中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050413

左手畫「方」右手畫「矩」

學校名稱：國立臺東高級中學

作者：	指導老師：
高二 曾祥宇 高二 郭東翰 高二 陳駿瑋	王玟綺

關鍵詞：均衡方塊

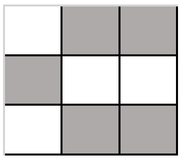
摘要

我們的作品的內容為探討正方形$m \times m$的方格中，若將其全部塗上黑或白兩種顏色，則每個2×2的正方形中的黑白數目皆一致(皆為 2 個)的時候，會有多少種可能性，並將其分作旋轉視為相異，旋轉視為相同 2 種，在前者我們使用了是列舉法以及基模法進行驗證，兩種方法在推導出公式後的結果後是一樣的，在這個基礎下，我們將題目發展成在矩形$m \times n$方格的情況下再次推算，也得到一樣的結果。

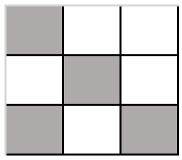
而方格旋轉視為相同的情況則使用了組合「C」以及基模法來解決問題，並發現許多情況都必須考慮進去才能避免遺漏或重複的情況產生，在求得正方形$m \times m$方格的通式後，我們再次嘗試將公式應用到矩形$m \times n$方格中，在考慮到幾種不同的條件後，我們都列出了相對應的通式來求得我們所需要的答案。

壹、研究動機

我們在翻閱 AMC 試題中看到一個非常有趣的題目「一個3×3方格中，小方格內都被塗上了黑色或是白色。若其中任何一個2×2方格中，黑色和白色都各佔二個小方格，則稱為均衡方塊，如圖(1)。反之則為不均衡方塊，如圖(2)，因為右上角的2×2方格內有三個白色小方格，一個黑色小方格。若將旋轉後不同的方格視為不同，請問總共有多少個3×3方格的均衡方塊？」我們認為若將此題推廣到$m\times n$方格的均衡方塊會是一題非常有挑戰性的題目，經過初步列舉和思考後，我們發現此題可以應用高一「排列組合」單元中學過的概念，因此我們利用課本中所學到的知識觀念進行探究，希望能解出找到通式。



圖(1)



圖(2)

貳、研究目的及名詞解釋

一、基於上述，我們的研究目的如下：

(一)利用列舉法和重複排列基模法，探討矩形$m\times n$方格旋轉視為相異均衡方塊的個數，並推廣找到通式。

(二)利用組合「C」和重複排列基模法，探討正方形$m\times m$方格旋轉視為相同均衡方塊的個數，並推廣找到通式。

(三)探討矩形$m\times n$方格旋轉視為相同均衡方塊的個數，並推廣找到通式。

二、名詞解釋：

(一)矩形$m\times n$方格旋轉視為相異均衡方塊的個數記為$n(A_{m\times n})$

(二)正方形$m\times m$方格旋轉視為相同均衡方塊的個數記為$n(B_m)$

(三)矩形$m\times n$方格旋轉視為相同均衡方塊的個數記為$n(B_{m\times n})$

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦

肆、研究過程及方法

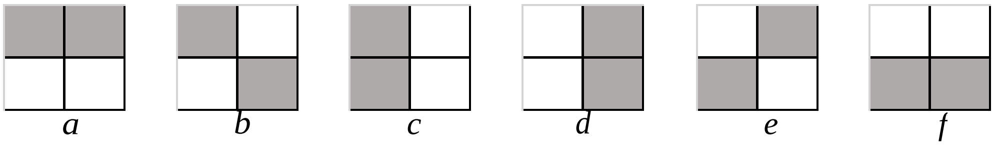
一、矩形 $m \times n$ 方格旋轉視為相異的均衡方塊

因為題目提供二種解法，所以我們也打算利用列舉法和基模法來找出規則，以便推廣或找出通式。

(一)列舉法

1. $2 \times n$ 方格的均衡方塊

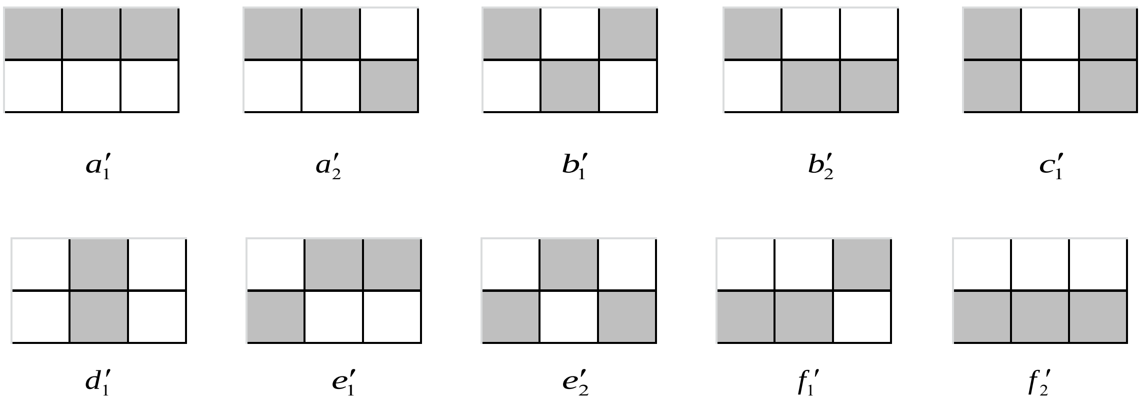
(1) 2×2 方格的均衡方塊；我們用列舉法畫出所有可能情況，共有 6 種，如圖(3)



圖(3)

我們打算以 2×2 方格的 6 種情況為基模，往右延伸。

(2) 2×3 方格的均衡方塊個數，從 2×2 均衡方塊的基模中，我們定義從 a 畫出 a_1' 、 a_2' ； b 畫出 b_1' 、 b_2' ； c 畫出 c_1' ； d 畫出 d_1' ； e 畫出 e_1' 、 e_2' ； f 畫出 f_1' 、 f_2' ，共有 10 種，如圖(4)。



圖(4)

由此我們觀察出，基模 a 、 b 、 e 、 f 只要往右延伸一行就可畫出 2 種情況；基模 c 、 d 只能維持一種，我們初步的列出算式

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
n(A_{2\times 2}) = & 1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\
n(A_{2\times 3}) = & 1\times 2 & +1\times 2 & +1 & +1 & +1\times 2 & +1\times 2
\end{array}
$$

依此類推，我們可推估，

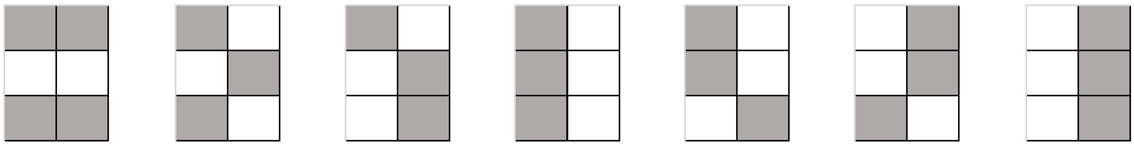
$$n\left(A_{2\times4}\right)=1\times2^{2}+1\times2^{2}+1\quad+1\quad+1\times2^{2}+1\times2^{2}$$

$$n\left(A_{2\times5}\right)=1\times2^{3}+1\times2^{3}+1\quad+1\quad+1\times2^{3}+1\times2^{3}$$

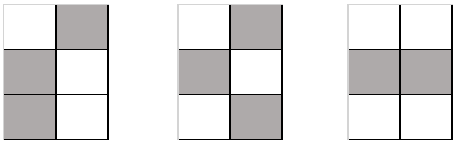
畫圖驗證也無誤，所以 $2\times n$ 系統先暫且擱下，我們往下探究。

2. $3\times n$ 方格的均衡方塊

(1) 3×2 方格的均衡方塊，我們用列舉法畫出所有可能的情況，如圖(5)



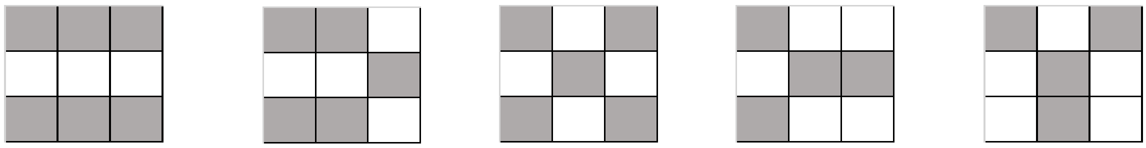
a_1 b_1 b_2 c_1 c_2 d_1 d_2



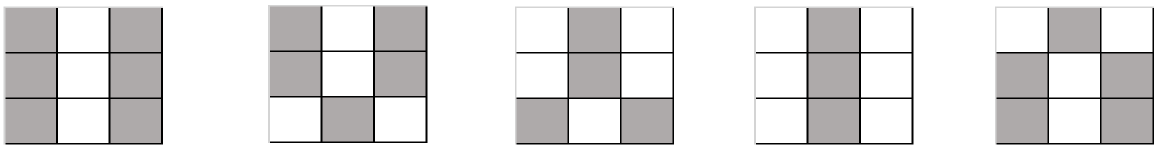
e_1 e_2 f_1

圖(5)

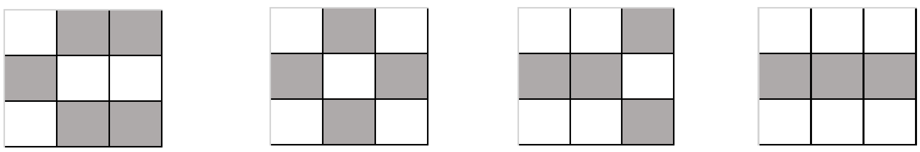
(2) 3×3 方格的均衡方塊，從 3×2 均衡方塊往右延伸一行，我們 a_1 畫出 a_{11} 、 a_{12} ； b_1 可畫出 b_{11} 、 b_{12} ； b_2 畫出 b_2 ； c_1 畫出 c_1 ； c_2 畫出 c_2 ； d_1 畫出 d_1 ； d_2 畫出 d_2 ； e_1 畫出 e_1 ； e_2 畫出 e_{21} 、 e_{22} ； f_1 畫出 f_{11} 、 f_{12} ，如圖(6)



a_{11} a_{12} b_{11} b_{12} b_2



c_1 c_2 d_1 d_2 e_1



e_{21} e_{22} f_{11} f_{12}

圖(6)

由此我們觀察出

$$\begin{array}{lllllll} & a & b & c & d & e & f \\ n(A_{3\times2}) = & 1 & +1\times2 & +1\times2 & +1\times2 & +1\times2 & +1 \\ n(A_{3\times3}) = & 1\times2 & +(1\times2+1) & +1\times2 & +1\times2 & +(1\times2+1) & +1\times2 \end{array}$$

依此規律，我們可推估

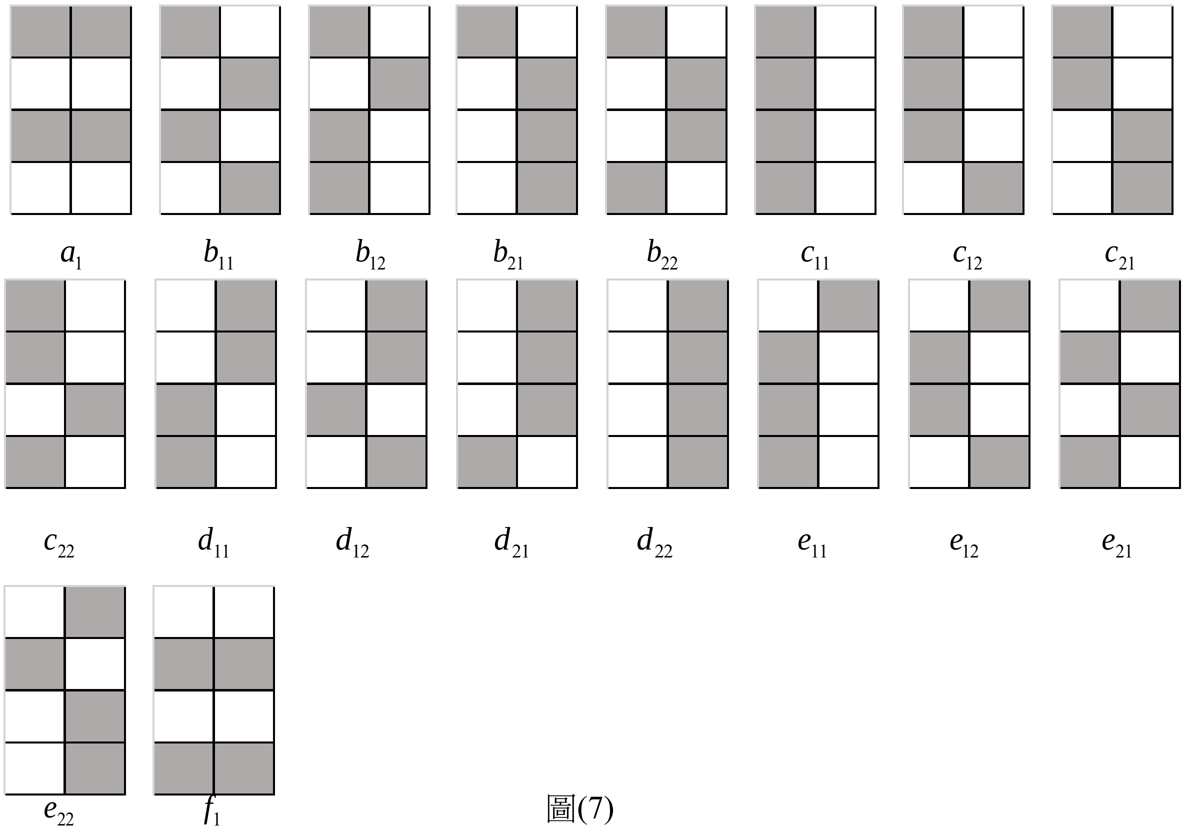
$$n(A_{3\times4}) = 1\times2\times2 + (1\times2\times2+1) + 1\times2\times1 + 1\times2\times1 + (1\times2\times2+1) + 1\times2\times2$$

$$n(A_{3\times5}) = 1\times2\times2\times2 + (1\times2\times2\times2+1) + 1\times2\times1 + 1\times2\times1 + (1\times2\times2\times2+1) + 1\times2\times2\times2$$

我們暫時擱下，先繼續往下延伸 $4\times n$ 、 $5\times n$…方格的均衡方塊

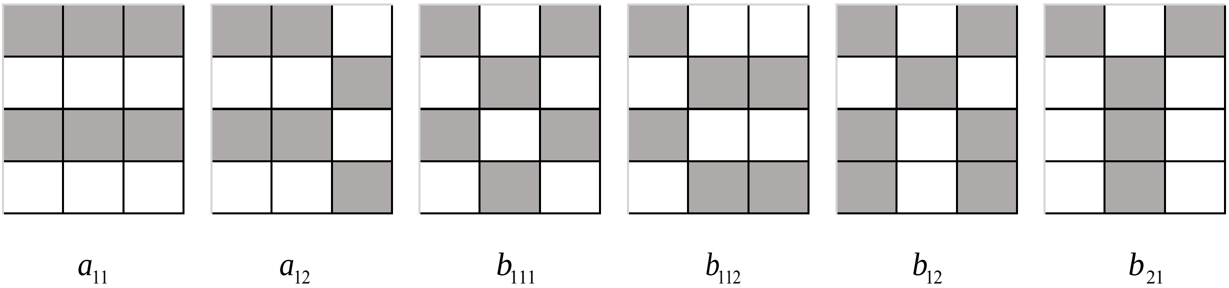
3. $4\times n$ 方格的均衡方塊

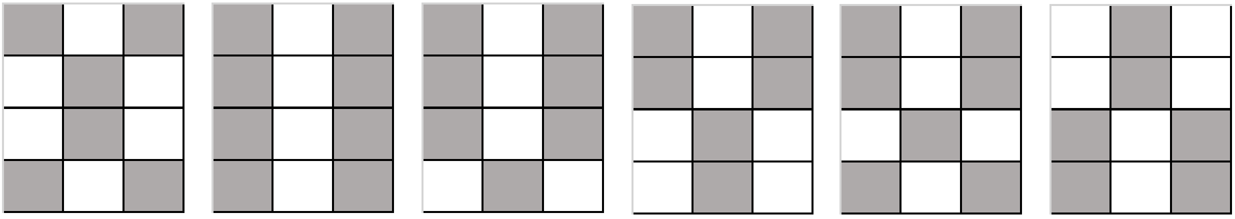
(1) 4×2 方格的均衡方塊:以 3×2 方格的均衡方塊向下延伸一列畫圖，如圖(7)



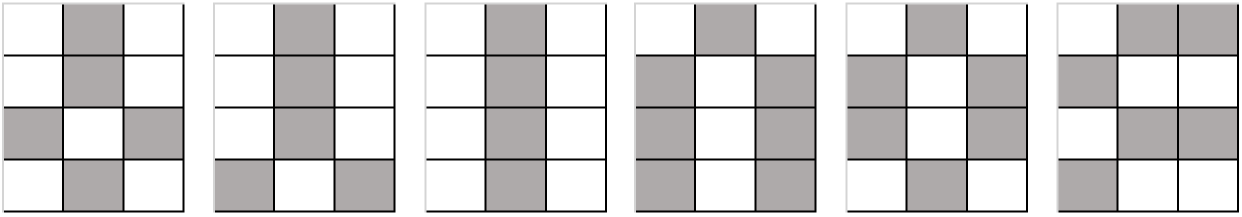
圖(7)

(2) 4×3 方格的均衡方塊，由 4×2 方格的均衡方塊向右延伸一行畫圖，如圖(8)

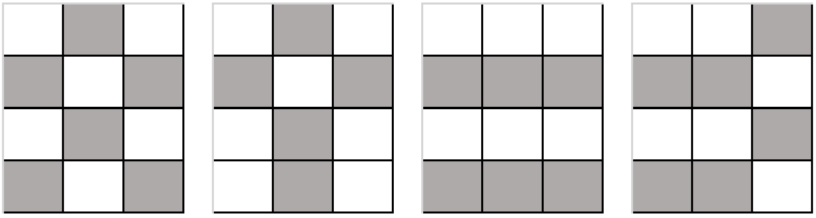




b_{22} c_{11} c_{12} c_{21} c_{22} d_{11}



d_{12} d_{21} d_{22} e_{11} e_{12} e_{211}



e_{212} e_{22} f_{111} f_{12}

圖(8)

$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f$

$$n(A_{4\times2}) = 1 + (1+3) + 1\times2\times2 + 1\times2\times2 + (1+3) + 1$$

$$n(A_{4\times3}) = 1\times2 + (1\times2+3) + 1\times2\times2 + 1\times2\times2 + (1\times2+3) + 1\times2$$

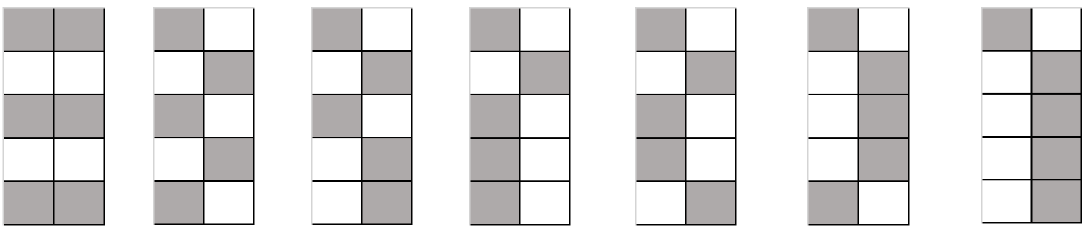
依此規律和作圖，我們推估出

$$n(A_{4\times4}) = 1\times2\times2 + (1\times2\times2+3) + 1\times2\times2 + 1\times2\times2 + (1\times2\times2+3) + 1\times2\times2$$

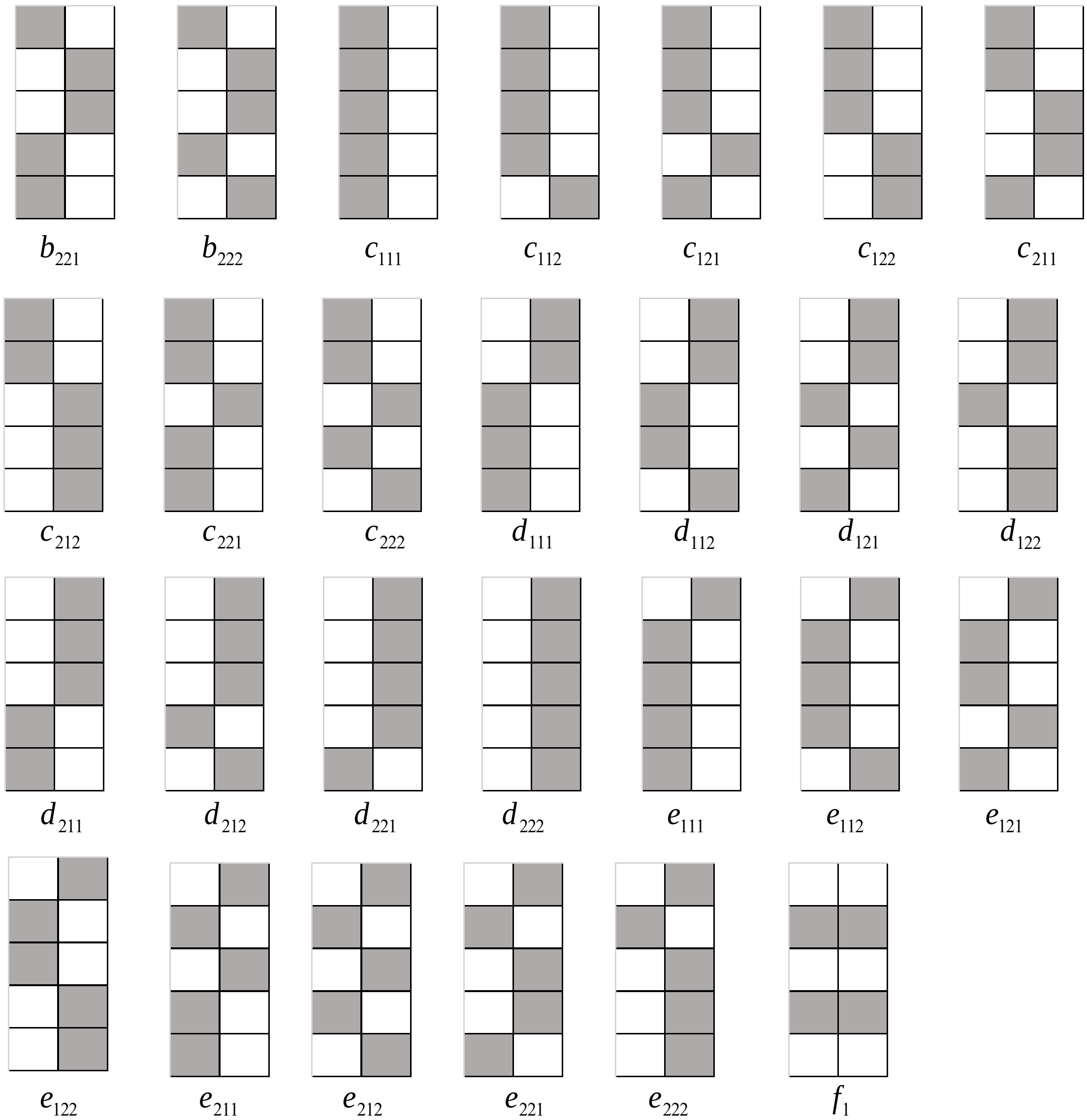
$$n(A_{4\times5}) = 1\times2\times2\times2 + (1\times2\times2\times2+3) + 1\times2\times2 + 1\times2\times2 + (1\times2\times2\times2+3) + 1\times2\times2\times2$$

4. $5\times n$ 方格的均衡方塊

(1) 5×2 方格的均衡方塊:以 4×2 方格的均衡方塊向下延伸一列畫圖，如圖(9)



a_1 b_{111} b_{112} b_{121} b_{122} b_{211} b_{212}



圖(9)

$$\begin{array}{lllllll} & a & b & c & d & e & f \\ n(A_{5\times2}) = & 1 & +(1+7) & +1\times8 & +1\times8 & +(1+7) & +1 \end{array}$$

依照規律和作圖，我們推估出

$$n(A_{5\times3}) = 1\times2 + (1\times2+7) + 1\times8 + 1\times8 + (1\times2+7) + 1\times2$$

$$n(A_{5\times4}) = 1\times2\times2 + (1\times4+7) + 1\times8 + 1\times8 + (1\times4+7) + 1\times2\times2$$

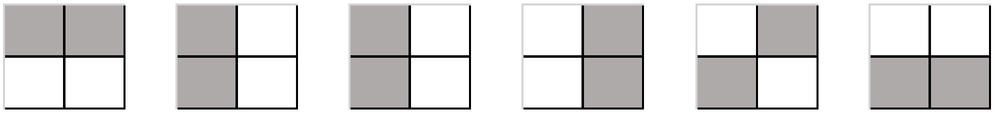
$$n(A_{5\times5}) = 1\times2\times2\times2 + (1\times8+7) + 1\times8 + 1\times8 + (1\times8+7) + 1\times2\times2\times2$$

5.透過$2\times n$、$3\times n$、$4\times n$、$5\times n$的整理公式我們進而推導出$m\times n$的通式

$$n(A_{2\times n})=2\times(1\times 2^{n-2}+1\times 2^{n-2}+1)$$
$$n(A_{3\times n})=2\times\left[1\times 2^{n-2}+(1\times 2^{n-2}+1)+1\times 2\right]$$
$$n(A_{4\times n})=2\times\left[1\times 2^{n-2}+(1\times 2^{n-2}+3)+1\times 2^{2}\right]$$
$$n(A_{5\times n})=2\times\left[1\times 2^{n-2}+(1\times 2^{n-2}+7)+1\times 2^{3}\right]$$
$$\dots$$
$$\Rightarrow n(A_{m\times n})=2\times\left\{1\times 2^{n-2}+\left[1\times 2^{n-2}+(2^{m-2}-1)\right]+1\times 2^{m-2}\right\}$$

(二)基模的重複排列

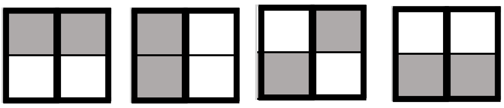
1.2×2方格的均衡方塊，我們用列舉法先找到2×2方格的均衡方塊，如圖(10)



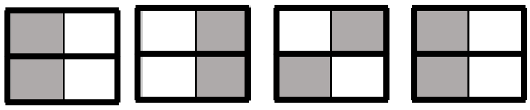
圖(10)

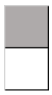
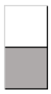
我們以「行」和「列」來看，如圖(11)

(1)以行來看　　　　　　和　　　　　　(2)以列來看



圖(11)



發現「行」的基模為  、  ，所以 2 行有2^2種方法

「列」的基模為  、  ，所以 2 列有2^2種方法

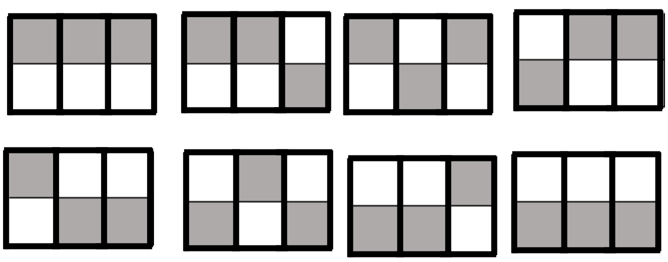
其中有 2 組重複出現

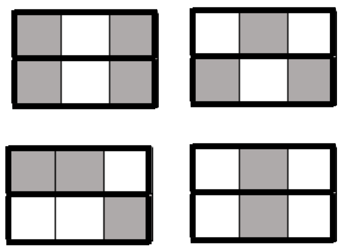
「行」　　「列」　　「重複」

因此$n(A_{2\times 2})=2^2+2^2-2=6$種

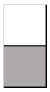
2.2×3 方格的均衡方塊:同樣我們採用列舉法，如圖(12)

(1)以「行」來看　　　　　　(2)以「列」來看





圖(12)

發現「行」的基模為 、 ，所以 3 行有2^3種方法

「列」的基模為、，所以 2 列有2^2種方法

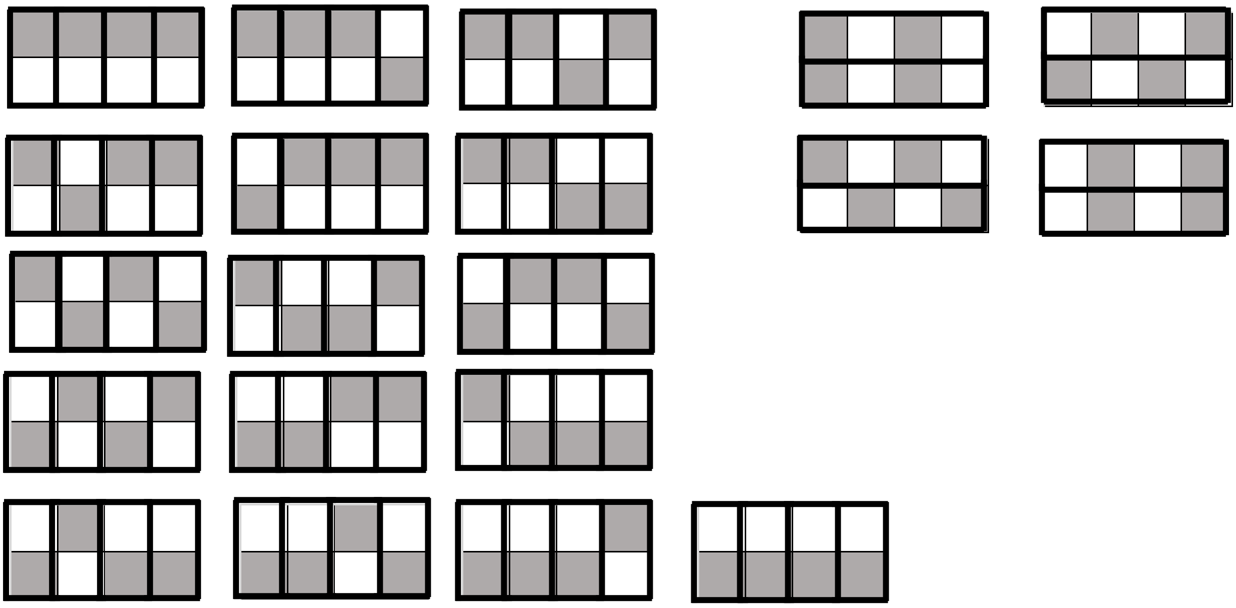
其中有 2 組重複出現

「列」　　「行」　　「重複」

因此$n(A_{2\times3}) = \quad 2^3 \quad + \quad 2^2 \quad - \quad 2 \quad = 10$種

3. 2×4 方格的均衡方塊:如圖(13)

(1)以「行」來看　　　　(2)以「列」來看



圖(13)

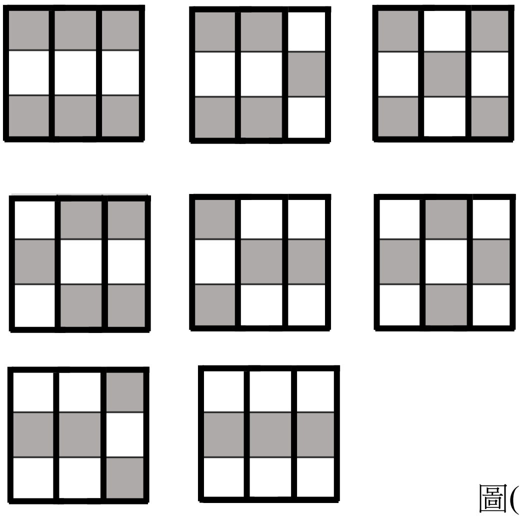
我們發現「行」的基模跟「列」的基模也會有 2 組重複出現，於是

$n(A_{2\times4}) = 2^4 + 2^2 - 2 = 18$

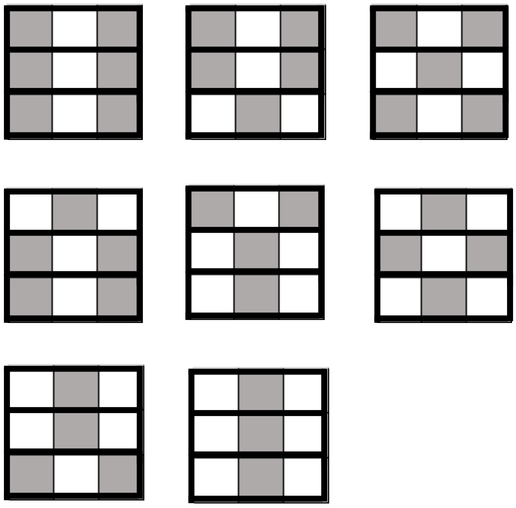
我們因而大膽推測$n(A_{2\times4}) = 2^n + 2^2 - 2$

4. 3×3方格的均衡方塊: 推測$2\times n$方格的均衡方塊後，我們也嘗試用同樣方法，推測3×3方格的均衡方塊，如圖(14)

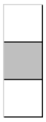
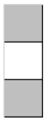
(1)以「行」來看



(2)以「列」來看



圖(14)

我們發現「行」的基模也有兩種、，所以 3 行總共有2^3種

「列」的基模也是兩種、，所以 3 列總共有2^3種

其中也有 2 組重複圖形

因此個數為$n(A_{3\times3}) = 2^3 + 2^3 - 2 = 14$

至此，我們再延伸畫圖，發現不管「行」還是「列」的基模都只會有 2 種，因此每一行、每一列都會有兩種選擇，而且重複圖形也都剛好有 2 個

因此可以得知：在$m\times n$的方格中會有$2^m + 2^n - 2$種均衡方塊。

(三)小結：

由(一)列舉法和(二)重複排列得知

$$n(A_{m\times n}) = 2\times\left\{1\times2^{n-2} + \left[1\times2 + \left(2^{m-2} - 1\right)\right] + 1\times2^{m-2}\right\}$$

$$= 2\times2^{n-1} + \left(2^{m-1} - 2\right) + 2^{m-1} = 2\times2^{n-1} + 2\times2^{m-1} - 2 = 2^n + 2^m - 2$$

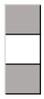
推導後的結果相同，得證

矩形$m\times n$方格中，旋轉視為相異均衡方塊的個數$n(A_{m\times n}) = 2^m + 2^n - 2$

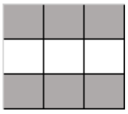
二、正方形$m\times m$方格旋轉視為相同的均衡方塊

我們覺得這個題目如果就這樣結束未免太可惜，於是我們想到，若經旋轉後的圖形視為相同圖形，又會有怎樣的情形發生?首先我們打算從正方形研究，再推廣到矩形的通式。

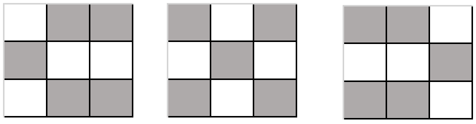
(一)用組合「C」探討正方形$m \times m$方格的特徵方塊

我們將旋轉後的圖形視為同一種圖形的情況，稱為「特徵均衡方塊」，簡稱「特徵方塊」經過之前的研究，我們發現一種有效率尋找「特徵方塊」的方法。任何一種均衡方塊均是由基本方塊「直行變色」而來的。所謂的「直行變色」是指「一直行」中的  變成 。以3×3方格為例，如圖(15)，無論它怎麼「直行變色」皆脫離不了均衡方塊的情況。藉由「直行變色」的位置及數目的不同，我們可以用組合「C」來表示變化情況。

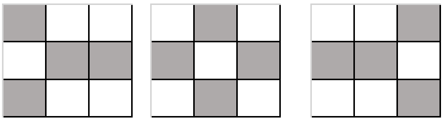
0 行變色：組合數=C_0^3



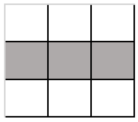
1 行變色：組合數=C_1^3



2 行變色：組合數=C_2^3



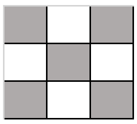
3 行變色：組合數=C_3^3



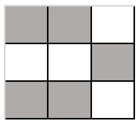
圖(15)

在計算過程中，我們發現有些圖形會產生重複的問題

圖(16)



圖(17)

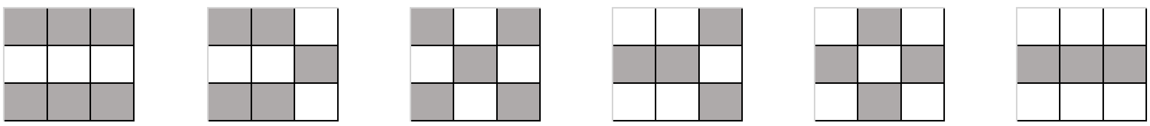


圖(18)

像是圖(16)、圖(17)、圖(18)這三個圖形，都會在組合C_1^3中出現，但是圖(16)旋轉 180 度後會變為圖(18)，代表他們兩個圖只能歸為同一種。另外C_2^3和C_1^3的黑白變化情況相同，我們用$2 \times C_1^3$表示，而且由此更可知道因為對稱性的關係，我們需將方塊分為奇數和偶數來看。

1.奇數方格正方形的特徵方塊

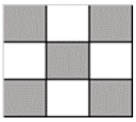
(1) 3×3方格的特徵方塊：我們畫出所有情況，如圖(19)



C_0^3 C_1^3 C_1^3 C_2^3 C_2^3 C_3^3

圖(19)

C_0^3的圖形在直行變色後會和C_3^3相等，C_1^3和C_2^3也是，所以把C_0^3、C_1^3各乘 2 就可以知道特徵方塊的總個數。但其中可以發現C_1^3、C_2^3有 1 組重複圖形，這些重複圖形的特徵是沒有左右對稱，因此要將這些圖形的總數除以 2；圖形中不會重複的圖形左右是會對稱的，如圖(20)，只要減掉它再除以 2 便可以找出不對稱的圖形總數。將不對稱的圖形加上對稱的圖形即為C_1^3的全部圖形，乘以 2 後即為C_1^3、C_2^3的全部圖形。

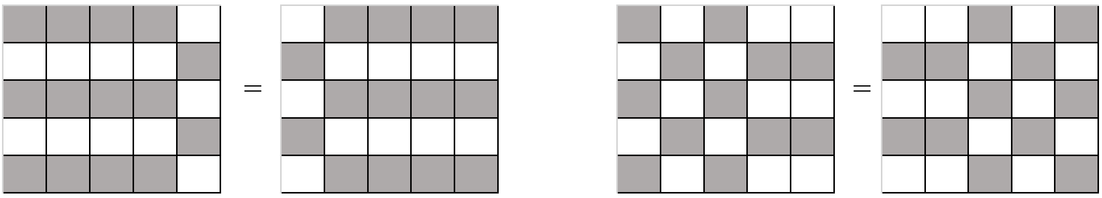


圖(20)

可推得：3×3方格的均衡方塊數，$n(B_3)=C_0^3\times2+\left(\dfrac{C_1^3-1}{2}+1\right)\times2$種

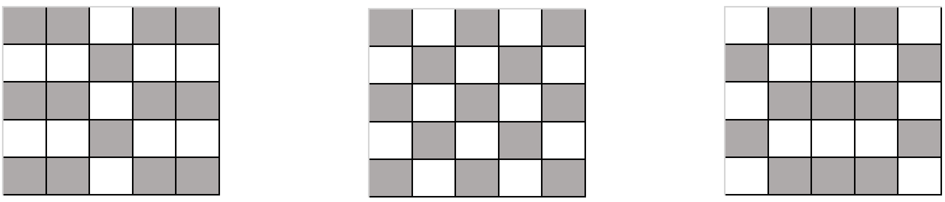
(2)5×5方格的特徵方塊:由3×3方格的均衡方塊知需將圖形再分為左右不對稱和左右對稱的圖形

①左右不對稱的圖形，如圖(21)中，依3×3方格的均衡方塊規則知道，它們都會重複計算，所以要除以 2



圖(21)

②左右對稱的圖，如圖(22)，它們不會重複。



圖(22)

推得$n(B_5)=C_0^5\times2+\left(\dfrac{C_1^5-1}{2}+1\right)\times2+\left(\dfrac{C_2^5-2}{2}+2\right)\times2$

(3)小結:最後我們得到**奇數方格正方形**的通式:

$$\text{在 } m\times m \text{ (令 } m=2a+1, a\in N\text{) 方格中，} n(B_m)=\sum_{k=0}^{a} C_k^{2a+1}+C^{a}_{\left[\frac{K}{2}\right]}$$

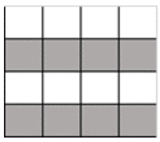
這裡的 $C^{a}_{\left[\frac{K}{2}\right]}$ 指的是對稱的圖形，藉由對稱性質，觀察一半可以求得另一半的圖形，故 $\left\lfloor\frac{K}{2}\right\rfloor$ 表示該半邊的變色情形，高斯符號可以限制變色方格的數目為奇數時所造成的影響。

2.偶數方格正方形的特徵方塊

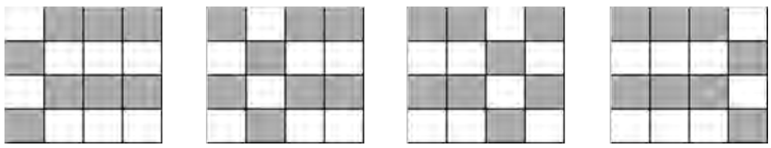
在偶數方格正方形的特徵方塊中，由於其並不具有中間那一行的直行變色，所以其性質一定和奇數有所差別，但我們依然使用組合「C」來解決問題。

(1) 4×4 方格的均衡方塊

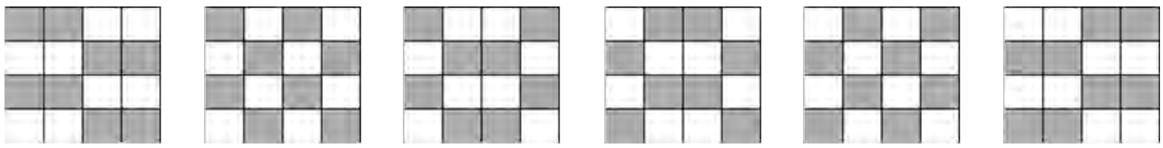
C_0^4



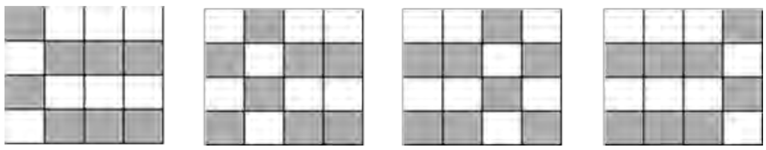
C_1^4



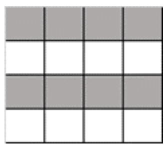
C_2^4



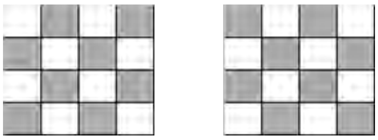
C_3^4



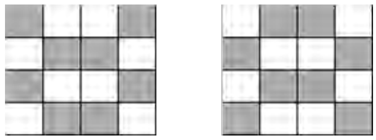
C_4^4



可以看出 C_0^4 的圖形會和 C_4^4 相同，而 C_1^4 和 C_3^4 也是同樣情況，因此在計算時，將 C_4^4 和 C_3^4 忽略不計。藉由觀察，可以發現零行變色的數目為 C_0^4，一行變色的數目為 C_1^4，和組合「C」的規則不符的為 C_2^4，比預計多了 2 種，產生重複的圖形為 C_2^4，如圖(23)，以及圖(24)，接著我們以 6×6 來進行下一步的研究。



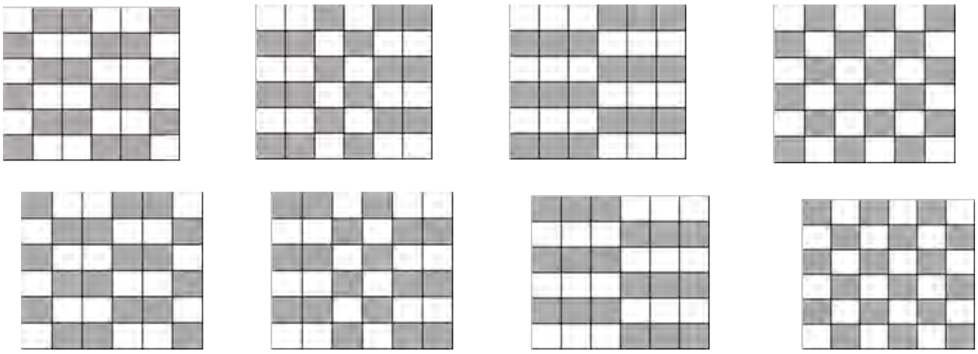
圖(23)



圖(24)

(2) 6×6 方格的均衡方塊

再次驗證我們之前的推論，可以忽略 C_6^6 、 C_5^6 以及 C_4^6 的圖形，且除了 C_3^6 之外皆符合組合「C」的規則，藉由觀察，可發現不會產生重複的圖形，看起來都有個共通點，他們都是自中間切開後，左右 2 邊在旋轉後一模一樣的圖形，我們把他稱作「斜鏡像方塊」



圖(25)

唯一的例外是圖(26)，其雖然符合鏡像方塊的定義，卻會產生重複，因此必須將總方塊的數目扣去一個。

圖(26)

(3)偶數方格正方形斜鏡像方塊的數目

由於斜鏡像方塊的特殊性質，觀察其中一邊便可以推得其另外一邊的樣貌。因此在 $m\times m(m=2a, a\in N)$ 圖形中，若斜鏡像方塊左半邊有 1 個變色，其右半邊則有 $m-1$ 個變色，藉此可以知道斜鏡像方塊的數目為 $C_0^m+C_1^m+...C_m^m$ ，將 C^{2m}_m 加入其斜鏡像方塊後除以 2，最後再移去例如圖(26)的圖形，即可求出其變色數目。

(4) 小結:最後我們推得**偶數方格正方形**的通式:

在 $m\times m$ (令 $m=2a, a\in N$) ，$n(B_{2m\times 2m})=\sum_{k=0}^{m-1}C_k^{2m}+\dfrac{C_m^{2m}+\sum_{k=0}^{m}C_k^{m}}{2}-1$

(二)用重複基模法探討正方形 $m\times m$ 方格的特徵方塊

因為在一之(二)基模的重複排列結論中，可以使用行與列的基模成功找到通式，所以我們再次嘗試在特徵方塊使用此方法。

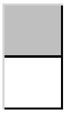
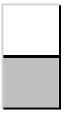
1.初探

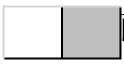
(1) 2×2 方格的特徵方塊，如圖(27)

以行來看　　　　　　　　　　　　以列來看

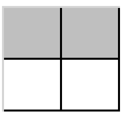
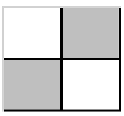
圖(27)

這時我們發現，特徵方塊的基模跟原題的一樣

行有  、  兩種

列有  、  兩種

但是這兩種看法的結果會完全的重疊在一起，所以我們決定先只以行來看，然而，就算只算以「行」來看還是會有一樣的，最後剩下

 、  兩種

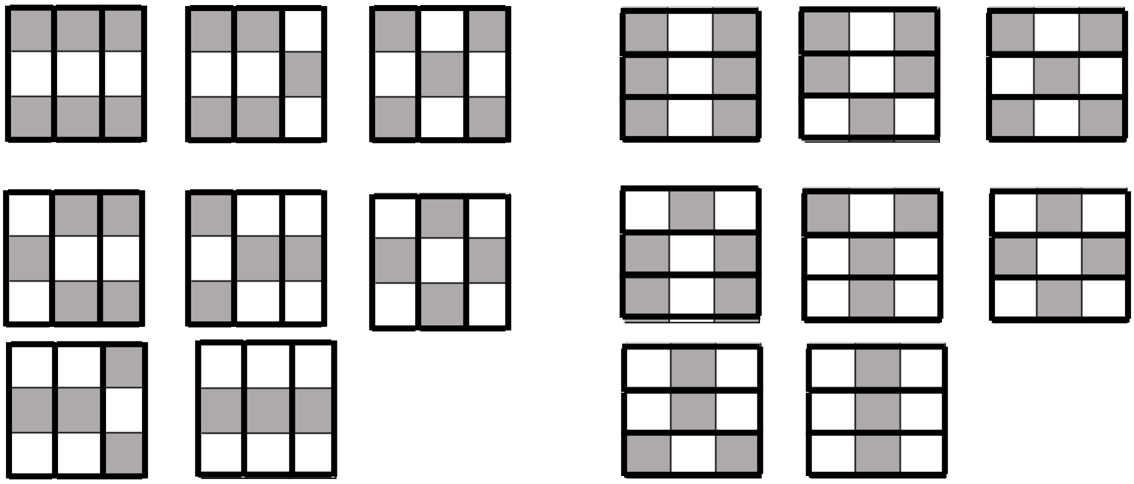
而在畫之前，我們想到有一個關鍵點，若「以行來看」跟「以列來看」一模一樣，它得是正方形；若只是長方形，例如：3×2 方格的均衡方塊「以行來看」和「以列來看」就不一樣，如圖(28)。

圖(28)

因此，需把特徵方塊分成正方形、和長方形兩部分

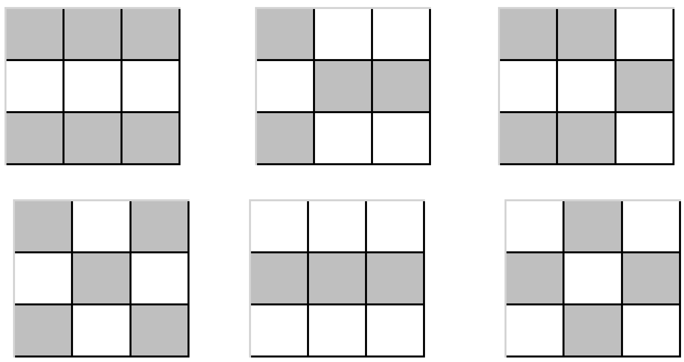
(2) 3×3 方格的特徵方塊，如圖(29)

以行來看　　　　　　　　　　　　以列來看



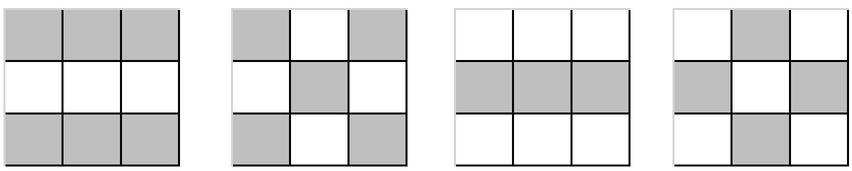
圖(29)

由 2×2 方格的推導加上這裡的畫圖可以驗證正方形的以「行」來看和以「列」來看真的是完全相同的，所以，留下以「行」來看的部分，並扣除重複的圖形，如圖(30)，共六種。



圖(30)

此時，我們發現有四個圖形不會重複到，如圖(31)

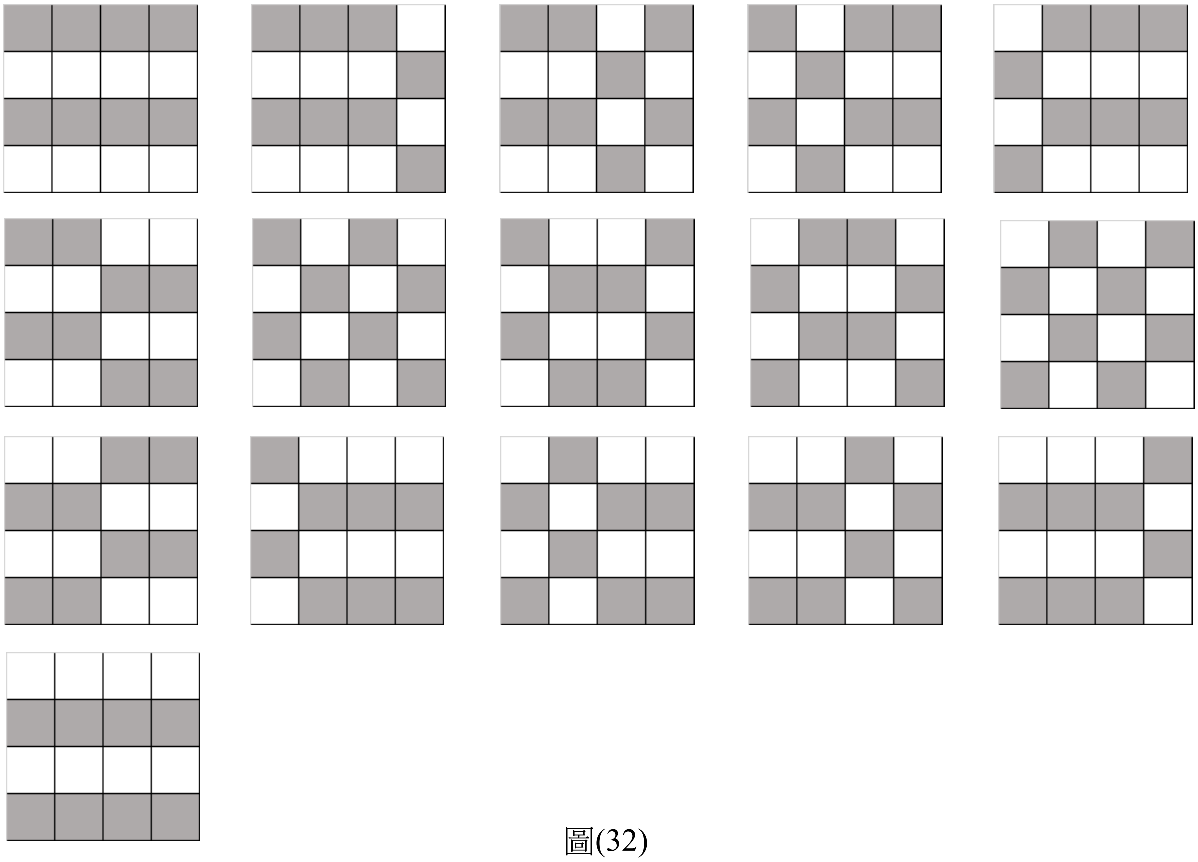


圖(31)

我們覺得這四個圖形看起來相較於其他兩個圖形更「有規律」，但是暫時無法完全解釋關係。只好先繼續往 4×4 研究

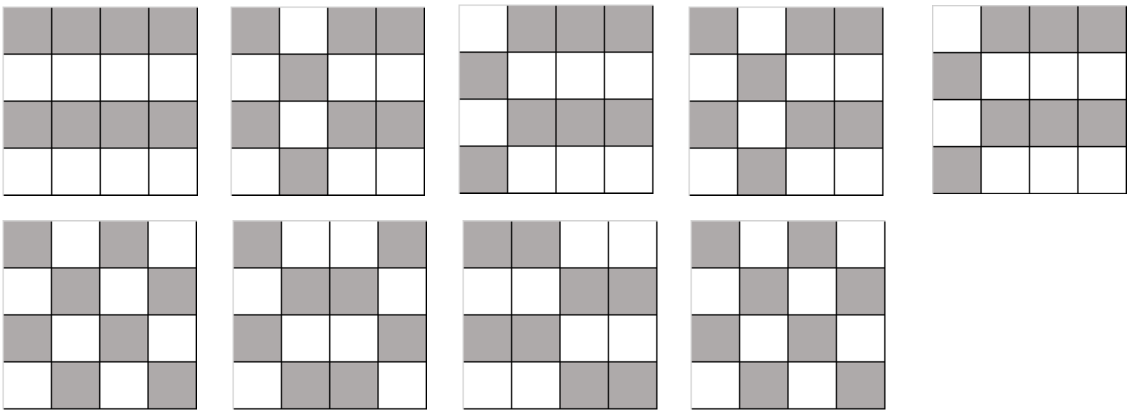
(3) 4×4 的特徵圖形，如圖(32)

以「行」來看



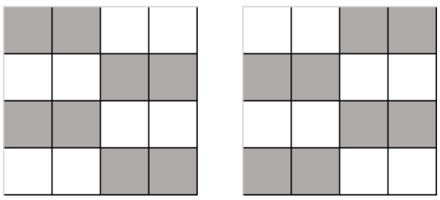
圖(32)

接著，把重複的扣掉，只剩 9 種，如圖(33)



圖(33)

此時，我們再次把沒有重複到的圖形找出，如圖(34)

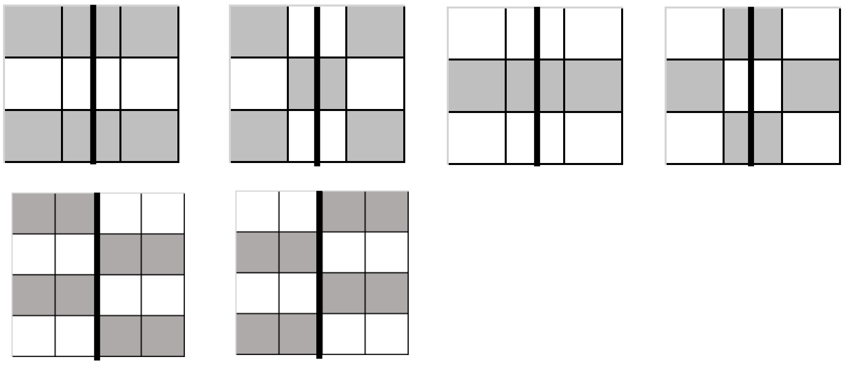


圖(34)

到這裡，我們發現又有相似於剛剛的感覺，它們很對稱，於是決定仔細觀察一下它們。

(4)正方形中特徵方塊的對稱

仔細觀察 3×3 及 4×4 中不重複的圖形後，如圖(35)，我發現可以在這些圖形的正中央切一半

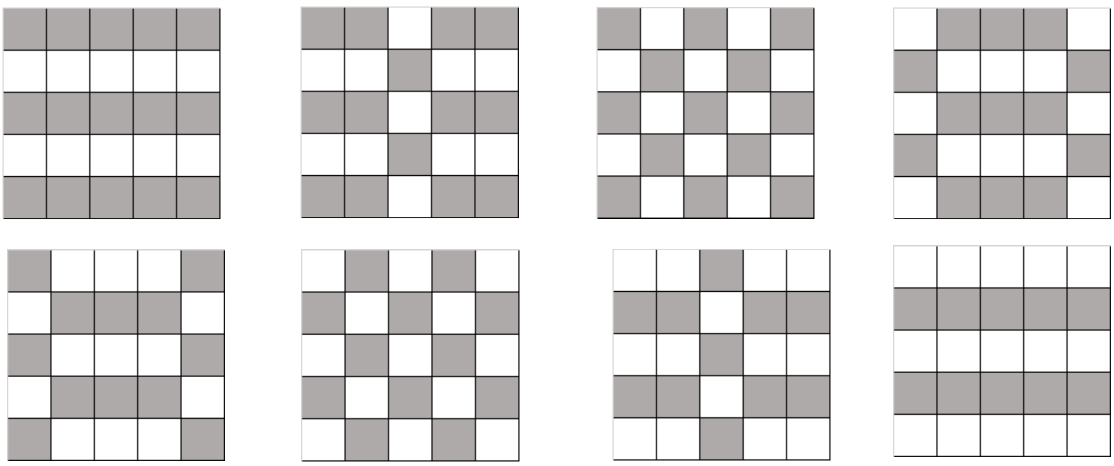


圖(35)

在 3×3 的方格表中，從中間分割後，左右兩部分會一模一樣(中間那行不算)，而 4×4 的方格表中，從中間分割後左邊旋轉 180 度會變成右邊的樣子，其差異來自於 3×3 是奇數方格中間還會多一行，而 4×4 是偶數方格，中間是分界線。所以我們大膽假設了奇數和偶數方格的特徵方塊是無法共同找到通式，因此需將正方形分為奇數和偶數方格來探討。

2.奇數方格正方形的特徵方塊

為了驗證想法，我們找了 5×5 中不會兩兩重複的方塊，如圖(36)

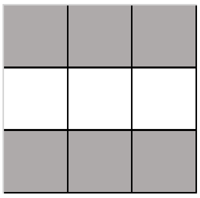
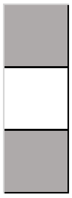
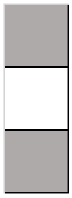


圖(36)

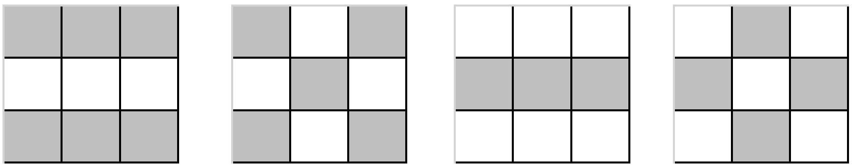
此時我們發現假設是對的，中間那行不看，左邊跟右邊的圖形有對應關係(首末兩行相同、二四行相同)。為了簡化說法，我們把這種方塊稱為「對稱方塊」，而由「對稱方塊」，和 2 種基模，我們就可以從邊長長度找出對稱方塊個數。

(1) 3×3方格的特徵方塊

3×3方格中，把中間那行切掉後，剩下兩個1×3的長方形，左邊的部分和右邊的部分互相對應才會是對稱方塊

 → 其中  =  →這是一個對稱方塊

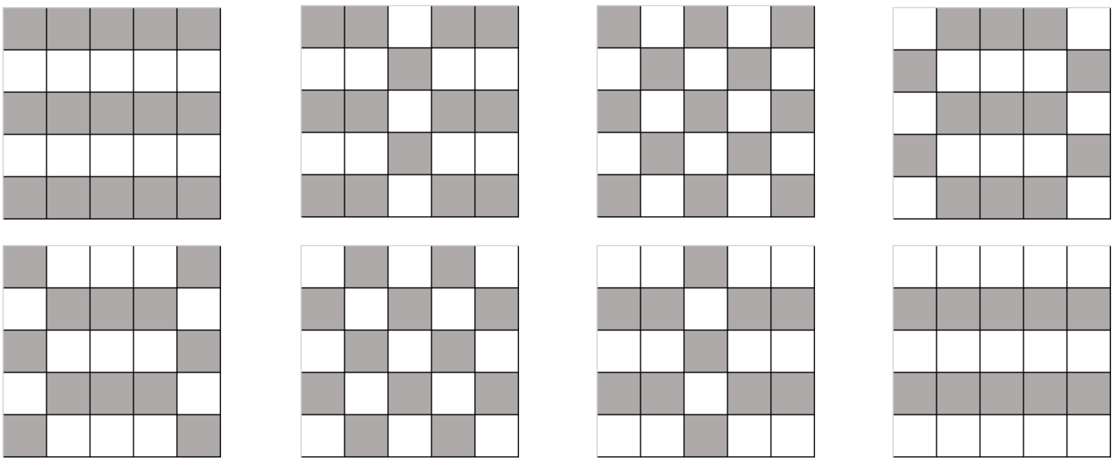
在對稱方塊中，只要固定左邊的基模，右邊的基模為了對應左邊都只有 1 種基模可選。例如，3×3方格中，只有左邊 1 行和中間 1 行各有 2 種基模選擇，共有2^2種對稱方塊，如圖(37)。



圖(37)

(2) 5×5方格的特徵方塊

依照3×3方格的想法，5×5方格中，左邊 2 行和中間 1 行各有 2 種基模選擇，共有2^3種對稱方塊如圖(38)。



圖(38)

(3)小結

以此類推，最後我們可以推出奇數的正方形中特徵方塊的個數，

「以行來看的全部圖形」減掉「對稱方塊」除二就是「會重複的圖形」的個數，再加上「不會重複的圖形」的個數，就是特徵方塊的總數。

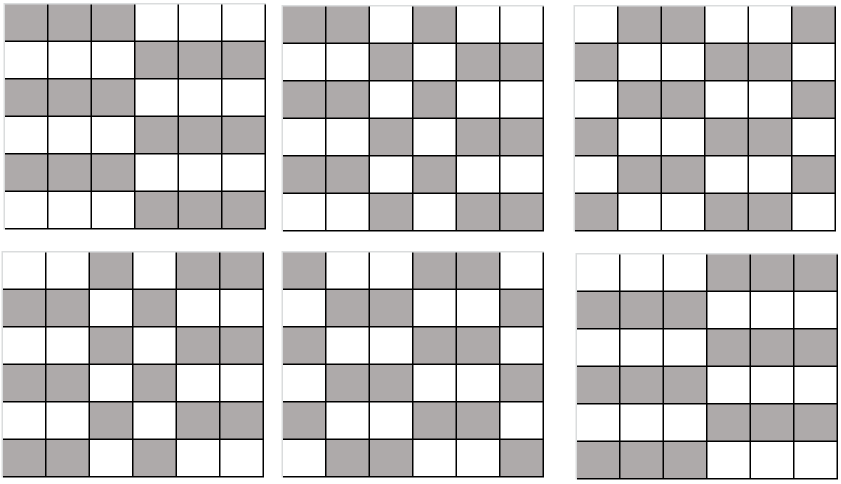
在 $m\times m$ (令 $m=2a+1, a\in N$)方格中

$$n\left(B_m\right)=\frac{2^m-2^{\frac{m}{2}+1}}{2}+2^{\frac{m}{2}+1}=\frac{2^m+2^{\frac{m}{2}+1}}{2}=2^{m-1}+2^{\frac{m-1}{2}}\text{ 種}$$

3.偶數正方形的特徵方塊

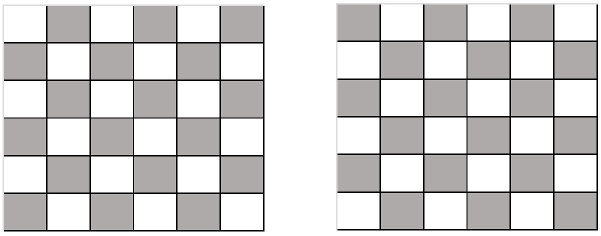
(1) 6×6 方格的特徵方塊

依照上面的想法，我們先找出 6×6 方格中不會兩兩重複的圖形，如圖(39)，共 7 種



圖(39)

從結果來看，6×6 和 4×4 中「會重複的圖形」都有共同的規則，即從中間切掉後左邊的部分倒轉180度會跟右邊的部分一模一樣，為了簡化說法，同樣我們把它稱為「斜鏡像方塊」。利用「斜鏡像方塊」如同「對稱方塊」的尋找方法，從中間分割後，左邊跟右邊的部分相對應，所以只要鎖定左邊的基模組合，右邊就會自動對應。以 6×6 為例，左邊部分有3行，每行有 2 種基模可選，所以有 2^3 個鏡像方塊。但是在鏡像方塊中，還有比較特殊的情況，如圖(40)。



圖(40)

這兩種方塊雖然是「斜鏡像方塊」，但是它們旋轉後會變成兩兩相同的圖形，因此在計算時需扣掉。

(2)小結:

因此我們推出偶數正方形的規律。「以行來看的圖形」減掉「斜鏡像方塊」再除 2 就是「會重複的方塊」的個數，再把「斜鏡像方塊」加回來就是特徵方塊的總數。

在 $m\times m$(令 $m=2a, a\in N$)方格中

$$n(B_m)=\frac{2^m-(2^{\frac{m}{2}}-2)}{2}+(2^{\frac{m}{2}}-2)=\frac{2^m+(2^{\frac{m}{2}}-2)}{2}=2^{m-1}+2^{\frac{m}{2}-1}-1$$

(三)總結

由(一)知組合「C」探討正方形方格的特徵方塊數為

$$n(B_m)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{a}C_k^{2a+1}+C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a}, m=2a+1, a\in N\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{a-1}C_k^{2a}+\frac{C_a^{2a}+\sum_{k=0}^{a}C_k^{a}}{2}-1, m=2a, a\in N\end{cases}$$

由(二)知重複基模探討探討正方形方格的特徵方塊數為

$$n(B_m)=\begin{cases}2^{m-1}+2^{\frac{m-1}{2}}, m=2a+1, a\in N\\ 2^{m-1}+2^{\frac{m}{2}-1}-1, m=2a, a\in N\end{cases}$$

若(一)和(三)的結論相同，則可以驗証我們的想法無誤

1. 當 m 為奇數時，即 $m=2a+1$,

(1) a 為正偶數

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a}\left(\frac{C_k^{2a+1}-C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a}}{2}+C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a}\right)\times 2$$

$$=\left(\frac{C_0^{2a+1}-C_0^a}{2}+C_0^a\right)\times 2+\left(\frac{C_1^{2a+1}-C_0^a}{2}+C_0^a\right)\times 2$$

$$+\left(\frac{C_2^{2a+1}-C_1^a}{2}+C_1^a\right)\times 2+\left(\frac{C_3^{2a+1}-C_1^a}{2}+C_1^a\right)\times 2$$

$$+......+\left(\frac{C_a^{2a+1}-C_{\frac{a}{2}}^a}{2}+C_{\frac{a}{2}}^a\right)\times 2$$

$$=\left(C_0^{2a+1}+C_1^{2a+1}+\ldots+C_a^{2a+1}\right)+2\left(C_0^a+C_1^a+\ldots+C_{\frac{a}{2}-1}^a\right)+C_{\frac{a}{2}}^a$$

$$=\left(C_0^{2a+1}+C_1^{2a+1}+\ldots+C_a^{2a+1}\right)+\left(C_0^a+C_1^a+\ldots+C_{\frac{a}{2}-1}^a+C_{\frac{a}{2}}^a+C_{\frac{a}{2}+1}^a+\ldots+C_a^a\right)$$

$$=\frac{2^{2a+1}}{2}+2^a=2^{2a}+2^a=2^{m-1}+2^{\frac{m-1}{2}}$$

(2) a 為正奇數

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a}\left(\frac{C_k^{2a+1}-C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^a}{2}+C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^a\right)\times 2$$

$$=\left(\frac{C_0^{2a+1}-C_0^a}{2}+C_2^a\right)\times 2+\ldots+\left(\frac{C_{a-1}^{2a+1}-C_{\frac{a-1}{2}}^a}{2}\right)\times 2+\left(\frac{C_a^{2a+1}-C_{\frac{a-1}{2}}^a}{2}+C_{\frac{a-1}{2}}^a\right)\times 2$$

$$=\left(C_0^{2a+1}+C_1^{2a+1}+\ldots+C_a^{2a+1}\right)+2\left(C_0^a+C_1^a+\ldots+C_{\frac{a-1}{2}}^a\right)$$

$$=\frac{2^{2a+1}}{2}+2\times\frac{2^a}{2}$$

$$=2^{2a\backslash}+2^a=2^{m-1}+2^{\frac{m-1}{2}}$$

2. 當 m 為偶數，即 $m=2a$

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a-1}C_k^{2a}+\frac{C_a^{2a}+\sum_{k=0}^{a}C_k^a}{2}-1=\frac{2\times\sum_{k=0}^{a-1}C_k^{2a}+C_a^{2a}+2^a}{2}-1=\frac{2^{2a}+2^a}{2}-1=2^{2a-1}+2^{a-1}-1$$

$$=2^{m-1}+2^{\frac{m}{2}-1}-1$$

綜合上述，我們得證 $m\times m$ 方格正方形旋轉視為相同方塊之通式

(1)奇數($m=2a+1$)公式

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a}C_k^{2a+1}+C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^a=2^{2a}+2^a=2^{m-1}+2^{\frac{m-1}{2}}$$

(2)偶數($m=2a$)公式

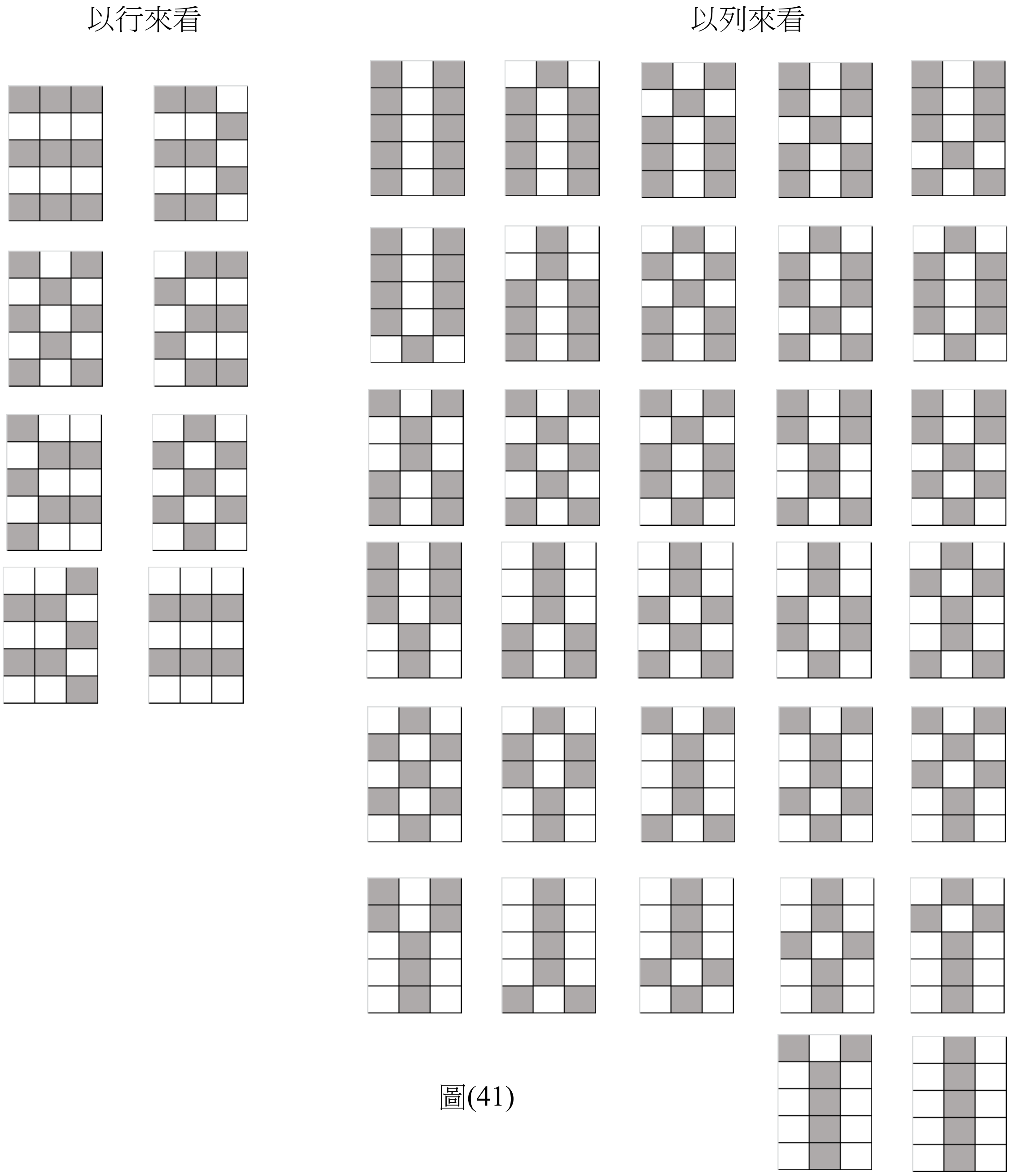
$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a-1}C_k^{2a}+\frac{C_a^{2a}+\sum_{k=0}^{a}C_k^a}{2}-1=2^{m-1}+2^{\frac{m}{2}-1}-1$$

三、矩形 $m \times n$ 方格旋轉視為相同的均衡方塊

接著我們從正方形的特徵方塊延伸到長方形的特徵方塊，因為前面的研究發現奇數和偶數的計算法不同，所以分成奇數×奇數、奇數×偶數、偶數×偶數三個部分

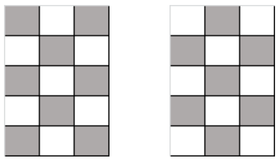
(一)奇數×奇數的長方形特徵方塊

正方形中「以行來看」和「以列來看」的圖形旋轉後會完全相同，但長方形沒有這種情形，於是我們以 5×3 方格(5 列 3 行)為例，列出「以行來看」和「以列來看」，如圖(41)



圖(41)

我們可以發現，5×3方格特徵方塊的個數， 不管「以行來看」與「以列來看」都跟奇數正方形一樣。「以行來看」的部分有 3 行，每行有 2 種基模可以選擇，不考慮重複圖形會有2^3種方塊，但因只有「對稱方塊」才不會重複，所以實際上特徵方塊只有$2^2+2^1=6$種。「以列來看」的部分有 5 列，每列有 2 種基模可以選擇，不考慮重複的部分會有2^5種方塊，但同樣只有「對稱方塊」不會重複，所以實際上特徵方塊只有$2^4+2^2=20$種。不過，這兩種看法還有兩個圖形重複，如圖(42)



圖(42)

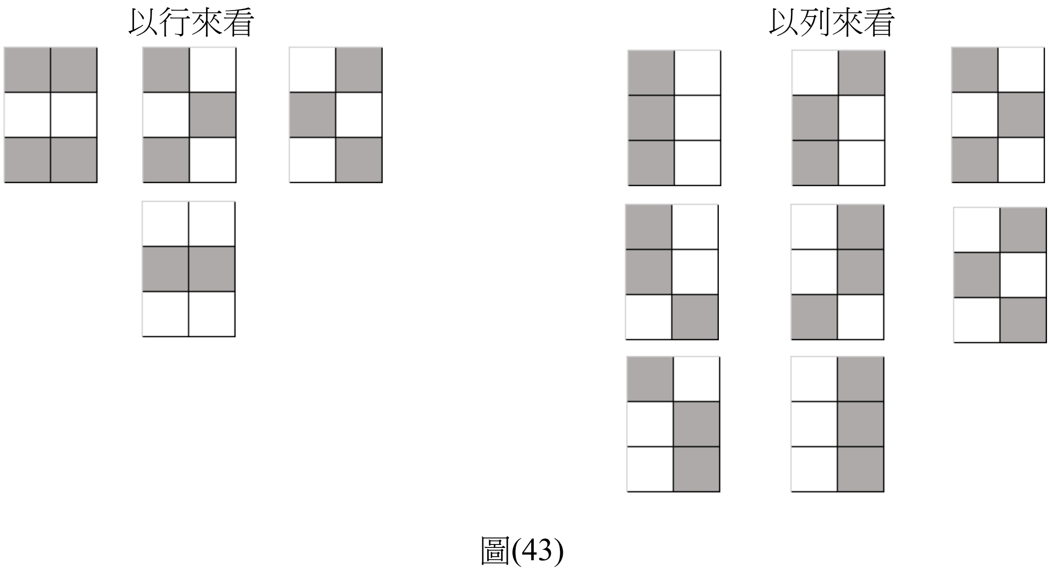
因此最後得到$\left(2^2+2^1\right)+\left(2^4+2^2\right)-2=24$種

依此類推，我們推出通式

m為奇數、n為奇數，矩形$m\times n$方格中，特徵方塊共有$\left(\dfrac{2^m+2^{\frac{m+1}{2}}}{2}\right)+\left(\dfrac{2^n+2^{\frac{n+1}{2}}}{2}\right)-2$**種**

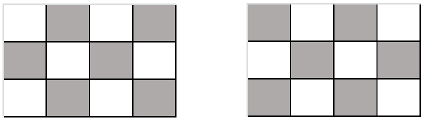
(二)奇數×偶數方格的特徵方塊

由奇數×奇數方格特徵方塊的想法，我們同樣將奇數×偶數方格的特徵方塊分成「以行來看」和「以列來看」觀察，以3×2為例，如圖(43)



圖(43)

同樣的，「以行來看」的部分，有 2 行，每行有 2 種基模可選，不考慮重複的圖形共有 2^2 種，經過觀察後發現不會重複的是「對稱方塊」，所以共有 $2^1+2^0=3$ 種特徵方塊。以列來看的部分，有 3 列，每列有 2 種基模可選，不考慮重複的圖形應有 2^3 種，經過觀察後發現沒有不會重複的方塊，因此有 $2^{3-1}=4$ 種特徵方塊。但是行列兩部分重複計算到一個圖形，如圖(44)，因此要在扣除 1 種，共 6 種，因此我們也找出了通式



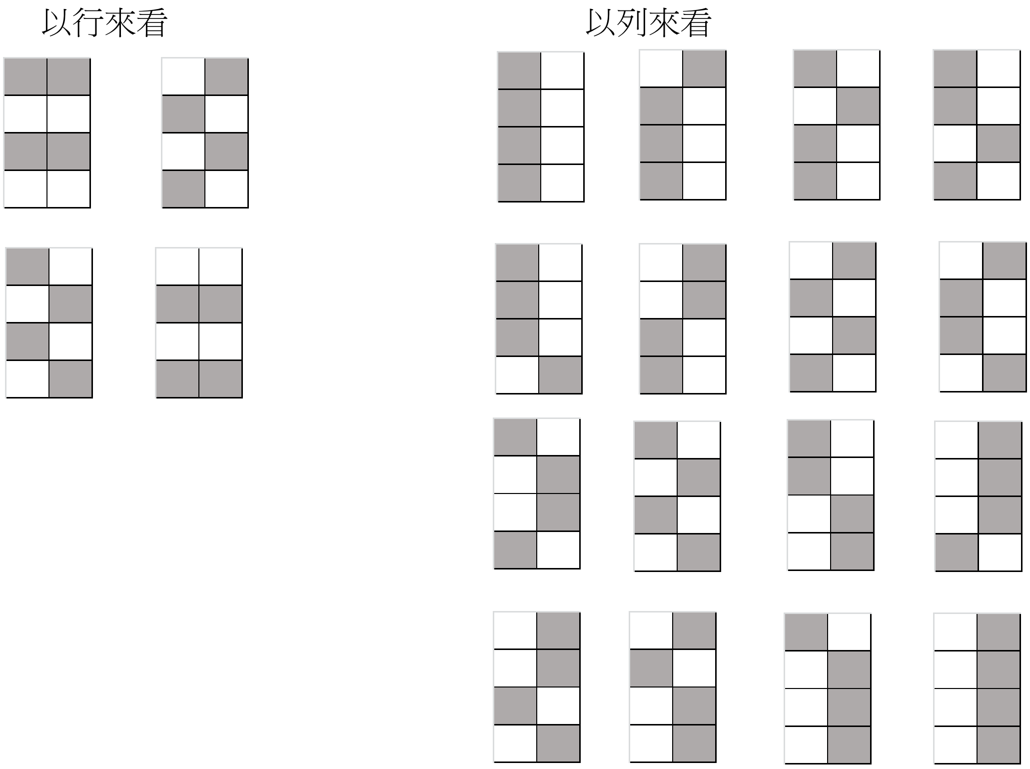
圖(44)

依此類推，我們推出通式

m 為偶數、n 為奇數，矩形 $m\times n$ 方格中，特徵方塊共有 $\left(\dfrac{2^m+2^{\frac{m}{2}}}{2}\right)+\left(\dfrac{2^n}{2}\right)-1$ 種

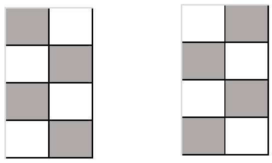
(三)偶數×偶數的特徵方塊

同樣將偶數×偶數方格的特徵方塊分成「以行來看」和「以列來看」觀察，以 4×2 為例，如圖(45)



圖(45)

「以行來看」有 2 行，每行有 2 種基模選擇，不考慮重複圖形有2^2種，但是只有「斜鏡像方塊」不會重複，因此會有$\dfrac{2^2+2^1}{2}=3$種。「以列來看」有 4 列，每列有 2 種選擇，不考慮重複圖形會有2^4種圖形，但是其中只有「斜鏡像方塊」不會重複、因此會有$\dfrac{2^4+2^2}{2}=10$種。「以行來看」和「以列來看」兩部分中有兩個圖形重複，如圖(46)。



圖(46)

因此最後得到$\dfrac{2^2+2^1}{2}+\dfrac{2^4+2^2}{2}-2=11$種

依此類推，我們推出通式

m為偶數、n為偶數，矩形$m\times n$方格中，特徵方塊共有$\dfrac{2^m+2^{\frac{m}{2}}}{2}+\dfrac{2^n+2^{\frac{n}{2}}}{2}-2$種

伍、研究成果

1. 矩形$m\times n$方格旋轉視為相異均衡方塊的個數

$$n(A_{m\times n})=2\times\left\{1\times 2^{n-2}+\left[1\times 2+\left(2^{m-2}-1\right)\right]+1\times 2^{m-2}\right\}=2^n+2^m-2$$

2. 正方形$m\times m$方格旋轉視為相同均衡方塊的個數

(1)奇數($m=2a+1$)公式

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a}C_k^{2a+1}+C^a_{\left[\frac{k}{2}\right]}=2^{2a}+2^a$$

(2)偶數($m=2a$)公式

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a-1}C_k^{2a}+\frac{C_a^{2a}+\sum_{k=0}^{a}C_k^a}{2}-1=2^{m-1}+2^{\frac{m}{2}-1}-1$$

3. 矩形$m\times n$方格旋轉視為相同均衡方塊的個數

(1)奇數×奇數($m=2a+1$、$n=2b+1$)

$$n(B_{m\times n})=\frac{2^{2a+1}+2^{a+1}}{2}+\frac{2^{2b+1}+2^{b+1}}{2}-2$$

(2)偶數$\times$偶數($m=2a$ 、 $n=2b$)

$$n\left(B_{m\times n}\right)=\frac{2^{2a}+2^{a}}{2}+\frac{2^{2b}+2^{b}}{2}-2$$

(3)偶數$\times$奇數($m=2a+1$ 、 $n=2b$)

$$n\left(B_{m\times n}\right)=\frac{2^{2a+1}}{2}+\frac{2^{2b}+2^{b}}{2}-1$$

陸、結論

研究初期，我們一直像在黑暗中摸索一樣，不知道圖形能不能找到規律，規律背後有沒有通式，找到的通式正不正確。很幸運，我們先透過列舉法和重複基模法找到了原題的通式，彼此之間也得到驗證。之後我們透過排列組合和重複基模法找出了特徵方塊的通式，透過「二項式的證明」證明了我們的想法沒有錯誤，讓研究有一個完美的句點。

柒、未來展望

我們認為均衡方塊或許可以應用於美化生活，找出各式各樣的均衡方塊來裝飾空間。另外，對於未來若想繼續研究者，建議可嘗試加入第三種顏色，把2×2方格轉成3×3方格，均衡方塊定義為3×3方格內的三種顏色數目相等來作探討，甚至延伸到$n\times n$方格n色的均衡方塊。或者也可以從平面探討到空間，做出類似於魔術方塊的組裝遊戲。

捌、參考資料

澳洲 AMC 2017 考題(2017)。財團法人台北市九章基金會。取自 http://files.chiuchang.org.tw:8080/MyWeb/download/docu/AMC/17AMC/amc2017-UP_TC.pdf

游森棚(主編) (2001)。普通高級中學數學 2。台南市：翰林出版社。

【評語】050413

1. 旋轉視為不同方塊的討論較為簡單，但基本上是由圖形歸納猜測出公式，並未嚴格推導。旋轉視為同樣方塊需要扣除重複圖形，但是重複圖形的計算方式也並未說明。這一部分仍然沒有給出數學證明。

2. 研究可朝以下方向改善：

 (一) $n(A_{m\times n})$的公式似乎只是觀察得到，宜有正式論證。

 (二) $n(B_{m\times n})$的公式取 m=n 時與$n(B_{m\times m})$不同，宜再檢查。

 (三) $n(B_{m\times n})$的公式可以統一寫出來，不必分四種情況。

 (四) 如果不只考慮旋轉、也考慮翻轉，答案如何。

 (五) 若考慮極值狀況，應該比較能有推廣至一般化的結果。

作品海報

壹、摘要

我們的作品的內容為探討正方形$m\times m$的方格中，若將其全部塗上黑或白兩種顏色，則每個2×2的正方形中的黑白數目皆一致(皆為2個)的時候，會有多少種可能性，並將其分作旋轉視為相異，旋轉視為相同2種，在前者我們使用了是列舉法以及基模法進行驗證，兩種方法在推導出公式後的結果後是一樣的，在這個基礎下，我們將題目發展成在矩形$m\times n$方格的情況下再次推算，也得到一樣的結果。

而方格旋轉視為相同的情況則使用了組合「C」以及基模法來解決問題，並發現許多情況都必須考慮進去才能避免遺漏或重複的情況產生，在求得正方形$m\times m$方格的通式後，我們再次嘗試將公式應用到矩形$m\times n$方格中，在考慮到幾種不同的條件後，我們都列出了相對應的通式來求得我們所需要的答案。

貳、研究動機

我們在翻閱AMC試題中看到一個非常有趣的題目「一個3×3方格中，小方格內都被塗上了黑色或是白色。若其中任何一個2×2方格中，黑色和白色都各佔二個小方格，則稱為均衡方塊，反之則為不均衡方塊。若將旋轉後不同的方格視為不同，請問總共有多少個3×3方格的均衡方塊？」我們認為若將此題推廣到$m\times n$方格的均衡方塊會是一題非常有挑戰性的題目，經過初步列舉和思考後，我們發現此題可以應用高一「排列組合」單元中學過的概念，因此我們利用課本中所學到的知識觀念進行探究，希望能解出找到通式。

參、研究目的

一、基於上述，我們的研究目的如下：

(一)利用列舉法和重複排列基模法，探討矩形$m\times n$方格旋轉視為相異均衡方塊的個數，並推廣找到通式。

(二)利用組合「C」和重複排列基模法，探討正方形$m\times m$方格旋轉視為相同均衡方塊的個數，並推廣找到通式。

(三)探討矩形$m\times n$方格旋轉視為相同均衡方塊的個數，並推廣找到通式。

二、名詞解釋：

(一)矩形$m\times n$方格旋轉視為相異均衡方塊的個數記為$n\left(A_{m\times n}\right)$

(二)正方形$m\times m$方格旋轉視為相同均衡方塊的個數記為$n\left(B_m\right)$

(三)矩形$m\times n$方格旋轉視為相同均衡方塊的個數記為$n\left(B_{m\times n}\right)$

肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦、電腦軟體 Microsoft Office

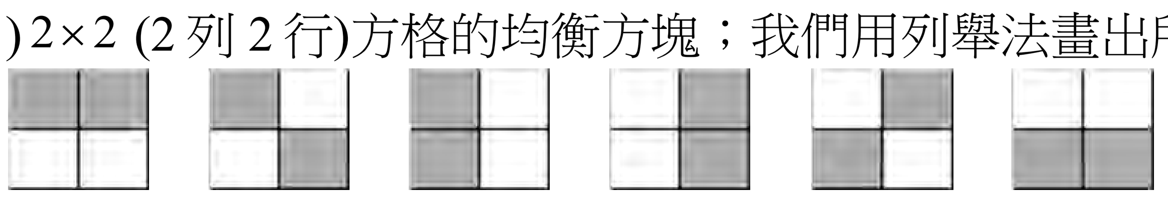
伍、研究過程及方法

一、矩形$m\times n$方格旋轉視為相異的均衡方塊

(一)、列舉法

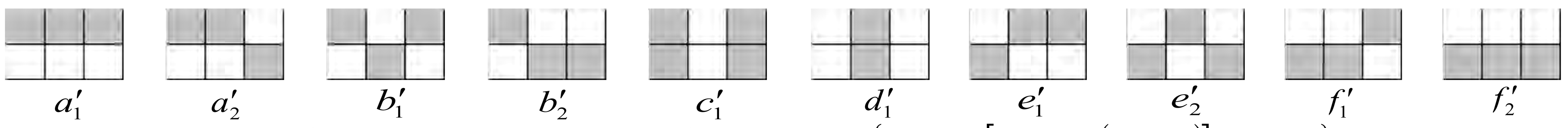
1. $2\times n$方格的均衡方塊

(1) 2×2 (2列2行)方格的均衡方塊；我們用列舉法畫出所有可能情況，共有6種。



a b c d e f

(2) 2×3 (2列3行)方格的均衡方塊個數，從 2×2 均衡方塊的基模中，我們定義從a畫出 a_1'、a_2'；b畫出b_1'、b_2'；c畫出c_1'；d畫出d_1' e; 畫出e_1'、e_2'；f 畫出f_1'、f_2'，共有10種



a_1' a_2' b_1' b_2' c_1' d_1' e_1' e_2' f_1' f_2'

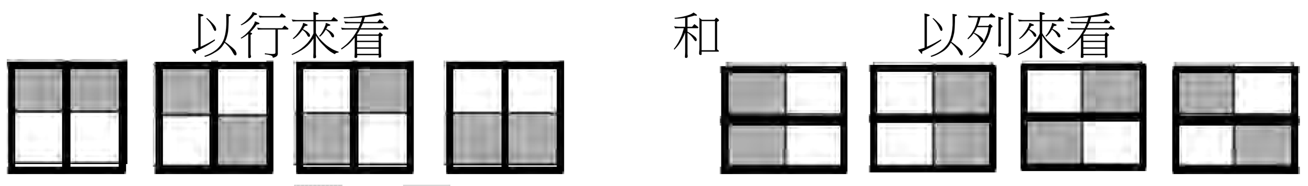
依照往右往下延伸的規則類推，最後得出$m\times n$的通式:$n\left(A_{m\times n}\right)=2\times\left\{1\times 2^{n-2}+\left[1\times 2^{n-2}+\left(2^{m-2}-1\right)\right]+1\times 2^{m-2}\right\}$

(二)、基模法(可旋轉):依照(一)列舉式的方法我們從2×2方格的均衡方塊開始研究

1. 2×2方格的均衡方塊

(1)我們先分成「以行來看」和「以列來看」兩個部分並分別觀察

以行來看 和 以列來看



「行」的基模為、；「列」的基模為、，因此這2部分都有2^2種方法，其中有2組重複出現

	「列」		「行」		「重複」		
因此$n\left(A_{2\times 2}\right)=$	2^2	+	2^2	-	2	=	6種

2. 3×3方格的均衡方塊:同樣依 2×2 均衡方塊的方式列出圖形

我們發現「行」的基模也有兩種、，所以3行總共有2^3種；「列」的基模也是兩種、，所以3列總共有2^3種

其中也有2種重複圖形

因此個數為$n\left(A_{2\times 2}\right)=2^3+2^3-2=14$

至此，我們發現不管「行」還是「列」的基模都只會有2種，因此每一行、每一列都會有兩種選擇，重複圖形也都剛好有2個，因此可以得知：

在 $m\times n$ 的方格中會有 2^n+2^n-2 種方法。

(三)、小結

由(一)列舉法可知

$n\left(A_{m\times n}\right)=2\times\left\{1\times 2^{n-2}+\left[1\times 2^{n-2}+\left(2^{m-2}-1\right)\right]+1\times 2^{m-2}\right\}$

$=2\times 2^{n-1}+\left(2^{m-1}-2\right)+2^{m-1}=2\times 2^{n-1}+2\times 2^{m-1}-2=2^n+2^m-2$

整理後和(二)重複排列的結果相同，所以我們確定在$m\times n$的方格中會有2^m+2^n-2種方法。

二、正方形$m\times m$方格旋轉視為相同的均衡方塊

我們覺得這個個題目如果就這樣結束未免太可惜，於是我們想到，若經旋轉後的圖形視為相同圖形，又會有怎樣的情形發生?首先我們打算從正方形研究，在推廣到矩形的通式。

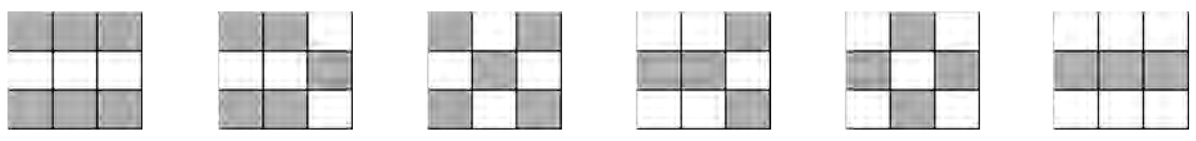
(一)用組合「C」探討正方形 $m\times m$ 方格的特徵方塊

我們將旋轉後的圖形視為同一種圖形的情況，稱為「特徵均衡方塊」，簡稱「特徵方塊」，經過之前的研究，我們發現一種有效率的尋找「特徵方塊」的方格的方法。任何一種均衡方塊均是由基本方塊「直行變色」而來的。所謂的「直行變色」是指「一直行」中的變成。以3×3方格的特徵方塊為例，無論它怎麼「直行變色」皆脫離不了為 均衡方格。藉由「直行變色」的位置及數目的不同，我們可以用組合「C」來表示變化情況。

(二)奇數正方形

我們從 3×3 方塊開始探討

先畫出所有的情況

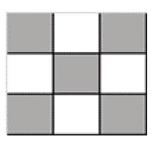


C_0^3　C_1^3　C_1^3　C_2^3　C_2^3　C_3^3

1.發現 C_0^3的圖形在黑白變化後會和 C_3^3 相等，C_1^3 和 C_2^3也是，所以把 C_0^3、C_1^3乘 2 就可以算出 C_0^3、C_1^3、C_2^3、C_3^3不計算重複圖形的個數。

2.也發現 C_1^3、C_2^3的圖形各重複 1 種，這些重複圖形的特徵是沒有左右對稱，要將這些圖的總數除以 2 才不會多算。

3.發現圖形中不會重複的圖形(如下圖)左右是會對稱的，只要減掉它再除以 2 便可以找出不對稱的圖形總數，將不對稱的圖形加上對稱的圖形即為 C_1^3 的全部圖形，乘以 2 後即為 C_1^3 和 C_2^3的全部圖形。



如此就可以找出公式:在 3×3 中，有 $C_0^3\times2+\left(\frac{c_2^5-2}{2}+1\right)\times2$個

4.而在 5×5 方塊中，也和 3×3 一樣，有左右不對稱且會兩兩重複的圖形，以及左右對稱且不重複的圖形

我們也能推得 5×5的個數: $C_0^5\times2+\left(\frac{c_1^5-1}{2}+1\right)\times2+\left(\frac{c_2^5-2}{2}+2\right)\times2$

依此類推，最後我們得出奇數正方形的通式:

在 $m\times m$ 中(令 $m=2a+1, a\in N$)，$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a}(C_k^{2a+1}+C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a})$

這裡的 $C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a}$ 指的是對稱的圖形，藉由對稱性質，觀察一半可以求得另一半的圖形，故 $C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a}$表示該半邊的變色情形，高斯符號可以限制變色方格的數目為奇數時所造成的影響。

(三)偶數正方形

1. m × m 方格的均衡方塊

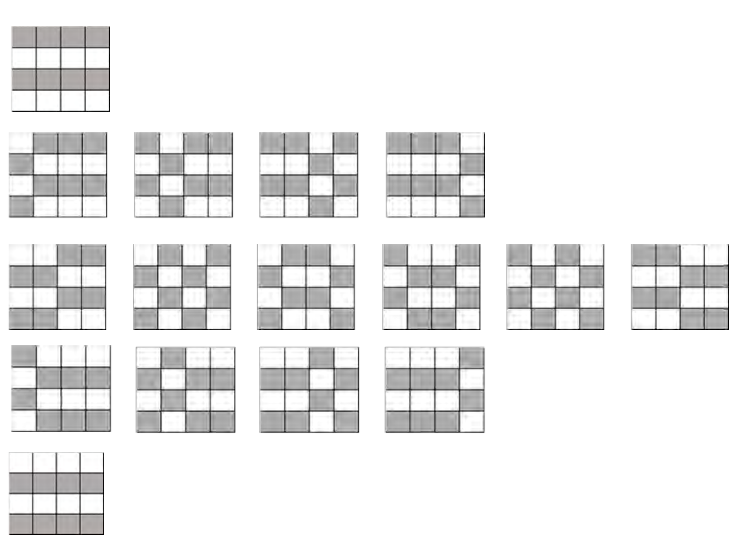
C_0^4

C_1^4

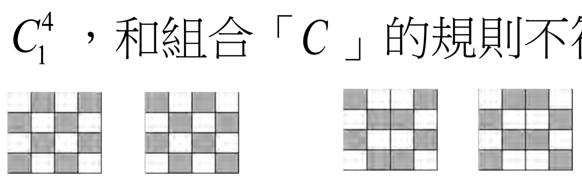
C_2^4

C_3^4

C_4^4

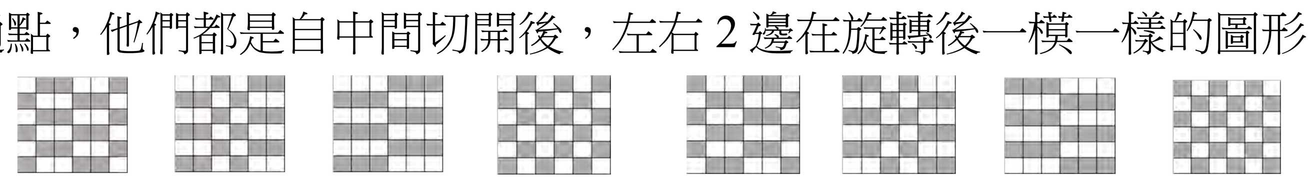


可以看出 C_4^4 的圖形會和 C_0^4 相同，而C_1^4 和 C_3^4也是同樣情況，因此在計算時，將 C_3^4 和 C_4^4忽略不計。藉由觀察，可以發現零行變色的數目為 C_0^4 ，一行變色的數目為 C_1^4 ，和組合「C 」的規則不符的為 C_2^4 ，比預計多了 2 種，產生重複的圖形如下圖，接著我們以 6×6 來進行下一步的研究。

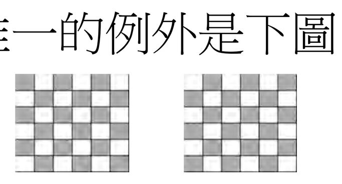


2. 6×6 方格的均衡方塊

再次驗證我們之前的推論，可以忽略 C_6^6、C_5^6 以及C_4^6的圖形，且除了 C_3^6 之外皆符合組合「C 」的規則，藉由觀察，可發現不會產生重複的圖形，看起來都有個共通點，他們都是自中間切開後，左右 2 邊在旋轉後一模一樣的圖形，我們把他稱作「斜鏡像方塊」



唯一的例外是下圖，其雖然符合鏡像方塊的定義，卻會產生重複，因此必須將總方塊的數目扣去一個。



3. 偶數方格正方形斜鏡像方塊的數目

由於斜鏡像方塊的特殊性質，觀察其中一邊便可以推得其另外一邊的樣貌。因此在 $m\times m$ (令 $m=2a, a\in N$)圖形中，若斜鏡像方塊左半邊有 1 個變色，其右半邊則有個變色，藉此可以知道斜鏡像方塊的數目為$C_0^m+C_1^m+\ldots C_m^m$，將加入其斜鏡像方塊後除以 2，最後再移去例如上的圖形，即可求出其變色數目。

4. 小結:最後我們推得偶數方格正方形的通式:

在 $m\times m$ 中(令 $m=2a, a\in N$)，$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a-1}C_k^{2a}+\frac{C_a^{2a}+\sum_{k=0}^{a}C_k^{a}}{2}-1$

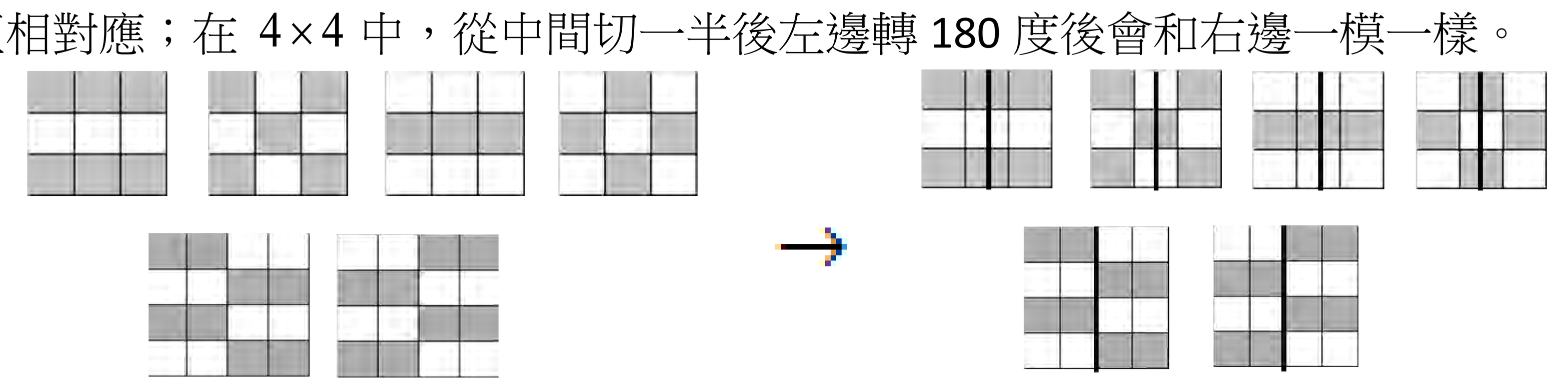
(四)特徵方塊的第二種解法(基模法)

因為在上面的結論中，可以使用行與列的基模組合成功得出公式，再次嘗試在特徵方塊使用同一招。

經過觀察，我們發現特徵方塊的基模跟原題的一樣都是 2 種，但是以行來看、以列來看，兩部分在正方形中會一模一樣，因此，我把特徵方塊先分成正方形、和長方形兩部分來做，且在正方形的特徵方塊中只看「以行來看」的部分。

1. $m\times m$ 的特徵方塊

接著，我們畫出了以 2、3、4 個小方格為邊長的正方形的「以行來看」部分，發現這些方塊中，都可以分為「兩兩會重複的方塊」和「不會重複的方塊」，並且我們主觀的認為「不會重複的方塊」看起來比其他方塊還要「對稱」(如下圖)，因此我們把重點放在這些方塊身上，最後找出了它們的關係:在 3×3中，從中間切一半後左邊和右邊會互相對應；在 4×4 中，從中間切一半後左邊轉 180 度後會和右邊一模一樣。



接著，我們繼續畫出更多個小方格為邊長的正方形，發現到它們的「不會重複的方塊」也跟上述的關係一樣:以奇數為邊長的方塊中，左邊和右邊相對應的(首末兩行相同、第二和倒數第二行相同…)；以偶數為邊長的方塊中，左邊轉 180 度後跟右邊一模一樣。我們也發現到這跟前一種作法中找到的規則一樣，因此，為了簡化，我們同樣把這兩種方塊稱為「對稱方塊」和「鏡像方塊」而只要知道這點，配上只有兩組的基模，我們就可以從邊長長度找出對稱方塊個數:在嘗試找出「對稱」或「鏡像」方塊時，只要固定左邊的基模，右邊的基模為了對應左邊都只會有 1 種基模 可選。例如，在 3×3 中，只有左邊 1 行、中間 1 行可以選擇 2 種基模，共有 2^2 種對稱(不重複)方塊。依此類推，在 $n\times n$中，左邊 n 行，中間 1 行都可以選擇 2 種基模，共有 2^{n+1}種不會重複的方塊。要記得的是，鏡像方塊仍跟前面的做法一樣，會有 2 個黑白相間的方塊不重複。到這裡，我們大概就可以推出正方形中特徵方塊的個數:「以行來看的全部圖形」減掉「對稱方塊」除 2 就是「會重複的圖形」的總數，再加上「不會重複的圖形」的總數，就是該方格表的總數，如下:

在 m 是奇數時，$m\times m$ 的正方形方格表有

$$\frac{2^m-2^{\frac{m+1}{2}}}{2}+2^{\frac{m+1}{2}}=\frac{2^m+2^{\frac{m-1}{2}}}{2}=2^{m-1}+2^{\frac{m-1}{2}}$$

在 m 是偶數時，$m\times m$ 的正方形方格表有

$$\frac{2^m-(2^{\frac{m}{2}}-2)}{2}+(2^{\frac{m}{2}}-2)=2^m+2^{\frac{m}{2}}-1$$

(五)總結

若組合「C」之結果與基模法相同，則可證明公式無誤

1.當m為奇數時，即 $m=2a+1$

(1)a為正偶數

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a}\left(\frac{C_k^{2a+1}-C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a}}{2}+C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a}\right)\times 2=\left(\frac{C_0^{2a+1}-C_0^a}{2}+C_0^a\right)\times 2+\left(\frac{C_1^{2a+1}-C_0^a}{2}+C_0^a\right)\times 2+\left(\frac{C_2^{2a+1}-C_1^a}{2}+C_1^a\right)\times 2+\ldots\ldots+\left(\frac{C_a^{2a+1}-C_{\frac{a}{2}}^a}{2}+C_{\frac{a}{2}}^a\right)\times 2$$

$$=\left(C_0^{2a+1}+C_1^{2a+1}+\ldots+C_a^{2a+1}\right)+2\left(C_0^a+C_1^a+\ldots+C_{\frac{a}{2}-1}^a\right)+C_{\frac{a}{2}}^a=\left(C_0^{2a+1}+C_1^{2a+1}+\ldots+C_a^{2a+1}\right)+\left(C_0^a+C_1^a+\ldots+C_{\frac{a}{2}-1}^a+C_{\frac{a}{2}}^a+C_{\frac{a}{2}+1}^a+\ldots+C_a^a\right)$$

$$=\frac{2^{2a+1}}{2}+2^a=2^{2a}+2^a=2^{m-1}+2^{\frac{m-1}{2}}$$

(2)a為正奇數

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a}\left(\frac{C_k^{2a+1}-C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a}}{2}+C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a}\right)\times 2=\left(\frac{C_0^{2a+1}-C_0^a}{2}+C_2^a\right)\times 2+\ldots+\left(\frac{C_{a-1}^{2a+1}-C_{\frac{a-1}{2}}^a}{2}\right)\times 2+\left(\frac{C_a^{2a+1}-C_{\frac{a-1}{2}}^a}{2}+C_{\frac{a-1}{2}}^a\right)\times 2$$

$$=\left(C_0^{2a+1}+C_1^{2a+1}+\ldots+C_a^{2a+1}\right)+2\left(C_0^a+C_1^a+\ldots+C_{\frac{a-1}{2}}^a\right)=\frac{2^{2a+1}}{2}+2\times\frac{2^a}{2}=2^{2a}+2^a$$

$$=2^{m-1}+2^{\frac{m-1}{2}}$$

2.當m為偶數時，即 $m=2a$

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a-1}C_k^{2a}+\frac{C_a^{2a}+\sum_{k=0}^{a}C_k^a}{2}-1=\frac{2\times\sum_{k=0}^{a-1}C_k^{2a}+C_a^{2a}+2^a}{2}-1=\frac{2^{2a}+2^a}{2}-1=2^{2a-1}+2^{a-1}-1=2^{m-1}+2^{\frac{m}{2}-1}-1$$

綜合上述，證得旋轉視為相同之通式

三、m × n的特徵方塊

接著我們再從正方形的特徵方塊延伸到長方形的特徵方塊，前面的研究發現，正方形中『以「行」來看』和『以「列」來看』的圖形旋轉後會完全相同，但長方形就沒有這種情形，於是我們在這裡就只能把這兩種部分都納入計算，而且因為前面的研究發現奇數和偶數的計算法不同，於是我們也先大膽的假設長方形也是如此，養此我們把它們先分成奇數×奇數、奇數×偶數、偶數×偶數三個部分。

1. 奇數×奇數長方形特徵方塊

我們發現，以行來看與以列來看兩部分都跟奇數正方形一樣，以 5×3的方塊為例，以行來看的部分有3行，每行有2種基模可以選擇，不考慮重複的部分會有2^3種方塊，但是只有對稱方塊不會重複，所以實際上有$2^2+2^1=6$個特徵方塊。以列來看的部分有5列，每列有2種基模可以選擇，不考慮重複的部分會有2^5種方塊，但是只有對稱方塊不會重複，所以實際上有 $2^4+2^2=20$個特徵方塊，合起來就有26個特徵方塊，不過這兩種看法還有兩個黑白相間的圖形重複，因此最後會多扣掉兩種，共24種。因而我們再次進一步推出通式:

m、n為奇數，在 $m\times n$ 中，共有 $\left(\frac{2^m+2^{\frac{m-1}{2}}}{2}\right)+\left(\frac{2^n+2^{\frac{n-1}{2}}}{2}\right)-2$ 種特徵方塊

2.奇數×偶數長方形特徵方塊

同樣的，分成行、列部分觀察，以3×2的方塊為例，以行來看的部分，經過觀察後發現不會重複的是對稱方塊，所以共有$2^1+2^0=3$種特徵方塊。以列來看的部分，沒有不會重複的方塊，因此有$2^{3-1}=4$ 種特徵方塊。但是行列兩部分重複計算到一個黑白相間圖形，要在扣除1種，共6種，因此我們找出了通式:

m為奇數、n為偶數，在 $m\times n$ 中，共有 $\frac{2^m+2^{\frac{m}{2}}}{2}+\frac{2^n}{2}-1$ 種特徵方塊

3.偶數× 偶數長方形的特徵方塊

以2×4為例，以行來看中，有4行，只有鏡像方塊不會重複、因此會有 $\frac{2^4+2^2}{2}=10$種，以列來看中，有2列，只有鏡像方塊不會重複，因此會有$\frac{2^2+2^1}{2}=3$ 種， 行列兩部分中有兩個黑白相間圖形重複出現，因此最後再扣掉2種，共11種，也能推得通式:

m、n為偶數，在 $m\times n$ 中，特徵方塊共有$\frac{2^m+2^{\frac{m}{2}}}{2}+\frac{2^n+2^{\frac{n}{2}}}{2}-2$ 種

伍、研究成果

1. 矩形 $m\times n$ 方格旋轉視為相異均衡方塊的個數

$$n(A_{m\times n})=2\times\left\{1\times 2^{n-2}+\left[1\times 2+\left(2^{m-2}-1\right)\right]+1\times 2^{m-2}\right\}=2^n+2^m-2$$

2. 正方形 $m\times m$ 方格旋轉視為相同均衡方塊的個數

(1)奇數($m=2a+1$)公式

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a}C_k^{2a+1}+C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^{a}=2^{2a}+2^a$$

(2)偶數($m=2a$)公式

$$n(B_m)=\sum_{k=0}^{a-1}C_k^{2a}+\frac{C_a^{2a}+\sum_{k=0}^{a}C_k^a}{2}-1=2^{m-1}+2^{\frac{m}{2}-1}-1$$

3. 矩形 $m\times n$ 方格旋轉視為相同均衡方塊的個數

(1)奇數×奇數($m=2a+1$、$n=2b+1$)

$$n(B_{m\times n})=\frac{2^{2a+1}+2^{a+1}}{2}+\frac{2^{2b+1}+2^{b+1}}{2}-2$$

(2)偶數×偶數($m=2a$、$n=2b$)

$$n(B_{m\times n})=\frac{2^{2a}+2^a}{2}+\frac{2^{2b}+2^b}{2}-2$$

(3)偶數×奇數($m=2a+1$、$n=2b$)

$$n(B_{m\times n})=\frac{2^{2a+1}}{2}+\frac{2^{2b}+2^b}{2}-1$$

陸、結論與未來展望

我們認為均衡方塊或許可以應用於美化生活，找出各式各樣的均衡方塊來裝飾空間。另外，對於未來若想繼續研究者，建議可嘗試加入第三種顏色，把 2×2方格轉成 3×3方格，均衡方塊定義為 3×3 方格內的三種顏色數目相等來作探討，甚至延伸到 $n\times n$方格 n色的均衡方塊。或者也可以從平面探討到空間，做出類似於魔術方塊的組裝遊戲。

柒、參考資料

澳洲AMC 2017考題(2017)。財團法人台北市九章基金會。取自
http://files.chiuchang.org.tw:8080/MyWeb/download/docu/AMC/17AMC/amc2017-UP_TC.pdf

游森棚(主編) (2001)。普通高級中學數學2。台南市：翰林出版社。