中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第一名

050415

變形 Chebyshev 尋蹤記
-連續函數與多倍角公式研究

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
高二 鄭宗弘	簡心怡

關鍵詞：切比雪夫多項式、連續函數、多倍角公式

得獎感言

我將這個獎獻予我在天上的父親。

首先，先感謝評審們給予我這個榮譽，也感謝科教館辦理此次活動，讓我有機會與全國數學好手交流想法，共同學習成長。這一路上也感謝很多人的幫助，特別是臺大齊震宇教授帶領我進入數學的領域。

我的題目不是組合、不是幾何。題目來源不是某個有趣的競賽、不是以往的得獎科展，也不是什麼好玩的趣味問題。所以，在比賽前完全不被看好。沒有人會相信一篇看起來如此離經叛道的作品，能進入全國賽，或甚至讓他的作者坐在書桌前打這篇文。這也顯示了：我們不用為了討好科展評審，而去做自己不喜歡的題目。只要你認為題目是有價值的，就不要懼怕其他人看不到你的亮點。

數學，影響了我很多。學習過程中，會發現：數學不僅是一門學科，他是一種生活態度。一種講求邏輯、創意、腳踏實地、毅力等的生活態度。而作數學研究與讀數學感覺起來又更不一樣。但研究必定是建立在學習之上。在這裡，我有幾個對未來做科展的學弟妹的建議：一、可以去學習一些高等的工具，相信你會有了看問題的不同角度。二、不要只讀你覺得你需要的。你可以明確知道你需要什麼資料的這件事情，基本上只會發生在非數學學科。三、平常多思考、多去學習環境找問題（不一定是學校，像我這篇作品就是在複習線性代數的時候，作習題推廣的），不管要不要拿他來比科展，或甚至要不要比科展。

這邊也懇請各位對這篇作品有興趣的學弟妹，提供一些關於解決未來展望的想法，目前非常需要與人討論（智商不夠好痛苦）。也很希望未來能看到有人能對這篇作品做出突破。這篇作品不意外的有許多錯誤，若想要相較正確的版本，請 e-mail 至 zonghongcheng@gmail.com。

最後，希望喜歡數學的各位，都能持續徜徉在數學中。

PS. 科普劇是很用心啦…但可以只演給國小生看嗎？

摘要

本研究考慮的主要問題：

若非常數之連續函數f滿足$\forall m \in \mathbb{N}, \exists P(x) \in \mathbb{C}[x]\ s.t.\ f(mx) = P(f(x))$，其形式應為何？

(一)、若考慮函數範圍為解析函數，則$f(x)$的形式必為下列三者之一：

(1).$ax^n + b$ (2). $ak^{x^n} + b$ (3). $acos(kx^n) + b$ ，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$

(二)、若將考慮函數範圍改為：連續函數$f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$，則$f(x)$之形式必為下列三者之一：

(1).$ax^k + b$ (2). $ak^{x^n} + b$ (3). $acos(kx^n) + b$ ，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$

壹、引言

105年10月，當我在閱讀 A.F.Beardon 所著之 Algebra and Geometry 時，於習題中發現了切比雪夫多項式的概念。切比雪夫多項式T_m為俄國數學家 Pafnuty Chebyshev 所提出，可被以下式子定義：$T_m\ (cos(\theta)) = cos(m\theta)$ 。

例如：$cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1$，故$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$cos(3\theta) = 4cos^3\ (\theta) - 3cos(\theta)$，故$T_3(x) = 4x^3 - 3x$，以此類推。

更一般的，對cos而言，任意多倍角公式會以多項式之形式存在，也就是：

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists P(x) \in \mathbb{C}[x]\ s.t.\ f(mx) = P(f(x))$$

看到這題習題後，我開始好奇：對於怎樣的函數會有多項式形式的多倍角公式呢？然而，經過簡單的驗證就可以發現，一般的函數是沒有這種多倍角公式的(比如說$sin(x)$，$sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$，無法寫成$\sin(x)$本身的多項式)。

本研究定義「多倍角條件」為「$\forall m \in \mathbb{N}, \exists P(x) \in \mathbb{C}[x]\ s.t.\ f(mx) = P(f(x))$」，並稱有多倍角條件的函數稱作「多倍角函數」。又將使得$f(mx) = P(f(x))$之多項式函數P寫作P_m^f(參、*名詞定義與性質介紹*中會詳談)。

以下舉例一些多倍角函數：

$\boxed{\text{(一)、單項式函數：} f_1(x) = x^n}$

此函數形式簡單，$f_1(mx)=(mx)^n=m^n x^n=m^n f_1(x)$，$P_m^{f_1}(x)=m^n x$，由於$m^n x$為一次單項式，可以利用此函數與其他函數合成作出其他多倍角函數（見(三)、(五)）。

(二)、指數函數：$f_2(x)=k^x$

此函數是被指數律$k^{xy}=(k^x)^y$所啟發。$f_2(mx)=k^{mx}=[f_2(x)]^m$，$P_m^{f_2}(x)=x^m$。

(三)、指數函數合成單項式函數：$f_3(x)=k^{x^n}$

受(一)之$P_m^f(x)$的形式所提示，我們發現透過合成運算，可以造出多倍角函數。

$f_3(mx)=k^{(mx)^n}=k^{m^n x^n}=(k^{x^n})^{m^n}=[f_3(x)]^{m^n}$，$P_m^{f_3}(x)=x^{m^n}$。

(四)、餘弦函數：$f_4(x)=\cos(kx)$

當$k=1$時，此函數即為本研究所受啟發之處(證明見 Property5.)。而當$k>0$，可視為$cos(x)$之伸縮變換，其顯然還是多倍角函數(詳見 Property3.)。一般地，當$k\in\mathbb{C}$，我們可以利用冪級數的相等證明其為多倍角函數。$P_m^{f_4}(x)=T_m(x)$。

(五)、餘弦函數合成單項式函數：$f_5(x)=\cos(kx^n)$

道理同(三)。$f_5(mx)=cos(k(mx)^n)=cos(km^n x^n)=T_{m^n}(f_5(x))$，$P_m^{f_5}(x)=T_{m^n}(x)$。

(六)、對數函數：$f_6(x)=log(x)$

此函數是被對數律$\log(xy)=\log(x)+\log(y)$所啟發。$f_6(mx)=\log(mx)=\log(x)+\log(m)=f_6(x)+\log(m)$，$P_m^{f_6}(x)=x+\log(m)$。

除了上述例子本身外，可以發現其合成一次函數後的函數也會是多倍角函數(詳見 Property4.)。而本研究的目的就在於找到並分類所有多倍角函數的形式。

貳、研究目的

找出並分類：以下考慮之函數範圍中的多倍角函數。

1. 定義域為$\mathbb{C}$之解析函數

2. 定義域為$[0,\infty)$之連續函數

參、名詞定義與性質介紹

Definition 1.

連續函數f**滿足多倍角條件**若且唯若$\forall m \in \mathbb{N}, \exists P(x) \in \mathbb{C}[x]\ s.t.\ f(mx) = P(f(x))$。並稱$f$為**多倍角函數**。

這是本研究主要的研究對象，我們希望：使$f(mx) = P(f(x))$的多項式函數$P(x)$唯一：

Property 1.

若非常數之連續函數f為多倍角函數，則使$f(mx) = P(f(x))$的多項式函數$P(x)$唯一。

Proof.

設存在(1)滿足多倍角條件的非常數之連續函數f 以及 (2)正整數m，使$P = P_1$及$P = P_2$時，均滿足$f(mx) = P(f(x))$。

因為f為一非常數之連續函數，故其值域元素有無限多個。又由於$P_1\big(f(x)\big) = P_2\big(f(x)\big) = f(mx)$，我們知多項式函數$P_2(x') - P_1(x')$有無限多個零點，故$P_1 = P_2$。 *Q.E.D.*

確定了P的唯一性後，我們就可以有以下定義：

Definition 2.

若連續函數f為多倍角函數，定義P_m^f為滿足$f(mx) = P(f(x))$之多項式P。特別地，當f為常數函數時，定義$P_m^f(x)$為該常數。

重要地，P_m^f於合成操作下可交換：

Property 2.

$$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}, P_{m_2}^f \circ P_{m_1}^f = P_{m_1}^f \circ P_{m_2}^f = P_{m_1 m_2}^f$$

Proof.

當f為常數函數，此等式顯然成立。

設其非常數函數，得$\left(P_{m_2}^f \circ P_{m_1}^f\right)\big(f(x)\big) = P_{m_2}^f\big(f(m_1 x)\big) = f(m_1 m_2 x) = P_{m_1 m_2}^f(f(x))$。

由 Property 1.知，$P_{m_2}^f \circ P_{m_1}^f = P_{m_1 m_2}^f$。同理可證$P_{m_1}^f \circ P_{m_2}^f = P_{m_1 m_2}^f$。 *Q.E.D.*

接下來，我要介紹兩個利用合成構造出多倍角函數的方式(以下之線性函數泛指形式為$y = ax$之函數，而$y = ax + b$之形式者以一次函數稱之。)：

Property 3.

若連續函數f為多倍角函數，則對於線性函數$M(x) = ax(a > 0)$，$f \circ M$也為一多倍角函數，且$P_m^{f \circ M} = P_m^f$。

Proof.

若連續函數f為多倍角函數，且$M(x) = ax(a > 0)$。

$\forall m \in \mathbb{N}$，$(f \circ M)(mx) = f(amx) = P_m^f\big((f \circ M)(x)\big)$，故$f \circ M$也為一多倍角函數，且$P_m^{f \circ M} = P_m^f$。 *Q.E.D.*

為求下一個方法講述上的簡潔及之後闡述的需要，我們在此先引入以下定義：

Definition 3.

若P為多項式函數，且L為一次函數，定義$\Phi_L(P)$為$L \circ P \circ L^{-1}$。

Property 4.

若連續函數f為多倍角函數，則對於所有的一次函數L，$L \circ f$也為多倍角函數，且$P_m^{L \circ f} = \Phi_L(P_m^f)$。

Proof.

若連續函數f為多倍角函數，且L為一次函數。

$\forall m \in \mathbb{N}$，$(L \circ f)(mx) = \big(L \circ P_m^f \circ L^{-1}\big)((L \circ f)(x)) = (\Phi_L(P_m^f))((L \circ f)(x))$，故$L \circ f$也為多倍角函數，且$P_m^{L \circ f} = \Phi_L(P_m^f)$。 *Q.E.D.*

以下為關於餘弦函數$cos(x)$的一些定義與基本性質：

Property 5. (well-known)

cos為多倍角函數。

Proof.

本性質證明利用數學歸納法。我們需要證明

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists P(x) \in \mathbb{C}[x] s.t. cos(mx) = P\big(cos(x)\big)$$

(1) 當$m=2$時，$cos(2x)=2\cos^2(x)-1$。

(2) 假設當$m<k$時，多項式函數P均存在，利用與 Property1.類似之證明方式，即可發現其唯一性。因此，我們可以令$\widetilde{T_{k'}}$為$m=k'$時滿足$cos(k'x)=P\big(cos(x)\big)$之多項式函數$P$(此句話並無假設$\widetilde{T_{k'}}$存在)。

我們宣稱$\widetilde{T_k}$存在，且$\widetilde{T_k}(x)=2x\widetilde{T_{k-1}}(x)-\widetilde{T_{k-2}}(x)$。

對於任意正整數$k\geq 2$，我們都有以下的等式：

$$\alpha^k+\beta^k=(\alpha+\beta)(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})-\alpha\beta(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2})$$

若將$\alpha=cos(x)+isin(x)$、$\beta=cos(x)-isin(x)$代入上式，可得：

$$\big(cos(kx)+isin(kx)\big)+\big(cos(kx)-isin(kx)\big)=$$

$$2\cos(x)\left[\Big(cos\big((k-1)x\big)+isin\big((k-1)x\big)\Big)+\Big(cos\big((k-1)x\big)-isin\big((k-1)x\big)\Big)\right]$$

$$-\left[\Big(cos\big((k-2)x\big)+isin\big((k-2)x\big)\Big)+\Big(cos\big((k-2)x\big)-isin\big((k-2)x\big)\Big)\right]$$

簡化上式，得$cos(kx)=2\cos(x)\cos\big((k-1)x\big)-cos\big((k-2)x\big)$，意即$\widetilde{T_k}$存在，且$\widetilde{T_k}(x)=2x\widetilde{T_{k-1}}(x)-\widetilde{T_{k-2}}(x)$。

由於(1)、(2)及數學歸納法，故欲證性質成立。 *Q.E.D.*

因為cos為多倍角函數，故我們可以有以下定義：

<u>Definition 4.</u>

第m個切比雪夫多項式T_m可由$T_m\,(cos(\theta))=cos(m\theta)$ 定義，意即$T_m=P_m^{cos}$。

以下為切比雪夫多項式確切之形式：

<u>Property 6.</u> (B.Sinwell,[4])

若$m\in\mathbb{N}$，則$T_m(x)=\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}(-1)^n2^{m-(2n+1)}a(m,n)x^{m-2n}$，其中$a(m,n)=\frac{\binom{2n}{n}\binom{m}{2n}}{\binom{m-1}{n}}$。故若正整數$m$為奇數，則$T_m(x)$之奇次項係數均不為0、偶次項係數均為0，因此其為奇函數；若正整數m為偶數，則$T_m(x)$為之偶次項係數均不為0、奇次項係數均為0，因此其為偶函數。

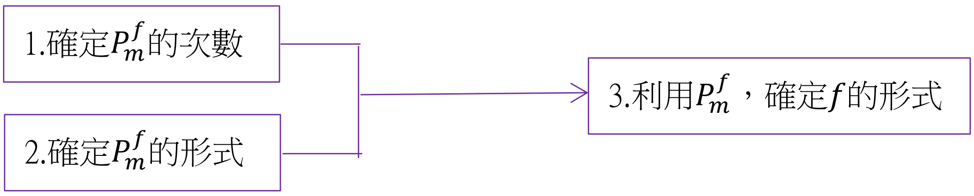
肆、研究過程與結果

面對這個問題時，最初要決定的是考慮函數範圍。我們剛開始會想先把一切限制都加上，這樣在找尋、分類函數時，就有更多的依據跟操作可用。基於這個想法，我們首先考慮**解析函數**。

接下來，利用在解析函數的啟發與經驗，去把問題擴展至**連續函數**。由於我們設定的多倍角條件，關心的是其在同方向上、距離整數倍的點，因此，我們將所關心之函數的定義域定為$[0,\infty)$。

(一)、解析函數

此部分的研究流程圖如下：



1. 確定P_m^f的次數

在實際寫出次數前，我們先引入幾個引理，用以輔助之後的證明：

Lemma 1.

若函數$d:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$滿足以下條件：

(1)$\forall m_1,m_2\in\mathbb{N}, d(m_1)d(m_2)=d(m_1m_2)$ (2)$\forall m_1,m_2\in\mathbb{N}, m_1\ge m_2\Rightarrow d(m_1)\ge d(m_2)$

則存在$s\in\mathbb{R}$使得$d(m)=m^s$，其中s僅隨d變動而不隨m變動。.

Proof.

設函數$d:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$滿足以下條件：

(1) $\forall m_1,m_2\in\mathbb{N}, d(m_1)d(m_2)=d(m_1m_2)$ (2) $\forall m_1,m_2\in\mathbb{N}, m_1\ge m_2\Rightarrow d(m_1)\ge d(m_2)$

對於任意$m_1\ge m_2$及$n\in\mathbb{N}$，都存在非負整數n'使$m_1^{n'+1}\ge m_2^n\ge m_1^{n'}$，因此我們得到

$(n'+1)\,log(m_1)\ge nlog(m_2)\ge n'\log(m_1)$，故$\frac{n'+1}{n}\ge\frac{log(m_2)}{log(m_1)}\ge\frac{n'}{n}$---(A)。

我們由條件(2)可知，$d(m_1^{n'+1})\ge d(m_2^n)\ge d(m_1^{n'})$。接下來，又可以由條件(1)知

$d(m_1)^{n'+1}\ge d(m_2)^n\ge d(m_1)^{n'}$。

因此我們可得$(n'+1)\log\big(d(m_1)\big)\ge n\log(d(m_2))\ge n'\log(d(m_1))$，得與(A)式相似之

$\frac{n'+1}{n}\ge\frac{log(d(m_2))}{log(d(m_1))}\ge\frac{n'}{n}$---(B)。

綜合(A)、(B)兩式可知，對任意$n \in \mathbb{N}$，$\left|\frac{\log(d(m_2))}{\log(d(m_1))}-\frac{\log(m_2)}{\log(m_1)}\right| \leq \frac{1}{n}$，得$\frac{\log(d(m_2))}{\log(d(m_1))}=\frac{\log(m_2)}{\log(m_1)}$，故存在一不隨$m$變動之$s \in \mathbb{R}$使得$log(d(m)) = slog(m)$。 *Q.E.D.*

<u>Lemma 2.</u> (well-known)

若對於所有的$m \in \mathbb{N}$，$m^s \in \mathbb{N}$，則s為非負整數。

有了以上兩個引理，我們就能如下定理：

<u>Theorem 1.</u>

若非常數之連續函數f滿足多倍角條件，且$m_1 < m_2 \Rightarrow deg(P_{m_1}^f) \leq \deg(P_{m_2}^f)$，則存在非負整數$s$使得$deg(P_m^f) = m^s$。

<u>*Proof.*</u>

假設多倍角函數f滿足$m_1 < m_2 \Rightarrow deg(P_{m_1}^f) \leq deg(P_{m_2}^f)$。

將函數$d: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$利用$d(m) = deg(P_m^f)$定義。由 Property 2.知$d(m_1)d(m_2) = d(m_1m_2)$，又由假設知$m_1 < m_2 \Rightarrow d(m_1) \leq d(m_2)$。

故由 Lemma 1.可知：存在$s \in \mathbb{R}$使得$d(m) = deg(P_m^f) = m^s$。由於$deg(P_m^f)$必為正整數，故又可由 Lemma 2.知s為非負整數。 *Q.E.D.*

我們可發現上述的s對f為很重要的一個數，也便於我們之後進行分類，因此我們先引入了以下定義。

<u>Definition 5.</u>

若非常數之多倍角函數f，定義$s_f \in \mathbb{N}_0$(不保證存在性)為滿足$deg(P_m^f) = m^s$之s。

<u>Theorem 2.</u>

若非常數之連續函數$f: \mathbb{C}, [0,\infty) \to \mathbb{C}$滿足多倍角條件$(a > 0)$，且$\limsup_{x\to\infty}(\max_{|z|=x}|f(z)|) = \infty$，則$m_1 < m_2 \Rightarrow deg(P_{m_1}^f) \leq \deg(P_{m_2}^f)$。

<u>*Proof.*</u>

假設非常數連續函數$f: \mathbb{C}, [0,\infty), (0,\infty) \to \mathbb{C}$滿足多倍角條件$(a > 0)$，且$\limsup_{x\to\infty}(\max_{|z|=x}|f(z)|) = \infty$。

再假設存在$m_1 < m_2$使得$deg(P_{m_1}^f) > \deg(P_{m_2}^f)$。因此，存在$\alpha \in \mathbb{R}$滿足以下條件：

$$|w| \geq \alpha, |w| \geq |w'| \Rightarrow \left|P_{m_1}^f(w)\right| > \max(|w|, \left|P_{m_2}^f(w')\right|)$$

找出$r \in \mathbb{R}$滿足$\max_{|z|\leq r}|f(z)| > \alpha$。令$M = \max_{|z|\leq r}|f(z)|$。

可發現$\max_{|z|\leq m_1 r}|f(z)| \geq \left|P_{m_1}^f(M)\right| > \left|\max_{|w|\leq|M|}\left(P_{m_2}^f(w)\right)\right| \geq \max_{|z|\leq m_2 r}|f(z)|$，得矛盾。

Q.E.D.

Corollary 1.

若非常數之解析函數f滿足多項式條件，則$deg\left(P_m^f\right) = m^{s_f}$。

Proof.

由 Liouville Theorem 可知，f無界，故$\limsup_{x\to\infty}(\max_{|z|=x}|f(z)|) = \infty$。又由 Theorem 2.知$m_1 < m_2 \Rightarrow deg\left(P_{m_1}^f\right) \le \deg\left(P_{m_2}^f\right)$；由 Theorem 1.存在非負整數$s$使得$deg\left(P_m^f\right) = m^s$，$s_f = s$，證畢。 *Q.E.D.*

2. 確定P_m^f的形式

Lemma 3. (J.F.Ritt[3]，Theorem)

若$P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]$，次數分別為$m$、$n \ge 2$，且在合成下可交換，則存在一次函數$L$，使得以下三命題會有一成立：

(1). $\Phi_L(P)(x) = ax^m$、$\Phi_L(Q)(x) = bx^n$，$a, b \ne 0$。

(2). $\Phi_L(P)(x) = \pm T_m$、$\Phi_L(Q)(x) = \pm T_n$。

(3). $\Phi_L(P) = \varepsilon_1 h^{\overline{\frac{m}{deg(h)}}}$、$\Phi_L(Q) = \varepsilon_2 h^{\overline{\frac{n}{deg(h)}}}$($h$之上標表合成之意)，其中$h(x) = xp(x^r)$、$r \in \mathbb{N}$、$p(x) \in \mathbb{C}[x]$、$\varepsilon_1^r = \varepsilon_2^r = 1$。

Definition 6.

我們稱次數為$m \ge 2$的多項式函數P(對於L)滿足

(1). Ritt 第一條件，若存在一次式$L(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$\Phi_L(P)(x) = ax^m$。

(2). Ritt 第二條件，若存在一次式$L(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$\Phi_L(P)(x) = \pm T_m$。

(3). Ritt 第三條件(對h)，若存在一次式$L(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$\Phi_L(P)(x) = \varepsilon h^{\overline{\frac{m}{deg(h)}}}$，其中$h(x) = xp(x^r)$、$r \in \mathbb{N}$、$p(x) \in \mathbb{C}[x]$、$\varepsilon^r = 1$。

Theorem 3.

若非常數之連續函數f滿足多倍角條件，且$deg\left(P_m^f\right) = m^{s_f} (m > 1)$，則$P_m^f$均為一次函數，或滿足 Ritt 第一條件或 Ritt 第二條件。

Proof.

假設非常數之連續函數f滿足多倍角條件，且$deg\left(P_m^f\right) = m^{s_f}$。

(1)當$s_f = 0$時，P_m^f為一次式。

(2)當$s_f \geq 1$時，由於P_m^f與P_{m+1}^f合成可交換，故P_m^f滿足 Ritt 第一、第二或第三條件。

若P_m^f不滿足 Ritt 第一或第二條件，則存在一次函數L，使得：$\Phi_L\left(P_m^f\right)(x) = \varepsilon_1 h^{\frac{m^{s_f}}{deg(h)}}$、$\Phi_L\left(P_{m+1}^f\right)(x) = \varepsilon_2 h^{\frac{(m+1)^{s_f}}{deg(h)}}$，其中 $h(x) = xp(x^r)$、$r \in \mathbb{N}$、$p(x) \in \mathbb{C}[x]$、$\varepsilon_1^r = \varepsilon_2^r = 1$。

$\frac{m^{s_f}}{deg(h)}$、$\frac{(m+1)^{s_f}}{deg(h)} \in \mathbb{N}$，但$m^{s_f}$、$(m+1)^{s_f}$互質。得$deg(h) = 1$。故$deg\left(P_m^f\right) = 1$，$s_f = 0$，得矛盾。 *Q.E.D.*

Corollary 2.

若非常數之解析函數f滿足多項式條件，則$P_m^f(m > 1)$為一次函數，或滿足 Ritt 第一條件或 Ritt 第二條件。

3. 利用P_2^f，確定f的形式

(1). P_2^f為一次函數

Lemma 4.

若$\tilde{L}(x) = \alpha x + \beta(\alpha \neq 0,1)$為一次函數，則存在一次函數$L$使得$\Phi_L\left(\tilde{L}\right)(x) = \alpha x$。

Proof.

假設$\tilde{L}(x) = \alpha x + \beta(\alpha \neq 1)$為一次函數，且$L(x) = x + b$。

$$\Phi_L\left(\tilde{L}\right)(x) = \left(L \circ \tilde{L} \circ L^{-1}\right)(x) = (\alpha(x - b) + \beta) + b = \alpha x + (\beta + b(1 - \alpha))$$

令$b = -\frac{\beta}{1-\alpha}$，證畢。 *Q.E.D.*

Theorem 4.

若非常數之解析函數f滿足多項式條件、P_2^f為一次函數，則$f(x) = ax^n + b$，其中$a, b \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$。

Proof.

假設非常數之解析函數f滿足多項式條件、P_2^f為一次函數。令$P_2^f(x) = \alpha x + \beta$，我們先將$\alpha$、$\beta$分類討論：

(a) $\alpha = 1$、$\beta = 0$

f為常數函數，否則可以選出兩個相異的值域元素$f(x) \neq f(x')$。由於f連續，$f(0)$為以下兩個數列的極限：$f(x), f\left(\frac{x}{2}\right), f\left(\frac{x}{4}\right), f\left(\frac{x}{8}\right) \ldots$及$f(x'), f\left(\frac{x'}{2}\right), f\left(\frac{x'}{4}\right), f\left(\frac{x'}{8}\right) \ldots$，又由於$P_2^f(x) = x$，我們也可知$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \cdots$及$f(x') = f\left(\frac{x'}{2}\right) = \cdots$，得$f(0) = f(x) = f(x')$，矛盾。由於常數函數也不在我們考慮範圍，故當$\alpha = 1$、$\beta = 0$時，沒有符合條件之函數。

(b) $\alpha = 1$、$\beta \neq 0$

$f(0)$為下列數列的極限：$f(x), f\left(\frac{x}{2}\right), f\left(\frac{x}{4}\right), f\left(\frac{x}{8}\right) \ldots$，由於$P_2^f(x) = x + \beta$，故我們可以將數列重寫為$f(x), f(x) - \beta, f(x) - 2\beta, f(x) - 3\beta \ldots$，此數列發散。故當$\alpha = 1$、$\beta \neq 0$時，沒有符合條件之函數。

(c) $\alpha \neq 0,1$

根據 Lemma 4.，我們可以找到一次函數L使得$\Phi_L(P_2^f)(x) = \alpha x$。再由 Property 4.知，$L \circ f$也為多倍角函數且$P_2^{L \circ f}(x) = \Phi_L(P_2^f)(x) = \alpha x$。令$g = L \circ f$。我們知$P_2^g(g(x)) = \alpha g(x) = g(2x)$，且我們知$g$解析。

先將$\alpha g(x) = g(2x)$以$x = 0$代入，由於$\alpha \neq 0,1$，故$g(0) = 0$。又由$\alpha g(x) = g(2x)$可得$\alpha g^{(n)}(x) = 2^n g^{(n)}(2x)$。將$x = 0$代入，得$\alpha g^{(n)}(0) = 2^n g^{(n)}(0)$。若$\alpha \neq 2^n$，則$g^{(n)}(0) = 0$。故存在$\tilde{n} \in \mathbb{N}$使得$\alpha = 2^{\tilde{n}}$，否則$g(x) = 0$為常數函數。

若$\alpha = 2^{\tilde{n}}$，且$g^{(\tilde{n})}(0) = \frac{\bar{a}}{\tilde{n}!}$，則$g(x) = \bar{a}x^n$。由$g = L \circ f$得知，$f(x) = ax^n + b$，其中$a, b \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$。

綜合(a)、(b)、(c)，原命題得證。 *Q.E.D.*

(2). P_2^f滿足 Ritt 第一條件

<u>Lemma 5.</u>

若s_f存在，則$s_{L \circ f}$存在且$s_{L \circ f} = s_f$。

<u>Proof.</u>

假設s_f存在。由 Property 4.知，$L \circ f$也為多倍角函數，且

$$P_m^{L\circ f} = \Phi_L\left(P_m^f\right) = L \circ P_m^f \circ L^{-1}$$

故

$$\deg\left(P_m^{L\circ f}\right) = \deg\left(\Phi_L\left(P_m^f\right)\right) = \deg\left(L \circ P_m^f \circ L^{-1}\right)$$
$$= \deg(L) \times \deg\left(P_m^f\right) \times \deg\left(L^{-1}\right) = \deg\left(P_m^f\right) = m^{s_f}$$ *Q.E.D.*

Theorem 5.

若非常數之解析函數f滿足多項式條件、P_2^f滿足 Ritt 第一條件，則 $f(x) = ak^{x^n} + b$，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$。

Proof.

假設非常數之解析函數f滿足多項式條件，且P_2^f滿足 Ritt 第一條件。

根據 Ritt 第一條件之定義，我們可以找到一次函數L，及$\alpha \in \mathbb{C}$使得$\Phi_L\left(P_2^f\right)(x) = \alpha x^{2^{s_f}}$。再由 Property 4.知，$L \circ f$也為多倍角函數且$P_2^{L\circ f}(x) = \Phi_L(P_2^f)(x) = \alpha x^{2^{s_f}}$。令$g = L \circ f$。由 Lemma 5.之$s_g$存在，且$s_g = s_f$。

我們宣稱$g(0) \neq 0$，否則存在$r \in \mathbb{R}^+$，使得$sup\left(|g|\left(B_r(0)\right)\right) < |\alpha|^{\frac{-1}{2^{s_g}-1}}$，得$sup\left(|g|\left(B_{2r}(0)\right)\right) < |\alpha|\left(|\alpha|^{\frac{-1}{2^{s_g}-1}}\right)^{2^{s_g}} = |\alpha|^{\frac{-1}{2^{s_g}-1}}$。重複此論證，可得$|\alpha|^{\frac{-1}{2^{s_g}-1}}$為$|g|(\mathbb{C})$的一個上界，因此$g$非解析函數，矛盾。

接下來，可以發現到$P_2^g(g(0)) = g(0)$、$\alpha[g(0)]^{2^{s_g}} = g(0)$，得$[g(0)]^{2^{s_g}-1} = \frac{1}{\alpha}$。

已知$P_2^g\left(g(x)\right) = g(2x) = \alpha[g(x)]^{2^{s_g}} \ldots (A)$，微分再代入$x = 0$得：

$$2g'(0) = 2^{s_g}\alpha[g(0)]^{2^{s_g}-1}g'(0) = 2^{s_g}g'(0) \ldots (B)$$

若$s_g = 1$，則$g'(0)$不可被確定。若否，以下利用數學歸納法證明：當$w < s_g$時，$g^{(w)}(0) = 0$。

(a) 若$s_g > 1$，由上述(B)式之$2g'(0) = 2^{s_g}g'(0)$得$g'(0) = 0$。

(b) 假設當$s_g > j$時，$g'(0), g''(0), g'''(0) \ldots g^{(j)}(0) = 0$。

當$s_g > j + 1$時，顯然也有$g'(0), g''(0), g'''(0) \ldots g^{(j)}(0) = 0$。

將(A)式微分$(j + 1)$次、令$h(x) = [g(x)]^{2^{s_g}-1}$後，我們可以寫出：

$$2^{j+1}g^{(j+1)}(2x)=2^{s_g}\alpha\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}h^{(t)}(x)g^{((j-t)+1)}(x)$$

代入$x=0$得$2^{j+1}g^{(j+1)}(0)=2^{s_g}g^{(j+1)}(0)$，由於$s_g>j+1$，故$g^{(j+1)}(0)$，證畢。

從上述的證明過程也可發覺：當$w=s_g$時，$g^{(w)}(0)$之值無法被確定。以下我們再次利用數學歸納法證明：$g(0),g^{(s_g)}(0)$被決定後，函數會被隨之決定。

由於其解析性，我們只需證明$g^{(w)}(0)(w>s_g)$會被決定即可。

(a) 若$w=s_g+1$，

$$2^{s_g+1}g^{(s_g+1)}(2x)=2^{s_g}\alpha\sum_{t=0}^{s_g}\binom{s_g}{t}h^{(t)}(x)g^{(s_g-t+1)}(x)$$

代入$x=0$得$2^{s_g+1}g^{(s_g+1)}(0)=2^{s_g}g^{(s_g+1)}(0)+s_gh'(0)g^{(s_g)}(0)$，由於$h'(x)$可以寫作$g(x)$及$g'(x)$的多項式，故$g^{(s_g+1)}(0)$可被$g(0),g^{(s_g)}(0)$決定之。

(b) 假設當$w=s_g+l(0<l\le j)$時，$g^{(w)}(0)$都有其確定之值。

令$w=s_g+j+1$，

$$2^{s_g+j+1}g^{(s_g+j+1)}(2x)=2^{s_g}\alpha\sum_{t=0}^{s_g+j}\binom{s_g+j}{t}h^{(t)}(x)g^{(s_g+j-t+1)}(x)$$

代入$x=0$得

$$2^{s_g+j+1}g^{(s_g+j+1)}(0)=2^{s_g}\alpha\sum_{t=0}^{j+1}\binom{s_g+j}{t}h^{(t)}(0)g^{(s_g+j+1-t)}(0)$$

由於$h^{(t)}(x)(t\le j+1)$可以寫成$g(x),g'(x)\dots,g^{(j+1)}(x)$之多項式，且$j+1\le s_g+j$，故$h^{(t)}(x)$都有確定之值。因此由上式可知$g^{(s_g+j+1)}(0)$也會被$g(0),g^{(s_g)}(0)$決定。

由上述證明，也可發現：$g^{(s_g)}(0)\neq 0$，否則$g^{(w)}(0)(w>s_g)=0$，得g為常數函數，得矛盾。

綜上所述，只要我們確定以下三數之值：(a) s_g、(b) $g(0)\neq 0$、(c) $g^{(s_g)}(0)\neq 0$，函數本身就可隨之被決定。

以下，觀察函數$\tilde{g}(x)=\tilde{a}k^{x^n}$，其有以下性質：(a) $s_g=n$、(b) $g(0)=\tilde{a}$、(c) $g^{(s_g)}(0)=$

$n!\,\tilde{a}\log(k)$，因此可經由適當選取$\tilde{a}$、k、n，可發現函數$\tilde{g}(x)$會符合任意給定的(a) s_g、(b) $g(0) \neq 0$、(c) $g^{(s_g)}(0) \neq 0$，因此$g(x) = \tilde{a}k^{x^n}$，又因為$g = L \circ f$得知，$f(x) = ak^{x^n} + b$，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$。 *Q.E.D.*

(3). P_2^f滿足 Ritt 第二條件

<u>Lemma 6.</u>

$$T_n'(1) = n^2$$

<u>*Proof.*</u>

以下利用數學歸納法證明。

(a) 當$n = 1$時，$T_1(x) = x$、$T_1'(x) = 1$，$T_1'(1) = 1$

當$n = 2$時，$T_2(x) = 2x^2 - 1$、$T_2'(x) = 4x$，$T_2'(1) = 4$

(b) 假設當$n \leq k$時，$T_n'(1) = n^2$。令$n = k + 1$，由 Property5.的證明中可知$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$。

微分得$T_n'(x) = 2xT_{n-1}'(x) + 2T_{n-1}(x) - T_{n-2}'(x)$，代入$x = 1$得，

$$T_n'(1) = 2T_{n-1}'(1) - T_{n-2}'(1) + 2T_{n-1}(1) = 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2T_{n-1}(\cos(0))$$

$$= 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2T_{n-1}(\cos(0)) = n^2 - 2 + 2\cos(0) = n^2$$

綜合(a)、(b)可知，原命題成立。 *Q.E.D.*

<u>Theorem 6.</u>

若非常數之解析函數f滿足多項式條件、P_2^f滿足 Ritt 第二條件，則$f(x) = a\cos(kx^n) + b$，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$。

<u>*Proof.*</u>

假設非常數之解析函數f滿足多項式條件、P_2^f滿足 Ritt 第二條件。

根據 Ritt 第二條件之定義，我們可以找到一次函數L，及$\alpha \in \mathbb{C}$使得$\Phi_L\left(P_2^f\right) = T_{2^{s_f}}$。再由 Property 4.知，$L \circ f$也為多倍角函數且$P_2^{L \circ f} = \Phi_L(P_2^f) = T_{2^{s_f}}$。令$g = L \circ f$。由 Lemma 5.之$s_g$存在，且$s_g = s_f$。

首先，我們討論$g(0)$，由於cos是滿射，故可寫作$g(0) = \cos(\theta)$，$T_{2^{s_g}}(\cos(\theta)) =$

$\cos(2^{s_g}\theta)=\cos(\theta)$，由和差化積得：$\cos(2^{s_g}\theta)-\cos(\theta)=-2\sin(\frac{2^{s_g}+1}{2}\theta)\sin(\frac{2^{s_g}-1}{2}\theta)$。

因此可得θ為2π的有理數倍，稱$\theta=\frac{p}{q}(2\pi)(p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N})$。可證明$\Phi_L\left(P_q^f\right)=T_{q^{s_f}}$(見下述之 Corollary 6.)，由此可知$T_{q^{s_f}}(\cos(\theta))=\cos\left(q^{s_f}\left(\frac{p}{q}(2\pi)\right)\right)=\cos(\theta)=g(0)=1$。

有了$g(0)$，我們接下來要問的，就是各階微分值了。以下利用數學歸納法證明：當$w<2s_g$時，$g^{(w)}(0)=0$。

(a) 若$2s_g>1$，將$g(2x)=T_{2^{s_g}}(g(x))$微分得$2g'(2x)=g'(x)T'_{2^{s_g}}(g(x))$，代入$x=0$得得$2g'(0)=g'(0)T'_{2^{s_g}}(1)=2^{2s_g}g'(0)$。因此，$g'(0)=0$。

(b) 假設當$2s_g>j$時，$g'(0),g''(0),g'''(0)\ldots g^{(j)}(0)=0$。

當$2s_g>j+1$時，顯然也有$g'(0),g''(0),g'''(0)\ldots g^{(j)}(0)=0$。

將$g(2x)=T_{2^{s_g}}(g(x))$微分$(j+1)$次、令$h(x)=T'_{2^{s_g}}(g(x))$後，我們可以寫出：

$$2^{j+1}g^{(j+1)}(2x)=\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}h^{(t)}(x)g^{(j+1-t)}(x)$$

代入$x=0$得$2^{j+1}g^{(j+1)}(0)=2^{2s_g}g^{(j+1)}(x)$，故得$g^{(j+1)}(x)=0$。

從上述的證明過程也可發覺：當$w=2s_g$時，$g^{(w)}(0)$之值無法被確定。以下我們再次利用數學歸納法證明：$g(0),g^{(2s_g)}(0)$被決定後，函數會被隨之決定。

由於其解析性，我們只需證明$g^{(w)}(0)(w>2s_g)$會被決定即可。

(a) 若$w=2s_g+1$，

$$2^{2s_g+1}g^{(2s_g+1)}(2x)=\sum_{t=0}^{2s_g}\binom{2s_g}{t}h^{(t)}(x)g^{(2s_g-t+1)}(x)$$

代入$x=0$得$2^{2s_g+1}g^{(2s_g+1)}(0)=2^{2s_g}g^{(2s_g+1)}(0)+2s_gh'(0)g^{(2s_g)}(0)$，由於$h'(x)$可以寫作$g(x)$及$g'(x)$的多項式，故$g^{(2s_g+1)}(0)$可被$g(0),g^{(2s_g)}(0)$決定之。

(b) 假設當$w=2s_g+l(0<l\leq j)$時，$g^{(w)}(0)$都有其確定之值。

令$w=2s_g+j+1$，

$$2^{2s_g+j+1}g^{(2s_g+j+1)}(2x) = \sum_{t=0}^{2s_g+j} \binom{2s_g+j}{t} h^{(t)}(x)g^{(2s_g+j+1-t)}(x)$$

代入$x = 0$得

$$2^{2s_g+j+1}g^{(2s_g+j+1)}(0) = \sum_{t=0}^{j+1} \binom{2s_g+j}{t} h^{(t)}(0)g^{(2s_g+j+1-t)}(0)$$

由於$h^{(t)}(x)(t \leq j+1)$可以寫成$g(x), g'(x) \dots, g^{(j+1)}(x)$之多項式，由於$j+1 < 2s_g + j$，故$h^{(t)}(x)$都有確定之值。因此由上式可知$g^{(2s_g+j+1)}(0)$也會被$g(0), g^{(2s_g)}(0)$決定。

由上述證明，也可發現：$g^{(2s_g)}(0) \neq 0$，否則$g^{(w)}(0)\left(w > 2s_g\right) = 0$，得$g$為常數函數，得矛盾。

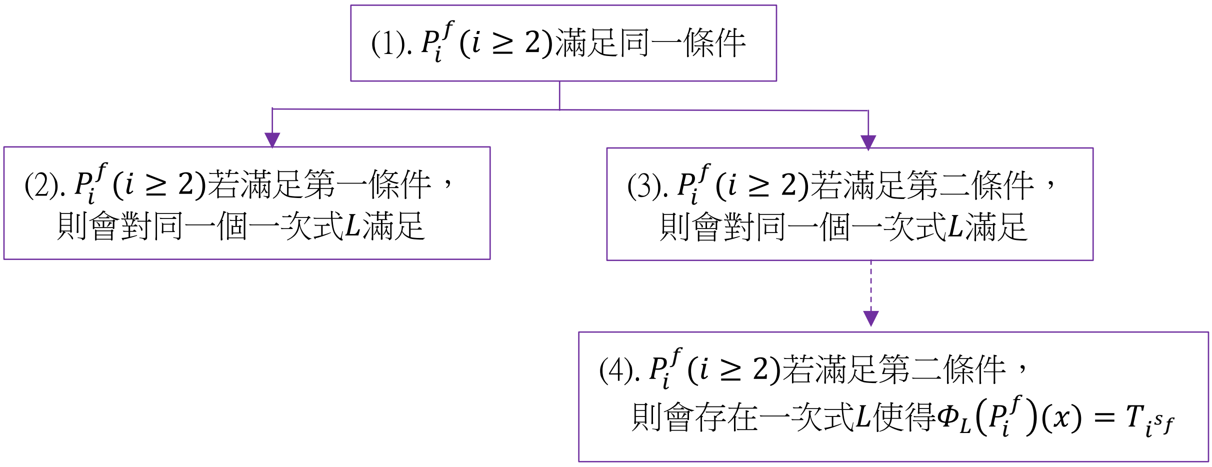
綜上所述，只要我們確定以下二數之值： (a) s_g、 (b) $g^{(2s_g)}(0) \neq 0$，函數本身就可隨之被決定。

以下，觀察函數$\tilde{g}(x) = \cos(kx^n)$，其有以下性質：(a) $s_g = n$、 (b) $g^{(2s_g)}(0) = -\frac{k^2}{2}(2n)!$，因此可經由適當選取$k$、$n$，可發現函數$\tilde{g}(x)$會符合任意給定的(a) s_g、(b) $g^{(2s_g)}(0) \neq 0$，因此$g(x) = \cos(kx^n)$，又因為$g = L \circ f$得知，$f(x) = a\cos(kx^n) + b$，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$。

Q.E.D.

(二) 定義域為$[\mathbf{0},\infty)$之連續函數

在本節的開頭，為了補足 Theorem 5.的證明，以及以下討論的需要，會先對 Ritt 條件作一些相關的討論，在本段的最後，會證明：若$s_f \geq 1$，$P_i^f(i \geq 2)$會對同一個一次式L滿足同一 Ritt 條件。大概證明流程如下：



(1). 若$\boldsymbol{s_f} \geq \mathbf{1}$，$\boldsymbol{P_i^f}(\boldsymbol{i} \geq \mathbf{2})$滿足同一條件

由 Theorem 3.知，若$s_f \geq 1$，$P_i^f(i \geq 2)$滿足 Ritt 第一或第二條件。對於$P_i^f(i \geq 2)$，我們有以下推論。

<u>Lemma 7.</u>

$P_i^f(i \geq 2)$不同時滿足 Ritt 第一及第二條件。

<u>*Proof.*</u>

設存在多倍角函數f與 $i \geq 2$使得P_i^f同時滿足 Ritt 第一及第二條件。

令P_i^f對L_1滿足 Ritt 第一條件；對L_2滿足 Ritt 第二條件。意即存在$a \in \mathbb{C}$，使得$\Phi_{L_1}\left(P_i^f\right)(x) = ax^{\deg(P_i^f)}$(將其令為$p(x)$)、$\Phi_{L_2}\left(P_i^f\right) = \pm T_{\deg(P_i^f)}$。得$P_i^f = \Phi_{L_1^{-1}}(p) = \Phi_{L_2^{-1}}(\pm T_{\deg(P_i^f)})$、$\pm T_{\deg(P_i^f)}(x) = \Phi_{L_2}\left(\Phi_{L_1^{-1}}(p)\right)(x) = \Phi_{L_2 \circ L_1^{-1}}(p)(x)$

左式非單項式，且由 Property 6.知：第$(\deg(P_i^f) - 1)$次項為0。但右式當$L_2 \circ L_1^{-1}$為單項式時，也為單項式；當$L_2 \circ L_1^{-1}$非單項式時第$(\deg(P_i^f) - 1)$次項不為0，得矛盾。 *Q.E.D.*

<u>Corollary 3.</u>

若$s_f \geq 1$，$P_i^f(i \geq 2)$滿足同一條件。

<u>*Proof.*</u>

若$s_f \geq 1$，且P_2^f滿足 Ritt 第一條件，由 Lemma 7.得P_2^f不滿足 Ritt 第二條件。又可由

Lemma 3.導出：P_3^f滿足 Ritt 第一條件。利用數學歸納法即可證出。P_2^f滿足 Ritt 第二條件時，同理可證。 *Q.E.D.*

(2). $P_i^f(i \geq 2)$若滿足 Ritt 第一條件，則會對同一個一次式L滿足

<u>Lemma 8.</u>

若多項式P對L滿足 Ritt 第一條件，則其對$kL(k \in \mathbb{C})$也會滿足 Ritt 第一條件。

<u>*Proof.*</u>

設多項式P對L滿足 Ritt 第一條件，因此我們得出$L \circ P \circ L^{-1}(x) = ax^{\deg(P)}(a \in \mathbb{C})$。令$L(x) = \alpha x + \beta$，可得$P(x) = \frac{1}{\alpha}\left(a(\alpha x + \beta)^{\deg(P)}\right) - \frac{\beta}{\alpha}$，$kL \circ P \circ (kL)^{-1}(x) = ka\left(\frac{1}{k}x\right)^{\deg(P)} = \frac{a}{k^{\deg(P)-1}}x^{\deg(P)}$，因此其對$kL(k \in \mathbb{C})$也滿足 Ritt 第一條件。 *Q.E.D.*

<u>Corollary 4.</u>

若$P_i^f(i \geq 2)$均滿足 Ritt 第一條件，則會對同一個一次式L滿足。

<u>*Proof.*</u>

若$P_i^f(i \geq 2)$均滿足 Ritt 第一條件。由 Lemma 3.，我們假設P_2^f與P_3^f對L_1滿足 Ritt 第一條件；P_3^f與P_4^f對L_2滿足 Ritt 第一條件。

因此，P_3^f同時對L_1及L_2滿足 Ritt 第一條件。存在$a_1, a_2 \in \mathbb{C}$，使得$\Phi_{L_1}(P_3^f)(x) = a_1x^{\deg(P_3^f)} \coloneqq p_1(x)$、$\Phi_{L_2}(P_3^f)(x) = a_2x^{\deg(P_3^f)} \coloneqq p_2(x)$，得$P_3^f = \Phi_{L_1^{-1}}(p_1) = \Phi_{L_2^{-1}}(p_2)$，故我們有$a_1x^{\deg(P_3^f)} = \Phi_{L_1}\left(\Phi_{L_2^{-1}}(p_2)\right)(x) = \Phi_{L_1 \circ L_2^{-1}}(p_2)(x)$，可觀察$L_1 \circ L_2^{-1}$必為單項式，否則右式必不為單項式，會得矛盾。因此，$L_1 = qL_2(q \in \mathbb{C})$。由 Lemma 8.可得，$P_4^f$也對$L_1$滿足 Ritt 第一條件。 *Q.E.D.*

(3). $P_i^f(i \geq 2)$若滿足 Ritt 第二條件，則會對同一個一次式L滿足

<u>Lemma 9.</u>

若多項式P對L滿足 Ritt 第二條件，則其對$-L$也會滿足 Ritt 第二條件。

<u>*Proof.*</u>

設多項式P對L滿足 Ritt 第二條件，則$P = L^{-1} \circ T_{\deg(P)} \circ L$。$\Phi_{-L}(P) = (-L) \circ P \circ (-L)^{-1} = (-L) \circ \left(L^{-1} \circ T_{\deg(P)} \circ L\right) \circ (-L)^{-1} = -T_{\deg(P)} \circ (-id) = \pm T_{\deg(P)}$。 *Q.E.D.*

<u>Corollary 5.</u>

若$P_i^f(i \geq 2)$均滿足 Ritt 第二條件，則會對同一個一次式L滿足。

Proof.

若$P_i^f(i \geq 2)$均滿足 Ritt 第二條件。假設存在$P_{i'}^f(i' \geq 2)$同時對兩相異一次式L_1、L_2滿足 Ritt 第二條件，可得$\Phi_{L_1}\left(P_{i'}^f\right) = \pm\Phi_{L_2}\left(P_{i'}^f\right) = \pm T_{\deg(P_{i'}^f)}$。$\Phi_{L_1^{-1}}\left(\pm T_{\deg(P_{i'}^f)}\right) = P_{i'}^f$、

$\Phi_{L_2}\left(\Phi_{L_1^{-1}}\left(\pm T_{\deg(P_{i'}^f)}\right)\right) = \Phi_{L_2\circ L_1^{-1}}\left(\pm T_{\deg(P_{i'}^f)}\right) = \Phi_{L_2}\left(P_{i'}^f\right) = \pm T_{i'^{s_f}}$。

因此，我們可得$(L_2 \circ L_1^{-1}) \circ \pm T_{\deg(P_{i'}^f)} \circ (L_2 \circ L_1^{-1})^{-1} = \pm T_{\deg(P_{i'}^f)}$，首先可觀察到$(L_2 \circ L_1^{-1})(x)$應為單項式，否則$(L_2 \circ L_1^{-1}) \circ \pm T_{\deg(P_{i'}^f)} \circ (L_2 \circ L_1^{-1})^{-1}(x)$的第$\left(\deg(P_{i'}^f) - 1\right)$次項非零，但$\pm T_{\deg(P_{i'}^f)}(x)$ 的第$\left(\deg(P_{i'}^f) - 1\right)$次項為零。接下來，令$(L_2 \circ L_1^{-1})(x) = \alpha x$，即可得$\pm\alpha T_{\deg(P_{i'}^f)}\left(\frac{1}{\alpha}x\right) = T_{\deg(P_{i'}^f)}$。左右式之第$i'^{s_f}$次項之係數比值為$\left(\pm\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\deg(P_{i'}^f)}\right)$，而第$\left(\deg(P_{i'}^f) - 2\right)$次項之係數比值為$(\pm\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\deg(P_{i'}^f)-2})$，因此$\alpha = -1$、$L_2 = -L_1$。

利用 Lemma 9.，若多項式P對L滿足 Ritt 第二條件，則P也對$-L$滿足 Ritt 第二條件。

由 Lemma 3.得，$P_{i'-1}^f(i' \geq 3)$對L_1、$-L_1 = L_2$滿足 Ritt 第二條件。同理，利用歸納法得出$P_{i'-2}^f$、$P_{i'-3}^f\cdots$以及$P_{i'+1}^f$、$P_{i'+2}^f\cdots$均對L_1、$-L_1 = L_2$滿足 Ritt 第二條件。 *Q.E.D.*

(4). $\boldsymbol{P_i^f(i \geq 2)}$若滿足 Ritt 第二條件，則會存在一次式$\boldsymbol{L}$使得$\boldsymbol{\Phi_L\left(P_i^f\right)(x) = T_{i^{s_f}}}$

由上述知：$P_i^f(i \geq 2)$若滿足 Ritt 第二條件，且$s_f \geq 1$，則存在一次式L使得$\Phi_L\left(P_i^f\right)(x) = \pm\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{i}^{s_f}}$，下列我們要證明存在一次式$L$使得$\Phi_L\left(P_i^f\right)(x) = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{i}^{s_f}}$。

Corollary 5.

若$P_i^f(i \geq 2)$均滿足 Ritt 第二條件，則存在一次式L使得$\Phi_L\left(P_i^f\right)(x) = T_{\deg(P_i^f)}$。

Proof.

首先，我們先討論正負取值，我們觀察以下函數合成表：

$\circ$	T_{e_2}	T_{o_2}	$-T_{e_2}$	$-T_{o_2}$
T_{e_1}	$T_{e_1e_2}$	$T_{e_1o_2}$	$T_{e_1e_2}$	$T_{e_1o_2}$
T_{o_1}	$T_{e_2o_1}$	$T_{o_1o_2}$	$-T_{e_2o_1}$	$-T_{o_1o_2}$
$-T_{e_1}$	$-T_{e_1e_2}$	$-T_{e_1o_2}$	$-T_{e_1e_2}$	$-T_{e_1o_2}$
$-T_{o_1}$	$-T_{e_2o_1}$	$-T_{o_1o_2}$	$T_{e_2o_1}$	$T_{o_1o_2}$

圖 1

其中e表示偶數、o表示奇數，可發現$-T_o$與T_e、$-T_e$均不可交換，且T_{e_1}與$-T_{e_2}$也不可交換。故$\Phi_L\left(P_i^f\right)(x) = \pm T_{\deg(P_i^f)}$時，有以下兩種情況：

(a) $\Phi_L\left(P_i^f\right)(x) = T_{\deg(P_i^f)}$

(b) 若$\deg(P_i^f)$為奇數，$\Phi_L\left(P_i^f\right)(x) = T_{\deg(P_i^f)}$；若為偶數，$\Phi_L\left(P_i^f\right)(x) = -T_{\deg(P_i^f)}$

假設(a)情況發生，則證畢；(b)情況發生，則考慮$\Phi_{-L}\left(P_i^f\right)(x) = T_{\deg(P_i^f)}$。 *Q.E.D.*

討論完 Ritt 條件後，接下來我們就可以開始討論函數之形式：

1. $\boldsymbol{P_i^f (i \geq 2)}$為一次函數

<u>Lemma 10.</u>

對於滿足多倍角條件的連續函數$f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$，若存在$i \geq 2$，使得$P_i^f$為一次函數，則對於所有的正整數$m$，$P_m^f$均為一次函數，且$P_m^f(x)$一次項係數之絕對值$> 1$。

<u>Proof.</u>

若存在$i \geq 2$，使得P_i^f為一次函數，令$P_i^f(x) = \alpha x + \beta$，以下分成幾個情況作討論：

(1) $\alpha = 1, \beta = 0$

同 Theorem 4. 證明中的(a)。

(2) $\alpha = 1, \beta \neq 0$

同 Theorem 4. 證明中的(b)。

(3) $|\alpha| \leq 1, \alpha \neq 1$

根據 Lemma 4.，存在一次式$L(x)$使$P_i^{L \circ f}(x) = \alpha x$。又由 Definition 2.知$L \circ f$非常數函數，故存在$x \in \mathbb{R}$使得$(L \circ f)(x) \neq 0$。故存在$x \in [0, \infty)$，使得$(L \circ f)(x) \neq 0$。

考慮數列$(L \circ f)(x), (L \circ f)\left(\frac{x}{i}\right), (L \circ f)\left(\frac{x}{i^2}\right) \ldots$，此數列極限應為$(L \circ f)(0)$。但由於其可改寫為$(L \circ f)(x), \frac{1}{\alpha}(L \circ f)(x), \frac{1}{\alpha^2}(L \circ f)(x) \ldots$，故該數列之極限不存在，矛盾，故此條件下沒有符合條件之函數。

(4) $|\alpha| > 1$

根據 Lemma 4.，存在一次式$L(x)$使$P_i^{L \circ f}(x) = \alpha x$。又由 Definition 2.知$L \circ f$非常數函數，故存在$x \in \mathbb{R}$使得$(L \circ f)(x) \neq 0$。故$\limsup_{x \to \infty}(|f(x)|) = \infty$，根據 Theorem 2.與 Theorem 1.，s_f存在，故P_m^f均為一次式。

綜合以上，僅$|\alpha| > 1$時有滿足條件的f，故證畢。 *Q.E.D.*

Lemma 11.

若$P(x) = \alpha x^{\deg(P)}(|\alpha| > 1)$、$Q(x) \in \mathbb{C}[x]$，且$P \circ Q = Q \circ P$。則$Q(x) = \beta x^{\deg(Q)}(\beta \in \mathbb{C})$

Proof.

設$Q(x) = \beta x^{\deg(Q)} + \gamma x^t + \cdots (t < \deg(Q))$，$(P \circ Q)(x)$中非零第二高次項為$(\deg(P)\deg(Q) - \deg(Q) + t)$次項；$(Q \circ P)(x)$中非零第二高次項為$\deg(P)\,t$次項。故當$\deg(P) > 1$時，$\deg(P)\deg(Q) - \deg(Q) + t > \deg(P)\,t$，故矛盾。

當$\deg(P) = 1$，$(P \circ Q)(x) = \alpha\beta x^{\deg(Q)} + \alpha\gamma x^t + \cdots$；$(Q \circ P)(x) = \alpha^{\deg(Q)}\beta x^{\deg(Q)} + \alpha^t \gamma x^t + \cdots$。兩者必不相等，又得矛盾。 *Q.E.D.*

Lemma 12.

若函數$l: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$滿足以下條件：

(1)$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}, l(m_1 m_2) = l(m_1) + l(m_2)$ (2)$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 \ge m_2 \Rightarrow l(m_1) \ge l(m_2)$

則存在$r \in \mathbb{R}^+$使得$l(m) = r\log(m)$，其中r僅隨l變動而不隨m變動。.

Proof.

設函數$d: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$滿足以下條件：

(1)$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}, l(m_1 m_2) = l(m_1) + l(m_2)$ (2)$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 \ge m_2 \Rightarrow l(m_1) \ge l(m_2)$

對於任意$m_1 \ge m_2$及$n \in \mathbb{N}$，都存在非負整數n'使$m_1^{n'+1} \ge m_2^n \ge m_1^{n'}$，因此我們得到$(n'+1)\log(m_1) \ge n\log(m_2) \ge n'\log(m_1)$，故$\frac{n'+1}{n} \ge \frac{\log(m_2)}{\log(m_1)} \ge \frac{n'}{n}$---(A)。

我們由條件(2)可知，$d(m_1^{n'+1}) \ge d(m_2^n) \ge d(m_1^{n'})$。接下來，又可以由條件(1)知$(n'+1)l(m_1) \ge nl(m_2) \ge n'l(m_1)$。因此我們可得$\frac{n'+1}{n} \ge \frac{l(m_2)}{l(m_1)} \ge \frac{n'}{n}$---(B)。

綜合(A)、(B)兩式可知，對任意$n \in \mathbb{N}$，$\left|\frac{l(m_2)}{l(m_1)} - \frac{\log(m_2)}{\log(m_1)}\right| \le \frac{1}{n}$，得$\frac{l(m_2)}{l(m_1)} = \frac{\log(m_2)}{\log(m_1)}$，故存在一不隨$m$變動之$r \in \mathbb{R}^+$使得$l(m) = r\log(m)$。 *Q.E.D.*

根據 Lemma 10.，若存在P_m^f為一次函數，則$P_i^f (i \ge 2)$均為一次函數。因此，我們以下僅討論$P_i^f (i \ge 2)$均為一次函數的情況。

Theorem 7.

若非常數之連續函數$f: [0, \infty] \to \mathbb{C}$滿足多項式條件、$P_i^f (i \ge 2)$均為一次函數，則$f(x) = ax^k + b$，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$。

Proof.

設非常數之連續函數$f:[0,\infty]\to\mathbb{C}$滿足多項式條件、$P_i^f(i\geq 2)$均為一次函數。

首先，根據 Lemma 4.及 Lemma11.，存在一次式$L(x)$使$P_m^{L\circ f}(x)=\alpha_m x(\alpha_m\in\mathbb{C})$。令$L\circ f=g$，得當$x\neq 0$時，$g(x)\neq 0$。

第一步，我們討論$g(0)$，其為$g(1),g\left(\frac{1}{2}\right),g\left(\frac{1}{4}\right)\ldots$之極限，可將此數列改寫為$g(1),\frac{1}{\alpha_2}g(1),\frac{1}{\alpha_2^2}g(1)\ldots$，再根據 Lemma 10.，$|\alpha_2|>1$，得此極限為$0$。

接下來，將$g(x)(x\neq 0)$改寫為$e^{i\theta(x)}|g|(x)$，其中$\theta,|g|$之對應域為實數，且兩者均為連續函數。同樣的，我們也可以將$P_m^g(x)=\alpha_m x$改寫成$e^{i\theta_m}|\alpha_m|(x)$，不失一般性，這裡設$\theta_m$為其主輻角。

我們先討論$|g|$。我們可以發現他也是個多倍角函數，其中$P_m^{|g|}(x)=|\alpha_m|x$。若$|g|([0,\tilde{x}])=[0,\tilde{y}]$，且$m_1>m_2$，則$P_{m_1}^{|g|}\big(|g|([0,\tilde{x}])\big)=|g|([0,m_1\tilde{x}])=\big[0,|\alpha_{m_1}|\tilde{y}\big]\supseteq|g|([0,m_2\tilde{x}])=\big[0,|\alpha_{m_2}|\tilde{y}\big]=P_{m_2}^{|g|}\big(|g|([0,\tilde{x}])\big)$，得$|\alpha_{m_1}|\geq|\alpha_{m_2}|$。又明顯的，$|\alpha_{m_1m_2}|=|\alpha_{m_1}||\alpha_{m_2}|$。故存在$u\in\mathbb{R}^+$使得$\alpha_m=m^u$。因此，我們可發現：$|g|(1)$及$u$可決定$|g|(x)$。

考慮以下函數：$\widetilde{|g|}(x)=\bar{a}x^{\bar{k}}$，可發現$|g|(1)=\bar{a}$且$u=\bar{k}$，因此我們可以利用改變$\bar{a}$及$k$，使其滿足任意給定條件。因此，$|g|(x)=\bar{a}x^{\bar{k}}$。

最後，我們考慮$\theta(x)$，$\theta(mx)\equiv\theta(x)+\theta_m\ (mod\ 2\pi)$，故存在$\overline{\theta_m}\in\mathbb{R}$使得$\theta(mx)=\theta(x)+\overline{\theta_m}$。因此$\theta:(0,\infty)\to\mathbb{C}$也是個多倍角函數(由於$|g|(0)=0$，故此函數在$x=0$的取值情況可不考慮)。

若$\overline{\theta_m}=0,\forall m\in\mathbb{N}$，則$\theta(mx)$為常數函數。若$\overline{\theta_m}>0$，則說明了$\theta\big((0,t]\big)=(-\infty,v)$。這又蘊含了$m_1>m_2\Rightarrow\overline{\theta_{m_1}}>\overline{\theta_{m_2}}$，以及$\overline{\theta_{m_1m_2}}=\overline{\theta_{m_1}}+\overline{\theta_{m_2}}$。因此，根據 Lemma 12.，$\overline{\theta_m}=c\log(m)$。可發現$\theta(x)$被$\theta(1)$及$c$所決定。$\overline{\theta_m}<0$時同理。

考慮以下函數：$\tilde{\theta}(x)=\bar{r}log(x)+\bar{l}$，可發現$\tilde{\theta}(1)=\bar{l}$且$c=\bar{r}$，因此我們可以利用改變$\bar{l}$及$\bar{r}$，使其滿足任意給定條件。因此，$\tilde{\theta}(x)=\bar{r}log(x)+\bar{l}$。

$$g(x)=e^{i\theta(x)}|g|(x)=e^{i(\bar{r}log(x)+\bar{l})}\bar{a}x^{\bar{k}}=\bar{a}e^{i\bar{l}}e^{i\bar{r}log(x)}x^{\bar{k}}=\bar{a}e^{i\bar{l}}x^{\bar{k}+i\bar{r}}$$

因$g=L\circ f$，故$f(x)=\ ax^k+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$r\in\mathbb{R}$。 *Q.E.D.*

2. $\boldsymbol{P_i^f(i\geq 2)}$滿足 Ritt 第一條件

由 Lemma 11.知，只要有一個P_m^f滿足 Ritt 第一條件，則$P_i^f(i\geq 2)$均滿足 Ritt 第一條件或

為一次函數。然而，其不可能為一次函數，否則根據 Lemma10.，不會有P_m^f滿足 Ritt 第一條件。因此，我們直接討論$P_i^f\,(i \geq 2)$均滿足 Ritt 第一條件均滿足 Ritt 第一條件的情況。

Theorem 8.

若非常數之連續函數$f:[0,\infty) \to \mathbb{C}$滿足多項式條件、$P_i^f\,(i \geq 2)$均滿足 Ritt 第一條件，則$f(x) = ak^{x^n} + b$，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$。

Proof.

設非常數之連續函數$f:[0,\infty] \to \mathbb{C}$滿足多項式條件、$P_i^f\,(i \geq 2)$均滿足 Ritt 第一條件

首先，根據 Lemma 4.、Corollary 4.，存在一次式$L(x)$使得$P_m^{L\circ f}(x) = \alpha_m x^{d_m}(\alpha_m \in \mathbb{C}, d_m \in \mathbb{N})$。我們令$L \circ f = g$，得當$x \neq 0$時，$g(x) \neq 0$。

第一步，我們先簡單討論$g(0)$，我們宣稱$g(0) \neq 0$。否則我們可以找到一$t \in \mathbb{R}^+$使得$|t'| \leq t \Rightarrow |t'| < \left|\alpha_2 {t'}^{d_2}\right|$，及一個$r \in \mathbb{R}^+$使得$\max\big(|g|([0,r])\big) \coloneqq M < t$，$\max\big(|g|([0,2r])\big) = \max\left(|P_2^g|\big(g([0,r])\big)\right) = |\alpha_2 M^{d_2}| < M = \max\big(|g|([0,r])\big)$，矛盾。

接下來，將$g(x)$改寫為$e^{i\theta(x)}|g|(x)$，其中$\theta, |g|$之對應域為實數，且兩者均為連續函數。同樣的，我們也可以將$P_m^g(x) = \alpha_m x$改寫成$e^{i\theta_m}|\alpha_m|x^{d_m}$，不失一般性，這裡設$\theta_m$為其主輻角。

我們先討論$|g|$。我們可以發現他也是個多倍角函數，其中$P_m^{|g|}(x) = |\alpha_m|x^{d_m}$。我們可以先討論$|g|(0)$之值。$|g|(0) = |\alpha_m|(|g|(0))^{d_m}$，得$|g|(0) = |\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}$。

$|g|(2) = |\alpha_m|\big(|g|(1)\big)^{d_m} = (|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}})(\frac{|g|(1)}{|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}})^{d_m}$、$|g|(4) = \left(|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}\right)\left(\frac{|g|(2)}{|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}}\right)^{d_m} = \left(|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}\right)\left((\frac{|g|(1)}{|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}})^{d_m}\right)^{d_m} = (|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}})(\frac{|g|(1)}{|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}})^{d_m^2}$。以此類推可得$|g|(2^c) = (|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}})(\frac{|g|(1)}{|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}})^{d_m^c}$。

若$|g|(1) > |\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}$，得$\limsup\limits_{x\to\infty}\big(|g|(x)\big) = \infty$。因此，根據 Theorem 2.與 Theorem 1.，$d_m = m^{s_{|g|}} = m^{s_g}$。

若$|g|(1) < |\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}$，得$\liminf\limits_{x\to\infty}\big(|g|(x)\big) = 0$。考慮函數$\frac{1}{|g|}(x)$，$\frac{1}{|g|}(mx) = \frac{1}{|\alpha_m||g|(x)^{d_m}} =$

$\frac{1}{|\alpha_m|}\left(\frac{1}{|g|}(x)\right)^{d_m}$，因此$\frac{1}{|g|}(x)$也為多倍角函數，且$\limsup_{x\to\infty}\left(\frac{1}{|g|}(x)\right)=\infty$。因此，根據 Theorem 2. 與 Theorem 1.，$d_m = m^{s_{\frac{1}{|g|}}} = m^{s_{|g|}} = m^{s_g}$。

s_g確定後d_m可被確定；確定了$|\alpha_2|$，由$|g|(0)=|\alpha_m|^{\frac{-1}{d_m-1}}$可知$|\alpha_m|$可被確定。因此，只要確定$s_g$、$|\alpha_2|$，即可決定$P_m^{|g|}(x)$。$|g|(1)$若也被確定，則整個函數就可被確定。

考慮以下函數：$\widetilde{|g|}(x)=\bar{a}\bar{k}^{x^n}$，可發現$s_g=n$、$|\alpha_2|=\bar{a}^{-2^n}$、$|g|(1)=\bar{a}\bar{k}$。因此我們可以利用改變$n$、$\bar{a}$及$k$，使其滿足任意給定條件。因此，$|g|(x)=\bar{a}\bar{k}^{x^n}$。

最後，我們考慮$\theta(x)$，$\theta(mx)\equiv d_m\theta(x)+\theta_m\equiv m^n\theta(x)+\theta_m\ (mod\ 2\pi)$，故存在$\overline{\theta_m}\in\mathbb{R}$使得$\theta(mx)=m^n\theta(x)+\overline{\theta_m}$。因此$\theta:[0,\infty)\to\mathbb{C}$也是個多倍角函數，且$P_m^{\theta}$均為一次函數。根據 Theorem 7.得$\theta(x)=\bar{r}x^n+\bar{l}$。

$g(x)=e^{i\theta(x)}|g|(x)=e^{i(\bar{r}x^n+\bar{l})}\bar{a}\bar{k}^{x^n}=\bar{a}e^{i\bar{l}}(e^{i\bar{r}}\bar{k})^{x^n}$。

因$g=L\circ f$，故$f(x)=ak^{x^n}+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$。 *Q.E.D.*

3. $\boldsymbol{P_i^f(i\geq 2)}$滿足 Ritt 第三條件

雖然說我們應該以第一、第二、第三條件的順序討論，但由於第三條件本身的特殊性，我們可以先將他解決。

<u>Theorem 9.</u>

不存在非常數之連續函數$f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$滿足多項式條件，且$P_i^f(i\geq 2)$均對$h$滿足 Ritt 第三條件。

<u>Proof.</u>

根據定義，存在一次式$L(x)\in\mathbb{C}[x]$使得$P_m^{L\circ f}=\varepsilon_m h^{\frac{d_m}{deg(h)}}$，其中$h(x)=xp(x^r)$、$r\in\mathbb{N}$、$p(x)\in\mathbb{C}[x]$、$\varepsilon_m^r=1$、$d_m=\deg(P_m^{L\circ f})$。令$g=L\circ f$。

設存在$m_1<m_2$使得$d_{m_1}>d_{m_2}$。根據 Berzout 引理，存在$c_1,c_2\in\mathbb{Z}$使得$c_1d_{m_1}+c_2d_{m_2}=(d_{m_1},d_{m_2})$。不失一般性，假設$c_1>0$及$\left(\frac{c_1m_1}{-c_2m_2}\right)^{\frac{d_{m_2}}{(d_{m_1},d_{m_2})}}\neq m_2$，

$$P^g_{c_1m_1}(x)=\varepsilon_{c_1m_1}h^{\frac{c_1d_{m_1}}{deg(h)}}(x)=\varepsilon_{c_1m_1}h^{\frac{c_1d_{m_1}+c_2d_{m_2}}{deg(h)}}\left(h^{\frac{-c_2d_{m_2}}{deg(h)}}(x)\right)$$

$$=\frac{\varepsilon_{c_1m_1}}{\varepsilon_{c_2m_2}}h^{\frac{(d_{m_1},d_{m_2})}{deg(h)}}(P^g_{-c_2m_2}(x))$$

因此我們有：$g\left(\frac{c_1m_1}{-c_2m_2}x\right)=\frac{\varepsilon_{c_1m_1}}{\varepsilon_{c_2m_2}}h^{\frac{(d_{m_1},d_{m_2})}{deg(h)}}(x)$。我們也可發現$g\left(\left(\frac{c_1m_1}{-c_2m_2}\right)^{\frac{d_{m_2}}{(d_{m_1},d_{m_2})}}x\right)=g(m_2x)$。意即$g\left(\frac{\left(\frac{c_1m_1}{-c_2m_2}\right)^{\frac{d_{m_2}}{(d_{m_1},d_{m_2})}}}{m_2}x\right)=g(x)$，利用與 Theorem 4. 中(a)的論證方式，即可得出矛盾。 Q.E.D.

4. $\boldsymbol{P_i^f}(\boldsymbol{i}\geq\mathbf{2})$滿足 Ritt 第二條件

首先，我們想要把問題專注在第二條件上。我們由 Lemma 11.及 Lemma 7.知，只要有一個P_m^f滿足 Ritt 第二條件，則$P_i^f(i\geq 2)$均不滿足 Ritt 第一條件。但我們暫時無法保證第三條件的出現與否，也無法確認其出現會不會影響我們關心的函數。我們會證明：就算出現了，也不會影響我們關心的函數。

確切來講，以下我將證明：若存在m使得P_m^f滿足 Ritt 第二條件，則$P_i^f(i\geq 2)$均滿足 Ritt 第二條件。我們先引入以下引理：

<u>Lemma 13.</u>

若存在m使得P_m^f滿足 Ritt 第二條件，則$P_i^f(i\geq 2)$均滿足 Ritt 第二條件。

<u>*Proof.*</u>

假設存在m使得P_m^f滿足 Ritt 第二條件。因此，根據定義，存在一次式$L(x)\in\mathbb{C}[x]$使得$P_m^{L\circ f}=T_{\deg(P_m^{L\circ f})}$。以下令$g\coloneqq L\circ f$及$d_i=\deg(P_i^{L\circ f})$。

若$P^g_{m'}$不滿足 Ritt 第二條件，由於P^g_m滿足 Ritt 第二條件，故$P^g_{m'}$也不滿足 Ritt 第一條件。但$P^g_{m'}$又與所有的$P_i^g(i\geq 2)$可交換，故所有的$P_i^g(i\geq 2)$均對某個h滿足 Ritt 第三條件。由 Theorem 9.，得矛盾。 *Q.E.D.*

Theorem 10.

若非常數之連續函數$f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$滿足多項式條件、$P_i^f\,(i\geq 2)$均滿足 Ritt 第二條件，則$f(x)=acos(kx^n)+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$。

Proof.

設非常數之連續函數$f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$滿足多項式條件，且$P_i^f\,(i\geq 2)$均滿足 Ritt 第二條件。根據定義與 Corollary 5.，存在一次式$L(x)\in\mathbb{C}[x]$使得$P_m^{L\circ f}=T_{d_m}$。令$g=L\circ f$。

由於cos 是滿射的，可將$g(x)$寫作$\cos(\theta(x))$。其中$\theta(x)$是一對應域被限制在$[0,\pi]$上的連續函數，且在上文(Theorem 6.)已討論過：應存在$q\in\mathbb{Q}$使得$\theta=q\pi$。

我們宣稱：$d_m=m^{s_g}$。

設存在$x\in\mathbb{R}$使$\theta(x)\notin\mathbb{R}$，則$\underset{x\to\infty}{limsup}(|g(x)|)=\infty$。因此，根據 Theorem 2.與 Theorem 1.，$d_m=m^{s_g}$。

設$\theta(x)\in\mathbb{R},\forall x\in[0,\infty]$。假設存在$m_1>m_2$使得$d_{m_1}<d_{m_2}$。我們可以適當選取$\tilde{x}\in\mathbb{R}^+$，使得若$x_1\in[0,\tilde{x}]$，則$|\theta(x_1)-\theta(0)|\leq\frac{\min(\pi-q\pi,q\pi-0)}{2d_{m_2}}$，且$\theta^{-1}\big(\theta(\tilde{x})\big)=\{\tilde{x}\}$。我們可發現$P_{m_2}^g([0,\tilde{x}])\ni\cos\left(d_{m_2}\theta(\tilde{x})\right)=\cos\left(d_{m_2}\big(\theta(\tilde{x})-\theta(0)\big)+\theta(0)\right)\notin P_{m_1}^g([0,\tilde{x}])$。得矛盾。故由 Theorem 1.，得$d_m=m^{s_g}$。

故$g(0)=1$、$\theta(0)=0$。若$s_g=n$，再選取一個$\ddot{x}>0$使得若$x_2\in[0,\ddot{x}]$，則$|\theta(x_2)|\leq\frac{\pi}{2^n}$。則我們可以發現決定如此的$\ddot{x}$以及其函數值$g(\ddot{x})$，可以確定$\cos\left(\theta\left(\frac{\ddot{x}}{2^t}\right)\right)$均可被唯一決定，同時，由於$P_m^g$均已被$s_g$決定，故$\cos(\theta(x)),x\in[0,\ddot{x}]$，均可利用構造數列，並求其極限得到。

因此，函數可被以下兩者決定，s_g與$(\ddot{x},g(\ddot{x}))$。

考慮函數$\tilde{g}(x)=\cos(kx^n)$，$s_g=n$、$\big(\ddot{x},g(\ddot{x})\big)=(\ddot{x},\cos(k\ddot{x}^n))$可滿足任一條件。因此再由$g=L\circ f$，得出$f(x)=acos(kx^n)+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$。 *Q.E.D.*

伍、結果整理

	P_m^f：一次函數	P_m^f：Ritt 第一條件	P_m^f：Ritt 第二條件
定義域為$\mathbb{C}$之解析函數	$ax^n + b$	$ak^{x^n} + b$	$acos(kx^n) + b$
定義域為$[0, \infty)$之連續函數	$ax^k + b$		

，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$

陸、未來展望

關於未來展望，我們有以下兩個面向，可以進行進一步的研究：

(一) 控制定義域

本研究後段主要考慮的函數條件：定義域$[0, \infty)$的連續函數。

之後可以將定義域改成$(0, \infty)$進行我們的研究。

(二) 考慮雙函數多倍角條件

本篇研究是由cos的多倍角公式啟發而來，同時，我們也被sin的多倍角公式所啟發。

考慮兩個在$\mathbb{C}$上解析的函數$f(x)$、$g(y)$，定義雙函數多項式條件為：對於所有的$m \in \mathbb{N}$，均存在多項式$P_m^{f,g}(x, y)$、$Q_m^{f,g}(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$，使得$f(mx) = P_m^{f,g}\big(f(x), g(y)\big)$、$g(mx) = Q_m^{f,g}\big(f(x), g(y)\big)$

我們目標是找出並分類所有符合雙函數多項式條件的有序對$(f, g) \in \mathbb{C}[x]^2$。

柒、參考資料

[1]Ahlfors L.(1979). Complex Analysis. New York: McGraw-Hill Education

[2]Eigerthaler, G., & Harald, W.(1998). A Remark on Permutable Polynomials.

[3]Ritt, J.F. (1923). Permutable rational functions [Special section]. *AMS 25, 399-448.*

[4]Sinwell B.(Eds.).(2004). The Chebyshev Polynomials: Patterns and Derivation [Special section]. *Mathematics Teacher, 98(1), 20-25*

[5]葉能哲、賴漢卿（譯）(民100)。**解析概論**（原作者：高木貞治）。新北市：文笙。

【評語】050415

觀察切比雪夫多項式（Chebyshev polynomial）的性質，本文探討滿足下面性質的連續複函數 f 的形式：對任意正整數 m 存在多項式 $P(x)$ 滿足 $f(mx)=P(f(x))$。其解答是，這樣的函數只有三種：ax^k+b、$ak^{x^n}+b$、$a\cos(kx^n)+b$，其中 a, b, k 為複數、n 為正整數。如果進一步要求 f 是解析函數，則其答案是把前述的第一種函數換成 ax^n+b。推導及結果都有一定程度的興趣。

可以思考或改進的地方含：

(一)宜說明為何「非常數的連續函數有無窮多個值域元素」。

(二)書寫上的建議：*sin* 和 *cos* 等超過一個字母的函數名稱要用正體。少用∃、∀等符號，多用文字述寫。

(三)多做一些文獻探討，說明本作品之已知預備性質，那些是本文作者自行完成部分。

(四)若函數限制在實數或正實數，結果有何差異？

作品海報

摘要

本研究想要找出並分類滿足以下性質：對於所有的$m \in \mathbb{N}$，均存在$P(x) \in \mathbb{C}[x]$使得 $f(mx) = P(f(x))$的連續函數$f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$。

首先，若我們設定$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$為全域解析函數，可發現$f(x)$的形式必為下列三者之一：

(1).$ax^n + b$　(2). $ak^{x^n} + b$　(3). $acos(kx^n) + b$　，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$

而若當我們將設定退化為原始設定，則$f(x)$的形式必為下列三者之一：

(1).$ax^k + b$　(2). $ak^{x^n} + b$　(3). $acos(kx^n) + b$　，其中$a, b, k \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N}$

將此研究結果從單變數擴展至多變數連續函數：

1. 對於所有的 $m \in \mathbb{N}$，均存在$P(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$f(mx_1, \dots, mx_\alpha) = P\big(f(x_1, \dots, x_\alpha)\big)$
   符合此條件的連續函數$f: [0, \infty)^\alpha \to \mathbb{C}$必為下列形式之一：
   (1). $a{x_1}^{t_1} \dots {x_\alpha}^{t_\alpha} + b$　(2). $ak^{{x_1}^{k_1} \dots {x_\alpha}^{k_\alpha}} + b$　(3). $acos(k{x_1}^{k_1} \dots {x_\alpha}^{k_\alpha}) + b$，其中$a, b, k, t_i \in \mathbb{C}$、$k_1 + \dots + k_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
2. 對於所有的$(m_1, \dots, m_\alpha) \in \mathbb{N}^\alpha$，均存在$P(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$f(m_1x_1, \dots, m_\alpha x_\alpha) = P\big(f(x_1, \dots, x_\alpha)\big)$
   符合此條件的函數$f: [0, \infty)^\alpha \to \mathbb{C}$必為下列形式之一：
   (1). $a{x_1}^{t_1} \dots {x_\alpha}^{t_\alpha} + b$　(2). $ak^{{x_1}^{n_1} \dots {x_\alpha}^{n_\alpha}} + b$　(3). $acos(k{x_1}^{n_1} \dots {x_\alpha}^{n_\alpha}) + b$，其中$a, b, k, t_i \in \mathbb{C}$、$n_1, \dots, n_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

研究動機

105年10月，當我在閱讀A.F.Beardon所著之Algebra and Geometry時，發現了切比雪夫多項式的概念。切比雪夫多項式T_m為俄國數學家Pafnuty Chebyshev所提出，可被以下式子定義：$T_m(\cos(\theta)) = \cos(m\theta)$。

例如：$2\cos^2(\theta) - 1 = \cos(2\theta)$，故$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$4cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = \cos(3\theta)$，故$T_3(x) = 4x^3 - 3x$，以此類推。

對cos 而言， 對於所有的$m \in \mathbb{N}$，均存在$P_m^f(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$f(mx) = P_m^f(f(x))$。

這讓我開始好奇：對於怎樣的函數會有這種性質呢？然而，經過簡單的驗證就可以發現，這件事情對一般的函數是不成立的(比如說$sin(x)$)。基於單純的好奇心，我開始了此主題的研究。

研究目的

找出並分類滿足以下性質的連續函數f：

(一)、$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$：全域解析，且對於所有的$m \in \mathbb{N}$，均存在$P(x) \in \mathbb{C}[x]$使得 $f(mx) = P(f(x))$

(二)、對於所有的$m \in \mathbb{N}$，均存在$P(x) \in \mathbb{C}[x]$使得 $f(mx) = P(f(x))$

(三)、對於所有的 $m \in \mathbb{N}$，均存在$P(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$f(mx_1, \dots, mx_k) = P\big(f(x_1, \dots, x_k)\big)$

(四)、對於所有的$(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$，均存在$P(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$f(m_1x_1, \dots, m_kx_k) = P\big(f(x_1, \dots, x_k)\big)$

研究流程圖

動機：
發現Chebyshev多項式，$T_m(\cos(\theta)) = \cos(m\theta)$，並想要找出其他有類似性質的函數

單變數(一)：
使用Lemma 1.，確定P_m^f之形式，並討論其次數。

單變數(二)：
利用P_m^f之形式及次數。進一步討論f的形式。

多變數：
利用單變數的結果，經由變數變換，討論出f的形式。

函數舉例

找出這些符合條件的函數前，我們先舉出一些例子：

(一)、$f(x) = x^n$：此函數形式簡單，$f(mx) = (mx)^n = m^nx^n = m^nf(x)$。由於此函數之$P_m^f$為一次單項式，故在合成下有其用處（見(三)、(五)）。

(二)、$f(x) = a^x$：此函數是被指數律$a^{xy} = (a^x)^y$所啟發。$f(mx) = a^{mx} = [f(x)]^m$。

(三)、$f(x) = cos(kx)$：此函數僅為cos 的伸縮變換，故顯然得f 有多項式條件且$P_m^f = T_m$。

(四)、$f(x) = a^{x^n}$：由於函數(一) 之P_m^f為一次單項式與$f(mx)$中的mx關聯性極強。$f(mx) = a^{(mx)^n} = a^{m^nx^n} = [f(x)]^{m^n}$。

(五)、$f(x) = cos(kx^n)$：同函數(四)之道理。$f(mx) = cos(k(mx)^n) = cos(2m^nx^n) = T_{m^n}(f(x))$。

名詞解釋及定義

Definition 1. 多倍角條件/多倍角函數：連續函數f有**多倍角條件**若且唯若對於所有的$m \in \mathbb{N}$，均存在$P_m^f(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$f(mx) = P_m^f(f(x))$，並稱$f$為**多倍角函數**。

Definition 2. P_n^f：若f為多倍角函數，且$m \in \mathbb{N}$，定義$P_m^f(x) \in \mathbb{C}[x]$為使得$f(mx) = P_m^f(f(x))$，且$P_n^f$為符合條件中次數最低者。

Definition 3. $\Phi_L(P), \Phi_L(S)$：若L為一次函數，定義$\boldsymbol{\Phi_L(P) = L \circ P \circ L^{-1}}$。若$S \subseteq \mathbb{C}[x]$，定義$\boldsymbol{\Phi_L(S) = \{\Phi_L(P) | P \in S\}}$。

Definition 4. 共軛： 多項式P_1、P_2**共軛**若且唯若存在一次函數L使得$\Phi_L(P_1) = P_2$。$\mathbb{C}[x]$子集共軛類似定義之。

Definition 5. 切比雪夫多項式(Chebyshev Polynomial)：P_m^{cos}為第m個切比雪夫多項式，以$\boldsymbol{T_m}$表示之。

Definition 6. 多變數弱多倍角條件：我們稱多變數連續函數$f: [0, \infty)^\alpha \to \mathbb{C}$有**多變數弱多倍角條件**，若對於所有的 $m \in \mathbb{N}, (x_1, \dots, x_\alpha) \in [0, \infty)^\alpha$，均存在$P(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$f(mx_1, \dots, mx_\alpha) = P\big(f(x_1, \dots, x_\alpha)\big)$。

Definition 7.多變數強多倍角條件：我們稱多變數連續函數$f: [0, \infty)^\alpha \to \mathbb{C}$有**多變數強多倍角條件**，若對於所有$(m_1, \dots, m_\alpha) \in \mathbb{N}^k, (x_1, \dots, x_\alpha) \in [0, \infty)^\alpha$，均存在$P(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$f(m_1x_1, \dots, m_\alpha x_\alpha) = P\big(f(x_1, \dots, x_\alpha)\big)$。

基本性質介紹

Property 1. $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}, P_{m_2}^f \circ P_{m_1}^f = P_{m_1}^f \circ P_{m_2}^f = P_{m_1m_2}^f$

Property 2. 若連續函數f為多倍角函數，則對於一次函數$M(x) = ax (a > 0)$，$f \circ M$也為一多倍角函數，且$P_m^{f \circ M} = P_m^f$。

Property 3. 若連續函數f為多倍角函數，則對於所有的一次函數L，$L \circ f$也為多倍角函數，且 $P_m^{L \circ f} = \Phi_L(P_m^f)$。

Property 4. (B.Sinwell) 若$m \in \mathbb{N}$，則$T_m(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^n 2^{m-(2n+1)} a(m,n) x^{m-2n}$，其中$a(m,n) = \frac{\binom{2n}{n}\binom{m}{2n}}{\binom{m-1}{n}}$。故 若正整數$m$為奇數，則$T_m(x)$之奇次項係數均不為0、偶次項係數均為0，因此其為奇函數；若正整數m為偶數，則$T_m(x)$為之偶次項係數均不為0、奇次項係數均為0，因此其為偶函數。

Property 5.(H. Woracek & G.Eigenthaler) 若$\boldsymbol{S}$是$\langle \mathbb{C}[x], \circ \rangle$的阿貝爾子半群，則必存在一次函數$L$使得$\Phi_L(\boldsymbol{S})$也為下列某一個$\langle \mathbb{C}[x], \circ \rangle$的阿貝爾子半群的子半群。

(I). $\{x + a | a \in \mathbb{C}\}$　(II). $\{ax | a \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$　(III). $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$　(IV). $\{\zeta x^k | k \equiv 1 (mod\ r), \zeta^r = 1\}$

(V). $\{T_n | n \in \mathbb{N}\}$　(VI). $\{\pm T_k | k: odd\}$

(VII). $\{P^n$(上標表合成次數)$| n \in \mathbb{N}_0, P(x) \in \mathbb{C}[x], \deg(P) \geq 2\}$

(VIII). $span(\zeta x, P)$，其中$P(x)$不共軛於x的冪次、切比雪夫多項式且$\deg(P) \geq 2$、 $P(x) = xp(x^r)$、$p(x) \in \mathbb{C}[x]$、$r > 1$、$\zeta^r = 1$

研究過程與結果

全域解析函數	連續函數

(一)、P_m^f形式粗討論：

Lemma 1. 若f是多倍角函數，則$\{P_m^f(x)|m\in\mathbb{N}\}$必為$\langle\mathbb{C}[x],\circ\rangle$的阿貝爾子半群。

Corollary 1. & Definition 8. 若f是多倍角函數，則$\{P_m^f(x)|m\in\mathbb{N}\}$必共軛下列的某一半群之子半群。
(I). $\{x+a|a\in\mathbb{C}\}$ (II). $\{ax|a\in\mathbb{C},a\neq 0\}$ (III). $\{x^n|n\in\mathbb{N}\}$ (IV). $\{\zeta x^k|k\equiv 1(mod\ r),\zeta^r=1\}$
(V). $\{T_n|n\in\mathbb{N}\}$ (VI). $\{\pm T_k|k:odd\}$
(VII). $\{P^n$(上標表合成次數)$|n\in\mathbb{N}_0,P(x)\in\mathbb{C}[x],deg(P)\geq 2\}$ (VIII). $span(\zeta x,P)$
，其中P不共軛於x的冪次、切比雪夫多項式且$deg(P)\geq 2$、 $P(x)=xp(x^r)$、$p(x)\in\mathbb{C}[x]$、$r>1$、$\zeta^r=1$
我們分別稱f為**EW第一、二、三、...、八類函數**。

Lemma 2. 若f是多倍角函數，則必存在一次函數L使得$\{P_m^{L\circ f}(x)|m\in\mathbb{N}\}$為上述八個半群的子半群。

Theorem 1. 若f是非常數多倍角函數，則$x\notin\{P_m^f(x)|m\in\mathbb{N},m\neq 1\}$ 。

<證明方法>利用反證法與$(L\circ f)(0)$的極限證之。

(二)、P_m^f次數及f之形式完整討論：

Lemma 3. 若$f:\mathbb{N}\to[0,\infty)$滿足以下兩條件：(1)$\forall m,n\in\mathbb{N},f(m)f(n)=f(mn)$ (2) $\forall m,n\in\mathbb{N},m\geq n\Rightarrow f(m)\geq f(n)$，則存在$s\in\mathbb{R}$使得$f(m)=m^s$。

<證明方法>觀察$\log(f(m))$與$\log(f(n))$之比，並利用閉區間套定理證明之。

Lemma 4. 若$s\in\mathbb{R}$使得對於所有的正整數m，$m^s\in\mathbb{N}$，則$s\in\mathbb{N}_0$

Corollary 2. 若f是多倍角函數，且$\forall m,n\in\mathbb{N},m\geq n\Rightarrow \deg(P_m^f)\geq\deg(f(P_n^f))$ ，則存在$s\in\mathbb{N}_0$使$deg(P_m^f)=m^{s_f}$。

全域解析函數

Theorem 2. 若非常數解析函數f有多倍角條件，則，則存在$s_f\in\mathbb{N}_0$使$deg(P_m^f)=m^{s_f}$。

<證明方法> 利用解析函數的無界性以及高次多項式函數之函數值"跑得比較快"證之

Corollary 3. 若非常數解析函數f有多倍角條件，則，則f必為EW第二、第三或第五類函數

<證明方法> 利用Theorem 2. 剔除掉第四、六、七、八類，而第一類函數的剔除由反證法與$(L\circ f)(0)$的極限證之。

Theorem 3. 若非常數解析函數f有多倍角條件，則下列命題必有一正確：
(一)、 f 為EW第二類函數、$f(x)=ax^n+b$，其中$a,b\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$
(二) 、f 為EW第三類函數、$f(x)=ak^{x^n}+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$
(三)、 f 為EW第五類函數、$f(x)=acos(kx^n)+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$

<證明方法> 利用f的解析性，進行微分及$(L\circ f)(0)$的討論，最後寫出f的形式。
特別地，(三)中的$L\circ f(0)$討論中利用了cos的滿射性質以及和差化積推出。

連續函數

Corollary 4. & Definition 9. 若非常數連續函數f有多倍角條件，則P_2^f必共軛於下列四者之一：
(I)一次式 (II)非一次之單項式 (III) $\pm T_k$
(IV) ϵP^n(上標表合成)，其中P不共軛於x的冪次、 $\pm T_k$且$deg(P)\geq 2$、 $P(x)=xp(x^r)$、$p(x)\in\mathbb{C}[x]$、$r>1$、$\epsilon^r=1$
我們分別稱f為**Ritt第零、一、二、三類函數**。

Theorem 4-1. 若非常數連續函數f有多倍角條件，且其為Ritt第一類函數，**則**$deg(P_m^f)=m^{s_f}$。

<證明方法> 可觀察知Ritt第一類函數必為EW第三、四類函數，又發現可利用$L\circ f(0)$ 其寫出P_m^f的係數絕對值，再利用特定區間的值域得出 $\forall m,n\in\mathbb{N},m\geq n\Rightarrow\deg(P_m^f)\geq\deg(f(P_n^f))$ ，最後由Corollary 2.確定之。

Theorem 4-2. 若非常數連續函數f有多倍角條件，且其為Ritt第二類函數，**則**$deg(P_m^f)=m^{s_f}$。

<證明方法> 可觀察知Ritt第二類函數必為EW第五、六類函數，又利用cos的滿射性質以及cos在主值上的對射性質，利用其反函數之特定區間上的值域得出$\forall m,n\in\mathbb{N},m\geq n\Rightarrow\deg(P_m^f)\geq\deg(f(P_n^f))$ ，最後由Corollary 2.確定之。

Theorem 4-3. 若非常數連續函數f有多倍角條件，則其不為Ritt第三類函數, 。

<證明方法> 利用反證法，可觀察知Ritt第三類函數必為EW第七、八類函數，再利用Berzout's Lemma 得出：有兩相異有理數p_1、 p_2使得$(L\circ f)f(p_1x)=(L\circ f)(p_2x)$，利用$(L\circ f)(0)$之極限即可推出。

Theorem 5. 若非常數連續函數f有多倍角條件，則下列命題必有一正確：
(一)、 f 為Ritt第零類函數、$f(x)=ax^k+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$
(二) 、f 為Ritt第一類函數、$f(x)=ak^{x^n}+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$
(三)、 f 為Ritt第二類函數、$f(x)=acos(kx^n)+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$

<證明方法>
(一)、(二)中，先去利用輻角及絕對值討論$P_m^{L\circ f}$的確切形式。再利用$(L\circ f)$的連續性，針對某個x去討論$(L\circ f)\left(\frac{x}{2}\right)$、$(L\circ f)\left(\frac{x}{4}\right)$...等。最後，再利用極限去得出每一點的值以確定之。
而(三)則是利用cos的滿射性質以及$(L\circ f)(0)$的討論，最後再以限制區間上的取值以確定其函數值。

多變數

Theorem 6. 若多變數連續函數$f:[0,\infty)^{\alpha}\to\mathbb{C}$有多變數弱多倍角條件，則其必為以下形式之一：

(1). $a{x_1}^{t_1}\dots{x_\alpha}^{t_\alpha}+b$，其中$a,b,k,t_i\in\mathbb{C}$

(2). $ak^{{x_1}^{k_1}\dots{x_\alpha}^{k_\alpha}}+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$k_1+\cdots+k_\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

(3). $a\cos(k{x_1}^{k_1}\dots{x_\alpha}^{k_\alpha})+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$k_1+\cdots+k_\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

Theorem 7. 若多變數連續函數$f:[0,\infty)^{\alpha}\to\mathbb{C}$有多變數強多倍角條件，則其必為以下形式之一：

(1). $a{x_1}^{t_1}\dots{x_\alpha}^{t_\alpha}+b$，其中$a,b,k,t_i\in\mathbb{C}$

(2).$ak^{{x_1}^{n_1}\dots{x_\alpha}^{n_\alpha}}+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n_1,\dots,n_\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

(3).$a\cos(k{x_1}^{n_1}\dots{x_\alpha}^{n_\alpha})+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n_1,\dots,n_\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

<證明方法>將x_m改寫為$t_m x_1$，即可將函數改寫為x_1的單變數函數，其他變數以此類推。

研究結果

解析函數	EW第一類	EW第二類	EW第三類	EW第四類
	X	$f(x)=ax^n+b$，其中$a,b\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$	$f(x)=ak^{x^n}+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$	X
	EW第五類	EW第六類	EW第七類	EW第八類
	$f(x)=a\cos(kx^n)+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$	X	X	X

連續函數	Ritt第零類	Ritt第一類	Ritt第二類	Ritt第三類
	$f(x)=ax^k+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$	$f(x)=ak^{x^n}+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$	$f(x)=a\cos(kx^n)+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$	X

多變數連續函數	多變數弱多倍角條件	多變數強多倍角條件
	(1). $a{x_1}^{t_1}\dots{x_\alpha}^{t_\alpha}+b$ (2). $ak^{{x_1}^{k_1}\dots{x_\alpha}^{k_\alpha}}+b$ (3). $a\cos(k{x_1}^{k_1}\dots{x_\alpha}^{k_\alpha})+b$ ，其中$a,b,k,t_i\in\mathbb{C}$、$k_1+\cdots+k_\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$	(1). $a{x_1}^{t_1}\dots{x_\alpha}^{t_\alpha}+b$ (2). $ak^{{x_1}^{n_1}\dots{x_\alpha}^{n_\alpha}}+b$ (3). $a\cos(k{x_1}^{n_1}\dots{x_\alpha}^{n_\alpha})+b$ ，其中$a,b,k,t_i\in\mathbb{C}$、$n_1,\dots,n_\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

未來展望

目前有以下兩個延伸研究方向：

(一)、若$f:(0,\infty)\to\mathbb{C}$連續且有多倍角條件，探討$f$可能的形式

Conjecture 1.(取代Theorem 1.的論證) $f:(0,\infty)\to\mathbb{C}$連續且有多倍角條件，則 f: $bounded\ variation$

Conjecture 2. $f:(0,\infty)\to\mathbb{C}$連續且有多倍角條件，則其必為以下形式之一：

(一)、$f(x)=ax^k+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$

(二)、$f(x)=ak^{x^n}+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$

(三)、$f(x)=a\cos(kx^n)+b$，其中$a,b,k\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{N}$

(四)、$f(x)=a\log(x)+b$ ，其中$a,b\in\mathbb{C}$

(二)、考慮在$[0,\infty)$上連續的函數$f(x)$、$g(x)$，定義雙函數多倍角條件為：對於所有的$(m,n)\in\mathbb{N}^2$，均存在多項式$P_m^{f,g}(x,y)$、$Q_n^{f,g}(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$，使$f(mx)=P_m^{f,g}(f(x),g(x))$、$g(nx)=Q_n^{f,g}(f(x),g(x))$。找出並分類符合雙函數多倍角條件的$(f,g)$

Property 6. 若(f,g) 有雙函數多倍角條件且$ad-bc\neq 0$，則$(af+bg,cf+dg)$也有雙函數多倍角條件。

Conjecture 3. 若(f,g) 具有雙函數多倍角條件，則存在一個非零多項式$O(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$，對於所有的$x\in\mathbb{C}$，均使得$O\big(f(x),g(x)\big)=0$

Conjecture 4. 若(f,g) 具有雙函數多倍角條件，則存在$a,b\in\mathbb{C}$， 使得$(af+bg)$為多倍角函數

參考資料

[1]Ahlfors L.(1979). Complex Analysis. New York: McGraw-Hill Education

[2]Eigenthaler, G., & Harald, W.(1998). A Remark on Permutable Polynomials.

[3] Harald, W., & Eigenthaler, G. (1995) Permutable Polynomials and some Related Topics.

[5]Mhaskar.H.N.(1996). Neural Networks for Optimal Approximation of Smooth and Analytic Functions.

[3]Ritt, J.F. (1923). Permutable rational functions [Special section]. *AMS 25, 399-448.*

[4]Sinwell B.(Eds.).(2004). The Chebyshev Polynomials: Patterns and Derivation [Special section]. *Mathematics Teacher, 98(1), 20-25*

[6]葉能哲、賴漢卿（譯）(民100)。**解析概論**（原作者：高木貞治）。新北市：文笙。