中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050416

鄰升數在不取代與取代下的均值探討

學校名稱：國立苑裡高級中學

作者：	指導老師：
高二 李侑駿 高二 王重諺 高二 鄭羽珊	洪旻楷

關鍵詞：鄰升數、鑲嵌、填數

摘要

本文章之最大鄰升數「升頂值 q 」與「附值點鄰集 $\Omega_n^{p,q}(t)$ 」源於都市計畫遊戲「Tower Bloxx」，再由「相鄰數 $p=4$ 」將 q 提升至 $5=p+1$。

第一部分，研究「鄰升數總和 $S(p,q,\underline{\Omega})$ 」過程中，找出基數覆蓋法、鑲嵌法、通道法、邊角分析法與左右加格法。以矩形鑲嵌拼圖 $\underline{B}_{m\times5}^{4,5}$ 、 $\underline{B}_{5\times n}^{4,5}$ 合併上述方式處理 $\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5}$ ，得到 $S(4,5,m\times n)$ 一般式。

第二部分，定義方格狀點鄰集 $V_{m\times n}^{p}$ ，推廣在 $p=3,\cdots,8$ 、 $q=2,\cdots,p,p+1$ 時的 $S(p,q,\underline{\Omega}_{m\times n}^{p,q})$ 一般式。並利用均值找出「完美填數定理」與「不取代鄰升數總和上界 $\hat{S}(p,q,m\times n)$ 」公式。

第三部分，以 $\Omega_{m\times n}^{p,q}(0)=\underline{\Omega}_{m\times n}^{p,q}$ 處理策略繼續尋找「可取代鄰升數總和 $R(p,q,\Omega)$ 」時，同樣發現中心鑲嵌法，再轉化成「匯流魚鱗 $\{F_{m'\times n'}^{p,q}(t)\}$ 」與「鋪瓦法 $\langle F_i(t_j)\rangle$ 」找出 $\Omega_{m\times n}^{p,q}(h)$ 與 $R(p,q,m\times n)$ 一般式。

第四部分，論述應用方向，並將平面中的 $\underline{J}_{n(p+1)}^{p,q}$ 應用在輪胎面與球面，改裝部分魔術方塊與定義新玩法。在解決球面填數時，額外發現切割五邊形幾項幾何性質。

壹、遊戲介紹和研究動機與定位

一、填數規則：

1. Tower Bloxx 為都市計畫手機遊戲，在 5×5 的方格空地上蓋 1 級樓、2 級樓、3 級樓、4 級樓。除 1 級樓可任意蓋外，蓋高級樓時，旁必須要所有低級樓與之相鄰(共邊)，即 2 級樓旁有 1 級樓； 3 級樓旁有 2 和 1 級樓；4 級樓旁有 3、2 和 1 級樓。每級樓可容納人口數從最少 1 級樓至最高 4 級樓，故此遊戲基本策略是將所有空地蓋滿，並且 4 級樓所占比例最高。
2. 數學填數模式：於 $m\times n$ 方格中填入數字 1、2、3、4 代表樓之等級，因方格最多相鄰格數為 4，故最大數字可以填至 5。與前相同，填大數字時必有已填所有較小數字與之相鄰，故稱所填的數字為**鄰升數**。例：

1	2	3	1
1	4		2
2	3	1	3

→

3	2	3	1
1	4		2
2	3	1	3

白色方格可填入 1、2、3、4，最大鄰升數可填 5。承上，左上角雖已填數字，但其相鄰二格有 1、2，可以取代 1 更替為 3。

二、研究動機與定位：

1. 此遊戲目標為將人口數最大化，代表填入鄰升數總和之上界為最終結果。
2. 我們可以將方格及所填鄰升數視為附值點鄰集，希望可以發展出相鄰格數不必拘束於方格的 4 鄰邊，與鄰升數比 5 更大的填法。
3. 在找出總和最大值後，一併找到數種符合最大值的鄰升數填法，本文章並未羅列所有不同的填法。

4. 處理公式過程，我們使用大量的級數與同餘技巧，再藉由數據分析得到分類結論。
5. 在填數時，以 Excel 內建功能賦予數字顏色，利於觀察與找出可用形式。而本文升頂值可達 $p+1$，亦即可著 $p+1$ 色，且相鄰可同色(相同鄰升數)，所以本文並非討論著色、四色定理等相關問題。搜尋歷屆科展得獎作品後，找出近似研究主題，發現他們並未處理鄰升數相關問題：
   (1) ＜潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密＞、＜蜂窩染色問題的探討＞：討論鑲嵌與少數著色；
   (2) ＜盡可能擁擠＞：著重在填數找相鄰和最小值；
   (3) ＜擋得住的魅力—看你往哪逃＞：使用與點鄰集相同技巧，在討論封閉路徑問題。

貳、研究目的

一、在任意 $m \times n$ 方格中填入鄰升數，並使其總和為最大值。為方便估算，我們一併計算每格之均值(算術平均數、期望值)。

二、由於在填好部分數字後，可以再填其他鄰升數取代先前數字，我們分兩種狀況討論：
1. 每格只填一次，即不取代原先鄰升數；
2. 可在滿足規則下取代已填鄰升數。

三、利用平移方格與點鄰集概念，處理 $p = 3,5,6,7,8$。並求出一般化的公式和定理。

四、找出上述最大值公式的一般式，與滿足總和最大值的鄰升數填法。即求：

$q \le p+1$	總和最大值	均值(領導係數)	鄰升數填法
不取代鄰升數	$S(p,q,m \times n)$	$\overline{S_\infty}(p,q)$	$\underline{\Omega}_{m \times n}^{p,q} = \Omega_{m \times n}^{p,q}(0)$
取代鄰升數	$R(p,q,m \times n)$	$R_{\overline{F}}(p,q)$	$\Omega_{m \times n}^{p,q}(h)$

五、將平面的 $\underline{J}_{n(p+1)}^{p,q}$ 鄰升數填法應用在輪胎面 T^1 與球面 S^2，並改裝部分魔術方塊與定義新玩法。而與 $\underline{\Omega}_{n(S^2)}^{p,q}$ 同區之魔術方塊，可由排列狀況找出符合的調和鄰升數填法 $\underline{H}_{n(S^2)}^{p,q}$。

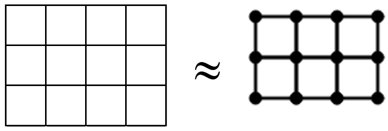
參、研究設備及器材

Microsoft office Excel、GeoGebra、GSP、筆記型電腦、魔術方塊、立體展開圖

肆、名詞解釋與符號定義

一、數學常用符號：
1. 計數，$\#(\text{集合}) =$ 集合元素個數。
2. 整數，$\lfloor x \rfloor =$ 小於或等於 x 的最大整數、$\lceil x \rceil =$ 大於或等於 x 的最小整數。
3. 同餘，$n \equiv_k h$ 即 $n = k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + h$。為方便表示公式整理，以 $m,n \equiv_k i,j$ 代表 $m \equiv_k i, n \equiv_k j$ 與 $n \equiv_k i, m \equiv_k j$。而 i_k 表示 $n \equiv_k i$。

二、相鄰數 p 、點鄰集V_n^p ：



1. V_n^p有 n 個相異點，即$\#(V_n^p)=n$ 。
2. 任意一點$v\in V_n^p$ ，最多只有 p 個點與v相鄰。

可以知道$m\times n$方格為點鄰集$V_{m\times n}^4$ ，將$m\times n$方格(封閉區域、面)與其相鄰格的關係轉換成為：方格→點、相鄰兩格→連線。

三、鄰升數：當相鄰的數字有$1,2,\cdots,k$時，可以將數字填至$k+1$ 。

四、升頂值q ：可填的最大鄰升數。

五、附值點鄰集$\Omega_n^{p,q}(t)=(V_n^p,\text{鄰升數})(t)$

1. $\Omega_n^{p,q}(t)$是在$V_n^{p,q}$的每個點上附加鄰升數，即

$$\omega=\omega(v,u)\in\Omega_n^{p,q}(t)\,,v\in V_n^p,u\in\{1,2,\cdots,q\}$$ 。

2. 不取代附值點鄰集$\underline{\Omega}_n^{p,q}=\Omega_n^{p,q}(0)$ ，即V_n^p中每點只填一次鄰升數。
3. 取代附值點鄰集$\Omega_n^{p,q}(t)$ ，取代在$\Omega_n^{p,q}(t-1)$中填的鄰升數，其中$t\in\mathrm{N}$代表取代次數。
4. 以Ω泛指附值點鄰集$\Omega_n^{p,q}(t)$ 。
5. Ω同區$\Omega'\Leftrightarrow\Omega$和$\Omega'$之點鄰集相同。同區符號為$\Omega\approx\Omega'$ 。

六、鄰升數總和$S(p,q,\Omega_n^{p,q}(t))$、鄰升數均值、鄰升數極限均值

1. $S(p,q,\Omega_n^{p,q}(t))=\sum\limits_{\varpi(v,u)\in\Omega}u$ ，即將$\Omega_n^{p,q}(t)$中每點的鄰升數加總。
2. 不取代鄰升數總和最大值$S(p,q,n)=\max\left\{S(p,q,\underline{\Omega}_n^{p,q})\right\}$，即找到一$\underline{\Omega}_n^{p,q}$使得鄰升數加總為最大值。
3. 取代鄰升數總和最大值$R(p,q,n)=\max\left\{S(p,q,\Omega_n^{p,q}(t))\right\}$。
4. 不取代鄰升數均值$\overline{S}(p,q,n)=\dfrac{S(p,q,n)}{n}$ 、取代鄰升數均值$\overline{R}(p,q,n)=\dfrac{R(p,q,n)}{n}$ 。
5. 不取代鄰升數極限均值$\overline{S_\infty}(p,q)=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}(p,q,n)$ 。

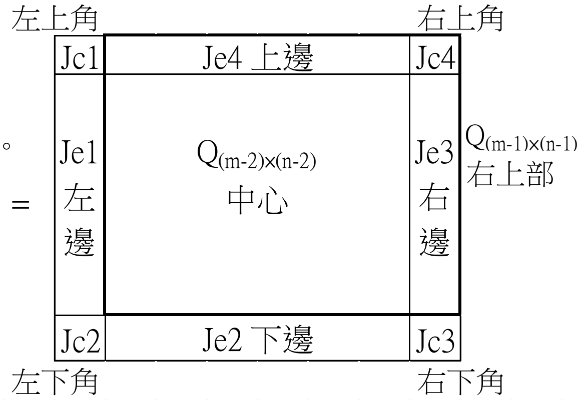
七、方格狀鄰升數總和、均值

1. 方格狀鄰升數指填數於$V_{m\times n}^p$中，即$m\times n$方格的每個點幾乎有都 p 個相鄰數。
2. $S(p,q,m\times n)=\max\left\{S(p,q,\underline{\Omega}_{m\times n}^{p,q})\right\}$ 、$R(p,q,m\times n)=\max\left\{S(p,q,\Omega_{m\times n}^{p,q}(t))\right\}$、
$\overline{S}(p,q,m\times n)=\dfrac{S(p,q,m\times n)}{mn}$ 、$\overline{R}(p,p,m\times n)=\dfrac{R(p,p,m\times n)}{mn}$ 。

八、附值點鄰集填法

1. $\Omega_n^{p,q}(t)$中Ω符號代表區域之意，在討論填數及求最大值時，引入$\Omega=B$ 、C 、F 、H 、J 、P 、Q分別代表基底、環狀、魚鱗、調和、拼圖、完美、矩形填法。
2. n(空間) 表示V_n^p的點落在該空間上。$\Omega_{n(S^2)}^{p,q}$代表 n 個點在球面上填數。
3. $\Omega_{m\times n}^{p,q}=\Omega_{m\times n(\Re^2)}^{p,q}$ ，代表平面上$m\times n$方格填數。

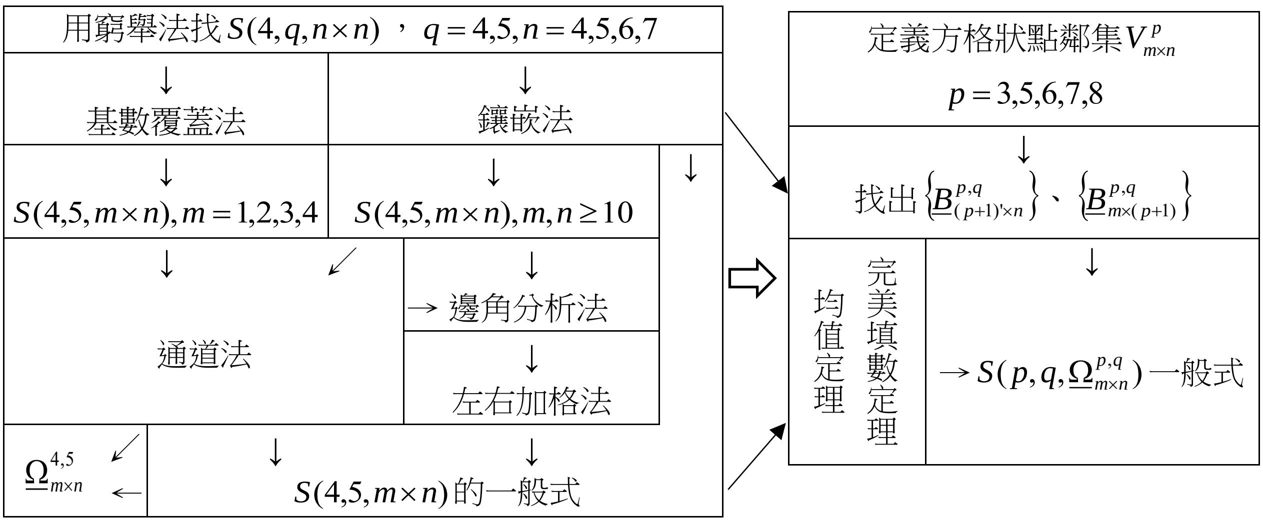
九、 $m\times n$ 方格的中心、邊、角



1. $Q^{p,q}_{(m-1)\times(n-1)}=\Omega^{p,q}_{m\times n}$ 的右上部、 $Q^{p,q}_{(m-2)\times(n-2)}=\Omega^{p,q}_{m\times n}$ 的中心。
2. 取代鄰升數填法順序：
   $Je1$：結束邊左邊、$Je2$：結束邊下邊、
   $Je3$：初始邊右邊、$Je4$：初始邊上邊、
   $Jc1$：左上角、$Jc2$：左下角、$Jc3$：右下角、
   $Jc4$：右上角，而 $Q^{p,q}_{(m-1)\times(n-1)}=Q^{p,q}_{(m-2)\times(n-2)}\cup Je3\cup Jc4\cup Je4$。

伍、研究方法與過程

一、不取代鄰升數總和 $S(4,5,m\times n)$ 一般式　　二、 $S(p,q,m\times n)$ 一般式與填數定理



三、取代鄰升數總和 $R(p,q,m\times n)$ 一般式

1. 嘗試 $R(4,5,m\times n),m,n\geq 10$
2. 找到鑲嵌法、處理策略：斜角填數法、外層分析法
3. 找出 $\Omega^{4,q}_{m\times n}(h)$ ，並得到 $R(4,q,m\times n)$ 的一般式
4. 以匯流魚鱗、與鋪瓦法完成 $R(p,q,m\times n)$

陸、研究結果

本研究分成四部分，第一部分，在不取代鄰升數下，從 $\Omega^{4,q}_{m\times n}$ 中找 $S(4,q,m\times n)$ ，先是得到幾個填數的方法與技巧，並從 $m=1,2,3,4,\cdots$ ， $n\in\mathrm{N}$ ，逐步討論得到 $S(4,5,m\times n)$ 的一般式與對應的 $\{\Omega^{4,5}_{m\times n}\}$。第二部分利用點鄰集與 $m\times n$ 方格平移的技巧，推廣 $p=3,4,5,6,7,8$ 且 $q=2,3,\cdots,p,p+1$ 時，得到 $S(p,q,m\times n)$ 公式中 $S(p,q,\Omega^{p,q}_{m\times n})=\overline{S_\infty}(p,q)mn-c_1m-c_2n+k(m,n)$ 的係數與 $\{B^{p,q}_{(p+1)'\times n}\}$、$\{B^{p,q}_{m\times(p+1)}\}$。並給定理找出總和上界 $\hat{S}(p,q,m\times n)$ 與最佳填法。

第三部分，換成取代鄰升數，直接從 $p=4$ 、 $m,n\geq 10$ 開始討論，發現新舊方法與技巧，逐步討論得到 $R(4,q,m\times n)$ 的一般式與對應的 $\{\Omega^{4,q}_{m\times n}(h)\}$。再處理 $p=5,6,7,8$ ，得到廣泛的

處理技巧與 $R(p,q,m\times n)=R_{\overline{F}}(p,q)mn-c_1m-c_2n+k(m,n)$ 中的係數與鋪瓦鑲嵌拼圖 $\{\overline{F}_k^{p,q}\}$。第四部分，給一應用實例，並試將鑲嵌法應用在與平面相仿的曲面上，得到一些有趣的結果。

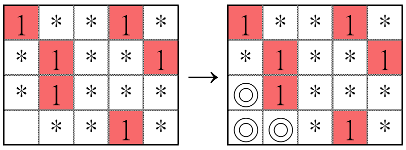
首先在填鄰升數與找總和最大值時，我們所追求的目標是加總，而並非數字在方格上呈現的圖形與相異排列方式，所以很多經由鏡射與旋轉後得到類似的圖像結果不會逐一論述。但這不表示得到總和最大值時，不知道怎麼填數，在第一部分與第三部分尋找公式的過程已經呈現如何從總和數值查表回推 $\{\Omega_{m\times n}^{p,q}(h)\}$。

一、不取代填數與平鋪鑲嵌的結合、$S(4,5,m\times n)$ 一般式及填數方式

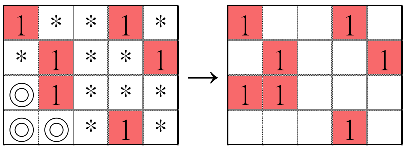
(一)基數覆蓋法

若要符合填數規則，我們必須從鄰升數 1，開始填起；確認所有未填方格相鄰至少 1 個鄰升數 1 後，才能再填鄰升數 2。依此類推，最後再填至升頂值 q。因從鄰升數 1 開始依序填數覆蓋方格，我們將此填數方法稱之為「基數覆蓋法」。以下舉一填數的過程說明：

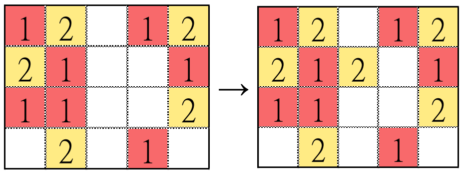
Step1 任意填 1，將被 1 覆蓋的方格標記 *，找未標記與相鄰方格標記◎。



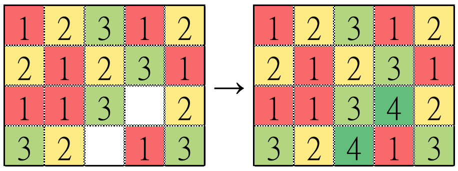
Step2 知標記◎的方格至少有一格要填 1。



Step3 同理填 2。



Step4 完成填數。

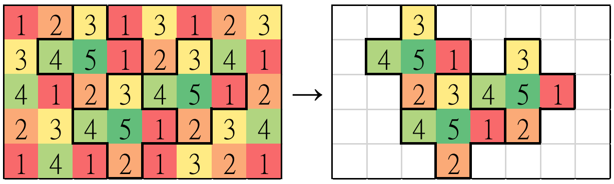


■

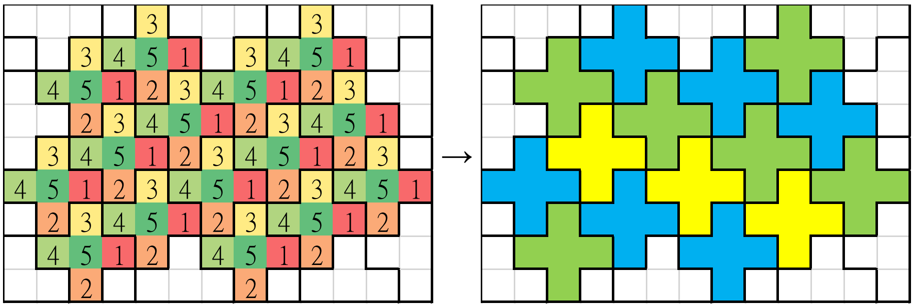
(二)鑲嵌法

接著我們發現鄰升數會有規律的重複出現的例子：

Step1 由升頂值 5 所排出的十字形沿著同方向複製。

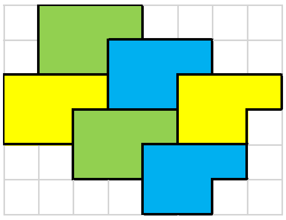
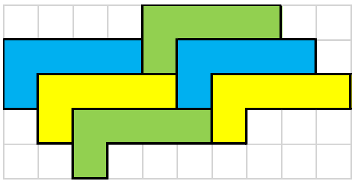


Step2 將範圍擴大，出現了平鋪鑲嵌形式。

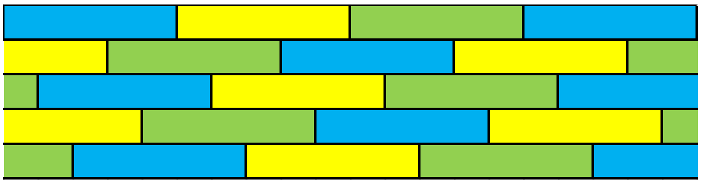


我們將這有趣的發現稱之為「鑲嵌法」。值得注意的是，既然填數會有平面鑲嵌的形式，那麼我們應該有比上面「十字形鑲嵌」更快複製填數的方式。以下舉三例，並用第三例發展出鑲嵌拼圖 $\underline{J}_{5\times5}^{4,5}$ 。

$\boxed{\text{Step1}}$截出包含五格的多邊形，並設法使其鑲嵌。發現在複製的過程與十字形鑲嵌差不多。

 、 

$\boxed{\text{Step2}}$「一字形鑲嵌」只需重複列。



$\boxed{\text{Step3}}$設法填數，意外發現任何填數方式皆可滿足鄰升數規則。

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3

1	3	5	2	4	1	3	5	2	4
5	2	4	1	3	5	2	4	1	3
4	1	3	5	2	4	1	3	5	2
3	5	2	4	1	3	5	2	4	1
2	4	1	3	5	2	4	1	3	5

$\boxed{\text{Step4}}$擷取 5×5“相同”鑲嵌拼圖 $\underline{J}_{5\times5}^{4,5}$ 。其數字排列方式恰巧為拉丁方陣(需 $p+1$ 為質數)。

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

4	5	1	2	3
1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5
1	3	5	2	4

■

$\underline{J}_{5\times5}^{4,5}$ 並非 $S(4,5,m\times n)$ 最後填數結果，不過我們可以預期在 $\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5}$ 中，約略會出現 $\left\lfloor \frac{m}{5} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ 個 $\underline{J}_{5\times5}^{4,5}$ ，計算 $\bar{S}(4,5,\underline{J}_{5\times5}^{4,5})=3$ ，這表示 $S(4,5,m\times n)=3mn-c, c\geq 0$ 。接著將處理藉由鑲嵌法所製成的 $\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5}$ 。

由於上面發展鑲嵌拼圖時，從鏡射、旋轉後可得到相同的填數方式，我們不免好奇最多有幾類不同的鑲嵌拼圖 $\underline{J}_{5\times5}^{4,5}$ 。從環狀排列、左右鏡射、上下鏡射，可知 $\#\left(\left\{\underline{J}_{5\times5}^{4,5}\right\}\right)=\frac{5!}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=6$ 。因為 $\#\left(\left\{\underline{J}_{5\times5}^{4,5}\right\}\right)=6$ ，當複製大量 $\underline{J}_{5\times5}^{4,5}$ 後，我們處理 $S(4,5,m\times n)$ 的選擇並不多，算是一項優點。不過由於鄰升數 5 顯然不能出現在邊和角，鄰升數 4、3 也需要滿足填數規則才能出現在邊或角。

(三)邊角分析法

以鑲嵌拼圖 $\underline{J}_{5\times5}^{4,5}$ 製作 $\underline{J}_{m\times n}^{4,5}$ ，修改不符規則鄰升數至符合填數規則的 $\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5}$ ，由於需修改的鄰升數多位於邊角，故稱「邊角分析法」。以求 $S(4,5,6\times10)$ 為例：

$\boxed{\text{Step1}}$ 選一 $J^{4,5}_{5\times5}$ 製作 $J^{4,5}_{6\times(10+4)}$ (或 $J^{4,5}_{(10+4)\times6}$)。

$$J^{4,5}_{5\times5}=\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&2&3&4&5\\ 3&4&5&1&2\\ 5&1&2&3&4\\ 2&3&4&5&1\\ 4&5&1&2&3\\ \hline\end{array}\rightarrow J^{4,5}_{6\times(10+4)}=\begin{array}{|cccccccccccccc|}\hline 1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&3&4\\ 3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1\\ 5&1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&3\\ 2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&3&4&5\\ 4&5&1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2\\ 1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&3&4\\ \hline\end{array}$$

$\boxed{\text{Step2}}$ 有 5 種擷取法。

$$J^{4,5}_{6\times10}=\begin{array}{|cccccccccc|}\hline 1&2&3&4&5&1&2&3&4&5\\ 3&4&5&1&2&3&4&5&1&2\\ 5&1&2&3&4&5&1&2&3&4\\ 2&3&4&5&1&2&3&4&5&1\\ 4&5&1&2&3&4&5&1&2&3\\ 1&2&3&4&5&1&2&3&4&5\\ \hline\end{array},\cdots,\text{或}\begin{array}{|cccccccccc|}\hline 5&1&2&3&4&5&1&2&3&4\\ 2&3&4&5&1&2&3&4&5&1\\ 4&5&1&2&3&4&5&1&2&3\\ 1&2&3&4&5&1&2&3&4&5\\ 3&4&5&1&2&3&4&5&1&2\\ 5&1&2&3&4&5&1&2&3&4\\ \hline\end{array}$$

$\boxed{\text{Step3}}$ 對任一從 $J^{4,5}_{6\times(10+4)}$ 擷取的 $J^{4,5}_{6\times10}$ 中，刪除不符填數規則的鄰升數，並重新填上數字。

$$\begin{array}{|cccccccccc|}\hline 1&2&&&&1&2&&&\\ &&&1&2&3&4&&1&2\\ &1&2&3&4&5&1&2&3&4\\ 2&3&4&5&1&2&3&4&5&1\\ &&1&2&3&4&5&1&2&3\\ 1&2&3&&&1&2&3&&\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|cccccccccc|}\hline 1&2&3&1&3&1&2&3&1&3\\ 3&4&5&1&2&3&4&5&1&2\\ 2&1&2&3&4&5&1&2&3&4\\ 2&3&4&5&1&2&3&4&5&1\\ 1&4&1&2&3&4&5&1&2&3\\ 1&2&3&1&2&1&2&3&4&1\\ \hline\end{array}$$

$\boxed{\text{Step4}}$ 最後修改部分鄰升數，使得 $S(4,5,\Omega^{4,5}_{6\times10})$ 更大。以下 $S(4,5,\Omega^{4,5}_{6\times10})<S(4,5,6\times10)=157$。

$$\overset{6\text{x}10\qquad S=153}{\begin{array}{|cccccccccc|}\hline 1&2&3&1&3&1&2&3&1&3\\ 3&4&5&1&2&3&4&5&1&2\\ 2&1&2&3&4&5&1&2&3&4\\ 2&3&4&5&1&2&3&4&5&1\\ 1&4&1&2&3&4&5&1&2&3\\ 1&2&3&1&2&1&2&3&4&1\\ \hline\end{array}}\rightarrow\Omega^{4,5}_{6\times10}=\overset{6\text{x}10\qquad S=156}{\begin{array}{|cccccccccc|}\hline 3&1&2&4&3&1&2&3&1&3\\ 2&3&4&1&2&3&4&5&1&2\\ 1&1&2&3&4&5&1&2&3&4\\ 2&3&4&5&1&2&3&4&5&1\\ 3&4&1&2&3&4&5&1&2&3\\ 1&2&3&4&1&1&2&3&4&1\\ \hline\end{array}}$$

■

從上例發現一個實質的問題，有 6 種 $J^{4,5}_{5\times5}$、2 種 $J^{4,5}_{6\times(10+4)}$、5 種 $J^{4,5}_{6\times10}$，要處理 $6\times2\times5=60$ 個 $\Omega^{4,5}_{6\times10}$，這代表目前的處理方式並不能快速找出 $S(4,5,m\times n)$。

不過在處理數例後，我們觀察到邊角分析法依然有一個好用的結果：每個角落附近的重新填數方式只有 5 種，而且當 $m,n\ge9$ 時皆可如法炮製。同樣的，再分析邊是否有類似的結果？答案是肯定的，而且當 $m,n\ge15$ 後，每個邊幾乎只有 2 種填法。這意味著我們只要再找到更有效率處理邊角的填數方式，即可找出 $S(4,5,m\times n)$。

現在先來解決 $S(4,5,1\times n)$，再說明如何應用在下一個方法。

(四) $S(4,5,1\times n)$、通道法

$\boxed{\text{公式}}$：$S(4,5,1\times n)=S(2,3,1\times n)=2n-1,\forall n\in\mathrm{N}$。

結論：

1. 當 $n\equiv_3 1$ 時，令 $n=3k+1,k\in\mathrm{N}$，鄰升數填法為：$\underbrace{(1**)\cdots(1**)}_{k\text{個}(1**)}1$，其中任兩個相鄰 $**$ 可填 2、3 或 3、2。例：$n=10$，$\begin{array}{|cccccccccc|}\hline 1&2&3&1&2&3&1&2&3&1\\ \hline\end{array}$。
2. 當 $n\equiv_3 2$ 時，令 $n=3k+2,k\in\mathrm{N}$，鄰升數填法為：$2\underbrace{(1**)\cdots(1**)}_{k\text{個}(1**)}1$ 或 $\underbrace{(1**)\cdots(1**)}_{k\text{個}(1**)}12$。

例：$n=11$，2 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 或 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2。

3. 當 $n\equiv_3 0$ 時，令 $n=3k, k\in \mathrm{N}$，鄰升數填法為：$2\underbrace{(1**)\cdots(1**)}_{(k-1)個(1**)}12$。

例：$n=12$，2 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2。■

重新檢視 $S(2,3,1\times n)=\dfrac{1+2+3}{3}\times n-1=2n-1$，這代表 $\Omega^{2,3}_{1\times n}$ 中的填數方式可改為 $\Omega^{2,3}_{1\times n}(n-1)$：$1\underbrace{2\cdots2}_{(n-1)個2}$ 或 $\underbrace{2\cdots2}_{(n-1)個2}1$。除了方便計算總和外，更加提升了填數的效率。

例：$n=10$，1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 $\rightarrow$ 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2。

當數個鄰升數 1、2、3 可一字排開，可用上面方式。若數個鄰升數 $p-1$、p、$p+1$ 可一字排開，是否依然有快速填數與快速計算總和之法呢？

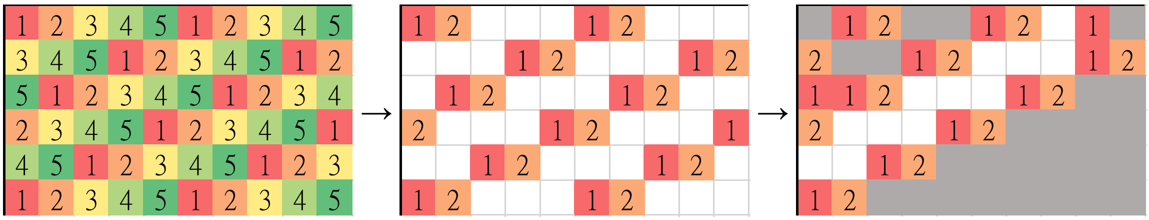
公式：已知依通道長(通道格數)ℓ，令通道上鄰升數總和最大值 L。

1.若通道可填上 $p-1$、p、$p+1$，稱 $(p-1)-(p+1)$ 通道，則 $L=\ell p-1$。

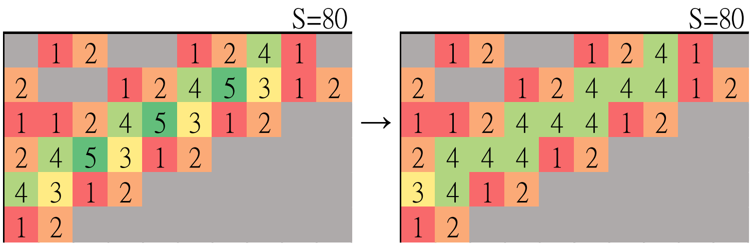
2.若通道可填上 $p-1$、p，稱 $(p-1)-p$ 通道，則 $L=\begin{cases}\ell(3p-1)/3, & \ell\equiv_3 0\\ \ell(3p-1)/3-2/3, & \ell\equiv_3 1\\ \ell(3p-1)/3-1/3, & \ell\equiv_3 2\end{cases}$。

在邊角分析法中，必須修改邊與角的鄰升數，並且要花時間在微調總和。在處理大量例子後，常常需要修改鄰升數 3、4、5 的排列順序，才能使總和達到最大值。下面我們給一例說明如何找出通道法。

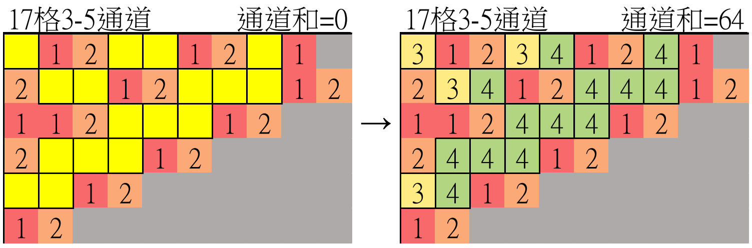
Step1 邊角分析法處理左上角，直接刪掉鄰升數 3、4、5，再將左上角用基數覆蓋法填上鄰升數 1、2，忽略灰色區域填法。



Step2 方格裡面可填數個鄰升數 3、4、5，並且可改為 $3\underbrace{4\cdots4}_{11個4}$。



Step3 將黃色方格稱為 3-5 通道。此處有 4 條 3-5 通道。而 $64=17\times4-4$。



■

將鑲嵌拼圖 $\underline{J}^{4,5}_{5\times5}$ 製作的 $\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n}$ 中的鄰升數 3、4、5 刪去，再用基數覆蓋法製作 3-5 通道的過程稱為「通道法」。有了通道法的輔助，邊角分析法便有較佳的效率。

在上例的通道總和中，發現通道的數量(條數)與通道的格數會影響 $S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n})$，接下來透過處理 $S(4,5,m\times n),m=2,3,4$，得到新方法處理 $S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n})$ 一般式。

(五) $S(4,5,m\times n),m=2,3,4$

$\boxed{\text{公式}}$：$S(4,5,2\times n)=S(3,4,2\times n)=\begin{cases}5n-3, & n\equiv_2 0\\ 5n-2, & n\equiv_2 1\end{cases},\forall n\in \mathrm{N}$。

$\boxed{\text{公式}}$：$S(4,5,3\times n)=S(4,4,3\times n)$,$n\in \mathrm{N}-\{4,7\}$、

$$S(4,5,3\times n)=\begin{cases}\dfrac{23n-8}{3}=28, n=4\\ \dfrac{23n-5}{3}=52, n=7\end{cases}；S(4,4,3\times n)=\begin{cases}(31n-16)/4, & n\equiv_4 0\\ (31n-11)/4, & n\equiv_4 1\\ (31n-14)/4, & n\equiv_4 2\\ (31n-13)/4, & n\equiv_4 3\end{cases},n\in \mathrm{N}。$$

$\boxed{\text{公式}}$：$S(4,5,4\times n)=\begin{cases}(32n-12)/3, n\equiv_3 0\\ (32n-11)/3, n\equiv_3 1\\ (32n-19)/3, n\equiv_3 2\end{cases},n\in \mathrm{N}-\{2,5\}$；$S(4,5,4\times5)=49$。

以下說明在推導 $S(4,5,4\times n)$ 過程中得到的想法與技巧：

令鑲嵌拼圖 $\underline{B}^{4,2}_{\uparrow 4\times3}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 2 & 1\\ \hline 1 & & \\ \hline & & 2\\ \hline 2 & 1 & \\ \hline\end{array}$、$\underline{B}^{4,2}_{\downarrow 4\times3}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & \\ \hline & & 2\\ \hline 1 & & \\ \hline & 2 & 1\\ \hline\end{array}$。

從 $\underline{B}^{4,2}_{4\times6}$ 開始，發現長通道自我複製，n 三次一循環。

4x6 S=19

1	1	2	1	2	
2					1
		1	2		
1	2			1	2

→ 4x7 左+1格 S=23

2		1	2	1	2	
1	2					1
+1			1	2		
2	1	2			1	2

→ 4x8 左+2格 S=27

1	2		1	2	1	2	
2	1	2					1
+2	+1			1	2		
1	2	1	2			1	2

→ 4x9 左+3格 S=28

1	2			1	2	1	2	
+4	+3	1	2					1
2	+2	+1			1	2		
1	1	2	1	2			1	2

→ 4x10 左+4格 S=32

2	1	2			1	2	1	2	
+5	+4	+3	1	2					1
1	2	+2	+1			1	2		
2		1	2	1	2			1	2

→ ⋯

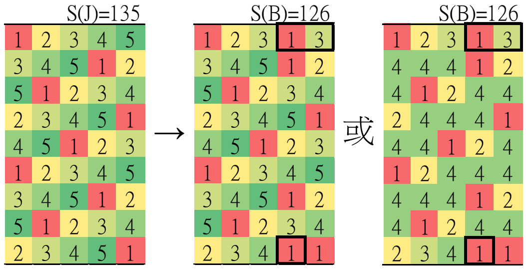
從上面得到找到一個好的基數鑲嵌拼圖 $\underline{B}^{4,2}_{m\times n}$，再設法製造長通道會是一項有用的策略。不難看出在往左增加格數(行數)和往右增加格數，皆可能出現好的 $\underline{B}^{4,2}_{4\times(n+\text{格數})}$。

(六)左右加格法

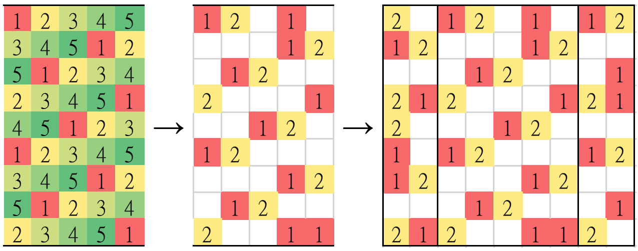
前述所有技巧可以用 $\{\underline{B}^{4,2}_{m\times n}\}$ 求 $\{\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n}\}$。當尋找 $S(4,5,m\times n)$,$m=4,5,\cdots,12$ 公式時，我們發現可以找任意的 $\underline{B}^{4,2}_{m\times5}$，以鑲嵌法、基數覆蓋法、邊角分析法製作 $\underline{B}^{4,2}_{m\times(\text{左格數}+5)}$、$\underline{B}^{4,2}_{m\times(5+\text{右格數})}$，再用通道法求 $\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times(\text{左格數}+5)}$、$\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times(5+\text{右格數})}$。最後計算每個增加格數後總和的差值，找出在左右增加幾格時，會得到最大值 $S(4,5,m\times n)$。

用找 $S(4,5,9\times n)$ 公式為例，直接說明左右加格法。以下用 $m=9$ ，避免符號混淆。

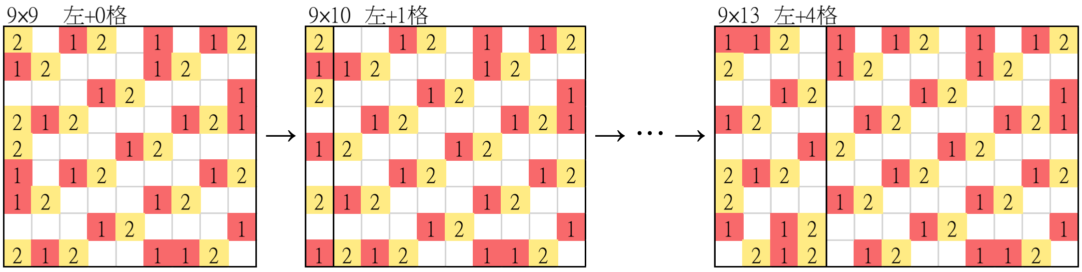
$\boxed{\text{Step1}}$ 以 $\underline{J}^{4,5}_{m\times 5}$ 製作上下邊滿足填數規則的基數鑲嵌拼圖 $\underline{B}^{4,5}_{m\times 5}$ ，令 $S(B)=S(4,5,\underline{B}^{4,5}_{m\times 5})$ 。



$\boxed{\text{Step2}}$ 以 $\underline{J}^{4,5}_{m\times 5}$ 製作基數鑲嵌拼圖 $\underline{B}^{4,2}_{m\times 9}=\underline{B}^{4,2}_{m\times(2+5+2)}$ 。

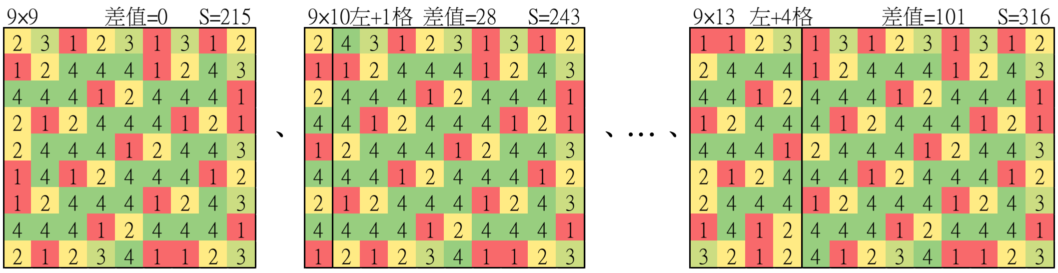


$\boxed{\text{Step3}}$ 以 $\underline{B}^{4,2}_{m\times 9}$ 往左+1 格、⋯、+4 格找 $\underline{B}^{4,2}_{m\times(1+9)}$ 、⋯、 $\underline{B}^{4,2}_{m\times(4+9)}$ 。



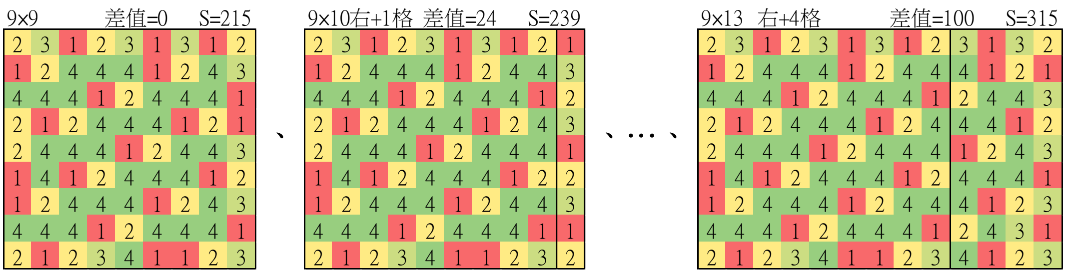
$\boxed{\text{Step4}}$ 以通道法完成 $\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times 9}$ 、 $\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times(1+9)}$ 、⋯、 $\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times(4+9)}$ 。

$$\text{差值}=S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times(l+9)})-S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times 9}),l=0,1,2,3,4$$



$\boxed{\text{Step5}}$ 同理，以 $\underline{B}^{4,2}_{m\times 9}$ 往右+1 格、⋯、+4 格完成 $\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times 9}$ 、 $\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times(9+1)}$ 、⋯、 $\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times(9+4)}$ 。

$$\text{差值}=S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times(9+r)})-S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times 9}),r=0,1,2,3,4$$

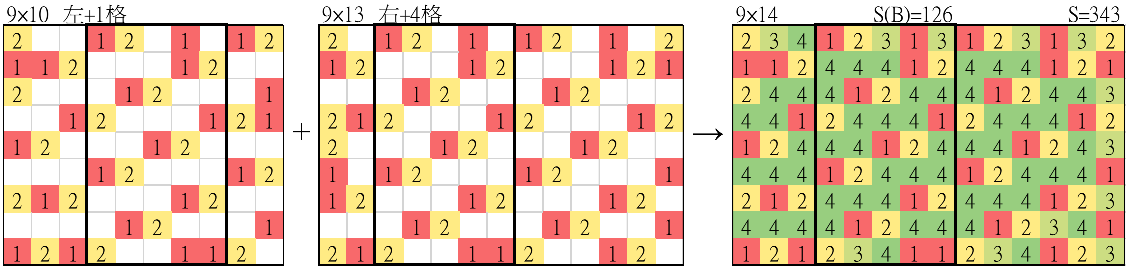


Step6 製作增加格數 $l+r$ 與差值和對照表，以 $n=14$ 為例，知道在左+1 格和右+4 格可得

對照表	右+格	0	1	2	3	4	總+格	最大差值和		n	mod5	S=
左+格	差值和	0	24	51	76	100	+3	79		12	2	294
0	0	0	24	51	76	100	+4	104		13	3	319
1	28	28	52	79	104	128	+5	128		14	4	343
2	51	51	75	102	127	151	+6	154		15	0	369
3	77	77	101	128	153	177	+7	178		16	1	393
4	101	101	125	152	177	201	+8	205		17	2	420
5	126	126	150	177	202	226	+9	230		18	3	445

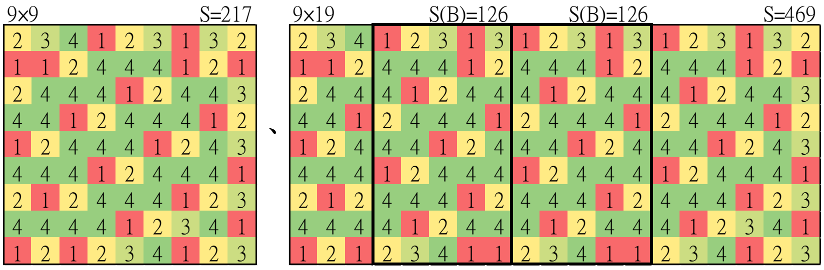
$S(4,5,9\times 14)=343$ 。

Step7 反推 $\{\underline{\Omega}_{m\times 14}^{4,5}\}$，這裡找 $\underline{B}_{m\times(1+9)}^{4,2}$ 和 $\underline{B}_{m\times(9+4)}^{4,2}$ 合併的 $\underline{\Omega}_{m\times(1+9+4)}^{4,5}$ 。



Step8 插入或刪除 $\underline{B}_{m\times 5}^{4,5}$ 得 $S(4,5,m\times(14+5k)), k=-1,0,1,2,\cdots$ 。

$\{\underline{\Omega}_{m\times(1+9+5k+4)}^{4,5}\}=\{$



$, \cdots \}$

■

藉由上述方式，計算

$S(4,5,\underline{B}_{m\times 5}^{4,5})=(1+2+3+4+5)(m-2)+(1+2+3+1+3)+(1+2+3+4+1)=15m-9$ ，

可以求出 $S(4,5,m\times n)=3mn-9\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor+f(m)$ ，$-9\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor$ 中的 9 是從 $\underline{J}_{m\times 5}^{4,5}$ 修整上下邊至 $\underline{B}_{m\times 5}^{4,5}$ 少去的鄰升數總和。只要找出 $f(m)$ 的關係式，即解決 $S(4,5,m\times n)$ 。

(七) $S(4,5,m\times n)$ 一般式

公式：$S(4,5,m\times n)=\begin{cases} S(4,5,\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5}), \text{當} n\ge m\ge 5 \text{且} (m,n)\notin CT \\ S(4,5,\underline{\Omega}_{n\times m}^{4,5}), \text{當} (m,n)\in CT \end{cases}$ ，$m,n\in\mathbb{N}$;

$S(4,5,\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5})=3mn-10\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor-9\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor+k(m,n)$ ，$m,n\ge 5$ 且 $(m,n)\notin\{(11,5),(12,5)\}$ 。

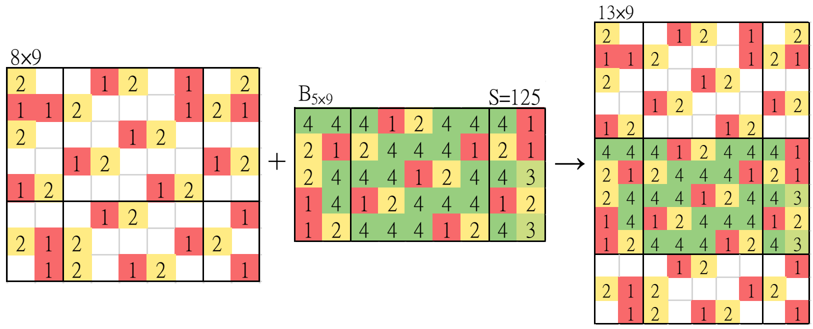
其中 $\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5}$ 為左右加格法中，滿足 $S(4,5,\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5})$ 為最大值之填數結果；$CT=\{(m,n)\}$
$=\{(5,9),(5,10),(5,14),(6,7),(6,10),(6,11),(7,9),(7,11)\}\cup\{(5k+3,5k+l)\mid k\in\mathbb{N}, l=4,6,11\}$
$\cup\{(5k+4,5k+6)\mid k\in\mathbb{N}\}$ 。

$k(m,n)$ 對照表		$n\equiv_5 0$	$n\equiv_5 1$	$n\equiv_5 2$	$n\equiv_5 3$	$n\equiv_5 4$		$n\equiv_5 0$	$n\equiv_5 1$	$n\equiv_5 2$	$n\equiv_5 3$	$n\equiv_5 4$
$m\ge 8$	$m\equiv_5 0$	9	7	5	3	1	$m=5$	7	5	3	2	-1
	$m\equiv_5 1$	7	6	3	3	0	$m=6$	5	4	2	0	-2
	$m\equiv_5 2$	5	3	1	0	-2	$m=7$	3	3	0	-1	-3
	$m\equiv_5 3$	2	0	-1	-4	-5						
	$m\equiv_5 4$	1	-2	-2	-4	-7						

說明：

從 $m=8,13$ 中，發現同於插入或刪除 $\underline{B}_{m\times5}^{4,5}$ 的方式，只是這次變成 $\underline{B}_{5\times n}^{4,5}$ 。

觀察 $\underline{B}_{13\times9}^{4,2}$ 與 $\underline{B}_{8\times9}^{4,2}$ ，找到 $\underline{B}_{5\times9}^{4,5}$ 。



而 $S(4,5,\underline{B}_{5\times9}^{4,5})=15\times(9-2)+10+10=15\times9-10$ ，同於 $S(4,5,\underline{B}_{m\times5}^{4,5})=15m-9$ 之技巧，順利得到 $S(4,5,\underline{B}_{5\times n}^{4,5})=15\times n-10$ 。

令 $S(4,5,\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5})=3mn-10\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor-9\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor+k(m,n)$ ，將 $m=5,6,\cdots,12$ 的左右加格法結論代入求 $k(m,n)$ 。逐一討論 $m,n\le11$ 後，知 $m,n\ge5$ 且 $(m,n)\notin\{(11,5),(12,5)\}$ ， $m,n\in\mathrm{N}$ 符合公式。比較 $\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5}$ 與 $\underline{\Omega}_{n\times m}^{4,5}$ ，知當 $\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor\ge\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor+3$ 時， $S(4,5,\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5})\ge S(4,5,\underline{\Omega}_{n\times m}^{4,5})$ 。

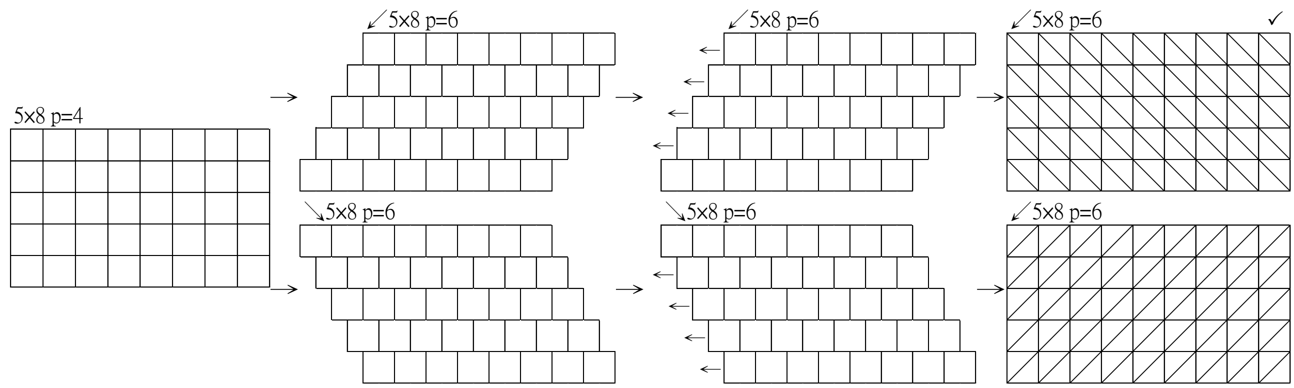
由於考慮 $m\le n$ ，選擇 $S(4,5,m\times n)=\max\{S(4,5,\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5}),S(4,5,\underline{\Omega}_{n\times m}^{4,5})\}$ ，從 $\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor+2$ 中找 $S(4,5,m\times n)=S(4,5,\underline{\Omega}_{n\times m}^{4,5})$ 的特例。令 $S(4,5,\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5})<S(4,5,\underline{\Omega}_{n\times m}^{4,5})$ ，知 $(m,n)\in CT$ 時， $S(4,5,m\times n)=S(4,5,\underline{\Omega}_{n\times m}^{4,5})$ 。■

二、方格狀點鄰集 $V_{m\times n}^{p}$ 、 $S(p,q,m\times n)$ 一般式的係數與填數定理

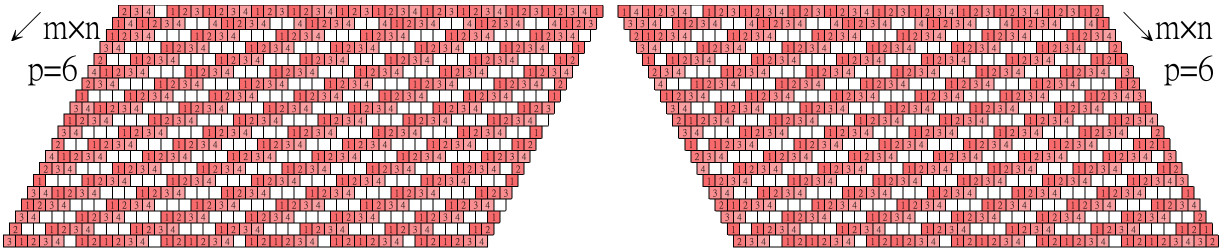
(一)方格狀點鄰集 $V_{m\times n}^{p}$ 的定義， $p=3,5,6,7,8$

在第一部分，我們於 $m\times n$ 方格完成 $p=4$ 不取代的一般式，接下來依序處理 $p=6$ 、8、3、5、7。為了繼續使用 $m\times n$ 方格填數，且希望於 Excel 中方便操作，將以 Excel 格線表示每方格相鄰的關係，並找出要使用的點鄰集 $V_{m\times n}^{p}$ 。

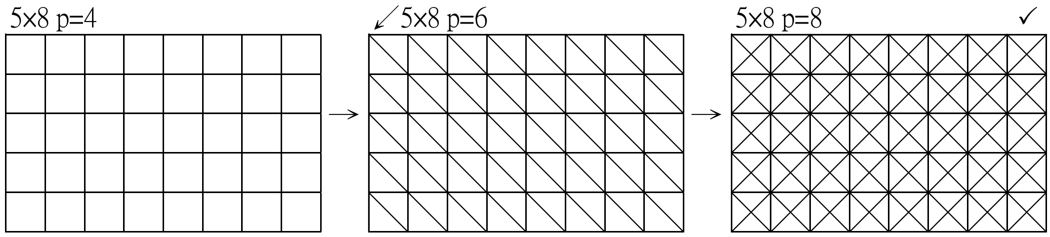
Step1 ($p=6$)將每列水平移動半格，增加相鄰格數，再復原成矩形。斜線方向代表相鄰方格關係，會有兩種平移方式：↙ $m\times n$ 、↘ $m\times n$ 。



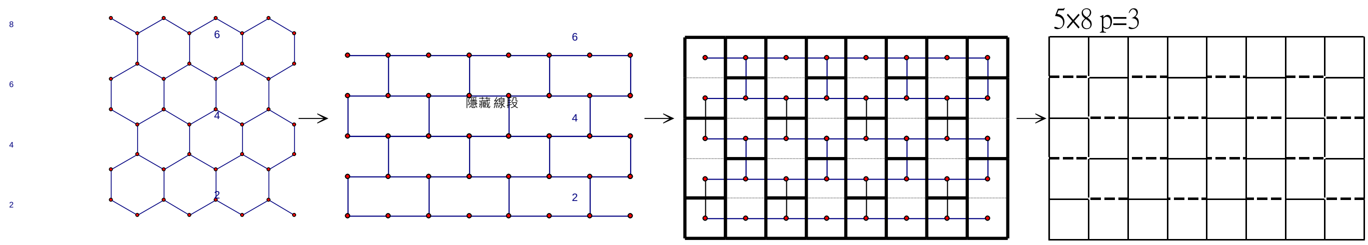
Step2($p=6$)考慮 $p=4$ 時習慣的通道方向，通道的長度要長(相對通道條數少)。在不考慮角落填數之下， $p=6$ 時，↙ $m\times n$ 比↘ $m\times n$ 佳。



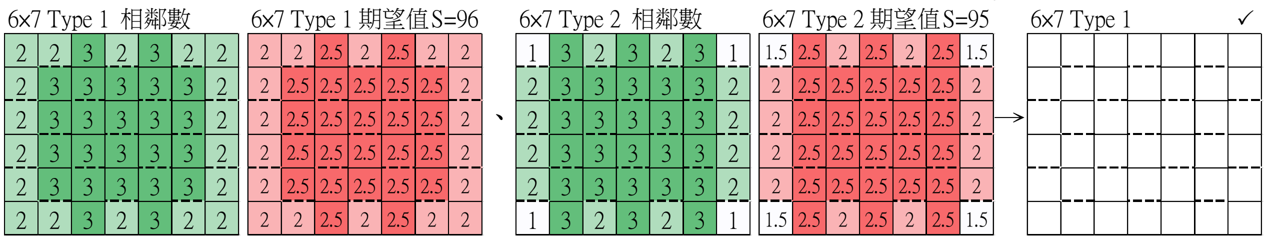
Step3($p=8$) 仿 $p=6$ 時，斜線方向代表相鄰方格關係，將右上格、左下格一併納入。



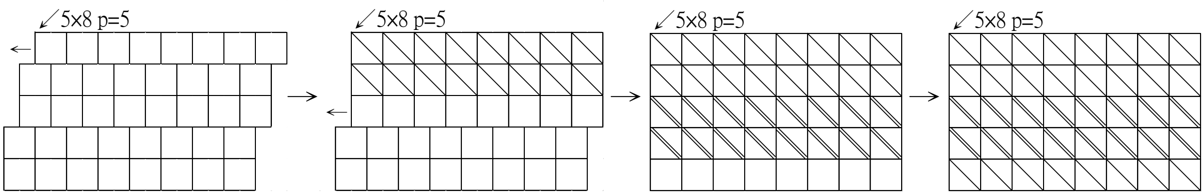
Step4($p=3$)在繪製三角形 $4\times N^2$ 多面體的點鄰集時，發現同樣可以調整至矩形方格，再將不相鄰的邊以虛線表示。



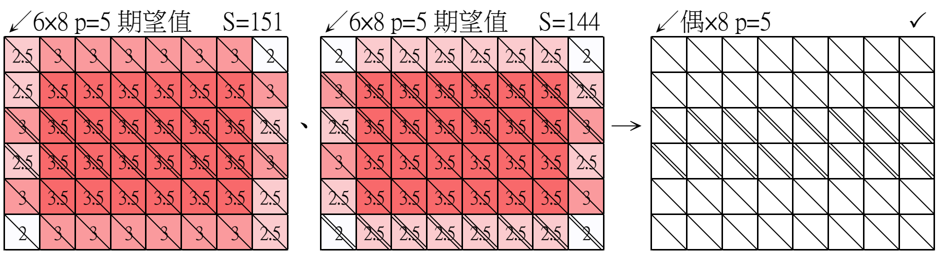
Step5($p=3$)在 m 、 n 為奇偶時，取每方格相鄰數相對高(期望值總和大)的點鄰集。

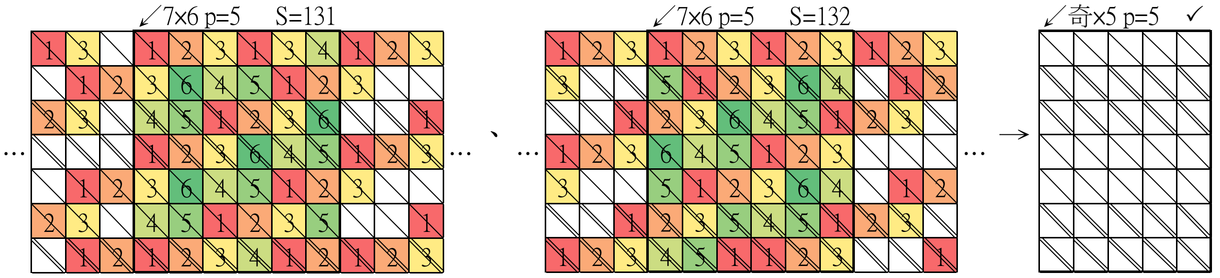


Step6($p=5$)仿 $p=6$ 列平移，在 $p=5$ 時，每兩列水平移動半格，相同斜線代表兩方格有關係、不同斜線代表無關係。為方便以後填數辨識，每格皆有斜線。

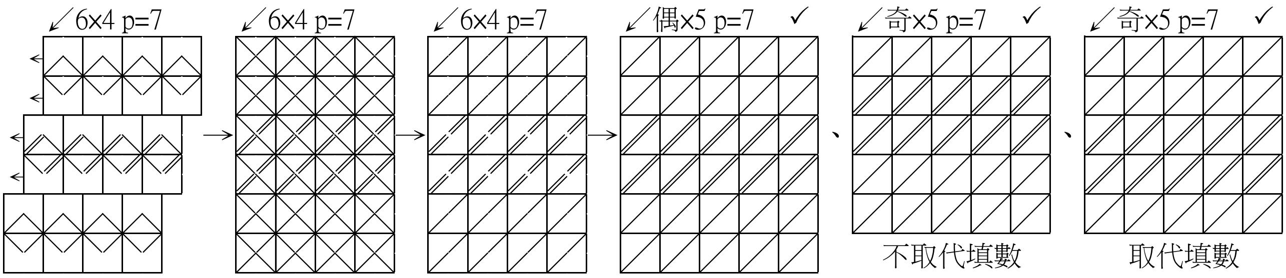


Step7($p=5$) m 為偶數取期望值總和較大者； m 為奇數取 $S(5,6,\underline{B}_{m\times 6}^{5,6})$ 較大者。





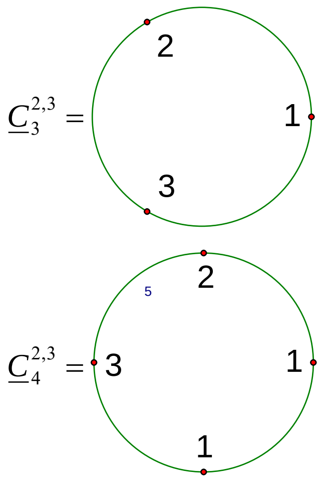
Step8 ($p=7$) 使用 $p=5$ 結果，並加入 $p=8$ 相鄰格想法。因 Excel 單格內無法使用兩種不同斜線，而每格都有左上右下斜線(╲)，故省略只顯示右上左下斜線(╱)。



■

(二)無差別完美填數定理

分析完 $V_{m\times n}^{p}$ 後，在填數過程中，我們知到中心 $(m-2)\times(n-2)$ 方格的相鄰數都是 p ，先推導兩個定理，再分析 $S(p,q,\Omega_{m\times n}^{p,q})$ 。



不浪費的填數其意代表：

<u>盡可能使大鄰升數旁的小鄰升數各只有一個</u>。

定理： $S(p,q,n)=\dfrac{q(2p-q+3)}{2}\times\left\lfloor\dfrac{n}{p+1}\right\rfloor+S_k$ ， $S_k=\dfrac{k(k+1)}{2},k<q$ 、

$S_k=\dfrac{q(2k-q+1)}{2},k\geq q$ 。其中 $k=n-(p+1)\left\lfloor\dfrac{n}{p+1}\right\rfloor$ 。

證明：

令 $a=\left\lfloor\dfrac{n}{p+1}\right\rfloor$ ，即 $n\div(p+1)$ 之商數，餘數 $k=n-(p+1)a<p+1$ 。

$\underline{P}_n^{p,q}$ 為完美填法，意即 $n=(p+1)a+k$ 個鄰升數的填法為：

Step1 先配予鄰升數 1、2、⋯、 $q-1$ 、 q 分別有 a 、 a 、⋯、 a 、 $a((p+1)-(q-1))$ 個。

Step2 1.當 $k<q$ 時，配予鄰升數 1、2、⋯、 k 各 1 個，如：

鄰升數	1	2	⋯	k	$k+1$	⋯	$q-1$	q
分配個數	$a+1$	$a+1$	⋯	$a+1$	a	⋯	a	$a((p+1)-(q-1))$

2.當 $k\geq q$ 時，鄰升數 1、2、⋯、 $q-1$ 各 1 個，鄰升數 q 有 $k-(q-1)$ 個，如：

鄰升數	1	2	⋯	$q-1$	q
分配個數	$a+1$	$a+1$	⋯	$a+1$	$n-(a+1)(q-1)$

令 $S_a=((1+2+\cdots+(q-1))+q((p+1)-(q-1)))a=\frac{q(2p-q+3)}{2}\times a$，知 $S(p,q,\underline{P}_n^{p,q})=S_a+S_k$。考慮 $k<q$ 與 $k\ge q$ 兩種情況下的 S_k：

當 $k<q$ 時，$S_k=1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$。

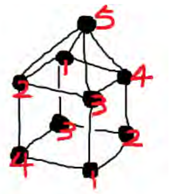
當 $k\ge q$ 時，$S_k=1+2+\cdots+(q-1)+q(k-(q-1))=\frac{q(2k-q+1)}{2}$。

可知任意 $\underline{\Omega}_n^{p,q}$ 滿足 $S(p,q,\underline{\Omega}_n^{p,q})\le S(p,q,\underline{P}_n^{p,q})\Rightarrow S(p,q,n)=S(p,q,\underline{P}_n^{p,q})$。由於將 $k=n-(p+1)a$ 帶入 S_k 所展開式子比較繁複，我們以 S_k 表達 $S(p,q,n)$。■

無差別完美填數定理將鄰升數毫不浪費地填至 n 點，不過對於我們考慮的 $m\times n$ 方格而言，並無法完美的將鄰升數填至 mn 方格，其原因是 $m\times n$ 的邊角的相鄰數是 3 和 2，而不是中心的 4，必須要用更多的鄰升數 1、2 覆蓋相鄰點。所以我們可以知道 $S(4,q,m\times n)$ 有一上界 $S(4,q,mn)$，即 $\boxed{S(4,q,m\times n)\le S(4,q,mn)}$。

以下的 $\underline{P}_{9(\Re^3)}^{4,5}$ 與 $\underline{Q}_{3\times 3}^{4,5}$ 並不同區，也間接說明上述的上界問題。

$\underline{P}_{9(\Re^3)}^{4,5}=$



、$\underline{Q}_{3\times 3}^{4,5}=$

2	4	1
1	3	2
2	4	1

$\underline{P}_{9(\Re^3)}^{4,5}$ 中的 9 點位於三維歐式空間 $\Re^3$，$\underline{Q}_{3\times 3}^{4,5}$ 中的 9 點只有 1 點相鄰數是 4，而且無論如何用基數覆蓋法，都要用到 3 個鄰升數 1。顯然地，$S(4,5,\underline{P}_9^{4,5})>S(4,5,\underline{Q}_{3\times 3}^{4,5})$。

(三)平面鄰升數極限均值定理

我們從鑲嵌法中得知當 m,n 足夠大時，$\underline{\Omega}_{m\times n}^{p,p+1}$ 中鄰升數 1、2、3、⋯、$p+1$ 所占比例各接近 $\frac{1}{p+1}$。進而推測得 $\overline{S}(p,q,\underline{\Omega}_{m\times n}^{p,q})\fallingdotseq\frac{1}{p+1}\times\frac{(p+1)(p+2)}{2}$。

$\boxed{\text{定理}}$：$\overline{S_\infty}(p,q)=q\left(1-\frac{q-1}{2(p+1)}\right)$。

證明：

已知 $\overline{S}(p,q,m\times n)\le\overline{S}(p,q,mn),\forall m,n\in\mathrm{N}$，即 $\overline{S_\infty}(p,q)$ 存在。

我們假設平面上 $m\times n$ 方格幾乎每格都有 p 相鄰數，而且 m,n 非常大。由鑲嵌法可以得知鄰升數 1、2、⋯、$q-1$、q 的比例接近 $1:1:\cdots:1:((p+1)-(q-1))$。

鄰升數	1	2	$\cdots$	$q-1$	q
比例	1	1	$\cdots$	1	$(p+1)-(q-1)$

當 $m,n\to\infty$ 時，邊的比例占 $\frac{2}{m},\frac{2}{n}\to 0$，推得：

$$\overline{S_\infty}(p,q)=\frac{1}{p+1}((1+2+\cdots+(q-1)+(p+1-(q-1))\times q)=q\left(1-\frac{q-1}{2(p+1)}\right)$$ 。■

再觀察 $S(4,5,m\times n)$ 一般式中 mn 項的係數，發現可重新改寫為：

$$S(4,5,m\times n)=\overline{S_\infty}(4,5)\times mn-9\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor-10\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor+k'(m,n)\ ;$$

代表可以合理推測：

$$S(p,q,m\times n)=\overline{S_\infty}(p,q)\times mn-c'_m\left\lfloor\frac{m}{p+1}\right\rfloor-c'_n\left\lfloor\frac{n}{p+1}\right\rfloor+k'(m,n)\text{ ，}c'_m,c'_n\in\mathrm{N}\text{ 。}$$

(四) $S(p,q,\Omega^{p,q}_{m\times n})$ 一般式與係數

推導 $S(4,5,\Omega^{4,5}_{m\times n})=3mn-c'_1\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor-c'_2\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor+k'(m,n)$ 時，為方便手算與驗證，用高斯符號 $\lfloor\ \rfloor$ 使每項都是整數，並得到 $k(m,n)\in Z$ 。接下來一樣用基數覆蓋法與通道法求得：

$$\boxed{S(p,q,\Omega^{p,q}_{m\times n})=\overline{S_\infty}(p,q)\times mn-c_1m-c_2n+k(m,n)}\text{ 。}$$

並起整理出 $p=3,4,5,6,7,8,q\le p+1$ 時的 c_1 、 c_2 。

分析 $S(4,5,\Omega^{4,5}_{m\times n})$ 一般式處理過程，從左右加格法，找出 $n\equiv_5 0,1,2,3,4$ 一循環後中間多的 $4+1$ 行 $B^{4,5}_{m\times 5}$ ；再增列得 $m\equiv_5 0,1,2,3,4$ 一循環後多的 $4+1$ 列 $B^{4,5}_{5\times n}$ 。並可得：

$$c'_1=\overline{S_\infty}(4,5)\times(5\times n)-S(4,5,B^{4,5}_{5\times n})\text{ 、 }c'_2=\overline{S_\infty}(4,5)\times(m\times 5)-S(4,5,B^{4,5}_{m\times 5})\text{ 。}$$

若可在 $\Omega^{p,q}_{m\times n}$ 中找出 $B^{p,q}_{(p+1)'\times n}$ 和 $B^{p,q}_{m\times(p+1)}$ ，其中 $\frac{(p+1)'}{p+1}\in\mathrm{N}$ 或 $\frac{p+1}{(p+1)'}\in\mathrm{N}$ 。則可定義：

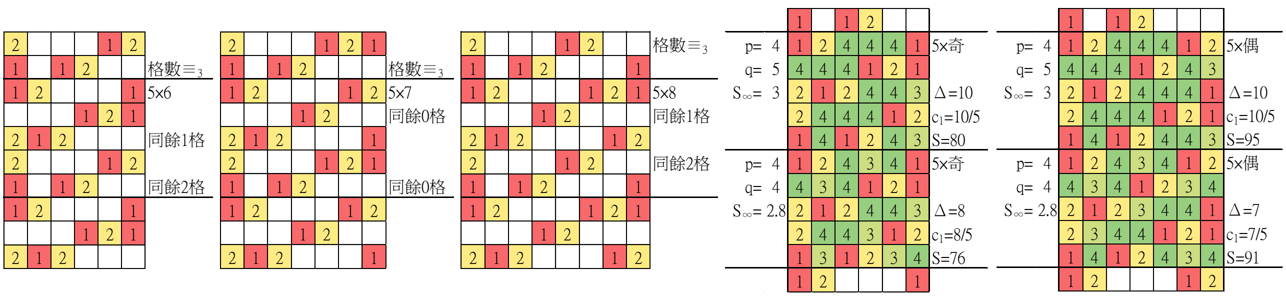
$$\boxed{c_1=c_1(p,q,n)=\overline{S_\infty}(p,q)n-\frac{S(p,q,B^{p,q}_{(p+1)'\times n})}{(p+1)'}}\ \boxed{c_2=c_2(p,q,m)=\overline{S_\infty}(p,q)m-\frac{S(p,q,B^{p,q}_{m\times(p+1)})}{p+1}}\text{ 。}$$

回看 $S(4,5,\Omega^{4,5}_{m\times n})=3mn-10\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor-9\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor+k'(m,n)$ ，知 $p=4,q=5$ 時， $c_1=\frac{c'_1}{5}=2$ 、 $c_2=\frac{c'_2}{5}=\frac{9}{5}$ ，但 $k(m,n)$ 並不完全同於 $k'(m,n)$ 。

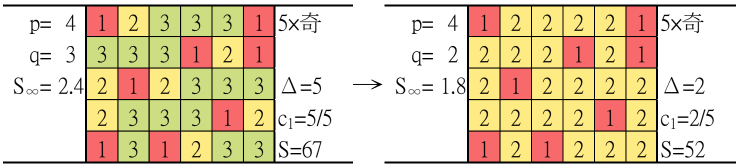
接著找當 $q=4,3,2$ 時， $S(4,q,\Omega^{4,q}_{m\times n})$ 的 c_1 、 c_2 為何，並將所得技巧泛用在 $p=6,8,5,7$ 。

$\boxed{\text{引理}}$：通道長影響 c_1 、不影響 c_2 。

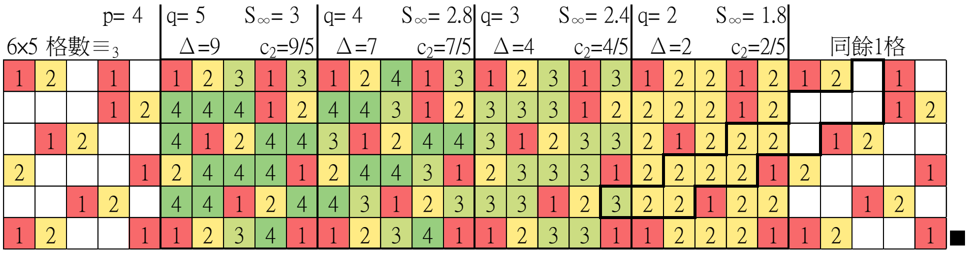
$\boxed{\text{Step1}}$ $(c_1,q=4)$ $B^{4,5}_{5\times n}$ 中有 2 條通道，以通道法只需在 2 條通道各填上一個 3 其餘填 4 即可求 $c_1(4,5,n)$ 。但在 $n\equiv_2 0,1$ 時，2 條通道的長度同餘 3 後並不同，即 $B^{4,4}_{5\times n}$ 需要分 $n\equiv_2 0,1$ 填入 3~4 通道討論。黑色粗線可視為上下相通。



Step2 $(c_1, q=3,2)$ 當 $q=3$ 時，通道全填 3；當 $q=2$ 時，將 3 全部取代成 2。



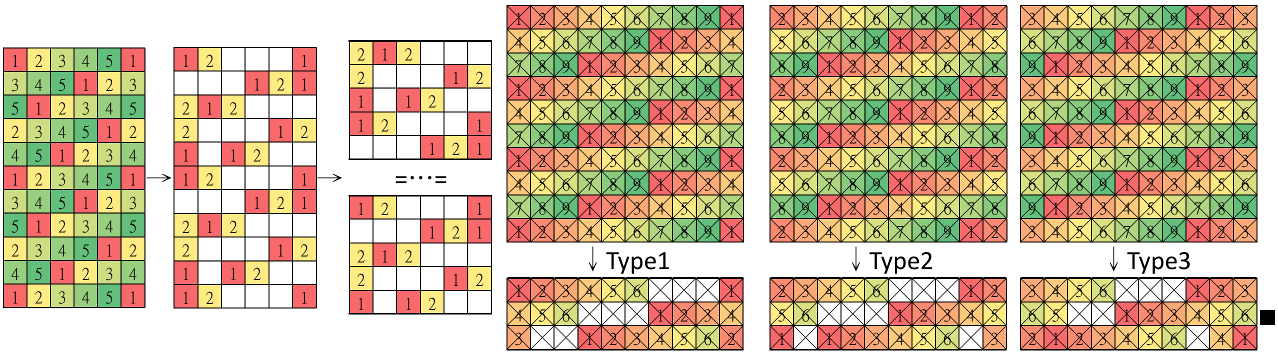
Step3 (c_2) $\underline{B}^{4,5}_{m\times 5}$ 只有單一長通道，而且通道長不會因 m 大小(增減列數)而改變其同餘 3 結果。



引理：$\underline{B}^{p,p-2}_{(p+1)'\times n}$ 會有數種，因此必須以 $\{\underline{B}^{p,p-2}_{(p+1)'\times n}\}$ 討論 c_1。

比較 $\underline{J}^{4,5}_{5\times 5}$ 、 $\underline{J}^{8,9}_{9\times 9}$ 製作的 $\underline{B}^{4,5}_{5\times n}$ 、 $\underline{B}^{8,9}_{9\times n}$ 是否需分類討論：

製作左下至右上 $(p-1)-(p+1)$ 通道，每列數字平移 3 格，3 和(4+1)互質， $\underline{B}^{4,2}_{5\times n}$ 只有一種；但 3 和(8+1)不互質，會有 3 種 $\underline{B}^{8,6}_{9\times n}$ 。



$S(p,q,\Omega^{p,q}_{m\times n}) = \overline{S_\infty}(p,q)\times mn - c_1(p,q,n)\times m - c_2(p,q,m)\times n + k(m,n)$ 係數：

1.以通道長分類計算 $c_1(p,q,n)$：(1) $p=8$ 、(2) $q=p, \forall p=3,4,5,6,7$ 。

2.分 $\#(\{\underline{B}^{5,3}_{6\times n}\}) = \#(\{\underline{B}^{8,6}_{3\times n}\}) = 3$ 類，討論 $c_1(p,q,n)$： $p=5,8$ 。

3.用點鄰集 $V^p_{m\times n}$ 取法計算 $c_2(p,q,m)$： $p=5,7$ 。又在 $\{\underline{B}^{7,5}_{m\times 8}\}$ 下 $c_2(7,q,m)$ 皆相同。

4. $p=3,4,5,6,7,8$ 、 $q=2,\cdots,p,p+1$ 結果皆有計算，以下擇要僅列 $(p,q)=(3,4),(4,4)$ 與 $p=5,6,7,8$ 時 $q=p+1,p$ 。為方便比較，將下方結果 $\hat{c}_1$ 、 $\hat{c}_2$ 一併列入。

p	3			4		5						6			7				8					
q	4			4		6			5			7	6		8	7			9			8		
m	偶	偶	奇			偶	偶	奇	偶	偶	奇													
n	偶	奇	奇	偶	奇	偶	奇	奇	偶	奇	奇		偶	奇	偶,奇	$0,4_5$	$1,3_5$	2_5	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3
$\overline{S_\infty}(p,q)$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{14}{5}$		$\frac{7}{2}$			$\frac{10}{3}$			4	$\frac{27}{7}$		$\frac{9}{2}$	$\frac{35}{8}$			5			$\frac{44}{9}$		
c_1	$\frac{3}{2}$	1	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{14}{6}$	$\frac{14}{6}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{36}{8}$	$\frac{64}{16}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{63}{16}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{39}{9}$	$\frac{38}{9}$	$\frac{34}{9}$

c_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{33}{8}$	$\frac{30}{8}$	$\frac{46}{9}$	$\frac{42}{9}$
$\hat{c}_1$	1			$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{6}$			$\frac{7}{6}$			$\frac{14}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{20}{8}$	$\frac{36}{16}$	3	$\frac{25}{9}$
$\hat{c}_2$	$\frac{1}{2}$			$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$		$\frac{9}{6}$	$\frac{4}{6}$		$\frac{7}{6}$	$\frac{14}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{16}{8},\frac{20}{8}$	$\frac{14}{8},\frac{18}{8}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{25}{9}$

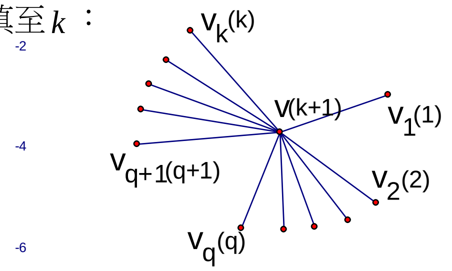
(五)分部完美填數定理$\hat{S}(p,q,n)$

由極限均值定理知在幾乎每個點的相鄰數都是p之下，$\overline{S_\infty}(p,q)$為每個點的期望值，以此概念思考，若V_n^p中的$n=N_p+N_{p-1}+\cdots+N_1$，其中$N_i=\#(\{v\in V_n^p \mid v\text{相鄰數}=i\})$，則可知：若每個點都填期望值，則可找總和上界。

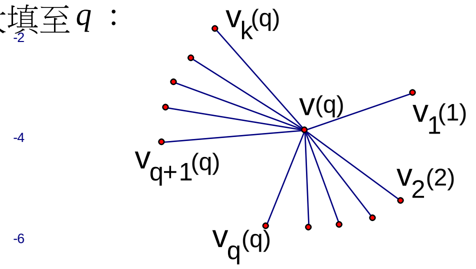
相鄰數	p	$p-1$	$p-2$	...	1
期望值(選擇小)	$\overline{S_\infty}(p,q)$	$\overline{S_\infty}(p-1,q)$	$\overline{S_\infty}(p-2,q)$	...	$\overline{S_\infty}(1,q)$
	$\overline{S_\infty}(p,p+1)$	$\overline{S_\infty}(p-1,p)$	$\overline{S_\infty}(p-2,p-1)$	...	$\overline{S_\infty}(1,2)$
點數量	N_p	N_{p-1}	N_{p-2}	...	N_1
總和	$\sum_{i=1}^{p}\overline{S_\infty}(i,\min(q,i+1))\times N_i$				

舉例：已知$v\in V_n^p$和其相鄰的點$v_1,v_2,\cdots,v_k\in V_n^p$,$k\le p$ ，共$k+1$個點恰符合$\{u,u_1,u_2,\cdots,u_k\}=\{1,2,\cdots,k,k+1\}$ ，即v點的期望值$u=\overline{S_\infty}(k,k+1)$ ；若$q<k+1$，將大於q的u_i降至q即可，則$u=\overline{S_\infty}(k,q)$ 。

最大填至k ：



最大填至q ：



然而這裡我們使用期望值(加權平均)的想法處理，不代表一定找得到V_n^p 。不是所有點的相鄰數都是p，代表無差別完美填數定理可以依點的相鄰數改進填數方式，使得$S(p,q,m\times n)$的上界更小，我們將其概念「圈鏈」列在未來展望。

分部完美填數定理

1.當$n=N_p+N_{p-1}+\cdots+N_1$時，定義：$\hat{S}(p,q,n)=\sum_{i=1}^{p}\overline{S_\infty}(i,\min(q,i+1))\times N_i$ 。

2.若$mn=N_p+N_{p-1}+\cdots+N_1$ ，則

$$\hat{S}(p,q,m\times n)=\overline{S_\infty}(p,q)\times mn-\hat{c}_1(p,q,n)m-\hat{c}_1(p,q,m)n+k(m,n)\text{ 。}$$

其中$\hat{c}_1$ 、$\hat{c}_2$是$V_{m\times n}^p$在邊少去相鄰數所扣除的部分，$k(m,n)$是角與調整後產生差值的常數項。

$\hat{S}(p,q,m\times n)$ 只需要找 $V^{p}_{m\times n}$ 的相鄰數而已，不需要填數，我們在分析完 $p=3,4,5,6,7,8$，後即可求出 $\hat{S}(p,q,m\times n)$。

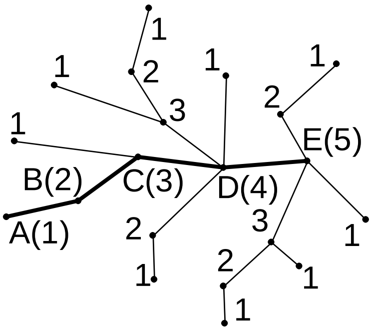
顯然的

$$\boxed{\min\{S(p,q,mn),\hat{S}(p,q,m\times n)\}\geq S(p,q,m\times n)}=\max\{S(p,q,\underline{\Omega}^{p,q}_{m\times n}),S(p,q,\underline{\Omega}^{p,q}_{n\times m})\}$$，

從上式可以快速估算我們找的 $S(p,q,\underline{\Omega}^{p,q}_{m\times n})$ 是否正確，以及分析 $c_1-\hat{c}_1$、$c_2-\hat{c}_2$，進一步找出 $m\times n$ 方格在填數上有何遺漏。

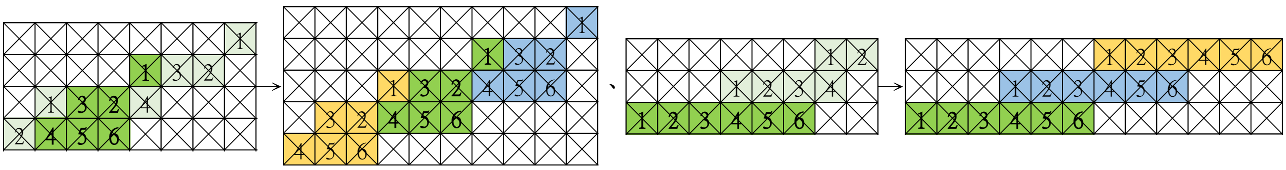
(六) $m\times n$ 方格一字填數

分析最佳 $\underline{\Omega}^{p,q}_{m\times n}$ 的邊角填數結果，發現 $c_2-\hat{c}_2$ 差距相對小，即製作 $\underline{J}^{p,p+1}_{m\times n}$ 時，在上下邊只要修改的少量的鄰升數。接著利用匯流法說明在 $m\times n$ 方格上，一字填數是最佳結果。

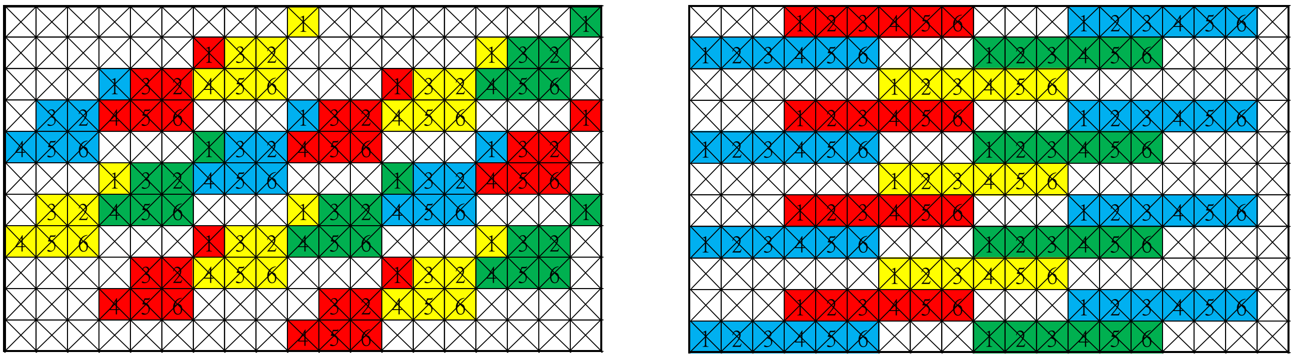


Step1 匯流填數法考慮最簡單的附值點鄰集，E 最大相鄰數 4 點填 5，全部填至 5 稱為匯流。
從粗線 A(1)→B(2)→C(3)→D(4)→E(5)，5 個點稱為 5 匯流主道，其餘與 E 相鄰點稱為 5 匯流枝。

Step2 在 $m\times n$ 方格填數的最主要目的是盡量用 $p-2$ 匯流主道塞滿與保持最大通道(長度長與條數多)，並將 $p-2$ 匯流主道上 $p-3$、$p-4$、⋯、3 的匯流枝併入任意 $p-2$ 匯流主道。以 $p=8$ 為例，6 匯流主道為一字時稱一字填數。



Step3 一字填數的匯流主道合併後較緊緻，增加鑲嵌比例，是簡單也是最佳的填數策略。



■

三、取代填數中 $R(p,q,m\times n)$ 的一般式及填數方式

(一)取代填數中 $R(4,q,m\times n)$ 的名詞定義及填數方式

1. 取代鄰升數計算符號與數列

(1) 區域和，小寫表示分割區域總和。例：$q^{4,4}_{(m-1)\times(n-1)}=S(p,q,Q^{4,4}_{(m-1)\times(n-1)})$；

(2) 取代鄰升數填數過程數列$\left\langle \Omega_{m\times n}^{p,q} \right\rangle = \Omega_{m\times n}^{p,q}(0) \to \Omega_{m\times n}^{p,q}(1) \to \cdots \to \Omega_{m\times n}^{p,q}(h)$。

例：$\left\langle \Omega_{1\times3}^{2,3} \right\rangle = \boxed{2\,|\,1\,|\,1} \to \boxed{2\,|\,3\,|\,1}$。

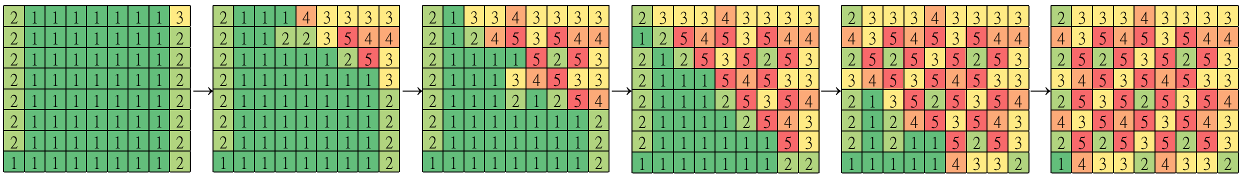
2. 減鄰法

以下我們填入之鄰升數若為升頂值，則此格便不再取代，換言之，其相鄰格的相鄰數便會降低，亦即在部分的升頂值下，會遇到有些格子的鄰升數無法填至升頂值。例：因為 3 已是該格的升頂值，根據減鄰法，右下方的 2，只剩下一個相鄰數，故最大到 2。

1	1	3
1	1	2

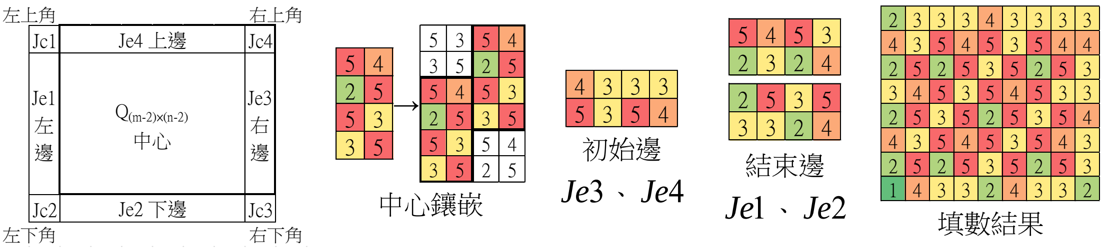
3. 斜角填數法

斜角填數法是處理$\left\langle \Omega_{m\times n}^{4,q} \right\rangle$的最佳策略，因為取代最重要的就是方向性的問題，斜角填數法可以固定覆蓋的方向，並且可以在覆蓋的同時，一起解決邊塊缺少相鄰數的問題。以找$\Omega_{8\times9}^{4,5}(17)$為例，擇最重要的形式表示$\left\langle \Omega_{8\times9}^{4,5} \right\rangle$：



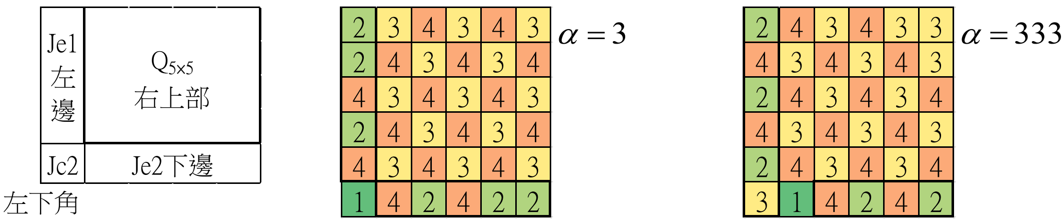
4. 鑲嵌法

在取代鄰升數的填數過程中，和不可取代的鑲嵌法一樣，會有重複的步驟，利用一樣拼圖，不斷覆蓋平面，不但可以加速找到填數結果$\left\{ \Omega_{m\times n}^{4,q}(h) \right\}$，更可以減少無謂填數總和的浪費。



5. 外層分析法

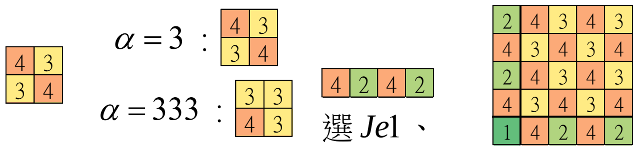
由於我們在處理不取代鄰升數時用了邊角分析法一詞，其意為修正邊角附近的鄰升數滿足填數規則，而我們在處理取代鄰升數會討論邊角填數排列狀況，我們將邊與角該如何填數稱為外層分析法。如下圖例的左邊、左下角、下邊。



6. 起填數，$\alpha =$鄰升數

在$\left\langle \Omega_{m\times n}^{4,q} \right\rangle$的圖形中，$Q_{(m-1)\times(n-1)}^{4,q}, q = 3,4$ 與 $Q_{(m-2)\times(n-2)}^{4,5}$ 右上角的數字稱作「起填數」，用來辨別當起填的鄰升數不同時的圖形。上圖例，有$\alpha = 3$、$\alpha = 333$兩種。

7. 公式計算 $R(4,q,m\times n)$ ：利用右上角起填數的不同，分析中心、邊與角如何填數，得最大值。以 $R(4,4,5\times 5)=S(4,4,\Omega_{5\times 5}^{4,4}(8))$ 為例：



中心　選起填數 α　選 $Je1$、$Je2$　最佳填數結果

區域符號改小寫為區域總和

$$S(4,4,\Omega_{5\times 5}^{4,4}(8))=q_{4\times 4}^{4,4}+je1+je2+jc2$$
$$=56+12+12+1=81$$

求 $R(4,q,m\times n)=S(4,q,\Omega_{m\times n}^{4,q}(h))$

(二) $R(4,q,m\times n)$ 的一般式

以下僅列公式，限於篇幅，其填數結果 $\{\Omega_{m\times n}^{4,q}(h)\}$ 未羅列。

$\boxed{公式}$： $R(4,5,1\times n)=R(2,3,1\times n)=\begin{cases}5n/2-2, & n\equiv_2 0\\ 5n/2-3/2, & n\equiv_2 1\end{cases}$ ， $\forall n\in\mathrm{N}$ 。

$\boxed{公式}$： $R(4,5,2\times n)=R(3,4,2\times n)=6n-3$ ， $\forall n\in\mathrm{N}$ 。

$\boxed{公式}$： $R(4,1,m\times n)=mn$ 、 $R(4,2,m\times n)=2mn-1$ ， $\forall m,n\in\mathrm{N}$ 。

$\boxed{公式}$： $R(4,3,m\times n)=\begin{cases}3mn-(m+n-2)/2, & m,n\equiv_2 0\text{或}m,n\equiv_2 1\\ 3mn-(m+n-3)/2, & m,n\equiv_2 0,1\end{cases}$ ， $\forall m,n\in\mathrm{N}$ 。

$\boxed{公式}$： $R(4,4,m\times n)=\begin{cases}(7mn-m-n-6)/2, & m,n\equiv_2 0\\ (7mn-m-n-3)/2, & m,n\equiv_2 1\\ (7mn-m-n-7)/2, & m,n\equiv_2 0,1\end{cases}$ ， $\forall m,n\in\mathrm{N}$ 。

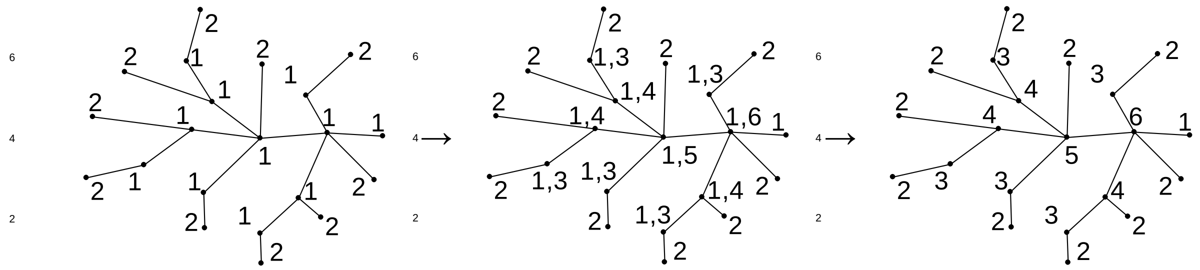
$R(4,5,m\times n)$ 的結論反而是在取代鄰升數最初處理時就得到一定的結論，中間我們發展了許多計算方式和填數技巧，不過有些技巧並非是最佳結論。而我們找會根據中心拼圖鑲嵌的形式找出有幾種 m,n 同餘的狀況，再分類逐一討論最佳填數結果。

$\boxed{公式}$： $R(4,5,m\times n)=4mn-7(m+n)/4+k(m,n)$ ， $\forall m,n\in N$ 。

$m,n\equiv_4$	0,0	0,1	0,2	0,3	1,1	1,2	1,3	2,2	2,3	3,3
$k(m,n)$	1	$-1/4$	$-1/2$	$-3/4$	$1/2$	$1/4$	0	0	$-1/4$	$-1/2$

(三)匯流魚鱗 $F_k^{p,q}(t)$ 、與鋪瓦法 $\langle F_i(t_j)\rangle$ 與 $R(6,7,m\times n)$ 一般式

接下來處理 $R(6,7,m\times n)$ ，使用匯流法時的點鄰集稍加修改，在填數過程中發現「匯流魚鱗 $F_k^{p,q}(t)$ 」的概念。下例中的 $F_{21}^{5,6}(1)$ 簡稱 6 魚鱗。



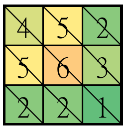
$F_{21}^{5,6}(0)$　取代填法，恰由 2 依序填至 6　$F_{21}^{5,6}(1)$ 即是最佳結果

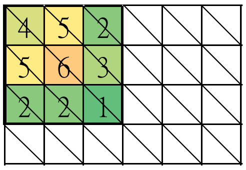
魚鱗的作用是：當要填入數值大的鄰升數時，需要改變其相鄰點的鄰升數，並希望固定數值較大的數字，再利用下一個魚鱗蓋掉數值小的數字。魚鱗一直覆蓋的過程稱作「鋪瓦法$\langle F_i(t_j)\rangle$」，而未被覆蓋的部分魚鱗稱作「鋪瓦鑲嵌拼圖$\overline{F}_k^{p,q}$」。以下用$R(6,7,m\times n)$的圖形進行說明。

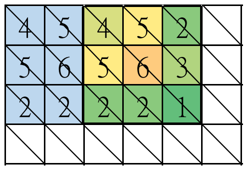
$\boxed{\text{公式}}$：$R(6,7,m\times n)=\dfrac{11}{2}mn-\dfrac{7}{2}m-3n+k(m,n)$

$m,n\equiv_2$	0,0	0,1	1,0	1,1
$k(m,n)$	2	2	3/2	2

鋪瓦法說明：填數的過程中，不斷以 6 魚鱗$F_{3\times3}^{6,6}(11)$覆蓋，在初始方向填上較大的鄰升數，相對的，另一方向填上較小的鄰升數，並用下一塊魚鱗覆蓋掉較小的一邊。

$F_{3\times3}^{6,6}(11)=$ 

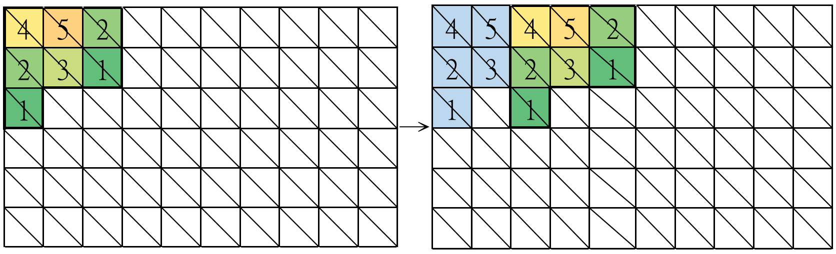
，$\langle F_i(t_j)\rangle=F_1(11)$ 

$\to F_2(11)$ 

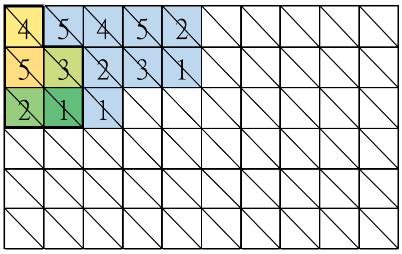
$\to\cdots$

以製作$\Omega_{6\times10}^{6,7}(h)$的過程為例：

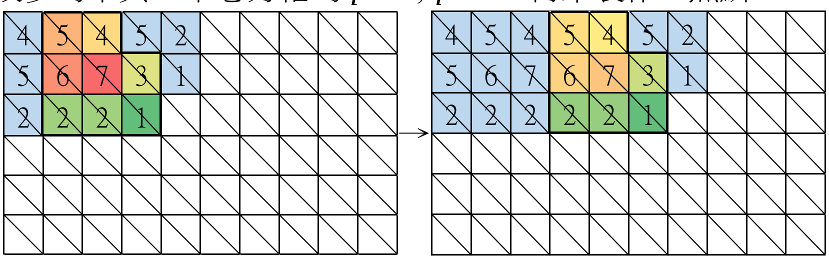
$\boxed{\text{Step1}}$考量相鄰數較少的邊角，上邊方格的$p=4,q=5$，製作 5 魚鱗。



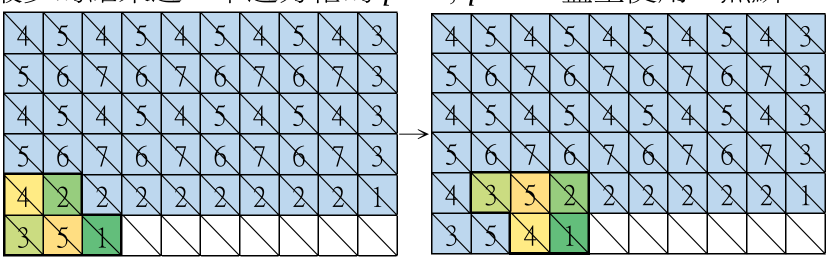
$\boxed{\text{Step2}}$先將另一初始邊的鄰升數提升，避免因減鄰法而使鄰升數減小。



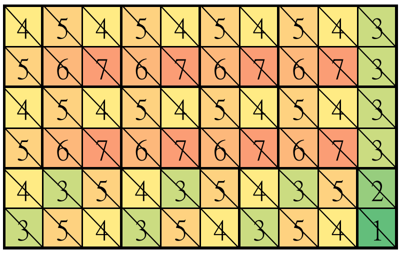
$\boxed{\text{Step3}}$深入相鄰數較多的中央，中心方格的$p=6,q=7$，再來製作 7 魚鱗。

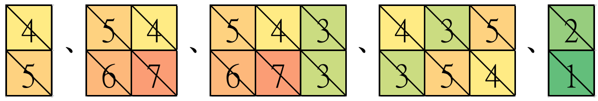


$\boxed{\text{Step4}}$最後相鄰數最少的結束邊，下邊方格的$p=4,q=5$，盡量使用 5 魚鱗。



Step5 完成填數，並找到鋪瓦鑲嵌拼圖 $\left\{F_k^{p,q}\right\}$，便於計算公式。



$\left\{F_k^{p,q}\right\} = \Big\{$  $\Big\}$

■

鋪瓦法不但可以有效率的利用相鄰的鄰升數，並可以減少取代的次數，並將不被覆蓋的魚鱗所形成的拼圖定義成 $F_k^{p,q}$。下面我們將用部分 $\left\{F_k^{p,q}\right\}$ 的均值定義公式領導係數。

(四)鋪瓦均值 $R_{\overline{F}}(p,q)$、 $R(p,q,m\times n)$ 一般式

接著重點在推廣 $p=5,7,8$、 $q=p+1$ 的情況，先用鋪瓦法處理，找出有用的 $\left\{F_k^{p,q}\right\}$。接著定義 $R_{\overline{F}}(p,q)$，得 $\boxed{R(p,q,m\times n)=R_{\overline{F}}(p,q)\times mn-c_1m-c_2n+k(m,n)}$， $c_1,c_2\in\mathbb{N}$。並且求當 $q=p+1$ 時的 $R_{\overline{F}}(p,q)$、 c_1、 c_2，以及在下一段求當 $q\le p$ 時的 $R_{\overline{F}}(p,q)$，而常數項 $k(m,n)$ 可利用外層分析法求得，在此不一一深論。

公式： $R(5,6,m\times n)=R_{\overline{F}}(5,6)\times mn-c_1m-c_2n+k(m,n)$， $R_{\overline{F}}(5,6)=9/2$。

$(m,n)\equiv_2$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
c_1	2	2	5/2	2
c_2	0	0	1	1

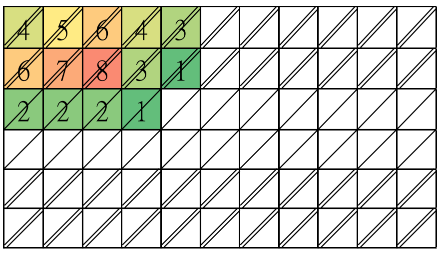
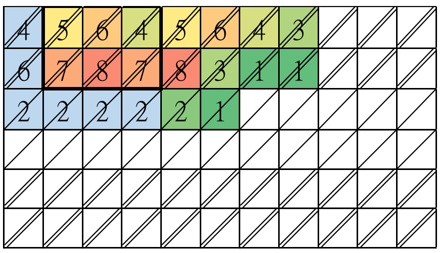
公式： $R(7,8,m\times n)=R_{\overline{F}}(7,8)\times mn-c_1m-c_2n+k(m,n)$， $R_{\overline{F}}(7,8)=25/4$。 $m\equiv_2 m',n\equiv_6 n'$。

(m',n')	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
c_1	5	15/4	7/2	19/4	7/2	15/4	5	15/4	7/2	19/4	7/2	15/4
c_2	7/2						13/4					

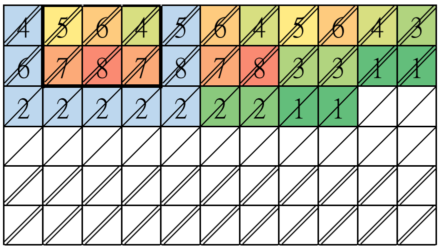
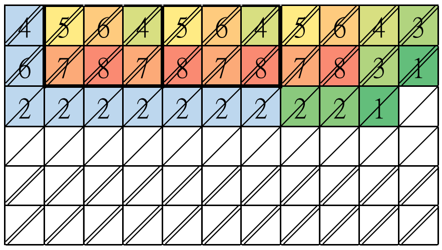
$R(7,q,m\times n)$ 的點鄰集有數種狀況，但此處因只有一種點鄰集填數結果總和較大，故不列其他點鄰集的填數結果。

以下用 $R(7,8,6\times 11)$ 推演過程 $\langle F_i(t_j)\rangle$，講解計算 $R_{\overline{F}}(p,q)$ 時， $\left\{F_k^{p,q}\right\}$ 的選取。

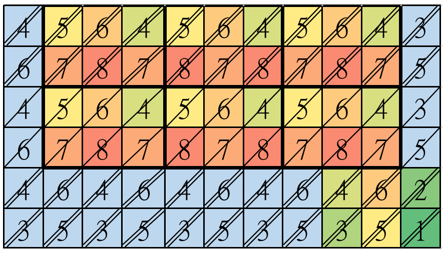
Step1 製作 8 魚鱗 $F_{3\times5}^{7,8}(26)$，再用 8 魚鱗 $F_{3\times4}^{7,8}(16)$ 覆蓋，得不再被取代的鋪瓦鑲嵌拼圖 $\overline{F}_6^{7,8}$。

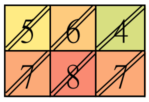
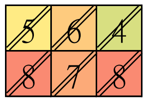
$F_1(26)=$  $\rightarrow F_2(16)=$ 

Step2 製作 8 魚鱗 $F_{3\times6}^{7,8}(18)$，再用 8 魚鱗 $F_{3\times4}^{7,8}(8)$ 覆蓋，得不再被取代的鋪瓦鑲嵌拼圖 $\overline{E}_6^{7,8}$。

$F_3(18)=$  $\rightarrow F_4(8)=$ 

Step3 從 $\Omega_{6\times11}^{7,8}(h)$ 中，知道 $\overline{F}_6^{7,8}$ 與 $\overline{E}_6^{7,8}$ 為中心鑲嵌拼圖，令 $R_{\overline{F}}(8,9)=\dfrac{37+38}{6+6}$。

$F_{15}(4)=$ 

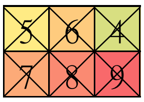
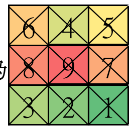
$\overline{F}_6^{7,8}=$ 、$\overline{E}_6^{7,8}=$ 

■

定義：鋪瓦均值 $R_{\overline{F}}(p,q)=\dfrac{\sum_i \overline{F}_{i\,k_i}^{p,q}}{\sum_i k_i}$，其中 $\overline{F}_{i\,k_i}^{p,q}$ 為使用的中心鑲嵌拼圖。

公式：$R(8,9,m\times n)=R_{\overline{F}}(8,9)\times mn-c_1m-c_2n+k(m,n)$，$R_{\overline{F}}(8,9)=13/2$。$m\equiv_2 m',n\equiv_3 n'$。

(m',n')	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
c_1	3/2	7/2	9/2	3/2	7/2	9/2
c_2	7/2			4		

計算 $R_{\overline{F}}(8,9)$ 時，只取一項 $\overline{F}_6^{8,9}=$ ，相對應的魚鱗為 。

(五) $R(p,q,m\times n)$， $q\le p$ 的 $R_{\overline{F}}(p,q)$ 對照表

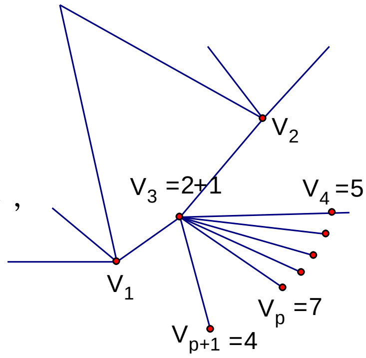
在討論 $q=p+1$ 的同時，我們也討論了 $q\le p$ 的情形，討論至升頂值 $q=R_{\overline{F}}(p,q)$，即大部分皆可填到升頂值 q。

p	5			6			7				8			
q	5	4	3	6	5	4	7	6	5	4	8	7	6	5
$R_{\overline{F}}$	17/4	15/4	3	21/4	19/4	4	25/4	21/4	19/4	4	13/2	25/4	23/4	5
$\overline{F}_k^{p,q}$	4 5 3 5	4 4 3 4	3 3 3 3	4 5 6 6	4 5 5 5	4 4 4 4	4 5 6 7 7 7	5 6 4 6	5 5 5 4	4 4 4 4	5 6 7 8	5 6 7 7	6 5 6 6	5 5 5 5

四、填數技巧與應用

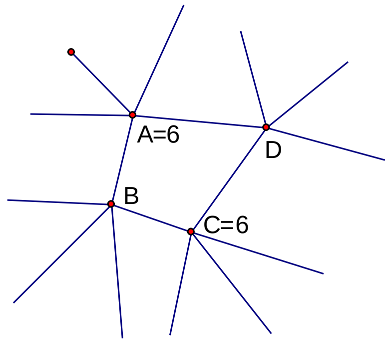
此部分說明在不取代與取代下的填數過程，常使用到的技巧整理於**升頂值對角定理**，方便找 $\Omega_{m\times n}^{p,q}(t)$。並實際舉例 $S(p,q,m\times n)$ 結果的應用。接著使用完美填數定理，找符合的點鄰集作 $\underline{P}_n^{p,q}$。除了著色應用外，也發現五邊形多面體的切割方式。

(一)升頂值對角定理



$\boxed{\text{填數準則}}$：若 $v \in V_n^p$ 旁相鄰已填數字皆大於 k ，且剩未填 k 相鄰點，則 v 可填最大鄰升數為 $k+1$。例： v_3 最大可填 3。

$\boxed{\text{對角關係}}$：若有四點其點鄰集狀況恰為矩形四頂點，稱不相鄰兩點關係為對角。例：圖中的 A、C 為對角關係。



$\boxed{\text{定理}}$：已知 $q=p+1$ 。在 $\Omega_n^{p,q}(t)$ 中若兩對角已填上 q ，

則剩餘對角必為 $q-1$、 $q-2$ 。

例：利用減鄰法知：若 $A,C=6$ ，則 $B=4,D=5$ 或 $B=5,D=4$ 。

(二) $S(p,q,m\times n)$ 對應 $\Omega_{m\times n}^{p,q}$ 或 $\Omega_{n\times m}^{p,q}$ 的應用

本研究結果可用於 q 種分級物於平面上的均勻分布，並每種分級物旁的支援性達到最佳結果。舉例而言，於 6×7 教室座位中，將能力優至不佳者予以等第，最佳等第者賦予鄰升數為 1、其次等第者依序為 2、3、4、5，而能力佳者可處理較多問題也可支援能力較差者。若依本研究結果排 42 位學習者，則每位能力較弱者前後左右都有支應 ($p=4$)，而且可依問題難度得到一定程度的支援；更進一步使用鄰升數總和最大值結果，則可以有效降低能力佳者的需求量。

以下圖例說明排位方式：

手動排位，已接近最大值

6x7 符合規則　　S=107

2	3	1	2	3	1	3
1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4
2	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3
1	2	1	2	3	4	1

	人數	學期成績
1	11	Ax11
2	11	Bx10,C$^+$
3	10	Cx8,D$^+$x2
4	6	Dx6
5	4	Ex4

→

研究結果 $S(4,5,6\times7)=S(4,5,\Omega_{7\times6}^{4,5})$

6x7 最大值　　S=110

2	1	2	3	1	3	2
4	1	5	4	2	4	1
3	2	3	1	3	5	2
1	5	4	2	4	1	3
2	3	1	3	5	2	4
1	4	2	4	1	3	1

	人數	學期成績
1	11	Ax11
2	10	Bx10
3	9	C$^+$,Cx8
4	8	D$^+$x2,Dx6
5	4	Ex4

(三)完美鑲嵌應用

1. 輪胎面上的鑲嵌

鑲嵌拼圖 $\{\underline{J}_{5\times5}^{4,5}\}$ 每個鄰升數的數量相同，若將 $\underline{J}_{5\times5}^{4,5}$ 中的邊角相鄰數設法增加至相鄰數 $p=4$ ，便可呼應完美填數定理的結論。將 $\underline{J}_{5\times10}^{4,5}$ 的上下相連、左右相連，得 $\underline{P}_{50(T^1)}^{4,5}$ ，其中 T^1 是輪胎面。我們將與之相鄰的鄰升數填至外層，以方便參照。

$\underline{J}_{5\times10}^{4,5}=$

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3

$\rightarrow \underline{P}_{50(T^1)}^{4,5}=$

	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	

由於鑲嵌拼圖 $\underline{J}^{4,5}_{5m\times 5n}$ 之形式，我們可以知道 $\underline{P}^{p,p+1}_{(p+1)^2k(T^1)}, k\in \mathrm{N}$ 都是非常漂亮的結果。

2. 球面與魔術方塊的關係

以下填數結果並未呈現在本文章內，我們將實際填數結果於展示時陳列。

(1) 球型多面體填數結果：由於多面體的面與點有對偶關係，仿照本文內填數並包含顏色，我們將數賦予顏色填至多面體的面或點上。

(2) 四面體的面或點 $\approx \underline{P}^{3,4}_{4(S^2)}$ ，金字塔方塊 Pyraminx 符合 $\underline{P}^{3,4}_{4k^2(S^2)}, k\in \mathrm{N}$ 。

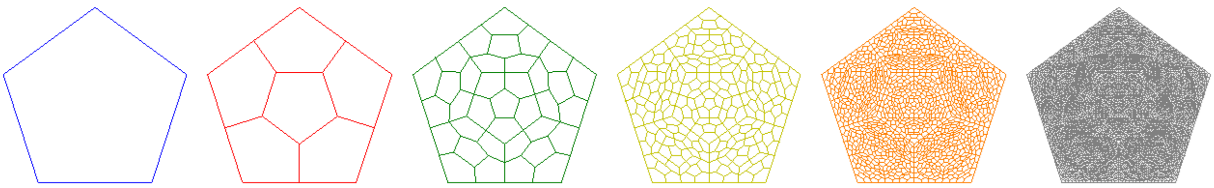
(3) 六面體的點與八面體的面 $\approx \underline{P}^{3,4}_{8(S^2)}$ ，將二階魔術方塊的八個角塊視為點，將鄰升數 1、2、3、4 各填兩次，可得 $\#\left(\left\{\underline{P}^{3,4}_{8(S^2)}\right\}\right)=1$ 。由於魔術方塊可以交換點(角塊)的排列順序，我們將八個角塊賦予四種顏色，每個顏色有兩個角塊。再規定二階魔術方塊必須讓任一角塊與其相鄰的角塊都不同顏色，符合 $\underline{P}^{3,4}_{8(S^2)}$ 。此規則下的魔術方塊比原本將六面復原更簡單。

(4) 雙四角錐柱的點 $\approx \underline{P}^{4,5}_{10(S^2)}$ ，而我們改造俗稱風火輪的的變形三階魔術方塊，使其樣式與對偶雙四角錐柱相同。

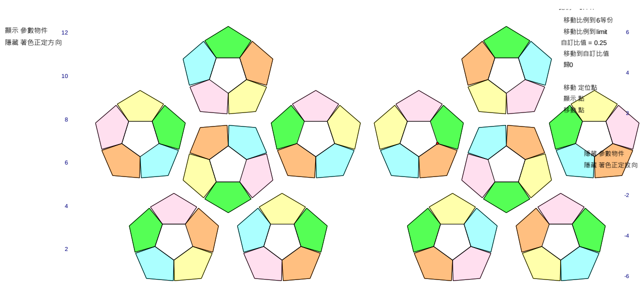
(5) 五邊形多面體的面 $\approx \underline{\Omega}^{5,6}_{12k(S^2)}$ 。除了十二面體外，我們找到五邊形 72 面體與五邊形 132 面體的 $\underline{P}^{5,6}_{72(S^2)}$ 與 $\underline{P}^{5,6}_{132(S^2)}$ ，其著色結果非常漂亮。而二階 12 面體魔術方塊恰能符合 $\underline{P}^{5,6}_{72(S^2)}$ 的著色方式，雖然一樣能相鄰不同色，不過復原難度頗高。

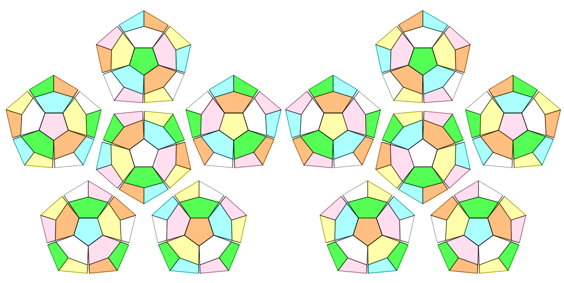
3. 製作 $\underline{\Omega}^{5,6}_{12k(S^2)}$ 過程中，找到將五邊形分割成六個小五邊形的方法，藉由 GSP 模組化，我們找到 $\underline{\Omega}^{5,6}_{2\times 6^k(S^2)}$ 。當 $k=5,6,7$ 時，發現漂亮的碎形，以五邊形 72 面體呈現 $\underline{\Omega}^{5,6}_{2\times 6^7(S^2)}$ ；當 $k\geq 8$ 時，電腦無法顯示。

(1) 切割正十二面體結果，只看一個正五邊形，顯示 $k=1,2,3,4,5,6$ 。



(2) 參考鳶形六十面體的兩面角與單一鳶形的內角，製作等面積的五邊形 72 面體。再以五邊形 72 面體模擬五邊形 132 面體。





柒、研究結論

一、不取代鄰升數的總和與填數方式

1. 在不使用查表下，由鑲嵌法、基數覆蓋法與通道法可快速求出$\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n}$使得：

$$S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n}) \doteqdot S(4,5,m\times n)\text{ 。}$$

2. 左右加格法之對照表可找出$\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n}$與$S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n}) = S(4,5,m\times n)$。

3. 解決$S(4,5,m\times n)$的一般式與特例。

二、不取代鄰升數一般式的係數與填數定理

1. $V^{p}_{m\times n}$的定義與最佳$V^{p}_{m\times n}$選法。

2. $S(p,q,\underline{\Omega}^{p,q}_{m\times n})$一般式的係數求法與結果。

3. $S(p,q,n)$的一般化與上界定理。

三、取代鄰升數的總和與填數方式

1. 鑲嵌法與鋪瓦法提供有效率的填數策略。

2. 外層分析法簡化公式的探討。

3. 解決$R(4,q,m\times n)$的一般式，一併找出$\Omega^{4,q}_{m\times n}(h)$。

4. $R(p,q,m\times n)$一般式係數與$\{\overline{F}^{p,q}_{k}\}$。

四、應用

1. 鄰升數總和最大值研究結果的實際應用。

2. 漂亮的填數結果與曲面填數的應用。

整體而言，我們解決現階段於方格中的填數總和最大值問題，而均值的探討在於我們是否可以合理的估算所填的$\left\{\Omega^{p,q}_{m\times n}(t)\right\}$正確與否。所以當有了完美填數定理，便可知道所用的方法、技巧與策略能否達到總和最大值。

其次，在研究的過程中，發現不少調和或者漂亮的圖像表徵，顯示簡單填數想法內含不少有意思的數學藝術。

捌、未來展望

一、發展完美填數定理時，想找V_{mn}^{p}使得$\underline{\Omega}_{mn}^{p,q}$符合$S(p,q,\underline{\Omega}_{mn}^{p,q})=\hat{S}(p,q,m\times n)$，額外發現「圈鏈$V_n^p=\bigcup_{i=1}^{p}\mathrm{C}_{N_i}^{i}$」的填數技巧，其中：1. $\mathrm{C}_{N_i}^{i}$所有點的相鄰數都是i；2. $\forall v\in \mathrm{C}_{N_i}^{i}$，存在$v'\in \mathrm{C}_{N_i}^{i}$與$v$相鄰。猜測最小上界公式：

$$\widehat{S}(p,q,n)=\max\{S(p,q,\underline{(V_n^p,u)})\mid \forall V_n^p=\bigcup_{i=1}^{p}\mathrm{C}_{N_i}^{i}\}=\hat{S}(p,q,n)-c(n)\text{ ， }c(n)\geq 0\text{ 。}$$

二、在處理$R(p,q,m\times n)$時，我們找出$\left\{H_{m\times n}^{p,q}=\Omega_{m\times n}^{p,q}(h)\mid h\in \mathrm{N}\right\}$，其中$h$代表取代次數，從製作$H_{m\times n}^{p,q}$的過程中，隱約知道$h=c_1m+c_2n+k(m,n)$其中$c_1,c_2,k(m,n)\in Q$。未來會著手找出**最少取代次數**$h_0=\min\left\{t\mid R(p,q,\Omega_{m\times n}^{p,q}(t))=R(p,q,m\times n)\right\}$的一般式。

三、將結果應用在更多不同的多面體，求符合完美填數的圖形或點鄰集特性。

四、在處理五邊形多面體$\underline{\Omega}_{72(S^2)}^{5,6}$時，找到在平面上將五邊形切割成六個小五邊形方式。除了欲將切割技巧進一步調整至等面積切割外，未來希望學習立體角及更多球面上的幾何性質，解決$\underline{\Omega}_{n(S^2)}^{5,6}$中$n=c\times 6^k,c,k\in \mathrm{N}$的填數方式。

玖、參考文獻

1. 吳亭佑，陳鼎升，周佳瑋，蔡智強。蜂窩染色問題的探討。44 屆中小學科學展覽會。
2. 王彥欽，郭翰明，林聖涵，程信翰。盡可能擁擠。45 屆中小學科學展覽會。
3. 鄭力瑋，吳尚平，凌誠。擋得住的魅力—看你往哪逃。51 屆中小學科學展覽會。
4. 游垚騰。潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密。53 屆中小學科學展覽會。
5. Edmund Harriss, Doris Schattschneider, and Marjorie Senechal. TILINGS. *Handbook of Discrete and Computational Geometry Third Edition,* Pages 67-89, 2017.

【評語】050416

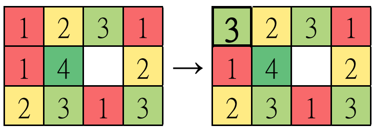
本作品是由一種都市計畫手機遊戲 Tower Bloxx 發展出來，它是在 5x5 的方格空地上蓋 1 級樓、2 級樓、3 級樓、4 級樓。除 1 級樓可任意蓋外，蓋高級樓時，旁必須要所有低級樓與之相鄰（共邊），即 2 級樓旁有 1 級樓；3 級樓旁有 2 和 1 級樓；4 級樓旁有 3、2 和 1 級樓。每級樓可容納人口數從最少 1 級樓至最高 4 級樓，故此遊戲基本策略是將所有空地蓋滿，並且 4 級樓所占比例最高。

整體來說，研究過程以表格架構來說明，有一定創意，值得鼓勵。論文的分析算是詳盡，提出多種填數策略，可以加強說明哪一種是本研究的創新填數策略。舉出來的填數方法有很多種，可以加強說明如何確定所填的方法已經是最大值。完成填數的可能解應該無法確定，研究中所提出的是可能的填法，可以加強說明是否有因為某些因素而造成不可能填數成功。此外，可以加強列出參考文獻，說明這些文獻與本作品之關聯性，那些部分是作者自行完成。又，可以說明鄰升數名詞是否自行命名。

作品海報

填數規則

$m\times n$ 方格中填入數字 1、2、3、4、5。填大數字時必有已填所有較小數字與之相鄰，故稱所填的數字為**鄰升數**。例：白色空格可填入 1、2、3、4 與**升頂值**(最大鄰升數)5。左上角已填 1，但其相鄰二格有 1、2，以 3 取代 1。



研究目的

一、在任意 $m\times n$ 方格中填入鄰升數，並使其總和為最大值。為方便估算，我們一併計算每格之均值。

二、分兩種狀況討論：1.每格只填一次，即不取代原先鄰升數；2.可在滿足填數規則下取代已填鄰升數。

三、推廣 $p\neq 4$，求出一般化的公式和定理。

四、將 $J^{p,q}_{n(p+1)}$ 填法應用在輪胎面 T^1 與球面 S^2，並改裝魔術方塊與定義新玩法。

公式與填法	總和最大值	均值(領導係數)	填法
不取代鄰升數	$S(p,q,m\times n)$	$\overline{S}_\infty(p,q)$	$\Omega^{p,q}_{m\times n}$
取代鄰升數	$R(p,q,m\times n)$	$\overline{R}_{\overline{F}}(p,q)$	$\Omega^{p,q}_{m\times n}(h)$

名詞與符號

一、升頂值 q：可填的最大鄰升數。**相鄰數** p：每格相鄰最多格數。當填數於 $m\times n$ 方格時，$p=4$。

二、不取代附值點鄰集 $\Omega^{p,q}_{m\times n}=\Omega^{p,q}_{m\times n}(0)$。取代**附值點鄰集** $\Omega^{p,q}_{m\times n}(t)$，取代在 $\Omega^{p,q}_{m\times n}(t-1)$ 中填的鄰升數。

三、鄰升數總和 $S(p,q,\Omega^{p,q}_{m\times n}(t))$：將 $\Omega^{p,q}_{m\times n}(t)$ 中每格的鄰升數加總。$S(p,q,m\times n)=\max\left\{S(p,q,\Omega^{p,q}_{m\times n})\right\}$、

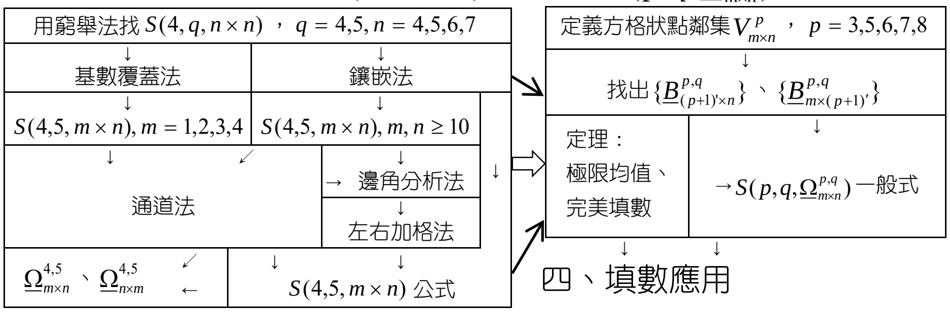
$R(p,q,m\times n)=\max\left\{S(p,q,\Omega^{p,q}_{m\times n}(t))\right\}$、$\overline{S}(p,q,m\times n)=\dfrac{S(p,q,m\times n)}{mn}$、$\overline{R}(p,q,m\times n)=\dfrac{R(p,q,m\times n)}{mn}$。

四、Ω 符號代表區域之意，引入 $\Omega=B$、F、J、P、Q 分別代表基底、魚鱗、拼圖、完美、矩形填法。

研究方法與過程

一、不取代鄰升數總和 $S(4,5,m\times n)$

二、$S(p,q,\Omega^{p,q}_{m\times n})$ 與填數定理



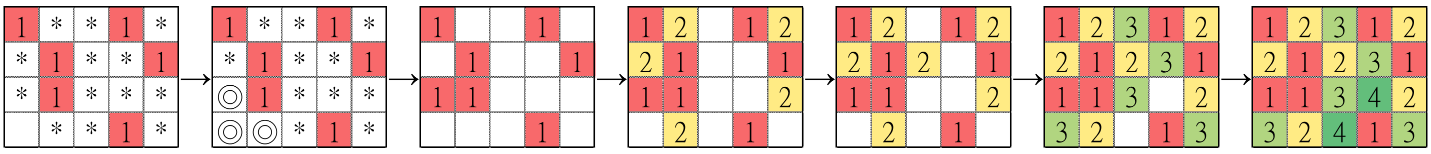
三、取代鄰升數總和 $R(p,q,m\times n)$

1. 嘗試 $R(4,5,m\times n), m,n\geq 10$
2. 找到鑲嵌法、處理策略：斜角填數法、外層分析法
3. 找出 $\Omega^{4,q}_{m\times n}(h)$，並得到 $R(4,q,m\times n)$ 一般式
4. 以匯流魚鱗、鋪瓦法完成 $R(p,q,m\times n)$ 一般式

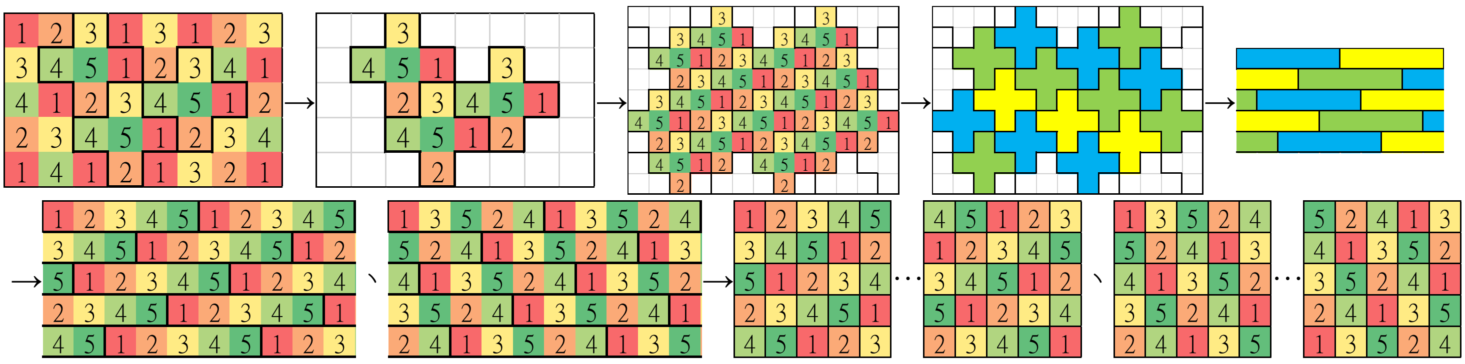
研究結果

一、不取代填數、$S(4,5,m\times n)$ 公式及填數方式 $\Omega^{4,5}_{m\times n}$

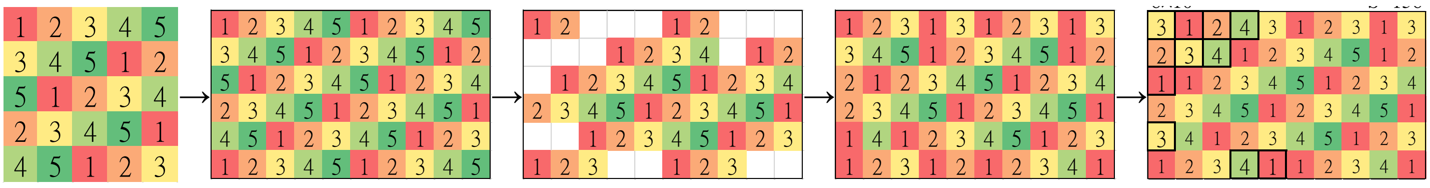
(一)基數覆蓋法：依序填入鄰升數 1、2、3、4、5，並且覆蓋所有格子。



(二)鑲嵌法：鄰升數會有規律的重複出現，即平鋪鑲嵌形式。設法填數，可找出數種鑲嵌拼圖 $J^{4,5}_{5\times 5}$。



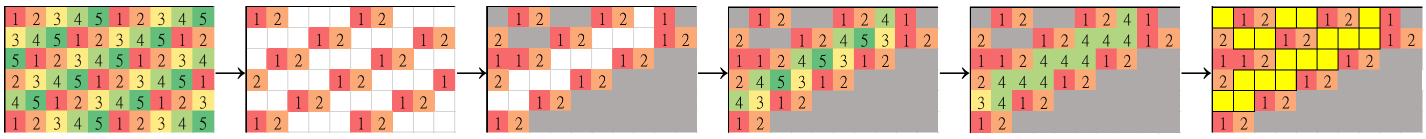
(三)邊角分析法：以 $J^{4,5}_{5\times 5}$ 製作 $J^{4,5}_{m\times n}$，修改不符規則鄰升數至符合填數規則的 $\Omega^{4,5}_{m\times n}$。以 $\Omega^{4,5}_{6\times 10}$ 為例：



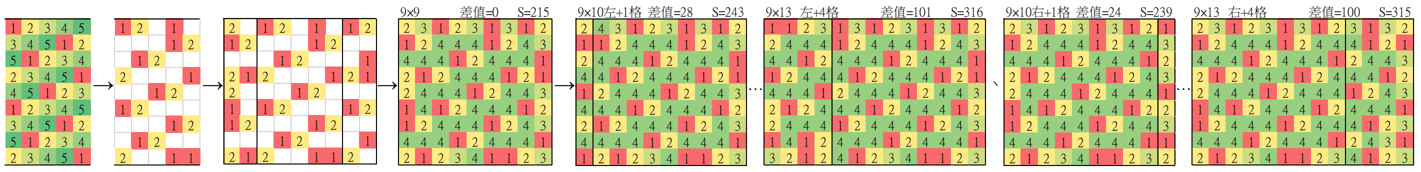
(四) $S(4,5,1\times n)=S(2,3,1\times n)=2n-1, \forall n\in \mathrm{N}$。$\Omega^{2,3}_{1\times n}\to\Omega^{2,3}_{1\times n}(n-1)$：12⋯2，其中 2 有 $n-1$ 個。例：

$n=10$ 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 → 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2、$n=11$ 2 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1、$n=12$ 2 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2

(五)通道法：微調總和的極佳策略。以鄰升數 1、2 覆蓋，快速修改 3、4、5 的排列順序。黃色為通道。

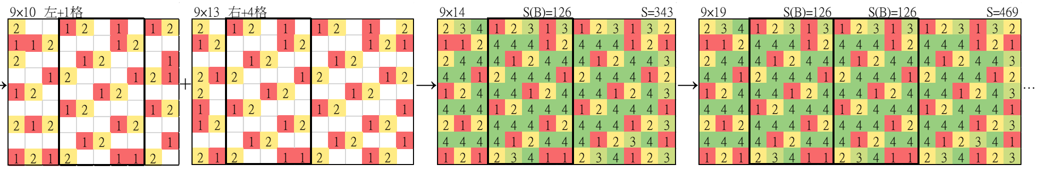


(六)左右加格法：固定 m，作 $\Omega^{4,5}_{m\times(l+2+5+2+r)}$，以增加格數後總和的差值，作查表，求最佳 $S(4,5,\Omega^{4,5}_{m\times n})$。



對照表	右+格	0	1	2	3	4	總+格	最大差值和	n	$\equiv_5$	S=
左+格	差值和	0	24	51	76	100	+3	79	12	2	294
0	0	0	24	51	76	100	+4	104	13	3	319
1	28	28	52	79	104	128	+5	128	14	4	343
2	51	51	75	102	127	151	+6	154	15	0	369
3	77	77	101	128	153	177	+7	178	16	1	393
4	101	101	125	152	177	201	+8	205	17	2	420
5	126	126	150	177	202	226	+9	230	18	3	445

S(4,5,9×14)=343



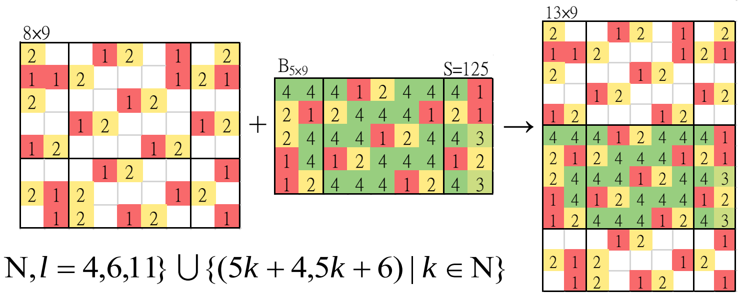
(七) $S(4,5,m\times n)$ 公式：上述方法求 $m=5,6,\cdots,12$，再插入 $\underline{B}^{4,5}_{5\times n}$，求出 $m\ge 13$ 公式與 $\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n}$。不失一般性，以下 $m\le n\in\mathbb{N}$。

$$S(4,5,m\times n)=\begin{cases}S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n}),\text{當}\,n\ge m\ge 5\,\text{且}\,(m,n)\notin CT\\ S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{n\times m}),\text{當}\,(m,n)\in CT\end{cases}$$

$$S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n})=3mn-10\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor-9\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor+k'(m,n)\ ,(m,n)\notin\{(11,5),(12,5)\}$$

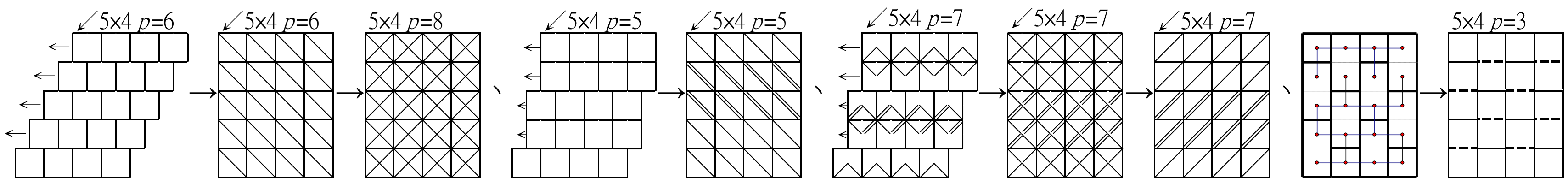
$CT=\{(m,n)\}$ $\qquad$ $k'(m,n)$ 為邊角校正值

$=\{(5,9),(5,10),(5,14),(6,7),(6,10),(6,11),(7,9),(7,11)\}\cup\{(5k+3,5k+l)\mid k\in\mathbb{N},l=4,6,11\}\cup\{(5k+4,5k+6)\mid k\in\mathbb{N}\}$



二、方格狀點鄰集 $V^{p}_{m\times n}$、$S(p,q,\underline{\Omega}^{p,q}_{m\times n})$ 一般式的係數與填數定理

(一)方格狀點鄰集 $V^{p}_{m\times n}$ 的定義，$p=3,5,6,7,8$：斜線方向代表相鄰方格關係、不同斜線代表無關係、不相鄰的邊以虛線表示。



(二) $\boxed{\text{無差別完美填數定理}}$：以不浪費填數，將鄰升數由小至大依序覆蓋 n 點且覆蓋區不重疊。

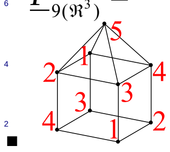
$S(p,q,n)=\dfrac{q(2p-q+3)}{2}\times\left\lfloor\dfrac{n}{p+1}\right\rfloor+S_k$，$S_k=\dfrac{k(k+1)}{2},k<q$、$S_k=\dfrac{q(2k-q+1)}{2},k\ge q$、$k=n-(p+1)\left\lfloor\dfrac{n}{p+1}\right\rfloor$。

說明：以下為完美填法 $\underline{P}^{p,q}_{n}$，令商數 $a=\lfloor n/(p+1)\rfloor$。$n=(p+1)a+k$ 個鄰升數分配至餘數 $k<q$ 或 $k\ge q$。

1	2	…	k	k+1	…	q-1	q	…	p	p+1	分配順序	1	2	…	q-1	q	…	k	k+1	…	p	p+1
1	2	…	k	k+1	…	q-1	q	…	q	q	鄰升數	1	2	…	q-1	q	…	k	k+1	…	q	q
a	a	…	a	a	…	a	a	…	a	a	分配商數	a	a	…	a	a	…	a	a	…	a	a
1	1	…	1	0	…	0	0	…	0	0	分配餘數	1	1	…	1	1	…	1	0	…	0	0

■

$\underline{P}^{4,5}_{9(\Re^3)}=$



填數比較($p=4$)：在 $m\times n$ 方格中，鄰升數無法完美填至 mn 個空格，其原因是 $m\times n$ 方格的邊與角相鄰數分別為 3 和 2，而不是中心的 4，必須要用更多的鄰升數 1、2 覆蓋。

(三)平面鄰升數 $\boxed{\text{極限均值定理}}$：為估計 $S(p,q,m\times n)$，在不考慮邊角相鄰數小於 p 的問題，取極限忽略。

$\overline{S_\infty}(p,q)=q\left(1-\dfrac{q-1}{2(p+1)}\right)$。說明：當 m,n 非常大時，$\underline{\Omega}^{p,q}_{m\times n}$ 上

鄰升數	1	2	…	q-1	q
數量比	1	1	…	1	(p+1)-(q-1)

。■

$\underline{Q}^{4,5}_{3\times 3(\Re^2)}=\begin{matrix}2&4&1\\1&3&2\\2&4&1\end{matrix}$

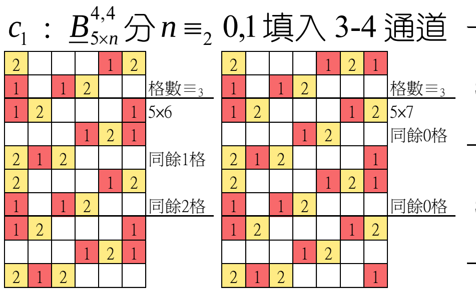
(四) $S(p,q,\underline{\Omega}^{p,q}_{m\times n})$ 一般式與係數：$\boxed{S(p,q,\underline{\Omega}^{p,q}_{m\times n})=\overline{S_\infty}(p,q)\times mn-c_1m-c_2n+k(m,n)}$，$p=3,4,5,6,7,8,q\le p+1$。

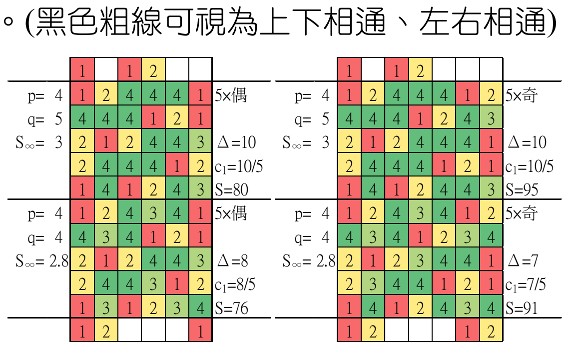
分析 $S(4,5,\underline{\Omega}^{4,5}_{m\times n})$ 一般式處理過程，從左右加格法找出 $n\equiv_5 0,1,2,3,4$ 一循環後中間多的 $4+1$ 行 $\underline{B}^{4,5}_{m\times 5}$；再增列得 $m\equiv_5 0,1,2,3,4$ 一循環後多的 $4+1$ 列 $\underline{B}^{4,5}_{5\times n}$。同理，在 $\underline{\Omega}^{p,q}_{m\times n}$ 中找出 $\underline{B}^{p,q}_{(p+1)'\times n}$ 和 $\underline{B}^{p,q}_{m\times(p+1)'}$，其中 $(p+1)'$ 為 $p+1$ 的因數或倍數。定義：

$\boxed{c_1=c_1(p,q,n)=\overline{S_\infty}(p,q)\times n-S(p,q,\underline{B}^{p,q}_{(p+1)'\times n})/(p+1)'}$、$\boxed{c_2=c_2(p,q,m)=\overline{S_\infty}(p,q)\times m-S(p,q,\underline{B}^{p,q}_{m\times(p+1)'})/(p+1)'}$。

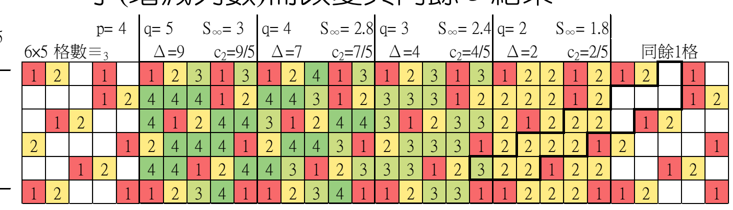
$\boxed{\text{引理}}$：通道長影響 c_1、不影響 c_2。(黑色粗線可視為上下相通、左右相通)

c_1：$\underline{B}^{4,4}_{5\times n}$ 分 $n\equiv_2 0,1$ 填入 3-4 通道





c_2：$\underline{B}^{4,5}_{m\times 5}$ 只有單一長通道，而且通道長不會因 m 大小(增減列數)而改變其同餘 3 結果



$\boxed{\text{引理}}$：$\underline{B}^{p,p-2}_{(p+1)'\times n}$ 可能有數種，必須以 $\{\underline{B}^{p,p-2}_{(p+1)'\times n}\}$ 討論 c_1。$\boxed{\text{引理}}$：$V^{8}_{m\times n}$ 用二維通道法。

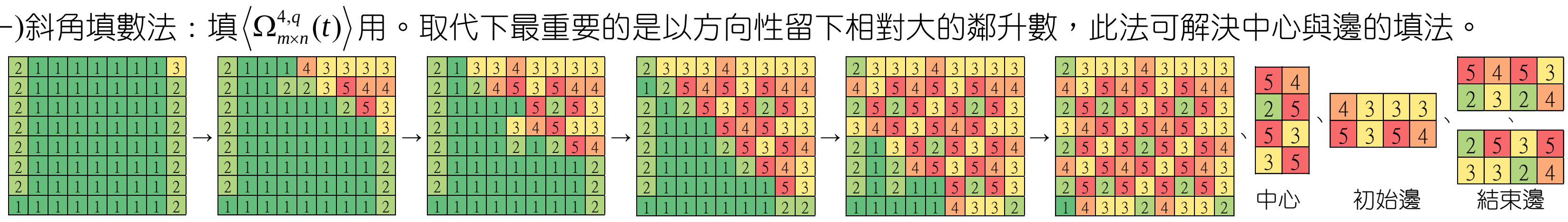
(五) $\boxed{\text{分部完美填數定理}}$：$\hat{S}(p,q,m\times n)=\overline{S_\infty}(p,q)\times mn-\hat{c}_1(p,q,n)m-\hat{c}_2(p,q,m)n+k(m,n)$，$mn=N_p+N_{p-1}+\cdots+N_1$。

在每個點的相鄰數都是 p 之下，$\overline{S_\infty}(p,q)$ 為每個點的期望值。若 $V_n^{\,p}$ 的 $n=N_p+N_{p-1}+\cdots+N_1$，$N_i=\#(\{v\in V_n^{\,p}\mid v\ \text{相鄰數}=i\})$，則可知：<u>每個點都填期望值可得總和上界</u>。定義：$\hat{S}(p,q,n)=\sum_{i=1}^{p}\overline{S_\infty}(i,\min(q,i+1))\times N_i$。$\hat{c}_1$、$\hat{c}_2$ 是 $V^{p}_{m\times n}$ 在邊所扣除的部分。

$\boxed{\min\{S(p,q,mn),\hat{S}(p,q,m\times n)\}\ge S(p,q,m\times n)\ \text{可快速估算}\ S(p,q,\underline{\Omega}^{p,q}_{m\times n})\ \text{是否正確，分析}\ c_1-\hat{c}_1\text{、}c_2-\hat{c}_2\ \text{找出在填數上有何遺漏。}}$

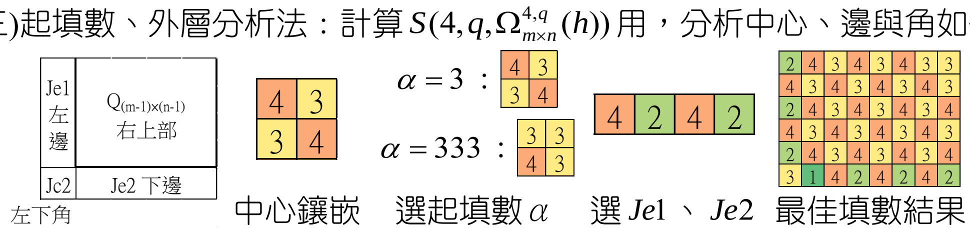
三、取代填數中 $R(p,q,m\times n)$ 一般式及填數方式

(一)斜角填數法：填 $\left\langle\Omega^{4,q}_{m\times n}(t)\right\rangle$ 用。取代下最重要的是以方向性留下相對大的鄰升數，此法可解決中心與邊的填法。



(二)鑲嵌法：加速找到填數結果 $\left\{\Omega^{4,q}_{m\times n}(h)\right\}$，從上例($q=5$、$8\times 9$ 方格)可發現中心與邊皆有鑲嵌拼圖。

(三)起填數、外層分析法：計算 $S(4,q,\Omega^{4,q}_{m\times n}(h))$ 用，分析中心、邊與角如何填數，得最大值。以 $q=4$、6×8 方格為例：



中心鑲嵌 $\quad$ 選起填數 α $\quad$ 選 $Je1$、$Je2$ $\quad$ 最佳填數結果

區域符號改小寫為區域總和

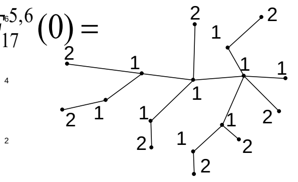
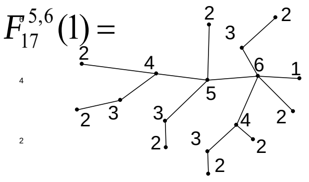
$S(4,4,\Omega^{4,4}_{6\times 8}(h))=q^{4,4}_{5\times 7}+je1+je2+jc2$

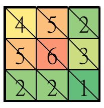
$=122+14+19+3=158$

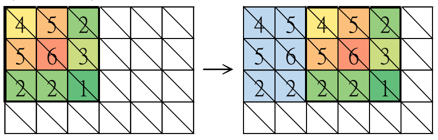
求 $S(4,q,\Omega^{4,q}_{m\times n}(h))$、當 $t=h$ 時為公式使用結果

(四) $R(4,q,m\times n)=S(4,q,\Omega^{4,q}_{m\times n}(h))$：$R(4,5,m\times n)=4mn-\dfrac{7}{4}(m+n)+k(m,n)$，中心鑲嵌拼圖均值 4 為領導係數。

(五)匯流魚鱗 $F_k^{p,q}(t)$ 、鋪瓦法 $\langle F_i(t_j)\rangle$ ：利用魚鱗蓋掉數值小的鄰升數，覆蓋的過程稱作「鋪瓦法」。

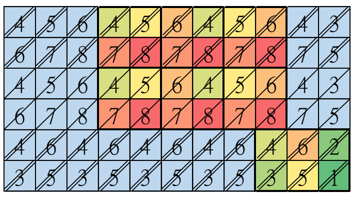
$F_{17}^{5,6}(0)=$  $\rightarrow$ 6 魚鱗 $F_{17}^{5,6}(1)=$ 

方格狀 6 魚鱗 $F_{3\times 3}^{6,6}(11)=$ 

$\langle F_i(t_j)\rangle = F_1(11)\rightarrow F_2(11)\rightarrow\cdots$  $\rightarrow\cdots$

(六)鋪瓦均值 $\overline{R_F}(p,q)$ 、 $\boxed{R(p,q,m\times n)=\overline{R_F}(p,q)\times mn-c_1m-c_2n+k(m,n)}$ ：以上述方法計算公式。

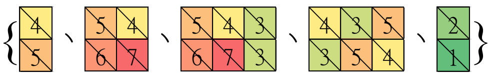
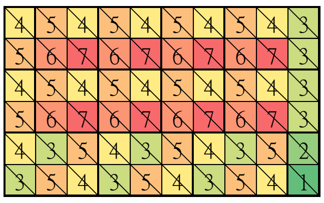
$\Omega_{6\times 11}^{7,8}(h)=F_{15}(4)=$

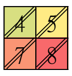
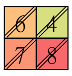
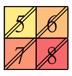


定義： $\overline{R_F}(p,q)=\left(\sum_i \overline{F}_{i\,k_i}^{\,p,q}\right)\div\left(\sum_i k_i\right)$ 、 $\overline{F}_{i\,k_i}^{\,p,q}$ 為使用的中心鑲嵌拼圖。

用中心、邊、角鑲嵌拼圖得 $R(p,q,m\times n)$ 一般式：

鋪瓦鑲嵌拼圖 $\{\overline{F}_k^{\,p,q}\}=$

 $\Leftrightarrow \Omega_{6\times 10}^{6,7}(h)=$ 

$\overline{F}_{14}^{\,7,8}=$  、 $\overline{F}_{24}^{\,7,8}=$  、 $\overline{F}_{34}^{\,7,8}=$  、 $\overline{R_F}(7,8)=\dfrac{24+25+26}{4+4+4}$

四、填數技巧與應用

(一) $S(p,q,m\times n)$ 對應 $\Omega_{m\times n}^{p,q}$ 或 $\Omega_{n\times m}^{p,q}$ 的應用： q 種分級物於平面上均勻分布，分級物旁支援性達到最佳化。

於 6×7 座位中，最佳等第者鄰升數為 1、其次等第者依序為 2、3、4、5，能力佳者處理較多問題也可**支援**能力較差者。依填數規則，每位能力較弱者前後左右都有**支應**($p=4$)，而且可依問題難度得到一定程度的支援；更進一步使用鄰升數總和最大值結果，可有效降低能力佳者的需求量。

手動排位接近最大值(以次充好) $\rightarrow S(4,5,6\times 7)=S(4,5,\underline{\Omega}_{7\times 6}^{4,5})$

6x7 符合規則 S=107

2	3	1	2	3	1	3
1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4
2	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3
1	2	1	2	3	4	1

	人數	學期成績
1	11	A×11
2	11	B×10,C$^+$
3	10	C×8,D$^+$×2
4	6	D×6
5	4	E×4

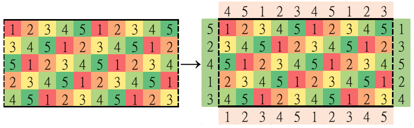
6x7 最大值 S=110

2	1	2	3	1	3	2
4	1	5	4	2	4	1
3	2	3	1	3	5	2
1	5	4	2	4	1	3
2	3	1	3	5	2	4
1	4	2	4	1	3	1

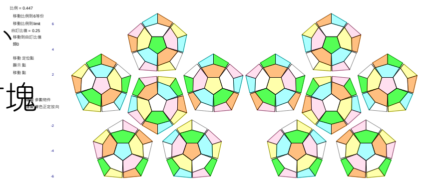
	人數	學期成績
1	11	A×11
2	10	B×10
3	9	C$^+$,C×8
4	8	D$^+$×2,D×6
5	4	E×4

(二)完美鑲嵌應用： $\underline{P}_{(p+1)n}^{p,p+1}$

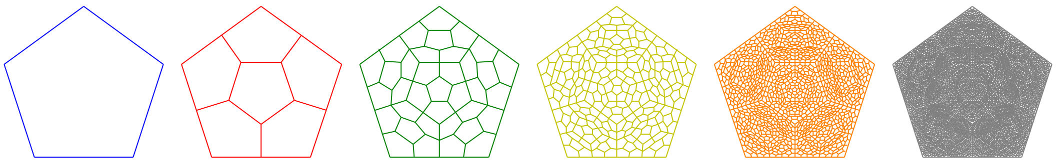
1. 輪胎面上的鑲嵌：將 $\underline{J}_{5\times 5}^{4,5}$ 中邊角的相鄰數增加至 $p=4$ ，即上下相通、左右相通，得 $\underline{P}_{50(T^1)}^{4,5}$ 。由 $\underline{J}_{5m\times 5n}^{4,5}$ 形式，知 $\underline{P}_{(p+1)^2k(T^1)}^{p,p+1},k\in\mathrm{N}$ 是非常漂亮的結果。



2. 球面與魔術方塊的關係：鄰升數賦予顏色填至多面體的面或點上。規定魔數方塊相鄰配色不同。
   (1) 四面體的面或點 $\approx \underline{P}_{4(S^2)}^{3,4}$ ，金字塔方塊 Pyraminx(其實是三角錐)符合 $\underline{P}_{4k^2(S^2)}^{3,4},k\in\mathrm{N}$ 。
   (2) 六面體的點與八面體的面 $\approx \underline{P}_{8(S^2)}^{3,4}$ ，把二階魔術方塊的八個角塊視為點，將鄰升數 1、2、3、4 各填兩次，即四色各二角塊。規定任一角塊其相鄰的角塊都不同顏色，比傳統二階更容易復原。
   (3) 雙四角錐柱的點 $\approx \underline{P}_{10(S^2)}^{4,5}$ ，改造 $3\times 3\times 2$ 魔術方塊，使其樣式與對偶雙四角錐柱相同。
   (4) 五邊形多面體的面 $\approx \Omega_{12k(S^2)}^{5,6}$ 。五邊形 12、72、132 面體對應的 $\underline{P}_{12(S^2)}^{5,6}$ 、 $\underline{P}_{72(S^2)}^{5,6}$ 、 $\underline{P}_{132(S^2)}^{5,6}$ ，其著色結果非常漂亮。而二階、四階 12 面體魔術方塊恰能符合 $\underline{P}_{72(S^2)}^{5,6}$ 、 $\underline{P}_{132(S^2)}^{5,6}$ 的著色方式，復原難度高。



3. 製作 $\Omega_{12k(S^2)}^{5,6}$ 過程中，找到五邊形分割成六個小五邊形。以 GSP 模組化與迭代，得到 $\Omega_{2\times 6^k(S^2)}^{5,6}$ 。 $k\geq 5$ ，發現漂亮的碎形；以五邊形 72 面體呈現 $\Omega_{2\times 6^7(S^2)}^{5,6}$ 。



研究結論

一、不取代鄰升數於 $p=4$ 的總和與填數方式
1. 由鑲嵌法、基數覆蓋法與通道法可快速求出 $\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5}$ 使得： $S(4,5,\underline{\Omega}_{m\times n}^{4,5})\doteqdot S(4,5,m\times n)$ 。
2. 解決 $S(4,5,m\times n)$ 公式與特例。

二、不取代鄰升數一般式的係數與填數定理
1. $V_{m\times n}^{p}$ 的定義與最佳 $V_{m\times n}^{p}$ 選法。
2. $S(p,q,\underline{\Omega}_{m\times n}^{p,q})$ 一般式的係數求法與結果。
3. $S(p,q,n)$ 的一般化與上界定理。

三、取代鄰升數的總和與填數方式
1. 鑲嵌法與鋪瓦法提供有效率的填數策略。
2. 外層分析法簡化公式的探討。
3. 解決 $R(4,q,m\times n)$ 一般式，一併找出 $\Omega_{m\times n}^{p,q}(h)$ 。
4. $R(p,q,m\times n)$ 一般式係數與 $\{\overline{F}_k^{\,p,q}\}$ 。

四、應用
1. 鄰升數總和最大值研究結果的實際應用。
2. 漂亮的填數結果與曲面填數的應用。

我們解決現階段於方格中填數總和最大值問題，而均值的探討在於是否可以合理的估算所填的 $\{\Omega_{m\times n}^{p,q}(h)\}$ 正確與否。所以當有了完美填數定理，便可知道所用的方法、技巧與策略能否達到總和最大值。其次，在研究的過程中，發現不少調和或者漂亮的圖像表徵，顯示簡單填數想法內含不少有意思的數學藝術。

未來展望

一、找 $S(p,q,\underline{\Omega}_{mn}^{p,q})=\hat{S}(p,q,m\times n)$ 時，發現「圈鏈 $V_n^p=\bigcup_{i=1}^{p}\mathcal{C}_{N_i}^{i}$ 」的填數技巧：1. $\mathrm{C}_{N_i}^{i}$ 所有點的相鄰數都是 i ；2. $\mathrm{C}_{N_i}^{i}$ 與 $\{\mathrm{C}_{N_j}^{j}\}$ 鏈結後修整的結果為 $\mathcal{C}_{N_i}^{i}$ 。猜測最小上界公式： $S(p,q,(\underline{V_n^p},u))=\hat{S}(p,q,n)-c(n)$ 。

二、處理 $R(p,q,m\times n)$ 時，找出 $\{H_{m\times n}^{p,q}=\Omega_{m\times n}^{p,q}(h)\mid h\in\mathrm{N}\}$ ， h 代表取代次數。從製作 $H_{m\times n}^{p,q}$ 的過程中，隱約知道 $h=c_1m+c_2n+k(m,n)$ 。未來找**最少取代次數** $h_0=\min\{t\mid R(p,q,\Omega_{m\times n}^{p,q}(t))=R(p,q,m\times n)\}$ 的一般式。

三、在處理五邊形多面體 $\Omega_{72(S^2)}^{5,6}$ 時，找到在平面上將五邊形切割成六個小五邊形方式。除了欲將切割技巧進一步調整至等面積切割外，未來學習立體角及更多球面上的幾何性質，解決 $\Omega_{c\times 6^k(S^2)}^{5,6}$ 的填數方式。