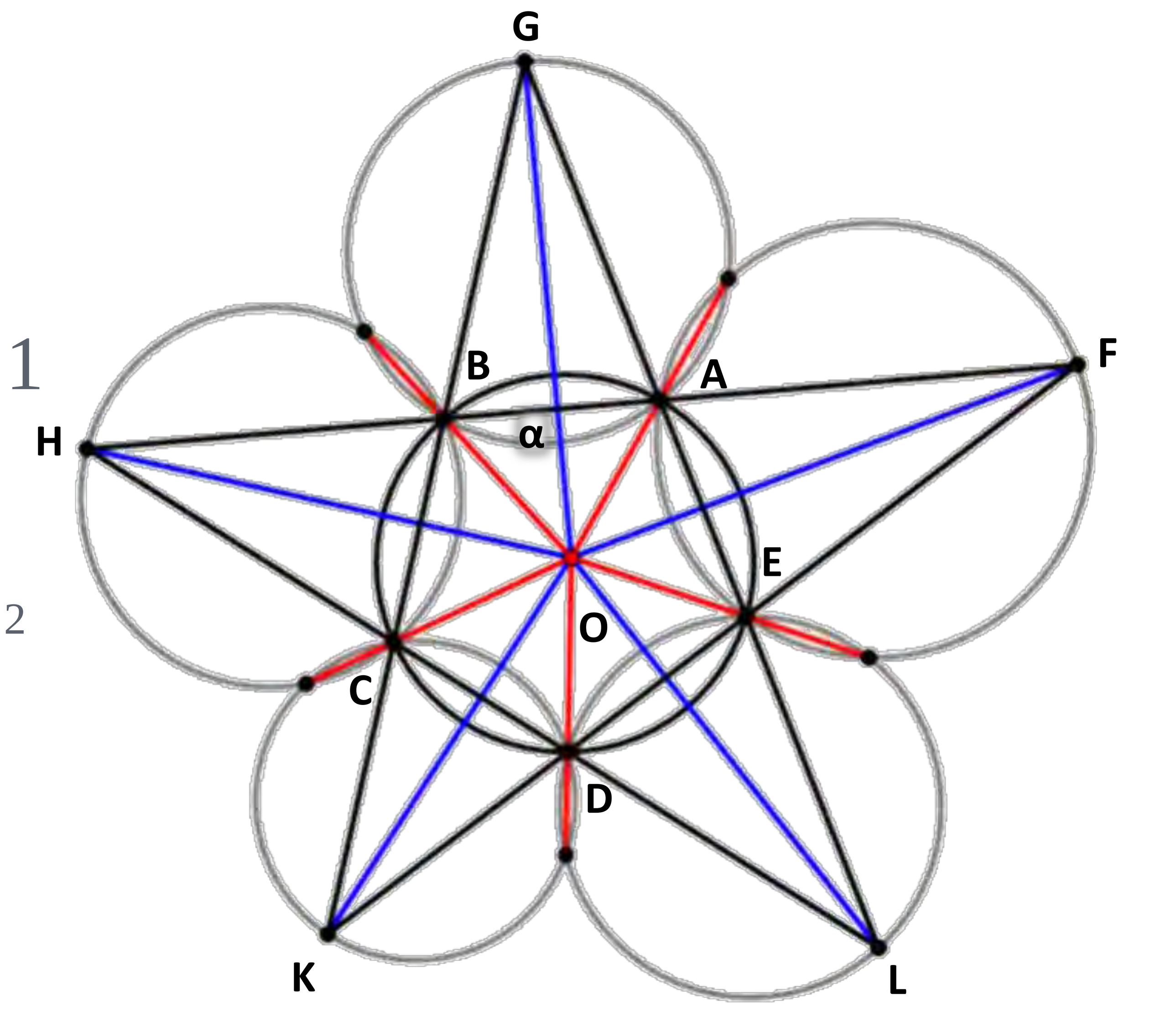
證明：

1.根據孟氏定理 $\frac{\overline{GC}}{\overline{CB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HA}}\times\frac{\overline{AL}}{\overline{LG}}=1$ 且 $\frac{\overline{GE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BK}}{\overline{KG}}=1$

2.藉由根軸上等冪之性質計算得 $\frac{\overline{GO_1}}{\overline{O_1\alpha}}=\frac{\overline{GO_2}}{\overline{O_2\alpha}}\Rightarrow O_1\equiv O_2$

3.因此可知點O到五外接圓等冪

4.五外接圓共根心得證



二、三心共線

1.以O_3為圓心作一個圓使得點P對此圓反演可產生點A

可得$r=\sqrt{O_3A\times O_3P}$

2.同理作出另外四組(Q、B)(R、C)(S、D)(T、E)的反演圓

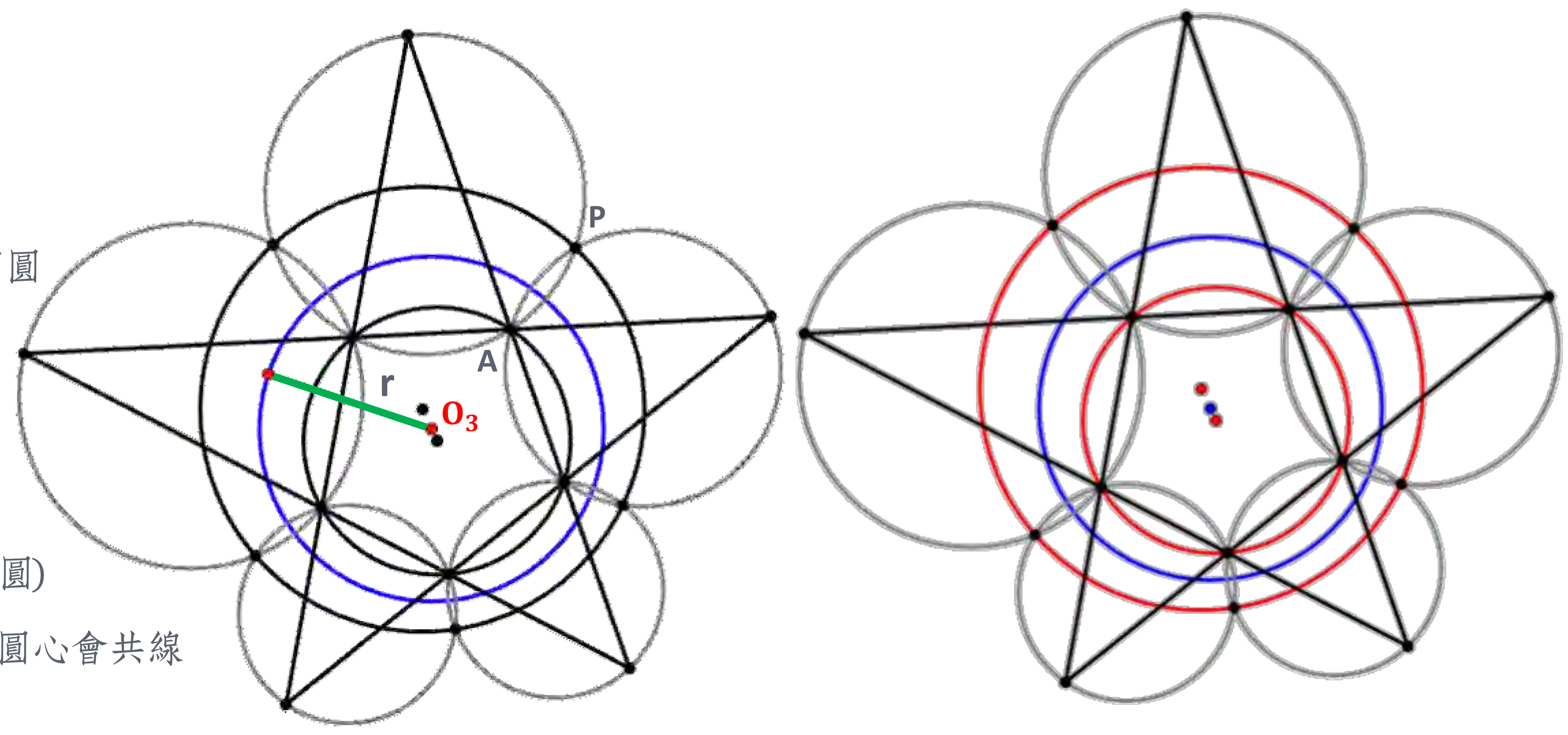
3.根據五圓共根心

可得到$\overline{O_3A}\times\overline{O_3P}=\overline{O_3B}\times\overline{O_3Q}$...以此類推

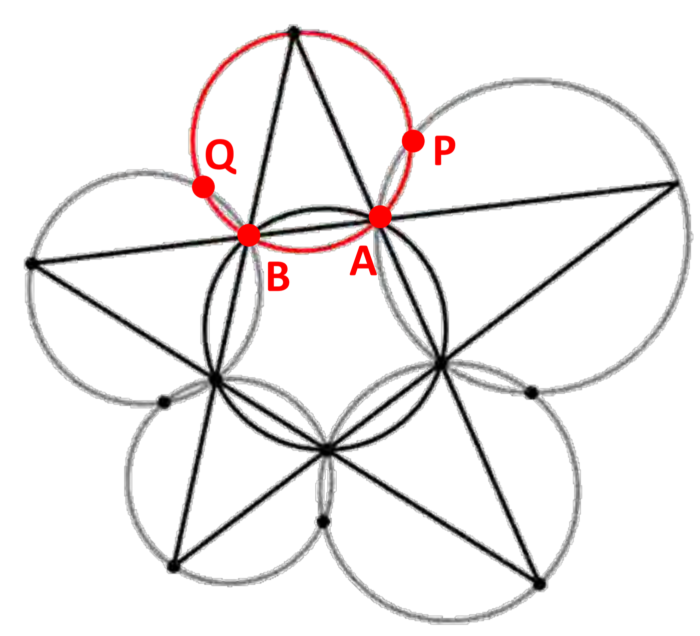
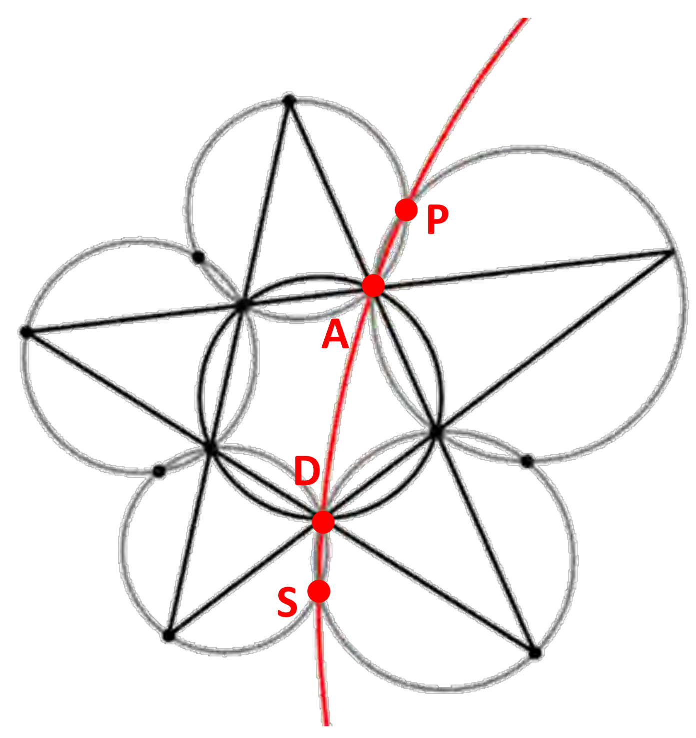
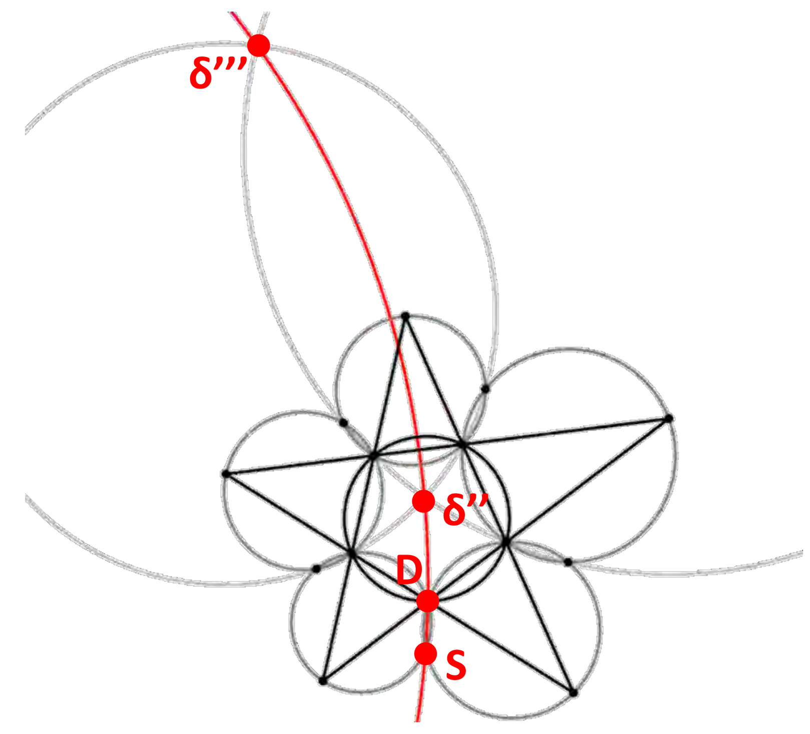
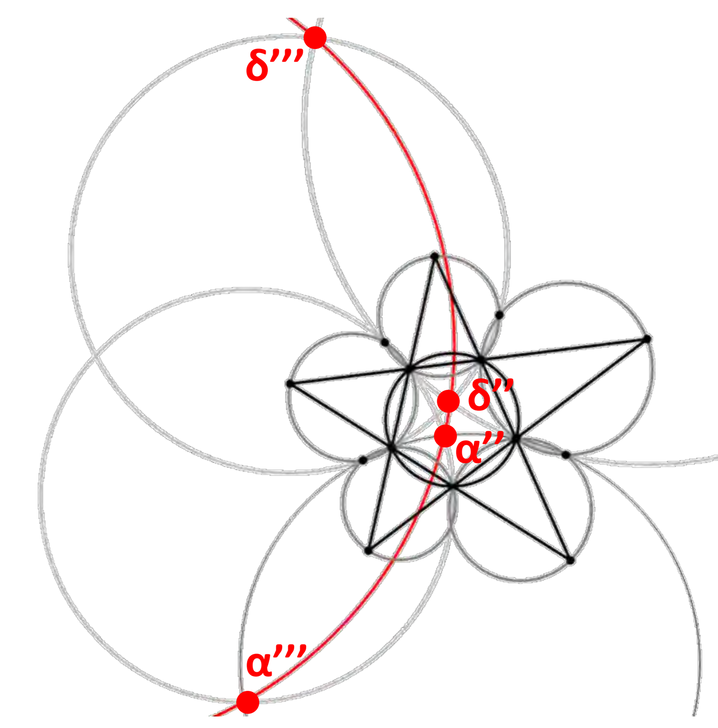
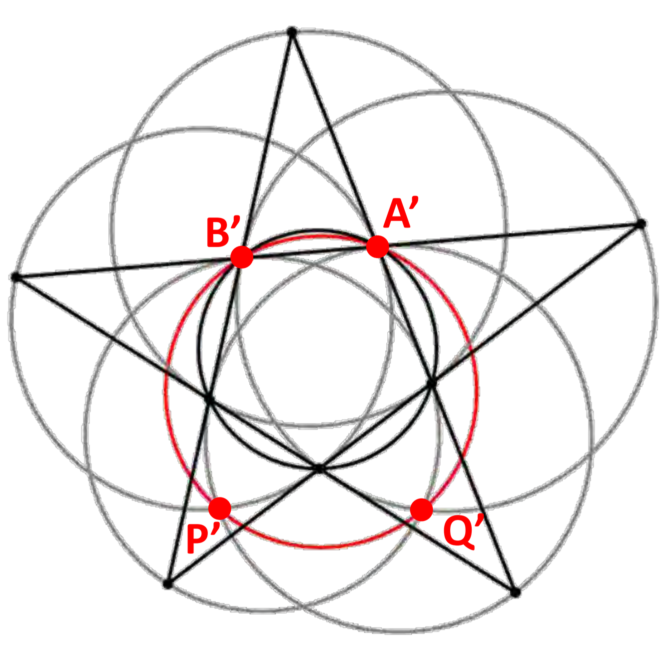
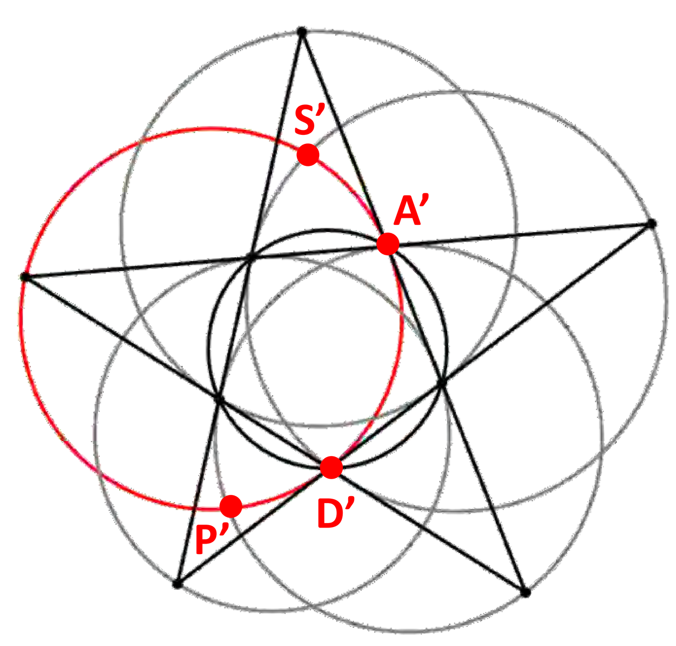
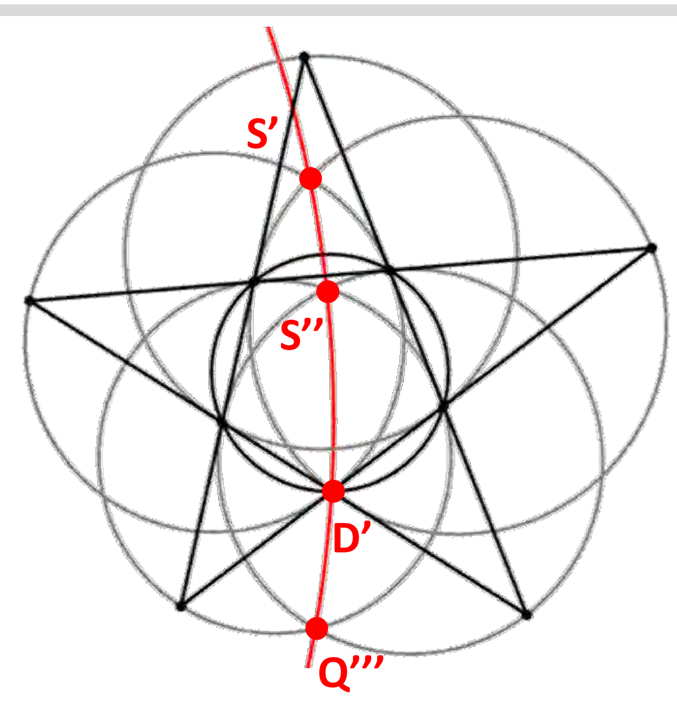
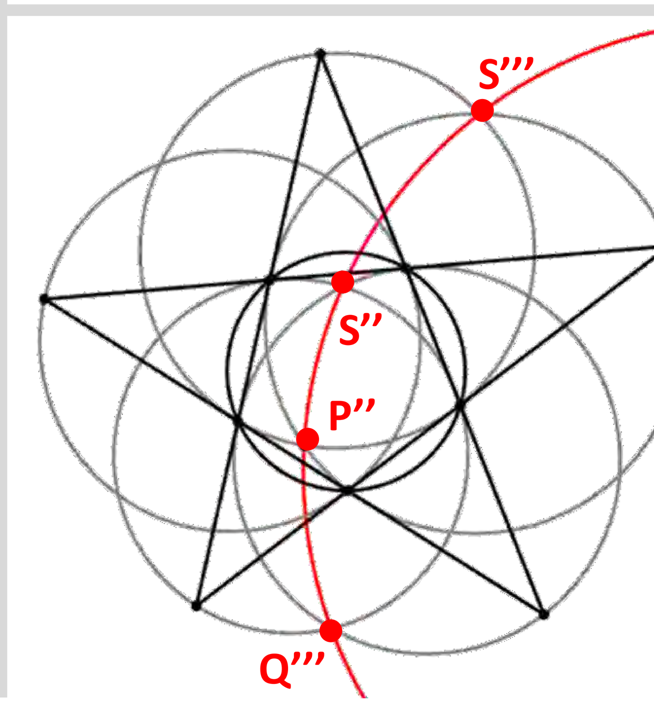
4.而五個反演圓相等

5.圓PQRST(密克圓)對圓O_3作反演就會是圓ABCDE(定義圓)

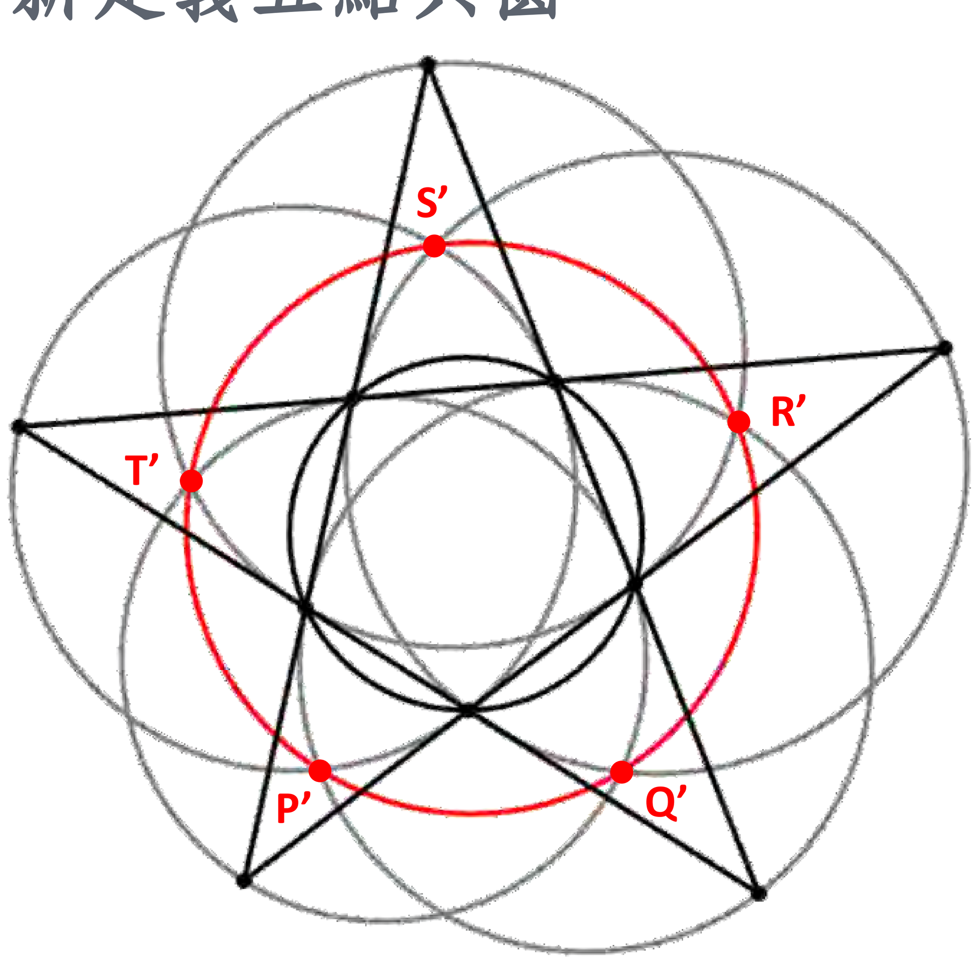
6.根據引理可知 圓ABCDE、圓PQRST、反演圓 三圓的圓心會共線

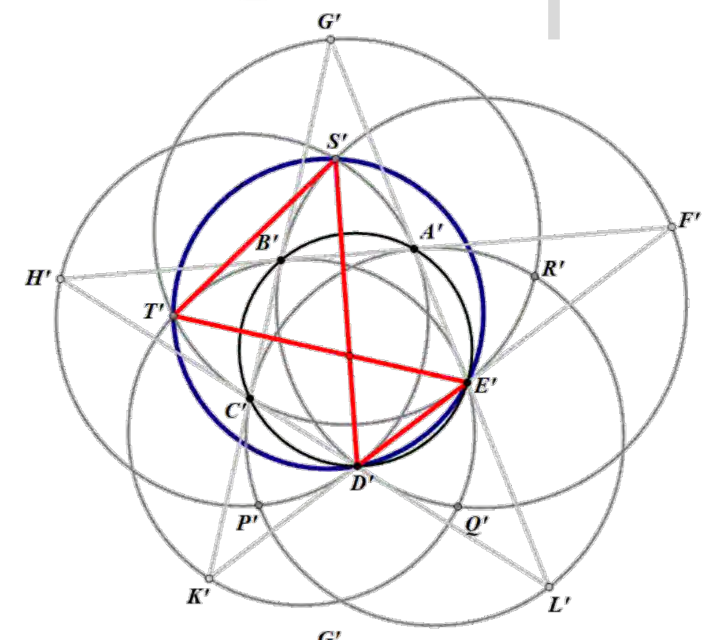


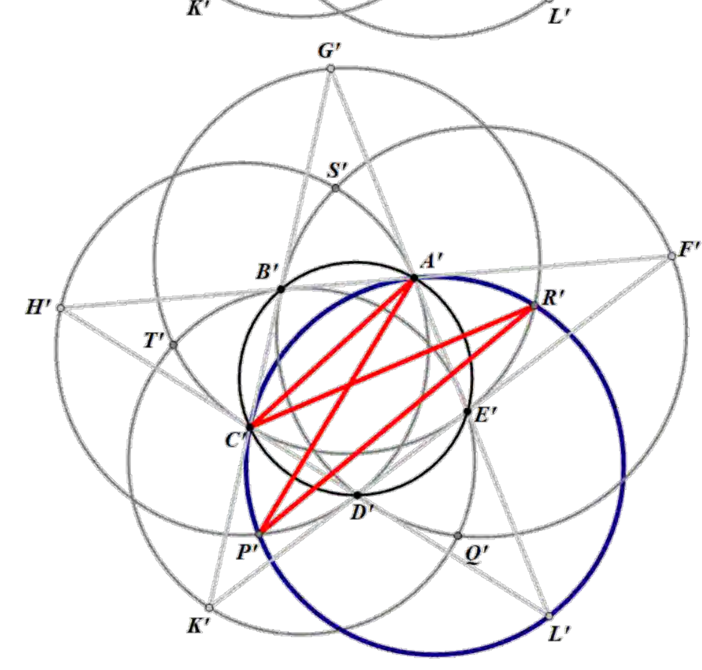
三、四點共圓

	定義圖與第Ⅰ型		第Ⅱ型	第Ⅲ型
原定義				
新定義				

四、新定義五點共圓







1.根據第I型四點共圓∠T'S'D'=∠T'E'D'

同理∠D'S'R'=∠D'C'R'

∠T'P'A'=∠T'E'A'

2.根據定義圓∠A'P'R'=∠A'C'R'

3.∠T'S'D'+∠D'S'R'+∠T'P'A'+∠A'P'R'

=∠T'E'D'+∠D'C'R'+∠T'E'A'+∠A'C'R'

=∠A'E'D'+∠A'C'D'=180°

4.T'、S'、R'、P'四點共圓

5.同理，P'、Q'、R'、S'、T'五點共圓得證

五、新定義五圓共根心

1. 類比：利用原定義的圖形直接類比到新定義的圖形

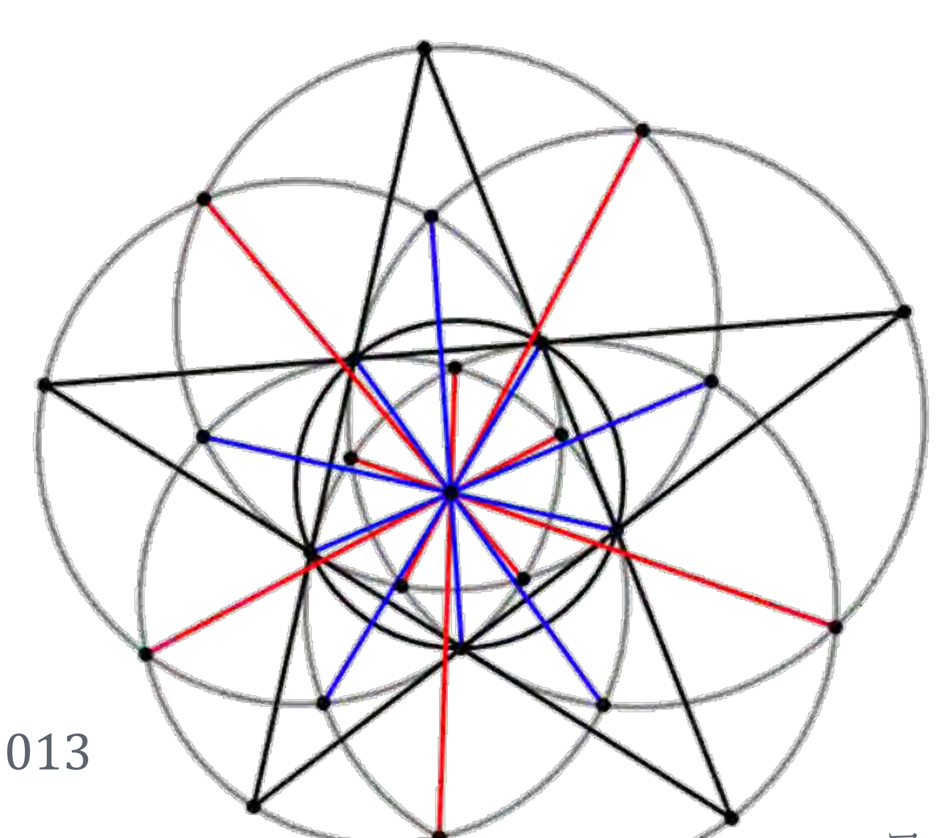
2. 相似：根據外冪性質可以知道$\overline{GA}\times\overline{GE}=\overline{GB}\times\overline{GC}\Rightarrow\dfrac{GA}{GC}=\dfrac{GB}{GE}$ 又∠AGB=∠CGE

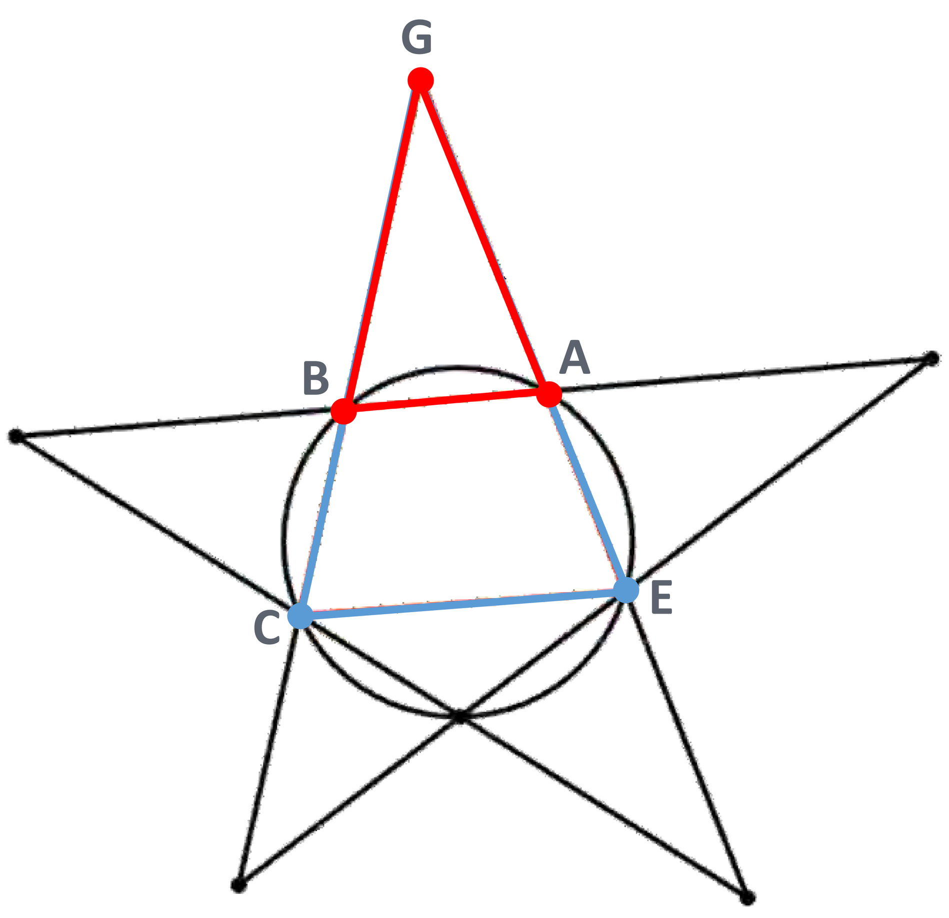
$\Rightarrow$ △AGB~△CGE（SAS相似）

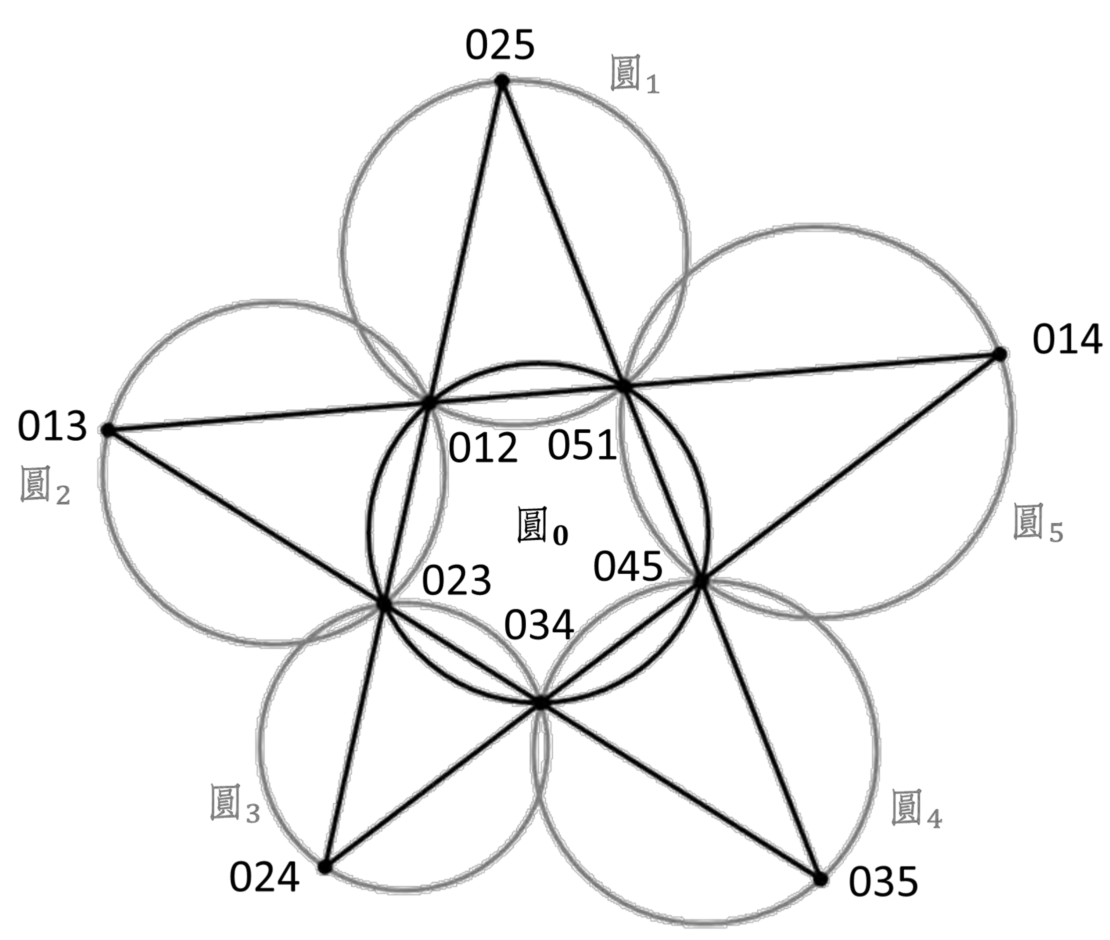
3. 五芒星之根心推定：我們將點命名成根心的形式，會發現

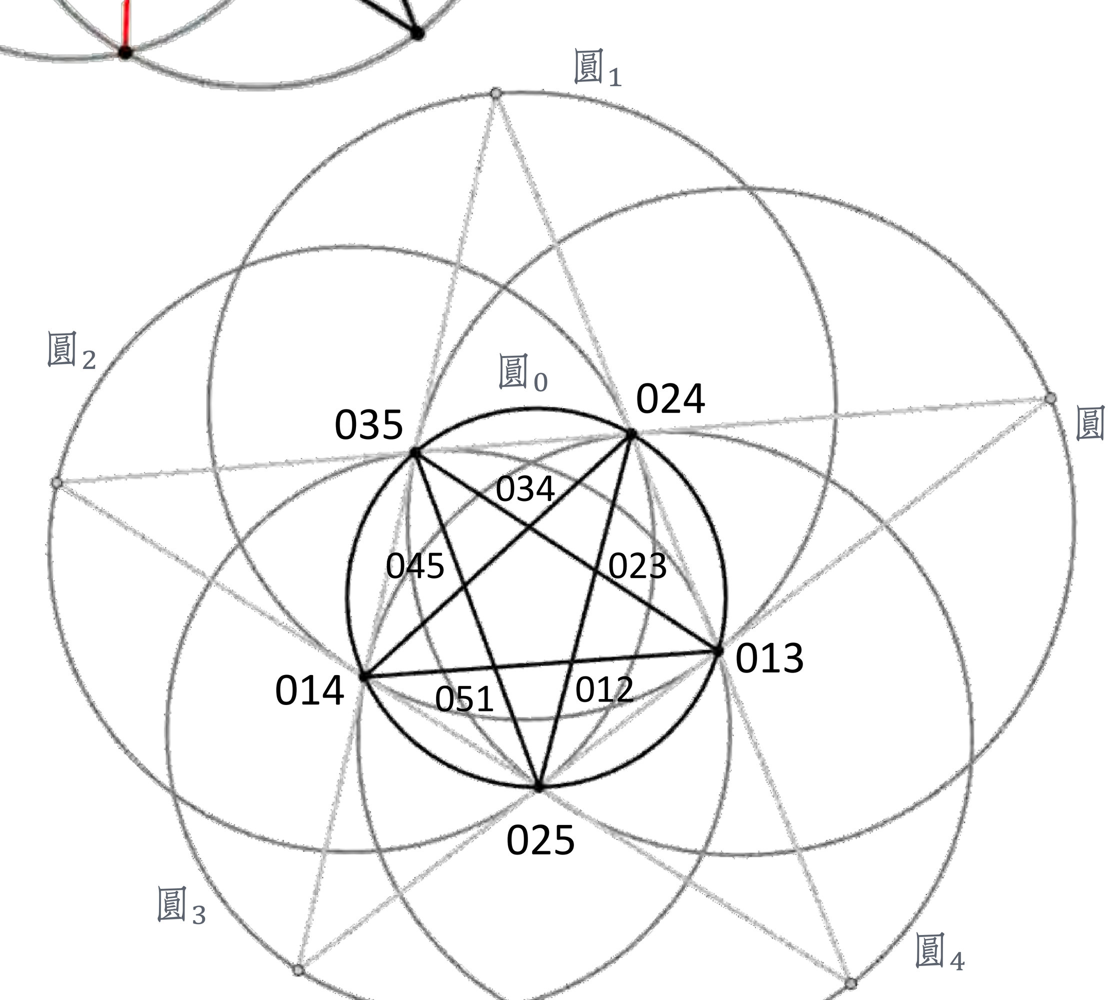
1) 在原定義與新定義中的五芒星是一模一樣的

2) 同一個圓與其他圓所做的所有根心會落在同一直線上，如014、015、012、013



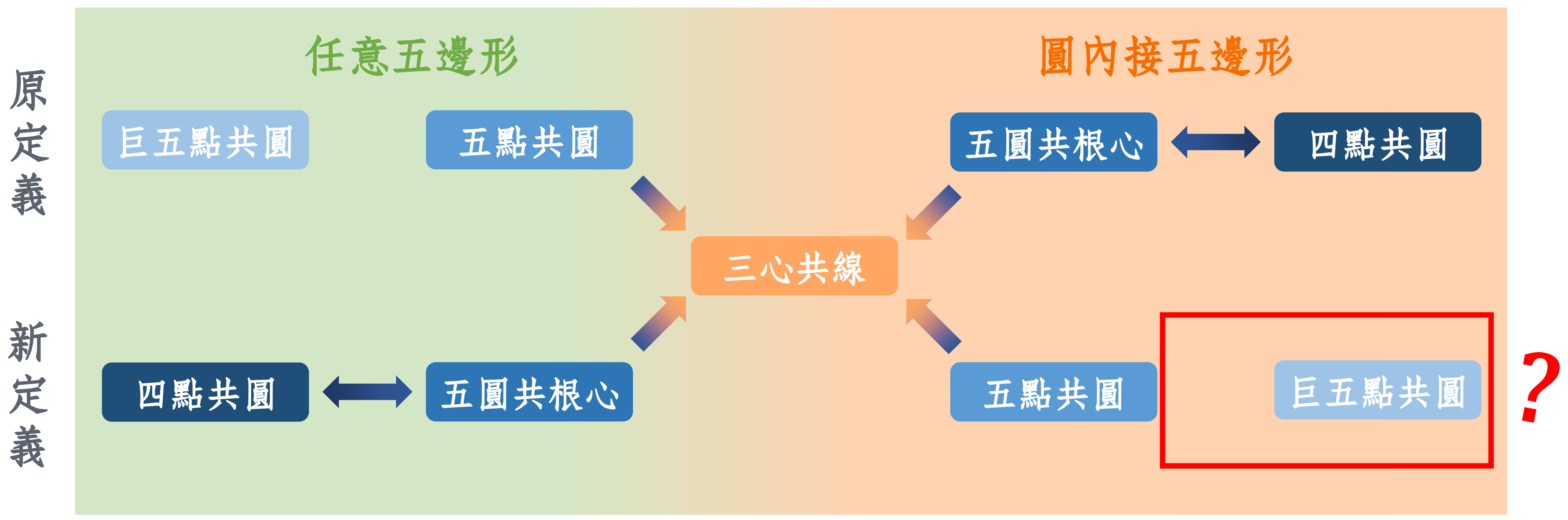




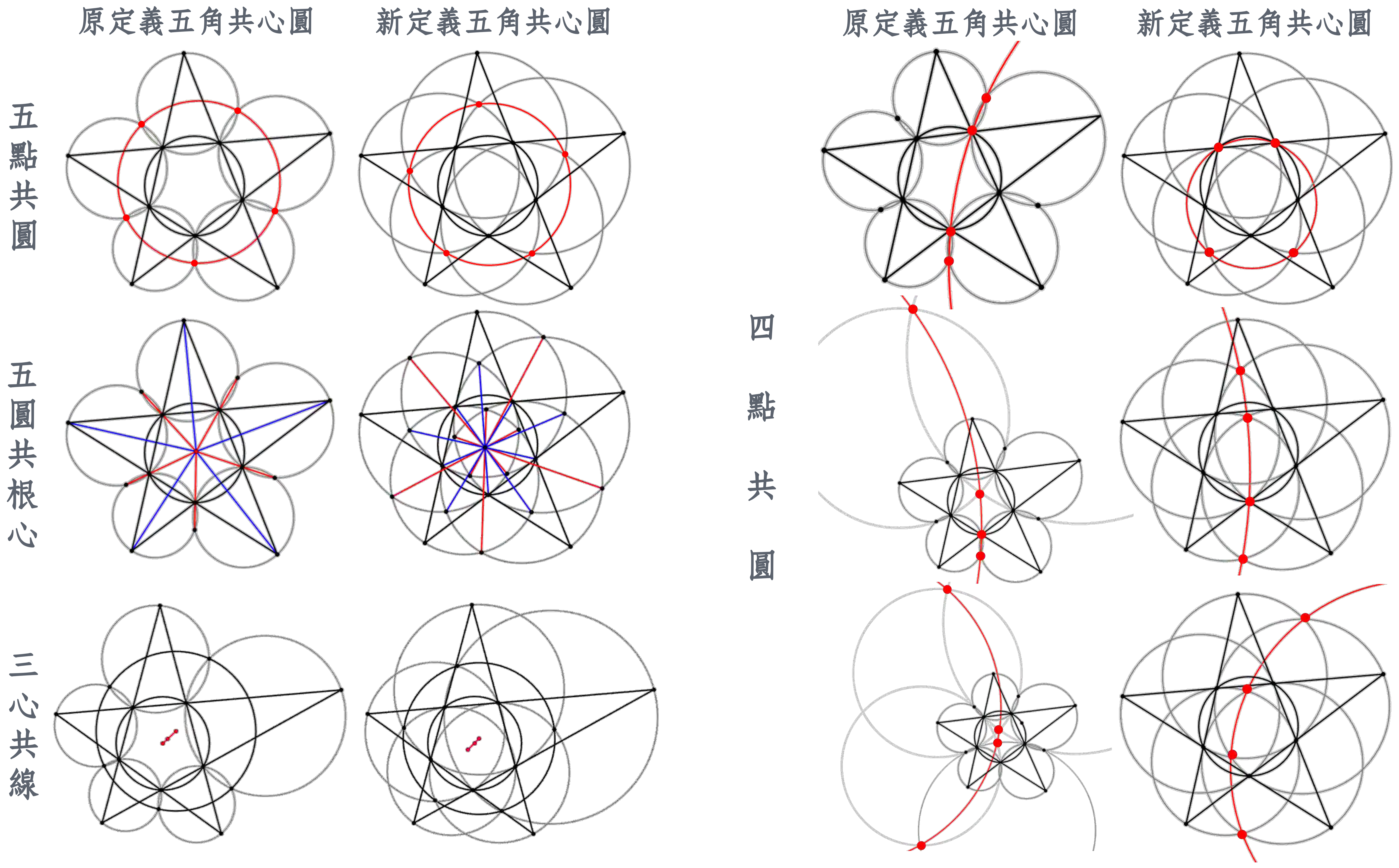


伍、研究關係與統整

一、總整理關係圖

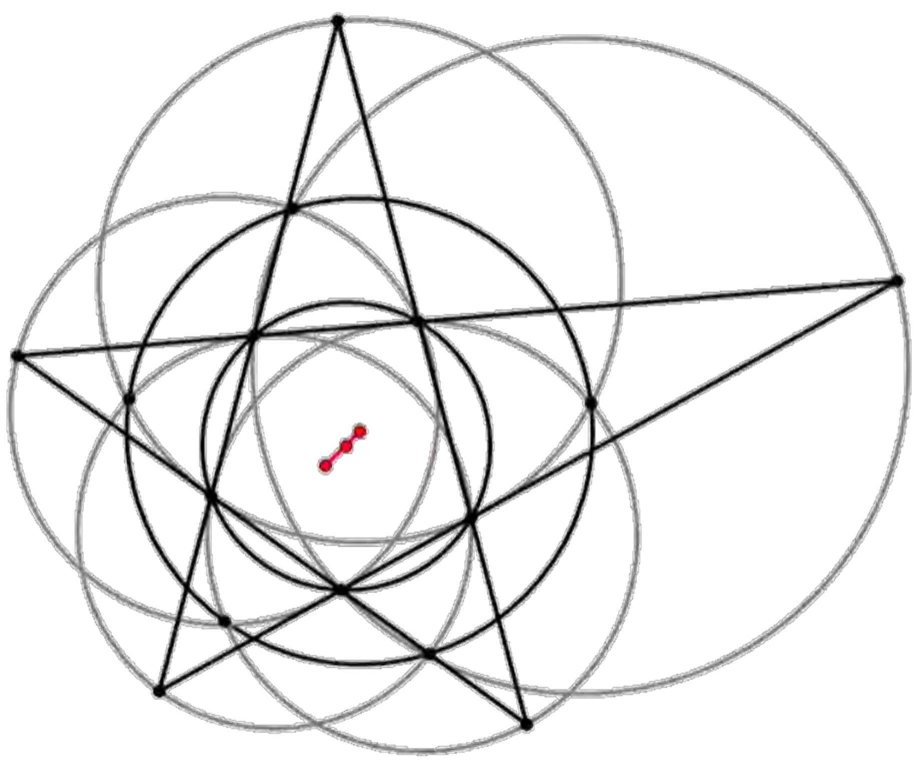


二、性質整理

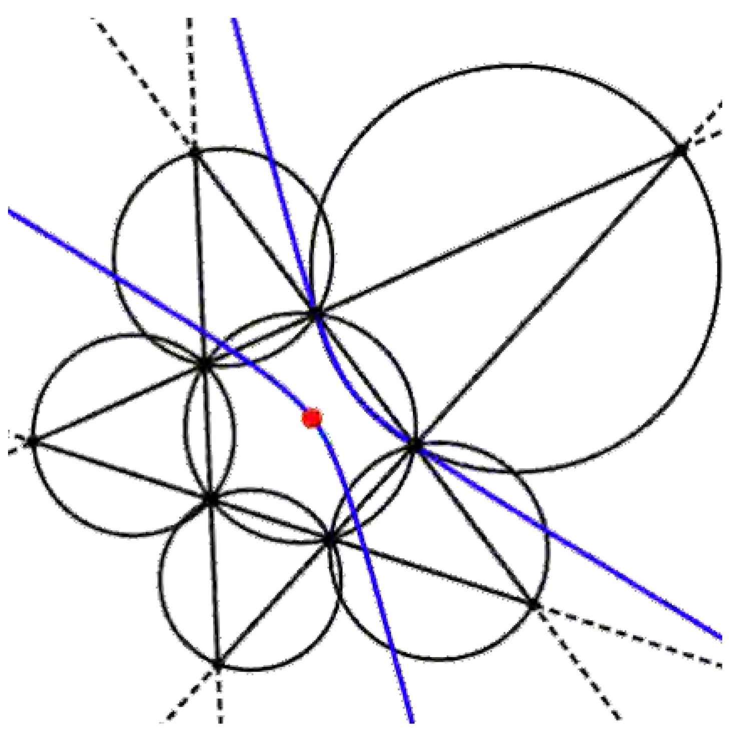


陸、未來展望

一、新定義三心共線



二、根心軌跡

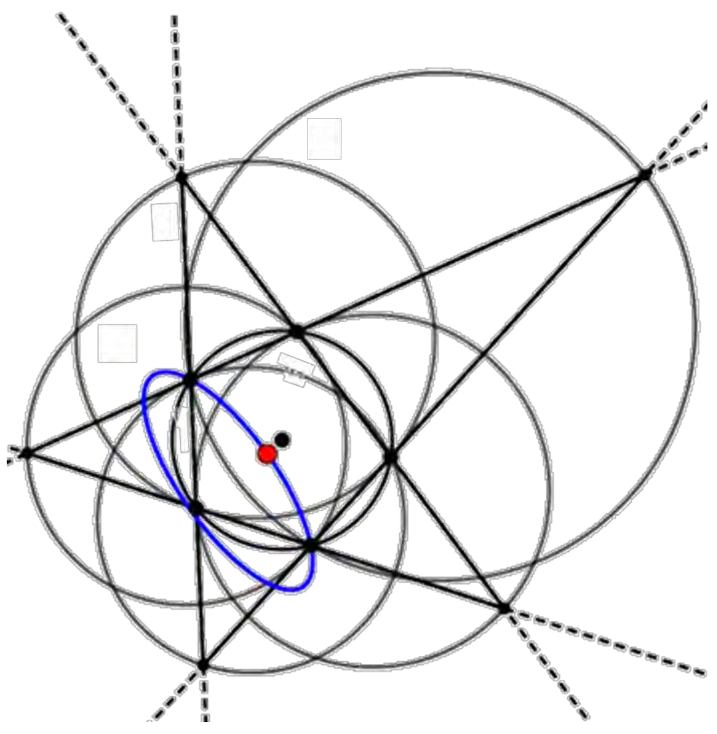


原定義

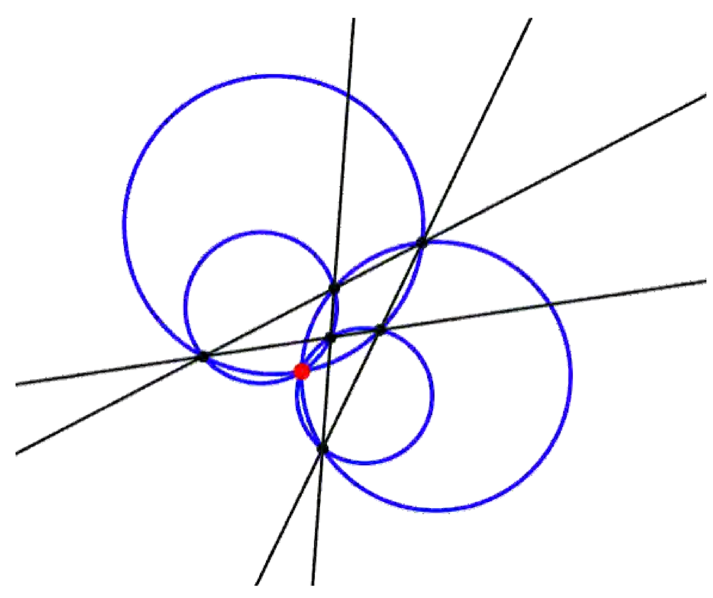
定義圓上任取一點在圓周上移動，其餘四點固定，則根心的軌跡類似於雙曲線

新定義

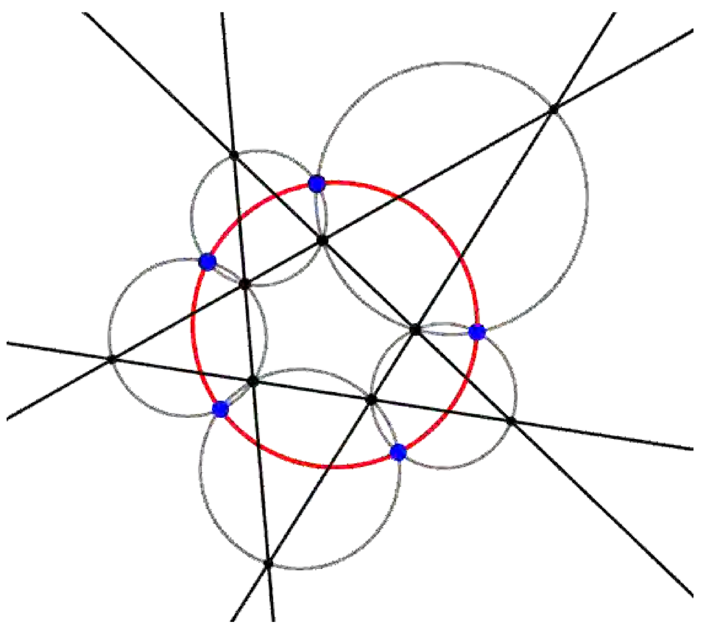
定義圓上任取一點在圓周上移動，其餘四點固定，則根心的軌跡類似於橢圓



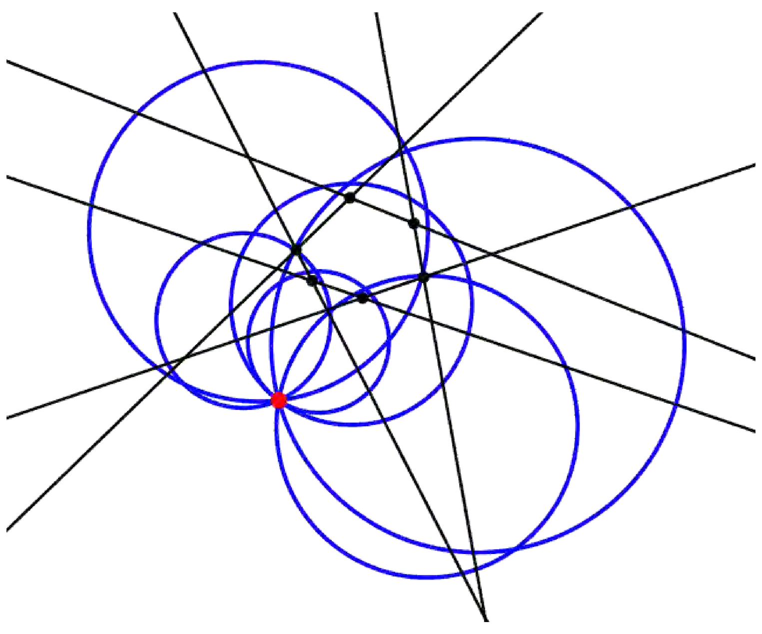
三、推展到n圓(線)(Clifford鏈定理) 尋找共圓與共根心



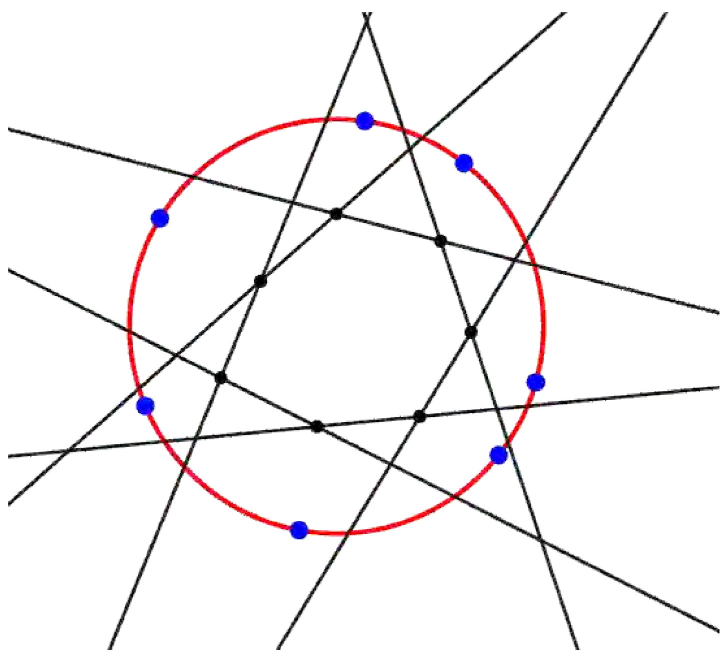
(四線)四圓共點



(五線)五點共圓



(六線)六圓共點



(七線)七點共圓

柒、參考資料

1.《几何瑰宝》：沈文选、杨清桃(2010)、哈爾濱工業大學出版社。
2.《数学的魅力》：沈康身、上海辞书出版社
3.〈Solution〉Nguyen Van Linh,11A2 Math, Highshool for gifted student, Ha Noi University of Science, Vietnam
4.《五点共圆问题与 Clifford 链定理》北京师范大学张英伯，叶彩娟、2007/4