中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050412

尋找消失的鑲接正 n 邊形

學校名稱：新北市立板橋高級中學

作者：	指導老師：
高二 張朝凱	李國弘
高二 張愷峰	林宜蓉

關鍵詞：鑲接正 n 邊形、平行線、射線

摘要

本文探討如何尋找n條平行線上所鑲接的正n邊形，並推廣至交於一點的n條射線、n條直線上的鑲接正n邊形，因為鑲接的正n邊形的頂點並非依序出現在直線上，所以我們也探討這些頂點與直線的順序關係，來定出鑲接的正n邊形的位置，並且討論所有可能的鑲接的正n邊形的解情況。再推廣至p邊形鑲接的正四邊形的情況，並應用我們這些技巧來解決部分 ***Inscribed square problem***。

壹、 研究動機

在做練習題時，我們做到一題目：給定三條相異之平行線，作一正三角形，使其三頂點分別落在三條平行線上。

看到此題目，我們想試著將條件推廣至n條相異平行線，如何作出鑲接正n邊形的情況。當完成研究後，我們又將當n條平行線的條件推廣至n條線交於一點的情況，來進行研究如何尋找鑲接正n邊形，再推廣至n邊形來進行研究。我們從教授那裡得知有百年問題 ***Inscribed square problem***，我們希望利用前面研究的一些性質來解決一些 ***Inscribed square problem*** 的特殊情況。

而獨立完成以上研究後，教授告訴我們在科展第 38 屆「平行線問題之研究推廣」及在西元 2012 年國際科展 「過平面上n定點作正n邊形問題與其對偶命題」有跟我們命題相似的研究，因為關鍵字不同的緣故，我們在研究過程中並沒發現這兩篇。比較後我們將相同的地方刪除，希望我們的研究能讓此命題更加完備。

貳、 研究目的

一、n條平行線鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形

二、n條從一點出發的相異射線鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形

三、n條交於一點的相異直線鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形

四、任意n邊形鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形

五、p邊形鑲接正三、四邊形作圖法及討論解的情形

相關資料比較：

我們將上述兩篇與我們研究作比較，「平行線問題之研究推廣」是對n條平行線鑲接正n邊形及n條直線相交於一點鑲接正n邊形存在性證明：平面上有n條平行線其相鄰間距由上而下分別為d_1、d_2、$d_3\cdots d_{n-1}$。且滿足$\begin{cases} d_1 : d_3 : \cdots : d_{2k-1} : \cdots = sin\frac{1}{n}\pi : sin\frac{3}{n}\pi : \cdots : sin\frac{2k+1}{n}\pi : \cdots \\ d_2 : d_4 : \cdots : d_{2k} : \cdots = sin\frac{2}{n}\pi : sin\frac{4}{n}\pi : \cdots : sin\frac{2k}{n}\pi : \cdots \end{cases}$，則可在此$n$條平行線上各取一點，使其為正$n$邊形的頂點；「過平面上$n$定點作正$n$邊形問題與其對偶命題」雖然已研究出平行線、兩兩交於一點的n條線鑲接正n邊形的作圖法，但作圖法極為複雜，利用外心貫穿及旋轉縮放作出鑲接正n邊形。而我們是以幾何方式將鑲接正n邊形用尺規作圖方式畫出以及討論在各種情況下，能畫出幾個鑲接正n邊形。

參、 研究設備及器材

電腦、GSP、GGB、紙、文具

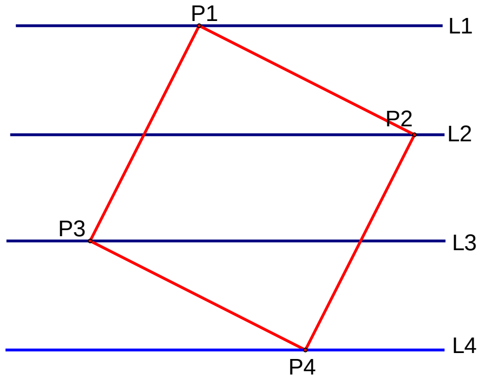
肆、 研究過程及方法

定義：

n邊形	本研究所討論的n邊形為凸n邊形
鑲接	每條線上僅含有一個正n邊形之頂點
$Pl(n)$	n條平行線鑲接正n邊形
$Ra(n)$	n條從一點出發的相異射線鑲接正n邊形
$Co(n)$	n條共點的相異直線鑲接正n邊形
$Ar(n)$	任意n邊形鑲接正n邊形
$Ar(p,n)$	任意p邊形鑲接正n邊形(此p邊形為凹、凸多邊形)

在課堂上老師給我們一個練習題：給三條相異之平行線，畫出一個鑲接正三角形，這個題目引發我們思考，如果將平行線增加，正多邊形的邊數也隨之增加，我們有沒有辦法可以找出這些正多邊形？

首先我們觀察給定一正四邊形，四條相異平行線分別通過正四邊形之四個頂點，我們將此圖形稱為四條平行線鑲接正四邊形(如右圖 1-1)。很明顯的，我們需要在L_2與L_3各找出P_2、P_3並滿足$\angle P_2P_1P_3 = 90^\circ$且$\overline{P_1P_2}$=$\overline{P_1P_3}$，就可以畫出正四邊形。為了推廣至正$n$邊形，利用角度的特性作圖是無法推廣的，所以我們想出了下面的引理一來當我們的工具，畫出正n邊形。



▲圖 1-1

【引理一】

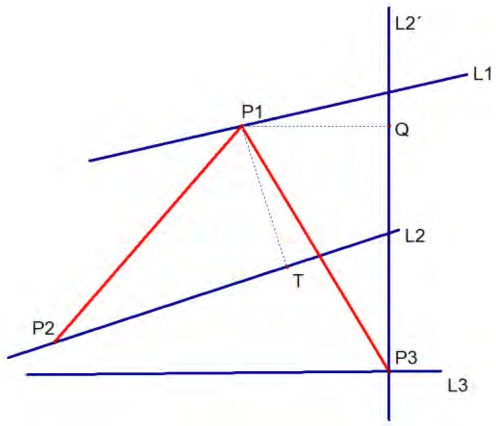
(1) 平面上有相異三條線L_1、L_2、L_3，在L_1上找一點P_1，給定角θ（$-\pi < \theta < \pi$且θ不為L_2往L_3方向之夾角），則可以在L_2、L_3分別找一點P_2、P_3，使$\overline{P_1P_2}$=$\overline{P_1P_3}$，且$\angle P_2P_1P_3 = \theta$。

(2) 承上(1)，若固定P_1、θ，且P_1到L_1、L_2的距離不相等，則P_2、P_3為唯一解。

〈作圖法〉：以P_1為旋轉中心，將L_2逆時針旋轉θ成L_2'(如右圖 1-2-1)，此時L_2'交L_3於P_3點，以P_1為旋轉中心，將$\overleftrightarrow{P_1P_3}$旋轉$-\theta$，交$L_2$於$P_2$點即為所求。

pf：

(1) 1°過P_1作L_2的垂線，交L_2於T點，以P_1為旋轉中心，將L_2和T點逆時針旋轉θ成L_2'和點Q，此時L_2'交L_3於P_3點，以P_1為旋轉中心，將$\overleftrightarrow{P_1P_3}$順時針旋轉$\theta$，交$L_2$於$P_2$點(如右圖 1-2-1)。

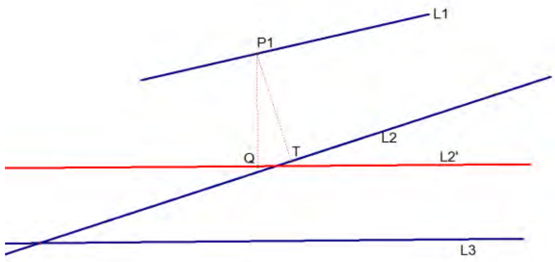


▲圖 1-2-1

$$2^\circ \begin{cases} \angle P_1TK = \angle P_1QP_3 = 90^\circ \\ \overline{P_1T} = \overline{P_1Q} \\ \angle KP_1T = \angle P_3P_1Q = \theta - \angle P_3P_1T \end{cases}$$

$\therefore \triangle KP_1T \cong \triangle P_3P_1Q(SAS全等) \rightarrow \overline{P_1P_2}=\overline{P_1P_3}$

3°以L_2向L_3度量(逆時針為正，順時針為負)，若旋轉θ為L_2、L_3之銳交角，則L_2'與L_3平行，作不出P_2、P_3，故θ不為L_2往L_3方向之夾角(如右圖 1-2-2)。



▲圖 1-2-2

(2) 1°若固定θ、P_1，證明P_2、P_3分別在L_2、L_3上的位置之唯一性：

假設有P_2'、P_3'分別在L_2、L_3上，使得$\overline{P_1P_2'}$=$\overline{P_1P_3'}$且$\angle P_2'P_1P_3' = \theta$(如下圖 1-3)，

令$\angle P_2P_1P_2' = \alpha$，則$\because \angle P_2P_1P_2' + \angle P_2'P_1P_3 = \angle P_2'P_1P_3 + \angle P_3P_1P_3'$

$\therefore \angle P_3P_1P_3' = \alpha$

$$\because \begin{cases} \overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3} \\ \overline{P_1P_2'} = \overline{P_1P_3'} \\ \angle P_2P_1P_2' = \angle P_3P_1P_3' = \alpha \end{cases} \quad \therefore \triangle P_2P_1P_2' \cong \triangle P_3P_1P_3'(SAS\text{全等})$$

2° P_1向L_2作垂直線交L_2於H_2，P_1向L_3作垂直線交L_3於H_3，

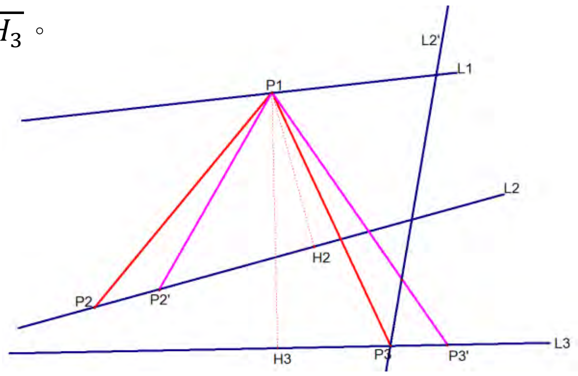
因為$\angle P_1P_2P_2' = \angle P_1P_3P_3'$、$\angle P_1P_2H_2 = \angle P_1P_3H_3 = 90^\circ$且$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3}$，

所以$\Delta P_1P_2H_2 = \Delta P_1P_3H_3 \rightarrow \overline{P_1H_2} = \overline{P_1H_3}$，

故若P_1到L_1、L_2的距離不相等，則P_2、P_3為唯一解。

3°若$\angle P_1P_2P_2'$為鈍角,則$\angle P_1P_2'P_2$為銳角，則改採$\angle P_1P_2'P_2 = \angle P_1P_3'P_3$，

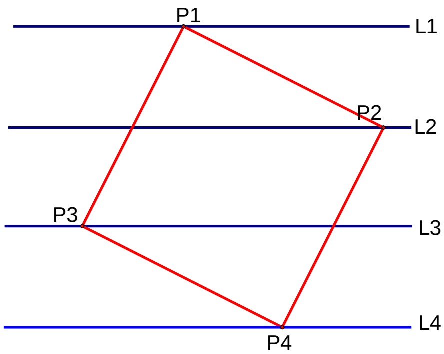
同理可證$\overline{P_1H_2} = \overline{P_1H_3}$。



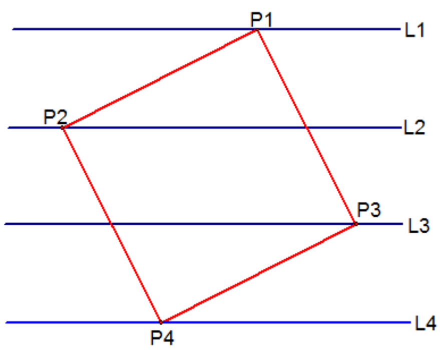
▲圖 1-3

■

有了$\boxed{\text{引理一}}$，我們只要確定，P_1的相鄰兩點在哪兩條直線上，就可以找出P_2、P_3，進而完成鑲接正四邊形。我們可以發現只有下圖兩種情況：



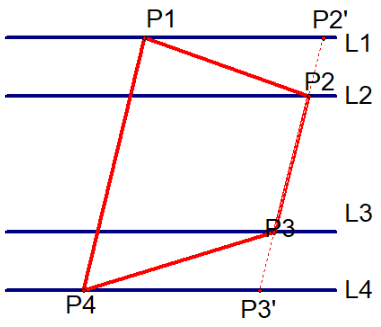
▲圖 1-4-1



▲圖 1-4-2

由$\boxed{\text{引理一之(2)}}$可說明，因P_1位於L_2、L_3同側，故若固定θ，則P_2、P_3分別在L_2、L_3上的位置為唯一性。當L_2以P_1旋轉時，有**順時針旋轉**和**逆時針旋轉**情況，亦就是旋轉θ或$-\theta$，使P_3在L_3上交於不同位置，而產生兩種鑲接正四邊形(如上圖 1-4-1、1-4-2)，而且由圖可知此兩種正四邊形為鏡射圖形。

然而以右圖 1-5 為例，為何P_1的相鄰頂點絕不是P_4？(如圖 1-5)，我們的證明如下：



▲圖 1-5

pf：

假設P_1的其中相鄰頂點是P_4，過P_2作$\overline{P_1P_4}$之平行線，分別交L_1、L_4於$P_2{}'$、$P_3{}'$點，$\because L_1 \parallel L_4 \ \therefore \overline{P_1P_4} = \overline{P_2{}'P_3{}'}$

又$\overline{P_2{}'P_3{}'} > \overline{P_2P_3}$ 產生矛盾，故P_1的相鄰頂點必是P_2、P_3，得證

■

(一)〈 **$Pl(4)$作圖法**〉：(如圖 1-6)

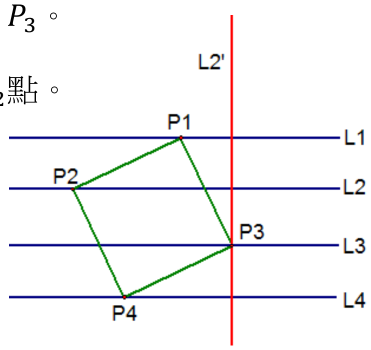
已知四條平行線L_1、L_2、L_3、L_4，且可鑲接正四邊形，L_1上的任意一點P_1(此P_1為正四邊形之其中一頂點)

1°以P_1為旋轉中心，將L_2逆時針旋轉90°，交L_3於P_3點，連P_1、P_3。

2°以P_1為旋轉中心，以$\overline{P_1P_3}$為半徑，順時針旋轉90°，交L_2於P_2點。

3°以P_2為旋轉中心，以$\overline{P_1P_2}$為半徑，順時針旋轉90°，交L_4於P_4點。

4°連$\overline{P_3P_4}$，正四邊形$P_1P_2P_3P_4$即為所求。



▲圖 1-6

(二) 〈 **$Pl(4)$解的情形**〉

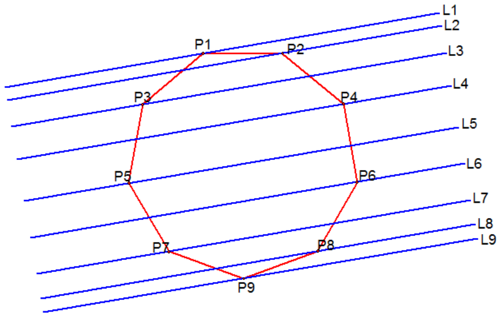
四條相異平行線可否鑲接正四邊形，我們將其論為「解」，討論$Pl(4)$解的情形：

1.給四條相異平行線若可鑲接正四邊形，P_1在L_1上的任意位置時，所形成的正四邊形為平移的圖形，因此我們將平移圖形都視為同一種解。

2.我們發現在$Pl(4)$作圖法中第一步驟的L_2可以P_1為旋轉中心，**逆時針**或**順時針**旋轉，形成兩種正四邊形，由圖可知其為鏡射圖形；若作得出如上圖 1-4-1、1-4-2 其中一種情況，則另一種必作得出，因為兩種正四邊形為鏡射圖形，故另一種不必討論，反之若作不出如上

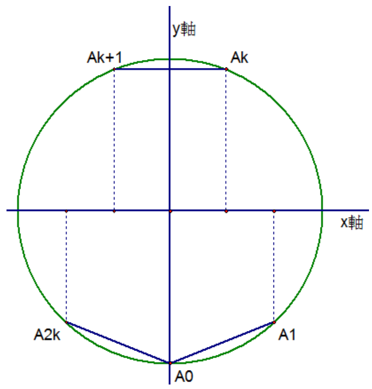
圖 1-4-1、1-4-2 其中一種情況，則必定無法作出鑲接正四邊形。

接下來我們推廣至$Pl(n)$，在作正n邊形的過程中，我們無法明確觀察出相鄰線上頂點的相對順序，例如：$Pl(9)$：正n邊形的相鄰頂點P_3、P_5、P_7分別落在L_3、L_5、L_7，但L_3、L_5、L_7互不為相鄰直線(如右圖 1-7)，因此討論$Pl(n)$時，無法利用討論$Pl(4)$的方法進行討論，所以我們利用圖形旋轉角度範圍討論投影點位置相對順序關係：



▲圖 1-7

若$n = 2k + 1(k \in \mathbb{N}$且$k \geq 2)$，正$n$邊形的每個頂點落在以原點為圓心之單位圓上，令正$n$邊形之其中一頂點座標為(0 , -1)，且其編號為A_0，逆時針將每頂點依序編號$A_0, A_1, \cdots A_{2k-1}, A_{2k}$，並且將此正$n$邊形的頂點投影在 x 軸上。令$A_0$的投影點為$X(A_0)$、$A_1$的投影點為$X(A_1)$、⋯、$A_m$的投影點為$X(A_m)$ $(0 \leq m \leq 2k$且$m \in \mathbb{N})$(如右圖 1-8)。



▲圖 1- 8

【引理二】

若$n = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N}$且$k \geq 2)$，以原點為圓心，將正n邊形(如上圖 1-8)逆時針或順時針旋轉θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2n})$，則$x$軸上的投影點相對順序不會改變。

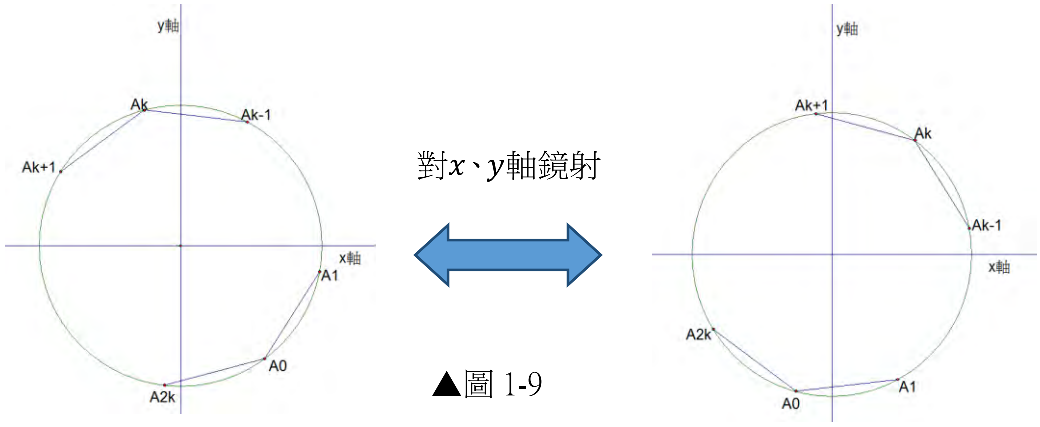
pf：

1°說明為何只討論旋轉範圍$0 < \theta < \frac{\pi}{2n}$：

$Case1$：以原點為中心，將落在單位圓上的正n邊形逆時針旋轉$\frac{\pi}{n}$，則A_k落在y軸上，將此圖形以x軸作對稱，與原本之正n邊形重合，所以旋轉超過$\frac{\pi}{n}$則不需討論。

$Case2$：以原點為圓心，將落在單位圓上的正n邊形旋轉$\frac{\pi}{2n} + \theta$後的圖形對x、y軸鏡射會與以原點為圓心將正n邊形旋轉$\frac{\pi}{2n} - \theta$後的圖形重合$(0 < \theta < \frac{\pi}{2n})$，所以旋轉超過$\frac{\pi}{2n}$也不需討論(如圖 1-9)。

故只需討論當正n邊形逆時針旋轉$\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2n})$，則$x$軸上的投影點相對順序是否會改變。



▲圖 1-9

2° x軸上的投影點之間相對順序關係：

已知正n邊形之A_0頂點座標為(0 , -1)，則A_m的x座標$cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m\right)$，可知下列順序規則：

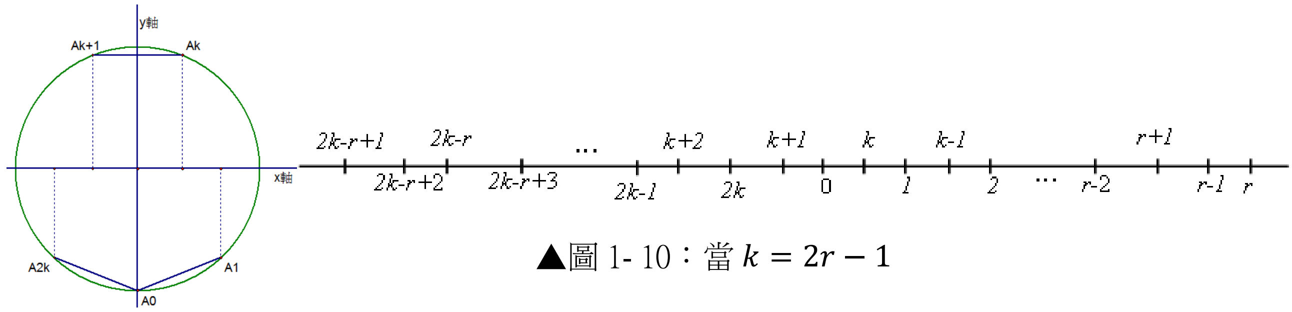
$n=2k+1$，若k奇數，則$k=2r-1$；若k偶數，則$k=2r$ $(k,r\in\mathbb{N})$，則：

(1) $X(A_0)$的足碼為中位投影點以其為對稱點，則可知左右相對順序相同投影點之足碼總和為$2k+1$。

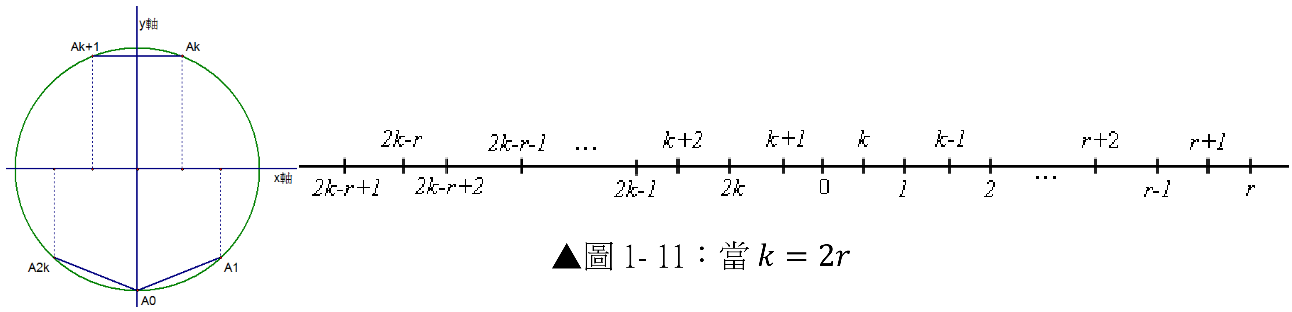
(2) 從足碼 0 向右出發，投影點之足碼依序為$0,k,1,k-1,2,\cdots,k-m+1,m,k-m\cdots$ $(0<m\leq r-1$且$m\in\mathbb{N})$。

(3) 最右端投影點之足碼為r (若k為奇數最右端依上述規則自然為r)

(4) 再利用以足碼 0 為中心，左右相對順序相同投影點之足碼總和為$2k+1$，可求出$X(A_0)$左方投影點之足碼。



▲圖 1- 10：當$k=2r-1$



▲圖 1- 11：當$k=2r$

3°說明在正n邊形逆時針旋轉θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2n})$，$X(A_{k+1-m})$,$X(A_m)$, $X(A_{k-m})(0<m\le r-1)$相對順序不會改變且$X(A_r)$為最右邊的點：

(1) 在正n邊形逆時針旋轉θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2n})$， $X(A_{k+1-m})$,$X(A_m)$順序不變：

令$X(A_0)$之x座標為$cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，則其他投影點之$x$座標為

$cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m\right)(0<m\le r-1)$

令$f(\theta)=cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot(k-m)+\theta\right)-cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m+\theta\right)$

如果投影點在$0<\theta<\frac{\pi}{2n}$有變換順序，因為cos函數為連續函數，必存在θ使得

$f(\theta)=0$，即$cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot(k-m)+\theta\right)=cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m+\theta\right)$

故有$\left|-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot(k-m)+\theta\right|=\left|-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m+\theta\right|$，又$A_{k+1-m}$,$A_m$位置不同，則兩點不在同一象限，故$-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot(k-m)+\theta=-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m+\theta\right)$

$$\rightarrow -\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot(k-m)+\theta+\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m+\theta\right)=0$$

$\rightarrow -\pi+2\theta+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot 2\pi=0\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{k}{2k+1}\pi$

$\because\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2k+1}\quad\therefore\frac{\pi}{2n}=\theta$

故在$0<\theta<\frac{\pi}{2n}$，$X(A_{k+1-m})$,$X(A_m)$順序不變

(2) 在正n邊形逆時針旋轉θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2n})$，$X(A_m)$, $X(A_{k-m})$順序不變：

令$f(\theta)=cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m+\theta\right)-cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot(k+1-m)+\theta\right)$

如果投影點在$0^{\circ}<\theta<\frac{\pi}{2n}$有變換順序，因為$cos$函數為連續函數，必存在$\theta$

使得$f(\theta)=0$，即$cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m+\theta\right)=cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot(k+1-m)+\theta\right)$

故有$\left|-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m+\theta\right|=\left|-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot(k+1-m)+\theta\right|$

又A_m,A_{k-m}位置不同，則兩點不在同一象限，故

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m+\theta=-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot(k+1-m)+\theta\right)$$

$\rightarrow -\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m+\theta+\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot(k+1-m)+\theta\right)=0$

$\because \theta=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2k-1}\right)-\frac{\pi}{2k+1}=\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{n}<0$，又$0^{\circ}<\theta<\frac{\pi}{2n}$，故不合，

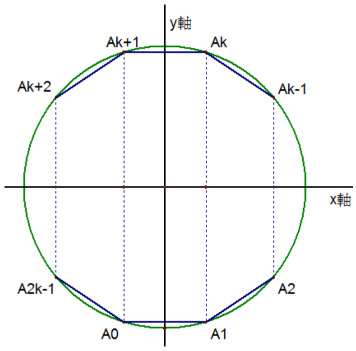
則在正n邊形逆時針旋轉$0<\theta<\frac{\pi}{2n}$，$X(A_m),X(A_{k-m})$順序不變

(3) $X(A_r)$為最右邊的點,同理(2)的證法，將m改為r，故$X(A_{k+1-r})=X(A_{r+1})$順序不變，因此$X(A_r)$依然為最右邊的點。

$\Rightarrow$故在正n邊形逆時針或順時針旋轉$0<\theta<\frac{\pi}{2n}$，則x軸上投影點相對順序不會改變。

■

若$n=2k$、正n邊形的每個頂點落在以原點為圓心之單位圓上，並使 y 軸垂直平分此正n邊形其中一邊長，令第三象限最低點為A_0其投影點為$X(A_0)$，A_1的投影點為$X(A_1)\cdots A_q$的投影點為$X(A_q)(0\le q\le 2k-1$且$q\in\mathbb{N})$(如右圖 1-12)



▲圖 1-12

【引理三】

> 若$n=2k$ $(k\in\mathbb{N}$ 且$k\ge 2)$，以原點為圓心，將正n邊形(如上圖 1-10)逆時針或順時針旋轉θ $(0<\theta<\frac{\pi}{n})$，則x軸上投影點相對順序不會改變。

pf：

1° 說明為何只討論旋轉範圍$0<\theta<\frac{\pi}{n}$：

Case1：若以原點為圓心，旋轉此正n邊形角度$\frac{2\pi}{n}$時，會與原圖形相同，則旋轉角度大於$\frac{2\pi}{n}$時不需討論。

Case2：若將此正n邊形旋轉θ時($\frac{\pi}{n}\le\theta\le\frac{2\pi}{n}$)，將此圖形對$y$軸做鏡射，與此正$n$邊形旋轉$\frac{2\pi}{n}-\theta$時相同，則旋轉角度$\frac{\pi}{n}\le\theta\le\frac{2\pi}{n}$時也不需討論。

故只需討論當正n邊形逆時針旋轉θ $(0<\theta<\frac{\pi}{n})$，則x軸上投影點相對順序是否改變。

2° x軸上的投影點之間相對順序關係：

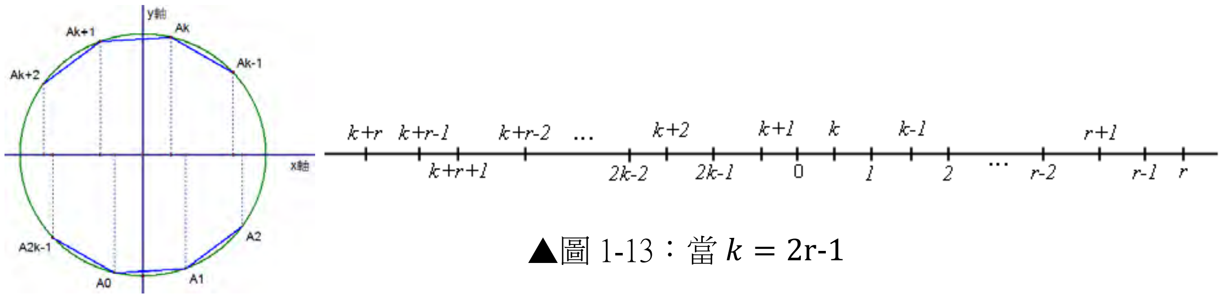
已知正n邊形之A_0頂點座標為$\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k+1}\right), sin\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k+1}\right)\right)$，則$A_m$的$x$座標為$cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k+1}+\frac{2\pi}{2k+1}\cdot m\right)$，我們將此單位圓上的正$n$邊形逆時針旋轉一小角度，例如逆時針旋轉$\frac{2\pi}{10^n}$，目的是將投影點落在$x$軸上不同的位置，所形成的投影點之序號可知下列順序規則：

$n = 2k$ ，若k是奇數，則$k = 2\text{r-}1$；若k是偶數，則$\text{k} = 2\text{r}(k, r \in \mathbb{N})$

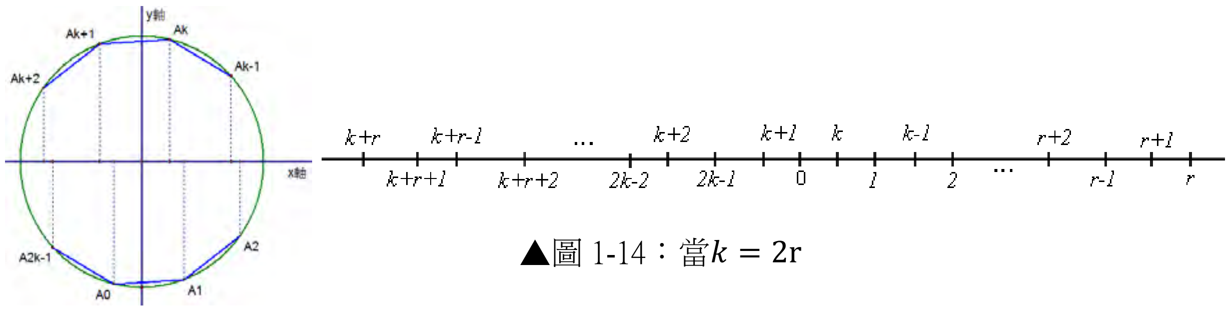
(1) 從$X(A_0)$向右出發，投影點之足碼依序$0, k, 1, k-1, 2, \cdots, k-m+1, m, k-m\cdots$ $(1 \le m \le r-1$且$m \in N)$

(2) 最右端投影點之足碼為r (若k為奇數最右端依上述規則自然為r)

(3) 由k向右、0向左出發，左右相同順序之相對應投影點的足碼相差為k，可求出$X(A_0)$左方投影點之足碼。



▲圖 1-13：當 $k = 2\text{r-}1$



▲圖 1-14：當$k = 2\text{r}$

3° 說明正n邊形逆時針旋轉θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{n}\right)$時，$X(A_{k+1-m})$,$X(A_m)$,$X(A_{k-m})$ $(k \ge 2$ 且 $1 \le m \le r-1)$相對順序不會改變：

令$X(A_0)$之x坐標為$cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}\right)$，圖形旋轉$\theta$ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{n})$，則其他點之$x$坐標分別為

$$cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}+\frac{2\pi}{2k}\cdot q+\theta\right) (0 \le q \le 2k-1)$$

(1) 比較$X(A_{k+1-m})$ 之x坐標 $\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}+\frac{2\pi}{2k}\cdot(k+1-m)+\theta\right)$ 、$X(A_m)$之x坐標

$cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}+\frac{2\pi}{2k}\cdot m+\theta\right)$

$\because A_m$在第四象限、A_{k+1-m}在第一象限，利用$cos\theta$為偶函數，

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}+\frac{2\pi}{2k}\cdot m+\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2k}-\frac{2\pi}{2k}\cdot m-\theta\right)$，

$-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}+\frac{2\pi}{2k}\cdot(k+1-m)+\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2k}-\frac{2\pi}{2k}\cdot m>\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2k}-\frac{2\pi}{2k}\cdot m-\theta$，

利用$cos\theta$在第一象限為遞減函數，則$X(A_{k+1-m})$之x坐標$<X(A_m)$之x坐標

(2) 比較$X(A_m)$ 之x坐標 $\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}+\frac{2\pi}{2k}\cdot m+\theta\right)$$,X(A_{k-m})$之$x$坐標

$cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}+\frac{2\pi}{2k}\cdot(k-m)+\theta\right)$

$\because A_m$在第四象限、A_{k-m}在第一象限，利用$cos\theta$為偶函數，將A_m對x軸作對稱點$A_m{}'$，

亦就是$\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}+\frac{2\pi}{2k}\cdot m+\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2k}-\frac{2\pi}{2k}\cdot m-\theta\right)$，

$-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}+\frac{2\pi}{2k}\cdot(k-m)+\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}-\frac{2\pi}{2k}\cdot m+\theta$，$\because 0<\theta<\frac{\pi}{n}$，

$\therefore\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2k}-\frac{2\pi}{2k}\cdot m+\theta<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2k}-\frac{2\pi}{2k}\cdot m-\theta$利用$cos\theta$在第一象限為遞減函數，

則$X(A_m)$之x坐標$<X(A_{k-m})$之x坐標

同理，正n邊形順時針旋轉$0<\theta<\frac{\pi}{n}$，則x軸上投影點相對順序亦不會改變。

(3)當$k=2r$，同(1)的證明，將m改成r即有 $X(A_{r+1})\le X(A_r)$ ，故r為最右邊的點

$\Rightarrow$故在正n邊形逆時針或順時針旋轉$0<\theta<\frac{\pi}{n}$，則x軸上投影點相對順序不會改變。

■

經由上述的引理二、引理三的討論，我們得出結論，**當落在單位圓上的正n邊形旋轉任意角度，分別在x軸上最右側之三點序號和最左側的三點序號必為連續正整數**，因此我們利用此結論來說明**當n條平行線鑲接正n邊形時，P_1、P_2、P_3和P_{n-2}、P_{n-1}、P_n必為相鄰頂點**。有此結論，便能完成n條平行線鑲接正n邊形的作圖法並討論其解的狀況，整理如下：

為了方便敘述，我們定義：$Pl(n)$為n條平行鑲接正n邊形。

(三)〈$\boldsymbol{Pl(n)}$**作圖法**〉：

已知n條平行線L_1、$L_2\cdots L_{n-1}$、L_n，並含有鑲接正n邊形，在L_1上取一點P_1(圖 1-15)

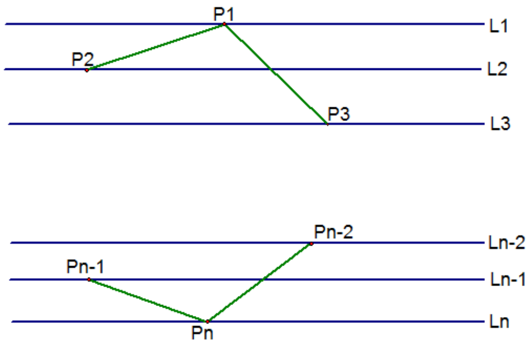
1°以P_1為旋轉中心，將L_2順時針旋轉θ交L_3於P_3點。

2°連P_1、P_3。

3°以P_1為旋轉中心，以$\overline{P_1P_3}$為半徑，逆時針旋轉θ，交L_2於P_2點。

4°以P_2為旋轉中心，以$\overline{P_1P_2}$為半徑，逆時針旋轉θ，交L_4於P_4點，以此類推，最後得L_n上一點P_n。

5°連P_1、$P_2\cdots P_{n-1}$、P_n即為所求。



▲圖 1-15

(四)〈$\boldsymbol{Pl(n)}$**解的情況**〉：無解或是 2 個解。

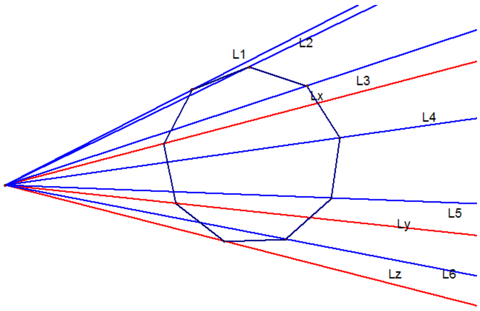
以作圖法確認是否有解，依照引理一之(2)，在此情況下，固定P_1與θ只有唯一解，若改為$-\theta$，為另一解即如前面討論的鏡射情況，共2種。若畫不出，則必定無解且與$Pl(4)$原理相同。

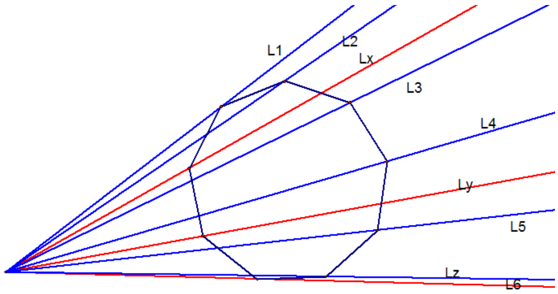
研究完n條相異平行線鑲接正n邊形作圖法後，我們試著更深入討論$Pl(n)$什麼條件下才可鑲接正n邊形，經過四條、五條平行線…不同情況下的觀察、計算，**我們發現每一相鄰線段間距比會有特定的比例**，獨立研究完後，發現科展第 38 屆「平行線問題之研究推廣」，跟我們有相同的結論，因此我們不再加贅述。

二、從一點出發$\boldsymbol{n}$條射線鑲接正$\boldsymbol{n}$邊形

完成平行線之研究後，我們試著延伸至n條直線交於一點，可是圖形過於複雜，所以我們先討論「從一點出發n條射線」，我們定義 $Ra(n)$為n條從一點出發的相異射線有鑲接正n邊形。但又遇到一些困難，我們無法確定點的順序(如下圖 2-1)，L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6為相鄰 5 點所在的直線，但對L_x、L_y、L_z因交點位置改變，穿插入L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6，所以造成了點無法確定順序的困難。

也就是說我們無法確定與L_1上點P_1相鄰的兩點究竟在哪兩條線上，這樣的情形使我們原本的作圖方法變得非常繁複，當點的順序排列有m種時(九邊形就有 28 種)，以原本的作圖法，需要作圖$2m$次，所以我們必須改變作圖法來解決這個問題。





▲圖 2-1

我們都知道每個正n邊形都必定有外接圓，因此我們想用此性質做圖，可是無法確認圓心所在位置，所以我們提出以下 2 個引理來找出圓心：

討論：

以作圖法發現總共有四種情況(步驟一、步驟二各有 2 種情況)我們以**【引理四】**去證明其中一種，其他同理可以證明。

【引理四】

已知L_2上一點P_2、L_1上一點P_1、一點P_3，且P_1 、P_2 、P_3為正n邊形其中相鄰三點，$\angle P_1P_2P_3$為正n邊形內角θ，以P_2為旋轉中心，將L_1逆時針旋轉θ°得L_1'，L_1'交L_1於M點，則P_1 、P_2 、P_3 、M四點共圓(如下圖 2-2)

pf：

作P_2垂直L_1交於A點，設$\angle AP_1P_2$為α°，$\angle AP_2P_1$為β°

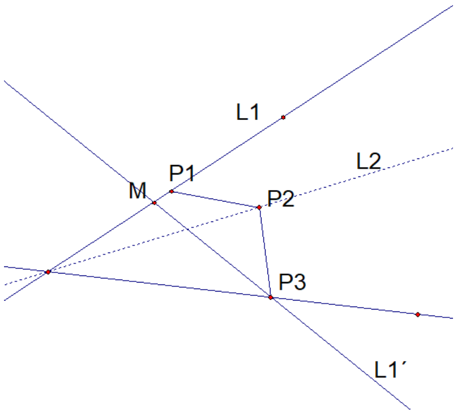
作P_2垂直L_1'交於A'點，$\because \Delta AP_1P_2 \cong \Delta A'P_3P_2$

$\therefore \angle A'P_3P_2$為$\alpha^\circ$, $\angle P_1P_2A'$為β°

則$\angle \mathrm{M}P_1P_2 = 180^\circ - \angle \mathrm{A}'P_1P_2 = 180^\circ - \alpha^\circ$

$\because \angle MP_1P_2$與$\angle P_2P_3M$為互補角

$\therefore P_1$ 、P_2 、P_3 、M四點共圓



▲圖 2-2

■

【引理五】

$Ra(n)$中由最上方的射線為L_1依序命名，則L_1、L_2上的點必為正n邊形上相鄰的頂點

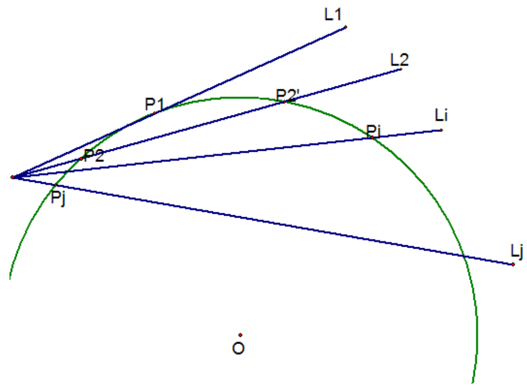
pf：

設L_1、L_2上的點不為正n邊形相鄰的頂點

令P_1之相鄰頂點分別落在L_i、L_j上

作此正n邊形之外接圓O交L_2於P_2、P_2' (其中一點須為頂點，則$\widehat{P_1P_j}=\widehat{P_1P_i}=\frac{2\pi}{n}>\widehat{P_1P_2}$、$\widehat{P_1P_2'}$

又正n邊形的相鄰頂點弧度必為$\frac{2\pi}{n}$，矛盾



▲如圖 2-3

則L_1、L_2上的點必為正n邊形上相鄰的頂點，同理L_{n-1}、L_n亦是如此，故得證

■

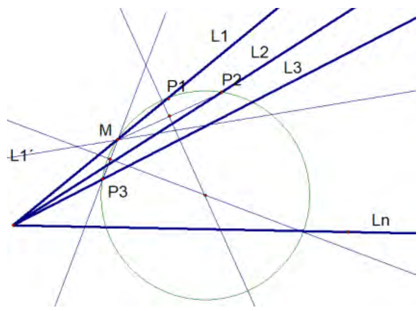
利用上述兩引理，我們將狀況簡化至多四種情況M在P_1的左側或右側，與P_1在P_2的左側或右側，在$Ra(n)$中必只有一種成立，我們假設為下圖 2-4 情況，列出$Ra(n)$之作圖法，若此情況無解，則換M在P_1左側的假設情況，使用$Ra(n)$中作圖法。

(一)〈$\boldsymbol{Ra(n)}$**作圖法**〉：

已知n條線交於一點分別為L_1、L_2 ... 、L_{n-1}、L_n，並含有鑲接正n邊形在L_2上取一點P_2 (如下圖 2-4)

1°以P_2為旋轉中心，逆時針將L_1旋轉$\frac{(n-2)\pi}{n}$得L'，交L_1於M點

2°以M為旋轉中心，逆時針將L_1旋轉$\frac{\pi}{n}$得L''且交L_3於P_3(逆時針旋轉$\frac{(n-2)\pi}{n}$得L'''，且交L_3於P_3')。



▲圖 2-4

3°連接P_2、M以及P_3、M並作$\overline{P_2M}$、$\overline{P_3M}$中垂線，得一圓心 O (為正n邊形外接圓圓心)連接P_2、M以及P_3'、M並作$\overline{P_2M}$、$\overline{P_3'M}$中垂線，得一圓心O′ (為正n邊形外接圓圓心)。

4°以O 為圓心，將P_2逆時針旋轉$n-1$次，分別交於L_1、L_3 ... L_{n-1}、L_n於P_1、P_3 ... P_{n-1}、P_n，則P_1、P_3 ... P_{n-1}、P_n所形成的正n邊形即為所求；若無法交於L_1、L_3 ... L_{n-1}、L_n，以O'為圓心，將P_2逆時針旋轉$n-1$次，分別交於L_1、L_3 ... L_{n-1}、L_n於$P_1{}'$、$P_3{}'$ ... $P_{n-1}{}'$、$P_n{}'$，

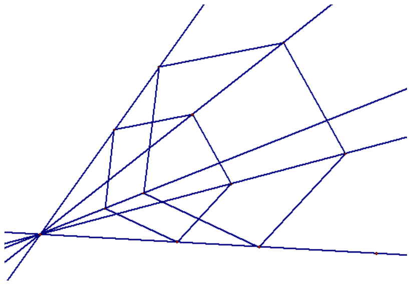
則$P_1{}'$、$P_3{}'\dots P_{n-1}{}'$、$P_n{}'$所形成的正n邊形即為所求。

5°若以上 2 種(以P_2為旋轉中心，L_1順時針旋轉後，再以 M 點為旋轉中心，順、逆旋轉L_1兩種情況)無法畫出，則以第一步驟逆時針旋轉(為不同側的圖形)，並重複 2、3、4 步驟，順逆時針均相反，即可求出。

(二)〈$\boldsymbol{Ra(n)}$**解的情況**〉：

【定理一】

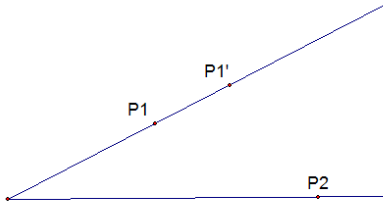
若n條從一點出發的相異射線可鑲接正n邊形，則只含有一解(相對應的每個邊互相平行視為同一種解)(如下圖)



pf：

我們將相對應的每個邊互相平行視為同一種解，即可視為P_1在L_1移動將鑲接正n邊形平移後放大。

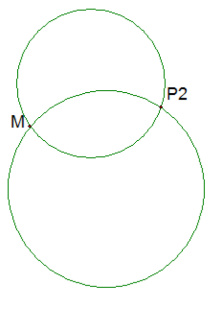
1°利用$\boxed{\text{引理四}}$，以P_2為中心將L_1旋轉$\frac{2\pi}{n}$交L_1於M點，則M位於P_1、P_2的正n邊形外接圓上，同理M位於P_1'、P_2的正n邊形外接圓上(如圖 2-5)



▲圖 2-5

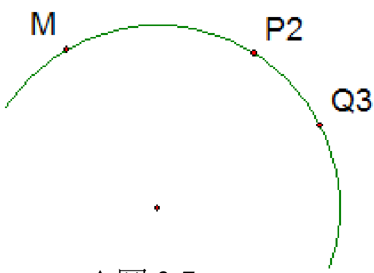
2°因為P_2固定，P_1、P_1'相異，所以兩外接圓不相同

3°M、P_2均位於兩外接圓上，所以兩外接圓交於兩點(如圖 2-6)，令上方的圓為C_1、下方的圓為C_2



▲圖 2-6

4°在C_1上，正n邊形P_2的下一個頂點為Q_3(圖 2-7)，依序為$Q_4\dots$則$\angle P_2MQ_m$的夾角為$\frac{(m-2)\pi}{n}$，同理在C_2上，正n邊形P_2的下一個頂點為R_3，依序為$R_4\dots$則$\angle P_2MR_m$的夾角為$\frac{(m-2)\pi}{n}$，則$\overleftrightarrow{\mathrm{MQ_n}}$與$\overleftrightarrow{\mathrm{MR_n}}$為同一條線且$\overline{\mathrm{MQ_m}} < \overline{\mathrm{MR_m}}$(如圖 2-8)

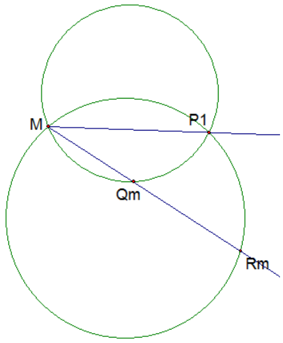


▲圖 2-7

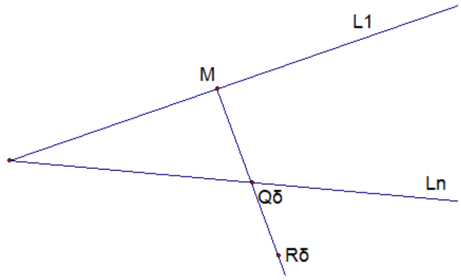
5°若C_1上的正n邊形頂點落在L_n的頂點為Q_δ

$\because \overline{\mathrm{MQ_\delta}}$與$\overline{\mathrm{MR_\delta}}$為同一直線，且$\overline{\mathrm{MQ_\delta}} < \overline{\mathrm{MR_\delta}}$

，故L_1、$L_2\dots L_n$均無法通過$\mathrm{R_\delta}$(如圖 2-9)



▲圖 2-8

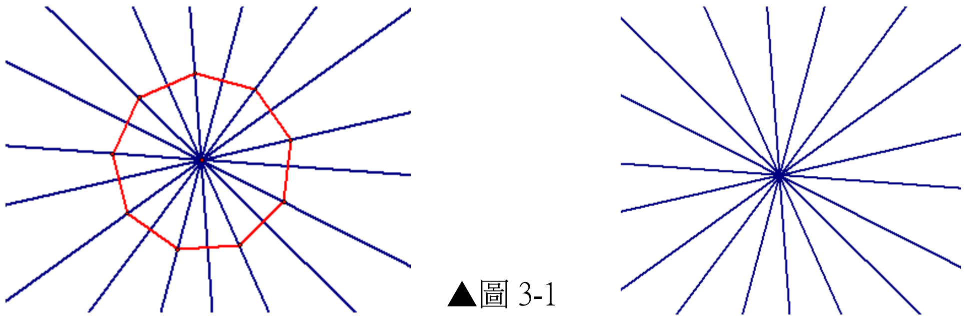


▲圖 2-9

若交點落在圓外，則僅有一解或是無解；若交點落於圓內、圓上、圓心為簡單情況，因篇幅關係僅在此簡單敘述，圓內：一解或無解；圓上：含有一解；圓心：僅有一解。

三、交於一點的n條直線鑲接正n邊形

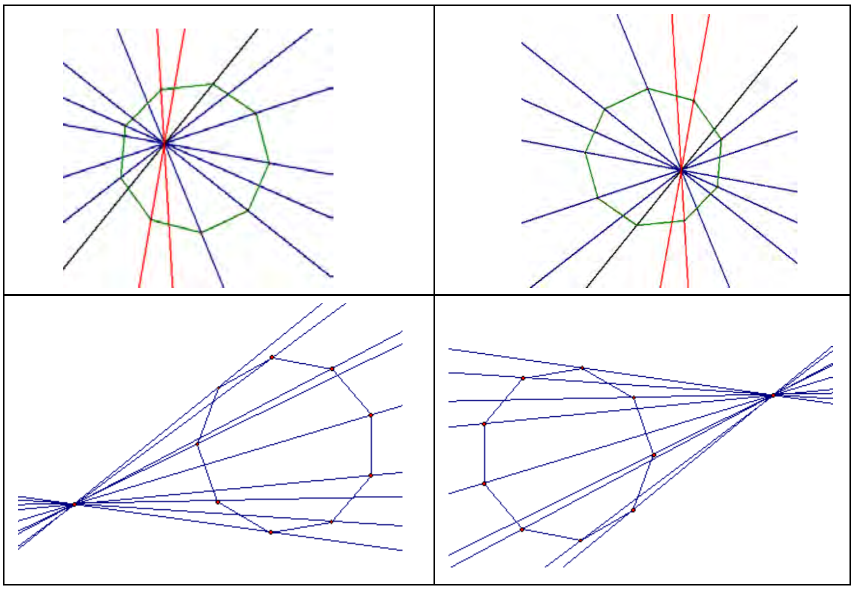
若n條直線，除去鑲接正n邊形，我們會分不清楚上下左右(如下圖 3-1)，所以我們才從射線出發，有了射線的經驗，我們現在有能力來分析直線的情況。



▲圖 3-1

我們考慮三種情況，直線交點位於鑲接正n邊形的外接圓外部、外接圓的內部和外接圓上，第三種情況所有直線夾角均相等為顯而易見的情況，我們就不再贅述。以下只討論前兩種情況。

如果我們繼續將n條直線以交點分成兩組射線，則可能產生兩組共四種情況(如下圖 3-2)，其中兩兩同時產生直線交點位於鑲接正n邊形的外接圓外部，過相鄰兩點的圓周角等於$\frac{\pi}{n}$所以過相鄰兩點的兩直線夾角必小於$\frac{\pi}{n}$，若又有其他直線穿過，則夾角更小。因為n條線有 $2n$個夾角，如果都小於$\frac{\pi}{n}$，則矛盾。因此我們一定找得到一組相鄰直線夾角大於$\frac{\pi}{n}$，以此將直線分解成兩組射線，即可以前面射線討論結果畫出圖形。



▲圖 3-2

接下來討論n條直線交點位於鑲接正n邊形的外接圓內部，如果我們將直線以交點分割成兩個射線，包含鑲接正n邊形頂點令為真線，不包含令為假線。

【引理六】

知圓內一點K，並將圓上之正n邊形各點與K點連線，若任 2 條線夾角小於$\frac{\pi}{n}$，則 2 條線必有一條為真，另一條為假(如下圖 3-3)

pf ：

當 2 條均為真線，其夾角必大於$\frac{\pi}{n}$

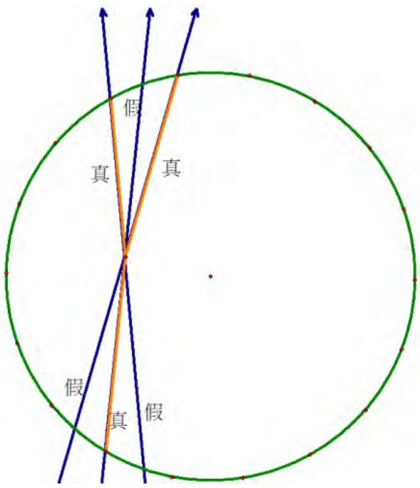
∵ 2 條真線截的弧為$\frac{2\pi}{n}$，其 2 條相對應的假線，

必截一大於 0 之弧，

∴2 條真線夾角必大於$\frac{\pi}{n}$，2 條假線亦如此

∵夾角所形成情況，只有一真一假、二假、二真

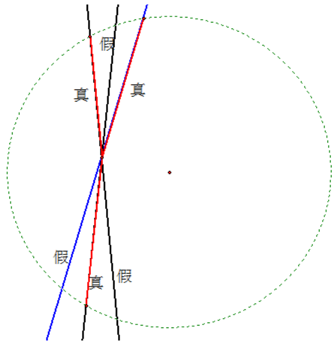
且二假、二真均大於$\frac{\pi}{n}$ ∴一真一假之夾角必小於$\frac{\pi}{n}$

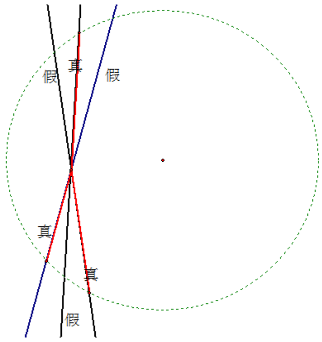


▲圖 3-3

■

如果找出夾角小於$\frac{\pi}{n}$的相鄰直線，然後再選取隔壁條直線，則鑲接的頂點情況共有四種，其中兩兩同時產生，所以只有兩種可能需要作圖。我們以下圖 3-4 為例





▲圖 3-4

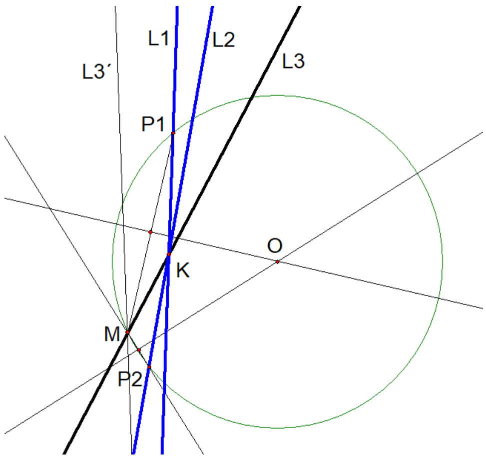
為了方便敘述，我們定義：$Co(n)$為n條直線交於一點

(一)〈$\boldsymbol{Co(n)}$**作圖法**〉：

$Case\ 1$：若交點在圓外，以射線的作圖法討論。

$Case\ 2$：交點位於圓內：

已知n條直線交於一點K，含有鑲接正n邊形，找出 3 條相鄰直線L_1、L_2、L_3，其中相鄰 2 直線，分別為L_1、L_2，且符合夾角小於$\frac{\pi}{n}$(如圖 3-5)



▲圖 3-5

1° 在L_1上任選一點P_1，以 P_1為旋轉中心，

將L_3順時針旋轉$\frac{(n-2)\pi}{n}$得$L_3{}'$交L_3於M點。

2° 以M為旋轉中心，將L_3逆時針旋轉$\frac{(n-2)\pi}{n}$交L_2於P_2。

3° 連接P_1、M以及P_2、M並作$\overline{P_1M}$、$\overline{P_2M}$中垂線，

得一圓心O (為正方形外接圓圓心)。

4° 以O為圓心，將P_2順時針旋轉$\frac{2\pi}{n}$，重複動作$n-1$次，

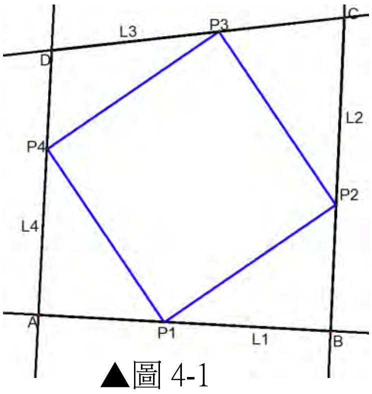
分別落在L_1、L_3 … 、L_{n-1}、L_n於P_1、P_3 … 、P_{n-1}、P_n，則P_1、P_3 … 、P_{n-1}、P_n所形成的正n邊形即為所求。

5° 若無法落在L_1、L_3 … 、L_{n-1}、L_n，則在L_2上任選一點P_2，重複 1～4 步驟，順時針與逆時針均相反，即可求出。

(二)〈$\boldsymbol{Co(n)}$**解的情形**〉：圓外：含有 2 解(2 個對稱的射線圖形)或是無解；圓內：含有 2 解(在L_1上取高於K點，以及低於K點)以上或是無解，若交點落於圓上、圓心為簡單情況，因篇幅關係僅在此簡單敘述，圓心、圓上會為同一圖形，含有 4 解(同時擁有交點在圓內、圓外的 4 種解)。

四、任意n邊形鑲接正n邊形

完成n條共點的相異直線鑲接正n邊形之研究後，我們再推廣至任意n邊形鑲接正n邊形。現給定正四邊形，將正四邊形的每個頂點分別落在四條兩兩相交於一點的相異直線，我們將此圖形稱為任意四邊形鑲接正四邊形(如右圖 4-1)



▲圖 4-1

若四條兩兩相交於一點的相異直線圍成一四邊形，且可鑲接正四邊形和在L_1上的一點P_1(此P_1為正四邊形之其中一頂點)，為了找出其他三個頂點分別在三條直線上之位置，我們利用與四條相異平行線鑲接正四邊形相同的方法：等邊旋轉的概念找出其他 3 點，但P_1為L_1上的任意一點，使得P_3亦為平面上的動點，**而P_1在L_1上任意移動時，我們發現P_3的動點軌跡為一直線**，我們以幾何方法證明，並加以推廣，我們也利用P_3的動點軌跡為一直線的性質來找出鑲接正四邊形，而提出引理七、定理二如下：

【引理七】

已知L_1、L_2為兩不平行之直線，相交於M，令P_1、R_1分別為L_1、L_2之一點，以R_1為圓心，$\overline{P_1R_1}$為旋轉半徑，逆時針旋轉θ，得Y_1點，以R_2為圓心，$\overline{P_2R_2}$為旋轉半徑，逆時針旋轉θ，得Y_2，則M、Y_1、Y_2共線

Pf：

1°點P_2，使P_2為L_2上之一動點

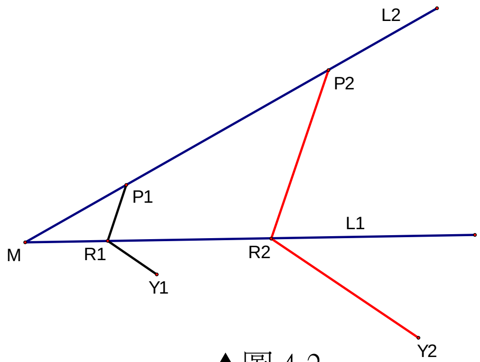
2°在L_1做一點R_2，使$\overline{P_1R_1} \parallel \overline{P_2R_2}$

3°以R_2為圓心，$\overline{P_2R_2}$為旋轉半徑，逆時針旋轉θ，得Y_2，則$\overline{R_1Y_1} \parallel \overline{R_2Y_2}$(如右圖 4-2)

$4^{\circ}\because \overline{P_1R_1}:\overline{P_2R_2}=\overline{MR_1}:\overline{MR_2}$又$\begin{cases}\overline{P_1R_1}=\overline{R_1Y_1}\\ \overline{P_2R_2}=\overline{R_2Y_2}\end{cases}$

$\therefore \overline{P_1R_1}:\overline{P_2R_2}=\overline{MR_1}:\overline{MR_2}=\overline{R_1Y_1}:\overline{R_2Y_2}$

故 M、Y_1、Y_2共線



▲圖 4-2

■

【定理二】

已知三條相異直線P_1、P_2、P_n兩兩相交於一點圍成一n邊形的相鄰三邊(相對位置如圖 4-3)，P_1在L_1上、P_2在L_2上、P_n在L_n上滿足P_1當$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1P_n}$，當$P_1$在$L_1$上任意移動時，$P_3$、$P_4\cdots P_{n-2}$、$P_{n-1}$之動點軌跡也為一直線。

Pf：

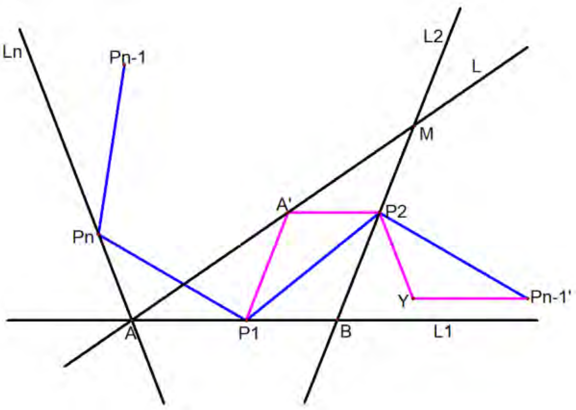
1°圖形變換：

若n條兩兩相交於一點的相異直線圍成一n邊形，以P_1為圓心，將$\Delta P_1P_{n-1}P_n$、A點順時針旋轉$\frac{(n-2)\pi}{n}$，分別得$\Delta P_1P_{n-1}{}'P_2$、A'，A'亦以P_2為圓心，逆時針旋轉$\frac{(n-2)\pi}{n}$，得Y點。

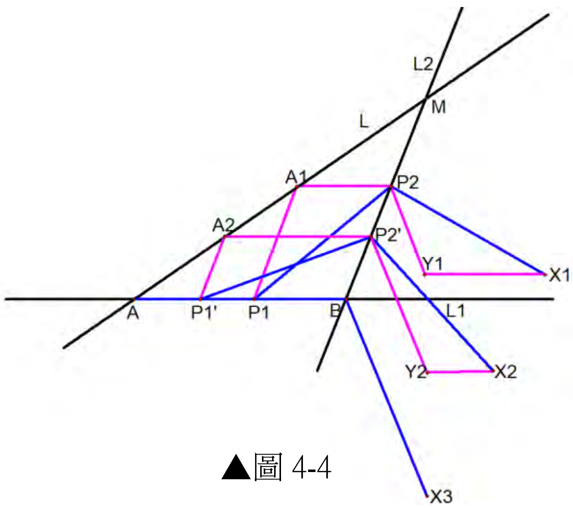
(如下圖 4-3)

目標：當P_1在L_1上任意移動時，若動點$P_{n-1}{}'$的動點軌跡為一直線，經以P_1為圓心，$P_{n-1}{}'$逆時針旋轉$\frac{(n-2)\pi}{n}$，則亦證明動點P_{n-1}的動點軌跡為一直線，因此以下為證明動點$P_{n-1}{}'$的動點軌跡為一直線。

2°已知P_1為L_1上之一點，將P_1移動至$P_1{}'$、A點($P_1{}'$為L_1上之任意一點，形成如下圖 4-4。



▲圖 4-3



▲圖 4-4

3°利用$\boxed{\text{引理七}}$得出Y之軌跡為一直線：

$\because\overline{X_1Y_1}:\overline{X_2Y_2}=\overline{Y_1X_3}:\overline{Y_2X_3}=\overline{P_2B}:\overline{P_2{}'B}=\overline{A_1A}:\overline{A_2A}=\overline{P_1A_1}:\overline{P_1{}'A_2}$

已知$\overline{X_1Y_1}=\overline{P_1A_1}$ $\therefore\overline{X_2Y_2}=\overline{P_1{}'A_2}$，故動點$X$的動點軌跡為一直線，亦證明動點$P_{n-1}$的動點軌跡為一直線，$P_3$、$P_4\cdots P_{n-3}$、$P_{n-2}$利用上述方法亦可證明其動點軌跡為一直線，得證

■

我們已經證明了軌跡為一直線，利用此結果，我們想以快速的方法找出鑲接正n邊形的其中一頂點，因此我們想出軌跡的建立方法。

〈建立軌跡作圖法〉：

1°以L_1、L_n交點$P_1{}'$為旋轉中心，將L_1逆旋轉$\frac{\pi}{n}$，交L_2於$P_3{}'$。

2°作$P_1{}'$、$P_3{}'$中垂線，交L_1於$P_{2'}$，以$P_1{}'$、$P_2{}'$、$P_3{}'$畫出正n邊形。

3°以L_1、L_2交點$P_1{}''$為旋轉中心，將L_1順旋轉$\frac{\pi}{n}$，交L_n於$P_{n-1''}$。

4°作$P_1{}''$、$P_{n-1}{}''$中垂線，交L_1於$P_2{}''$，以$P_1{}''$、$P_2{}''$、$P_{n-1}{}''$畫出正n邊形。

5°將$P_1{}'$、$P_1{}''$連起；$P_2{}'$、$P_2{}''$連起…$P_n{}'$、$P_n{}''$連起，每條連線分別為各頂點的動點軌跡。

我們利用軌跡為一直線、建立軌跡的方式，確認軌跡與直線的交點，把問題縮減成「當確認鑲接正n邊形其中一頂點P_1、在任意n邊形上，將其鑲接正n邊形求出」，於是我們提出作圖法。

利用定理二，我們證明已知四條兩兩相交於一點的相異直線圍成一四邊形，且可鑲接正四邊形，當P_1在L_1上任意移動時，M所形成之動點軌跡為一直線，因此我們利用M的動點軌跡為一直線的性質來找出鑲接正四邊形，而提出以下任意四邊形鑲接正四邊形的作圖法：

為了方便敘述，我們定義：$Ar(4)$為任意四邊形鑲接正四邊形。

(一)〈$\boldsymbol{Ar(4)}$**作圖法**〉：

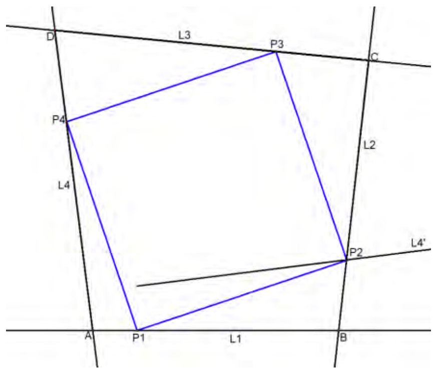
已知P_1為任意四邊形鑲接正n邊形的一頂點且其在任意四邊形的邊上(如圖 4-5)

1°以P_1為圓心，將L_4順時針旋轉90°，交L_2於P_2，連P_1、P_2

2°以P_1為圓心，將$\overline{P_1P_2}$逆時針旋轉90°，交L_4於P_4，連P_1、P_4

3°以P_4為圓心，將$\overline{P_1P_4}$逆時針旋轉90°，交L_3於P_3，連P_4、P_3

4°連P_3、P_2，則任意四邊形鑲接正四邊形$P_1P_2P_3P_4$即為所求



▲圖 4-5

在思考如何判斷 n 邊形是否含有鑲接正 n 邊形時，我們發現了任意四邊形，鑲接正四邊形的特殊性質，此性質也幫助我們快速的判斷任意n邊形是否含有正n邊形。

接下來推廣至$Ar(n)$：任意n邊形鑲接正n邊形，利用定理二，我們證明已知n條兩兩交於一點的相異直線，當P_1在L_1上任意移動時，$P_3, P_4 \cdots P_{n-2}, P_{n-1}$所形成之動點軌跡為一直線，因

此我們利用與$Ar(4)$相同的方法進行$Ar(n)$的作圖。

(二)〈 $\boldsymbol{Ar(n)}$**之作圖法**〉：

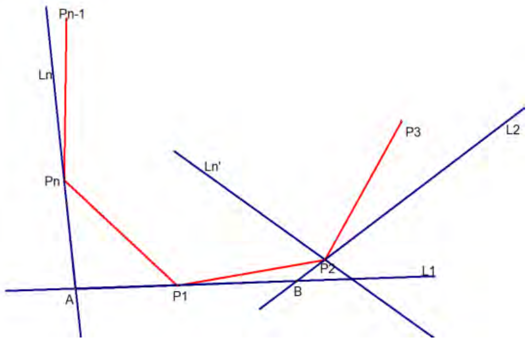
已知P_1為任意n邊形鑲接正n邊形的一頂點且在任意n邊形的邊上，令正n邊形之內角為θ(如下圖 4-6)

1°以P_1為圓心，將L_4順時針旋轉θ，交L_2於P_2

2°以P_1為圓心，將$\overline{P_1P_2}$逆時針旋轉θ，交L_4於P_4

3°以P_4為圓心，將$\overline{P_1P_4}$逆時針旋轉θ，交L_{n-1}於P_{n-1}

4°以此類推，則任意n邊形鑲接正n邊形$P_1P_2\cdots P_{n-1}P_n$即為所求，此作圖法與$Ar(4)$原理相同



▲圖 4-6

(三)研究完$Ar(4)$之作圖法後，接下來我們更深入討論$Ar(4)$解的情形：

給任三條不共點的四條相異直線，且可鑲接正四邊形，利用$Ar(4)$之作圖法確實可判斷三條不共點的四條相異直線是否可鑲接正四邊形，但尺規作圖過程多步驟，因此我們尋找更簡化的方法。P_1在L_1上任意移動時，P_3之動點軌跡與L_2交於K_1點，以A點為原點，L_1為x軸建立直角坐標系，**發現K_1座標與正四邊形之邊長有特殊關係，因此我們利用K_1點的特殊性質快速辨別四邊形是否含有鑲接正四邊形**，而提出定理五如下：

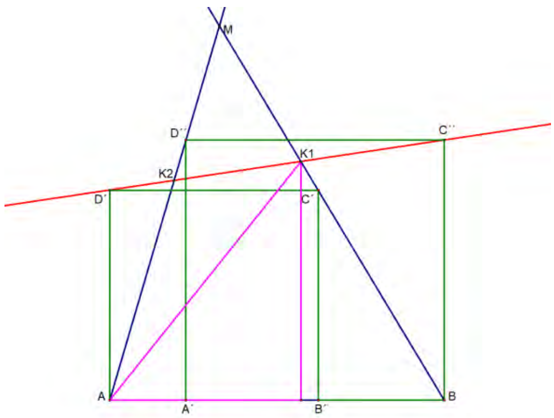
【定理五】

令P_3之動點軌跡交L_2於K_1點，正四邊形$AB'C'D'$與正四邊形$A'BC''D''$為「極值正方形」，若正四邊形$AB'C'D'$之邊長=h_1，正四邊形$A'BC''D''$之邊長=h_2(如下圖 4-7) 則$K_1(K_{1x},K_{1y})$與h_1、h_2之關係：$\frac{K_{1y}}{K_{1x}}=\frac{h_2}{h_1}$

pf：

1°令$\overline{GE}=a,\overline{EC'}=b,\overline{AF}=c,\overline{FB}=d\ ,\overline{GK_1}=g,$

$\overline{K_1H}=h,\overline{D'K_1}=i,\overline{K_1C''}=j$ (如右下圖 4-8)



▲圖 4-7

$2^{\circ}\because \Delta K_1GC' \cong \Delta K_1AB$，且$\overline{K_1F} \perp \overline{D'C'}$、$\overline{K_1F} \perp \overline{AB}$

$\therefore a : b = c : d \quad \because \Delta GK_1E \cong \Delta GHC'$

$\therefore a : b = g : h$

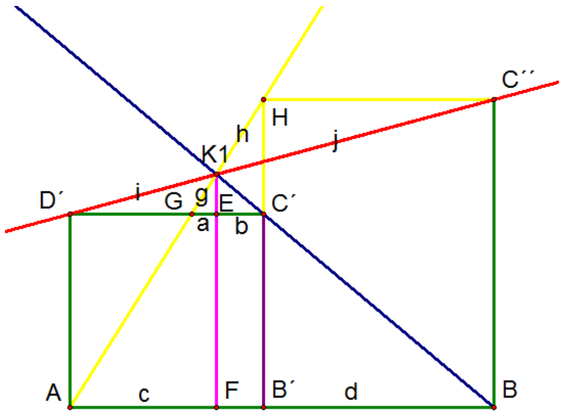
$3^{\circ}\because$平行線截等比例線段$\therefore c : d = i : j$

又$a : b = c : d \therefore a : b = c : d = i : j$

4°在$\Delta D'GK_1$、$\Delta C''HK_1$中

$\because g : h = i : j = (c-a) : (d-b)$

$\therefore \Delta DGT \sim \Delta FB_1T$($SSS$相似)，得證



▲圖 4-8

■

利用$\boxed{\text{定理五}}$討論任意四邊形鑲接正四邊形可成立之情況如下

任意四邊形鑲接正四邊形可成立之條件：

令$\overline{K_1A}$、$\overline{K_2A}$、$\overline{CA}$、$\overline{DA}$與L_1夾θ_1、θ_2、θ_3、θ_4(如右圖 4-9)

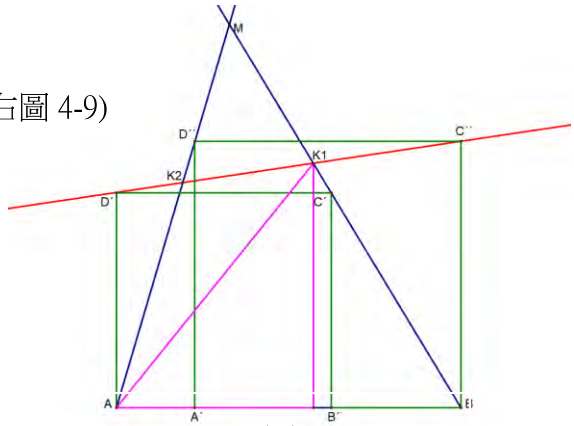
由L_3與軌跡之相交情形可做出結論：

(1) 若$(tan\theta_3 - tan\theta_1)(tan\theta_4 - tan\theta_2) < 0$

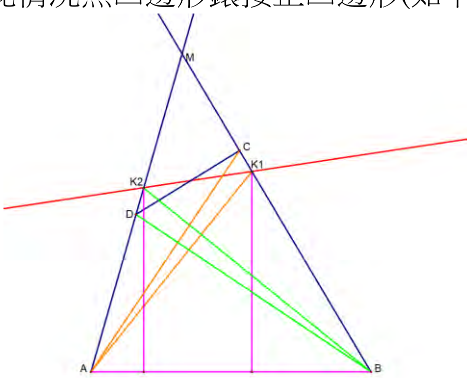
則此情況有四邊形鑲接正四邊形(如下圖 4-10)

(2) 若$(tan\theta_3 - tan\theta_1)(tan\theta_4 - tan\theta_2) > 0$

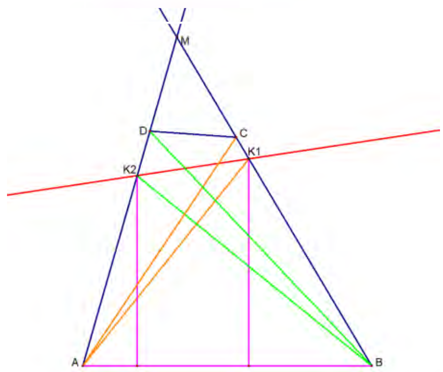
則此情況無四邊形鑲接正四邊形(如下圖 4-11)



▲圖 4-9



▲圖 4-10



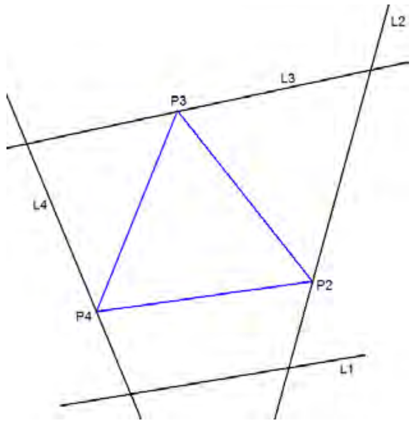
▲圖 4-11

教授告訴我們有關我們研究的一道數學難題***Inscribed square problem***：在一簡單封閉曲線上，做一正四邊形，使得各個頂點皆落在此簡單封閉曲線上。我們想利用我們的作圖方法來解決這個問題，但因為情況太過於困難，我們將其簡化至任意p邊形鑲接正四邊形。

五、任意p邊形鑲接正四邊形

完成任意n邊形鑲接正n邊形的研究後，我們試著推廣至任意p邊形鑲接正四邊形，先從任意p邊形鑲接正三角形著手研究。

現給定正三角形，將正三角形的每個頂點分別落在兩兩相交於一點的四條相異直線中的三條線上，我們將此圖形稱為四邊形鑲接正三角形(如右圖 5-1)



▲圖 5-1

而在研究過程中，我們遇到的問題是：若我們只旋轉原圖形，作出的鑲接正三角形其中 2 個頂點可能會都落在同一直線上的情況，不符合「鑲接」的定義，所以我們找到一個方式來確保我們可以快速地找到解。為了方便敘述，我們定義$Ar(p,3)$：任意 p邊形鑲接正三角形，以下為$Ar(p,3)$之作圖法。

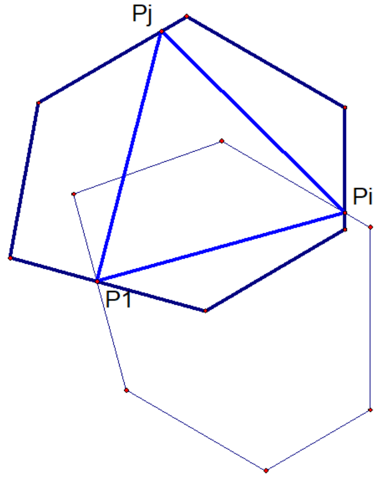
(一)〈 $Ar(p,3)$之作圖法〉：(如右圖 5-2)

在任意p邊形上任取一條邊，令它為L_1，在L_1上的任意一點P_1。

1°以P_1為圓心，將p邊形逆時針旋轉60°，其與原p邊形**至少交一個交點**，我們先取一點P_i

2°以P_1為圓心，以$\overline{P_1P_i}$為半徑，將P_i順時針旋轉60°，交L_j於P_j

3°連P_1、P_i、P_j，即為所求



▲圖 5-2

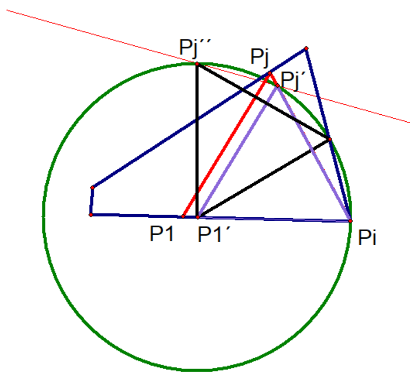
(二)$Ar(p,3)$解的情形：無限多組解

我們在作圖法中提到，將圖形旋轉後必定有一個交點，是因為若 2 個封閉圖形有交點，那必定含有 2 個以上的交點

若發生鑲接正三角形其中兩頂點落在直線上(如右圖 5-3)：

1°若經過步驟一與原本圖形只有一交點，且此交點與P_1在同一條直線上，經過步驟二、三以後，就會發生上述提到的問題，我們找到以下這個解決的方法

2°將△ $P_1P_iP_j$在L_1上平移，直至P_i與任意 p 邊形交點重合



3°取$\overline{P_1P_i}$上一點P_1'，以P_1'、P_i做一正三角形，第 3 個頂點令它為P_j'，P_j'在任意p邊形內

4°以P_1'為圓心，以$\overline{P_1'P_i}$為半徑，畫圓，交L_2於P_i''

▲圖 5-3

5°以P_1'為圓心，以$\overline{P_1'P_i''}$為半徑，將P_i''順時針旋轉60°，得一點P_j''，P_j''會在任意p邊形內

6°那因為P_1'、P_i''分別在正p邊形的內部與外部，將其連接後，必與任意p邊形其中一邊有交點，將其當作P_1點重複步驟 1～3，即為所求

接下來推廣至$Ar(p,4)$： p邊形鑲接正四邊形，為了解決與$Ar(p,3)$相同的問題，我們解決方法是運用與兩兩相交於一點的四條線鑲接正四邊形類似的手法，利用引理一及動點軌跡來做出鑲接正四邊形。

(三)〈 $Ar(p,4)$之作圖法〉：(如右圖 5-4)

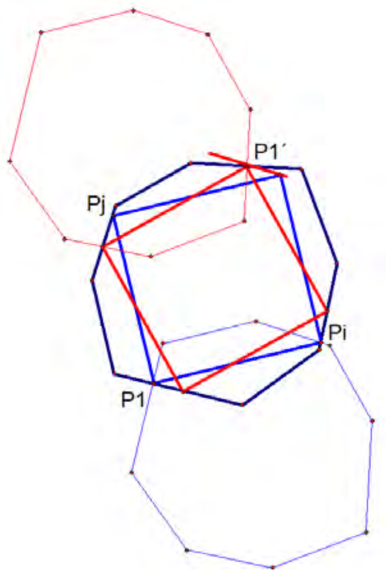
在任意p邊形上任取一條邊，令它為L_1，在L_1上的任意一點P_1

1°以P_1為圓心，將p條線所為出的p邊形逆時針旋轉90°，其與原p邊形**至少交一個交點**，我們先取一點P_i

2°以P_1為圓心，以$\overline{P_1P_i}$為半徑，將P_i順時針旋轉90°，交L_j於P_j

3°將L_1、L_i、L_j標示為三條相鄰直線，依〈建立軌跡作圖法〉建立軌跡，軌跡與直線之交點中取一點，將其令為第一頂點

4°依〈$Ar(4)$作圖法〉作圖的p邊形鑲接正四邊形即為所求



▲圖 5-4

(四) $Ar(p,4)$解的情形：

若在第三步驟取的點依第四步驟無法做出鑲接正四邊形，即此點不為p邊形鑲接正四邊形其中一頂點，則再取其他一交點，重複第 3～4 步驟；若在第三步驟中軌跡與直線之交點皆不是p邊形鑲接正四邊形其中一頂點，則在L_2上任意取一點P_2，重複 1～5 步驟，L_3、L_4、$L_5 \ldots L_p$以此類推。

伍、研究結果

我們完成了相異平行線鑲接正n邊形、從一點出發n條射線鑲接正n邊形、交於一點的n條直線鑲接正n邊形、任意n邊形鑲接正n邊形、任意p邊形鑲接正三、四邊形各個的作圖法，也求出各情況下鑲接正n邊形之解的情形，以下是各個情況的結論：

一、給定n條平行線：其解的狀況為：含有兩解或是無解。

二、給定n條射線：其解的狀況為：含有一解或無解。

三、給定n條交於一點的直線：其解的狀況為：含有兩解、四解、無解。

四、給定一任意n邊形：其解的狀況為：含有一解、無限多組解、無解。

五、給定一任意n邊形，鑲接正三角形：無限多組解。

陸、討論

一、在討論p邊形鑲接正四邊形之解的情形中，在L_1上任意取一點，利用我們的作圖法至多作$n-1$次，來確認p邊形含有多少鑲接正四邊形，確認完後，再在L_2上任意取一點，利用我們的作圖法至多作$n-2$次，來確認p邊形含有多少鑲接正四邊形，因為已經使用過的三邊不必再次討論，因此以作圖法作到後來，檢查的次數會持續減少，以此類推，因此以我們作圖法討論p邊形鑲接正四邊形之解的情形最大上限會作$\frac{n(n-1)}{2}$次，我們希望之後能想出應對作圖法，能快速作出p邊形鑲接正四邊形以及有效討論解的情況。

二、利用以$\boxed{\text{引理一}}$為核心的作圖法，我們可以作出簡單封閉曲線鑲接正三角形以及其解的情形為無限多組解，而在未來，我們希望繼續延伸至簡單封閉曲線鑲接正四邊形，找出應對的作圖法以及討論解的情況。

柒、結論

我們利用$\boxed{\text{引理一}}$為工具，分析平行線的情況找到了相鄰三頂點的位置，找出了平行線的作圖法；再延伸到n條直線交於一點，但因圖形過於複雜，我們先討論射線情況，遇到了頂點順序會改變的困難，我們利用正n邊形含有外接圓的性質找出新的作圖方法解決困難，也找出n條直線交於一點的作圖方法；而我們再推廣至任意n邊形鑲接的正n邊形的情況，而研究的過程中，我們無法確定P_1，我們利用動點軌跡來解決困難；之後為了解決$\boldsymbol{Inscribed\ square\ problem}$，我們先將其簡化至任意$p$邊形鑲接正三、四邊形，然而鑲接正三角形、鑲接正四邊形其中 2 個頂點可能會都落在同一直線上的情況，不符合「鑲接」的定義，最後我們也成功找出新的作圖方法解決困難。另外我們也討論出以上各個條件下鑲接正n邊形的解的情形。

捌、參考資料與其他

一、範端喜、鄧博文(2012)。*平面幾何*。上海：華東師範大學出版社

二、凸四邊形內接正四邊形(校內科展作品)

三、游森棚(2011)。*普通高級中學數學第三冊*。新北市：翰林出版社

四、科展第 38 屆「平行線問題之研究推廣」

五、西元 2012 年國際科展「過平面上n定點作正n邊形問題與其對偶命題」

【評語】050412

1. 本作品主要探討如何找 n 條平行線上所鑲接的正 n 邊形，並推廣至交於一點的 n 條射線、n 條直線上的鑲接正 n 邊形，再推廣至 p 邊形鑲接的正四邊形的情況，能應用本研究發展出解題技巧來解決 *Inscribed square problem* 的特殊情形。

2. 前 12 頁的內容與結論與第 38 屆的作品差異不大，但處理手法不同。

3. 能否從給定的直線所包含的參數(如直線間的夾角)就判斷解數？

4. 若給定正多邊形，可以畫出很多組平行線、很多組交一點的射線組，平行線之間的關係與交一點的射線組間，是否也有關係？跟本作品的相關性又為何？

5. 就某種程度來說，正 n 邊形的限制實在很強，作品內容大部分討論的這些線都是平行線，或共點的特殊情形，相對在討論上簡單許多。

6. 在使用引理一時，都沒有看到作者仔細檢查各條線之間的夾角，比較像在做特例。

7. 引理二所謂相對順序，並未嚴格定義。事實上，當限制旋轉角夠小時，當然投影順序不會改變。超過時，可以旋轉鏡射是在幹什麼呢？

8. 有列參考文獻，但未說明與本作品有何相關。

作品海報

摘要

本文探討如何尋找n條平行線上所鑲接的正n邊形，並推廣至交於一點的n條射線、n條直線上的鑲接正n邊形，因為鑲接的正n邊形的頂點並非依序出現在直線上，所以我們也探討這些頂點與直線的順序關係，來定出鑲接的正n邊形的位置，並且討論所有可能的鑲接的正n邊形的解情況。再推廣至p邊形鑲接的正四邊形的情況，並應用我們這些技巧來解決部分***Inscribed square problem***。

研究動機

在做練習題時，我們做到一題目：給定三條相異之平行線，作一正三角形，使其三頂點分別落在三條平行線上。看到此題目，我們想試著將條件推廣至n條相異平行線，如何利用**幾何方法**確實的作出鑲接正n邊形。當完成研究後，我們又將當n條平行線的條件推廣至n條線交於一點的情況，來進行研究如何尋找鑲接正n邊形，再推廣至n邊形來進行研究。獨立完成研究後，教授告訴我們在科展第38屆「平行線問題之研究推廣」及在西元2012年國際科展 「過平面上n定點作正n邊形問題與其對偶命題」有跟我們命題相似的研究，因為關鍵字不同的緣故，我們在研究過程中並沒發現這兩篇。比較後我們將相同的地方刪除，留下我們新的成果，希望我們的研究能讓此命題更加完備。

最後，我們從教授那裡得知有百年問題***Inscribed square problem***，我們希望應用前面研究出的一些性質來解決一些***Inscribed square problem***的特殊情況。

研究目的

一、 n條平行線鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形

二、 n條從一點出發的相異射線鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形

三、 n條交於一點的相異直線鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形

四、任意n邊形鑲接正n邊形作圖法

五、p邊形鑲接正三、四邊形作圖法及討論解的情形

研究過程及方法

定義：

n邊形	本研究所討論的n邊形為凸n邊形	$Ra(n)$	n條從一點出發的相異射線鑲接正n邊形
鑲接	每條線上僅含有一個正n邊形之頂點	$Co(n)$	n條共點的相異直線鑲接正n邊形
$Pl(n)$	n條平行線鑲接正n邊形	$Ar(n)$	正n邊形鑲接在n邊形之邊上
$Ar(p,n)$	任意p邊形鑲接正n邊形		

一、 n條相異平行線鑲接正n邊形

問題：如何確定鑲接正n邊形邊長大小，以及各頂點在平行線上的位置呢？我們以$Pl(4)$為例，並提出引理一來解決問題！

(一) $Pl(4)$作圖法------- ▲定義：$Pl(4)$為四條平行線鑲接正四邊形

【引理一】

(1)平面上有相異三條線L_1、L_2、L_3，在L_1上找一點P_1，給定角θ（$-\pi<\theta<\pi$且θ不為L_2往L_3方向之夾角），則可以在L_2、L_3分別找一點P_2、P_3，使$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1P_3}$，且$\angle P_2P_1P_3=\theta$。

(2)承上(1)，**若固定P_1、θ，且P_1到L_2、L_3的距離不相等，則P_2、P_3為唯一解**。

pf：

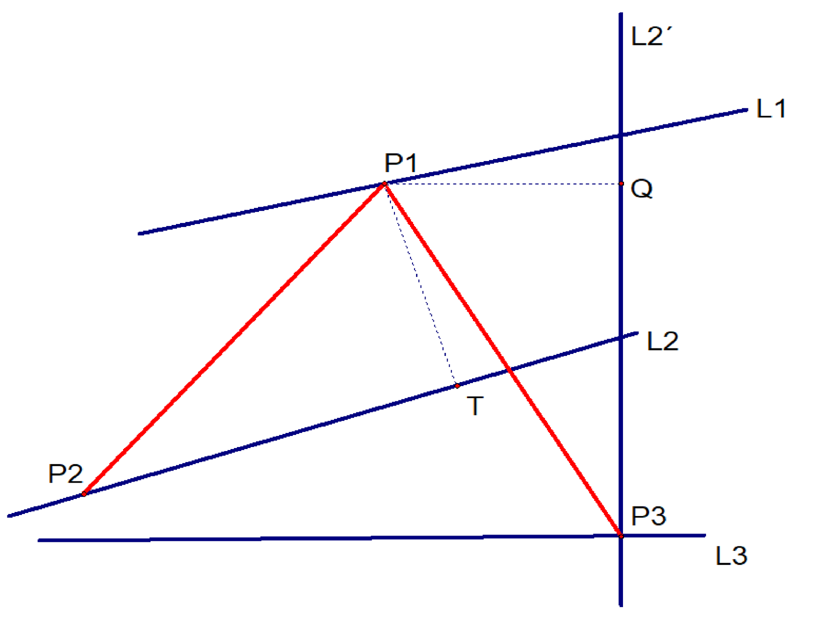
〈作圖法〉：以P_1為旋轉中心，將L_2旋轉θ成L_2'(如右圖1)，此時L_2'交L_3於P_3點，以P_1為旋轉中心，將$\overleftrightarrow{P_1P_3}$旋轉$-\theta$，交$L_2$於$P_2$點即為所求。

1°過P_1作L_2的垂線，交於T點，以P_1為旋轉中心，將L_2和T點逆時針旋轉θ成L_2'和點Q，此時L_2'交L_3於P_3點，以P_1為旋轉中心，將$\overleftrightarrow{P_1P_3}$順時針旋轉$\theta$，交$L_2$於$K$點

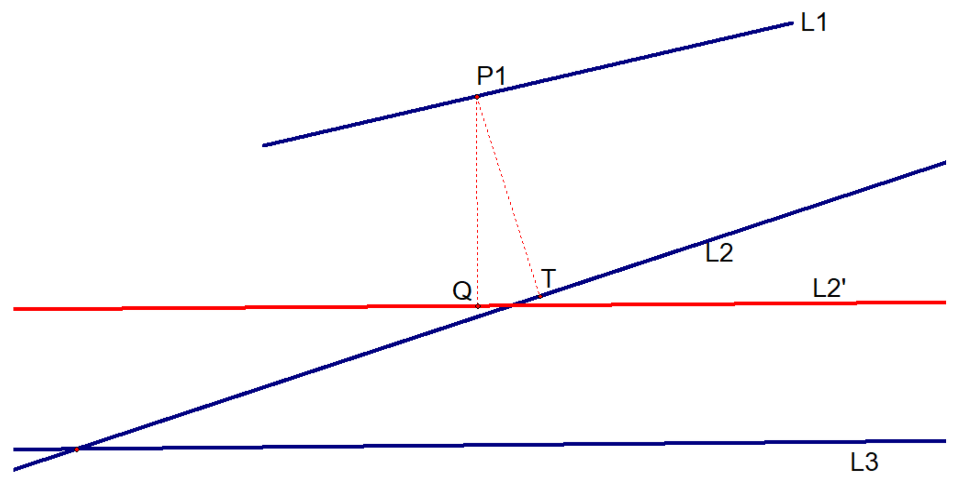
$2^\circ\begin{cases}\angle P_1TK=\angle P_1QP_3=90^\circ\\ \overline{P_1T}=\overline{P_1Q}\\ \angle KP_1T=\angle P_3P_1Q=\theta-\angle P_3P_1T\end{cases}$ $\therefore\triangle KP_1T\cong\triangle P_3P_1Q(SAS全等)\rightarrow\overline{P_1K}=\overline{P_1P_3}$

$\rightarrow K$為我們所要的P_2

3°以L_2向L_3度量(逆時針為正，順時針為負)，若旋轉θ為L_2、L_3之銳交角，則L_2'與L_3平行，作不出P_2、P_3，故θ不為L_2往L_3方向之夾角(如右圖1-1)。



▲圖1



▲圖1-1

有引理一為作圖工具，我們可得作圖流程如下

《***Pl*(4)作圖流程**》(如右圖1-2)：

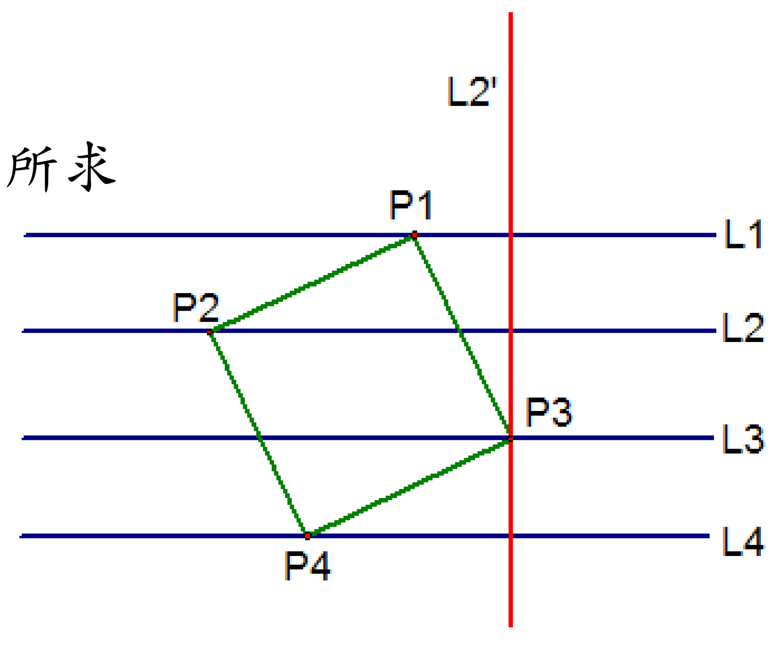
已知四條平行線L_1、L_2、L_3、L_4，且可鑲接正四邊形，L_1上的任意一點P_1（此P_1為正四邊形之其中一頂點）

1°以P_1為旋轉中心，依【引理一】可得P_2 、P_3，且使$\angle P_2P_1P_3=90^\circ$

2°以P_2為旋轉中心，以$\overline{P_1P_2}$為半徑，順時針旋轉90°，交L_4於P_4點，正四邊形$P_1P_2P_3P_4$即為所求

(二)$Pl(4)$解的情形：

無解或是2個解，以作圖法確認是否有解，若畫的出必定含有2個解，若畫不出，必定無解。

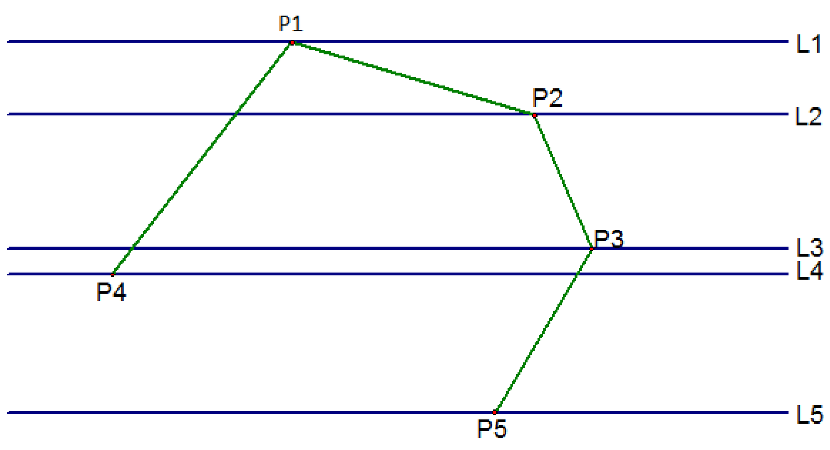


▲圖1-2

（三）$Pl(n)$ 作圖法

問題：當平行線數量變多時，我們無法明確知道P_1的相鄰頂點落在哪兩條直線上？

例如：P_1 的相鄰頂點可能落在L_2、L_4上(如右圖1-3)，因此我們提出引理二及引理三來解決問題!



▲圖1-3

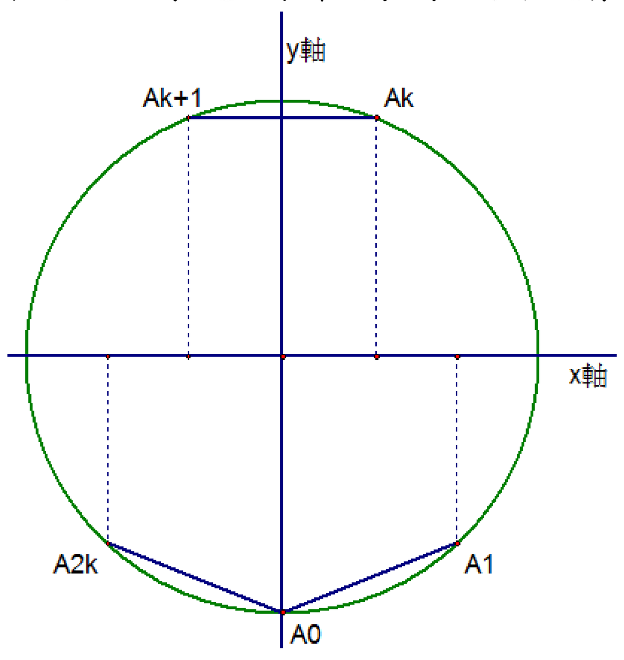
我們讓正n邊形內接在以原點為圓心之單位圓上，並將正n邊形之頂點依序編號，再將此正n邊形的頂點投影在x軸上。**發現若將圖形旋轉逆時針或順時針旋轉θ ($0<\theta<\frac{\pi}{2n}$)，則x軸上的投影點相對順序不會改變，再將之對應到平行線的相關位置。**

【引理二】

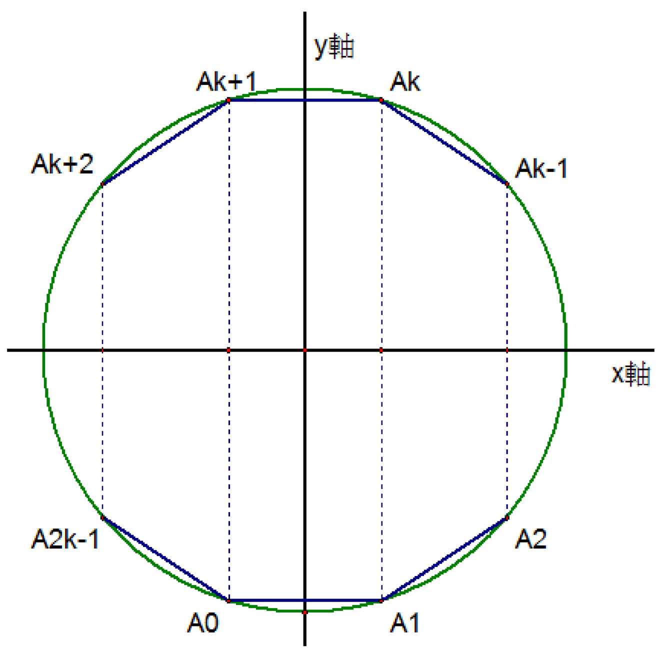
若$n=2k+1$ ($k\in N$且$k\geq 2$)，以原點為圓心，將正n邊形(如右圖1-4)逆時針或順時針旋轉θ ($0<\theta<\frac{\pi}{2n}$)，則x軸上的投影點相對順序不會改變

【引理三】

若$n=2k$ ($k\in N$且$k\geq 2$)，以原點為圓心，將正n邊形(如右圖1-5)逆時針或順時針旋轉θ ($0<\theta<\frac{\pi}{n}$)，則x軸上投影點相對順序不會改變



▲圖1-4



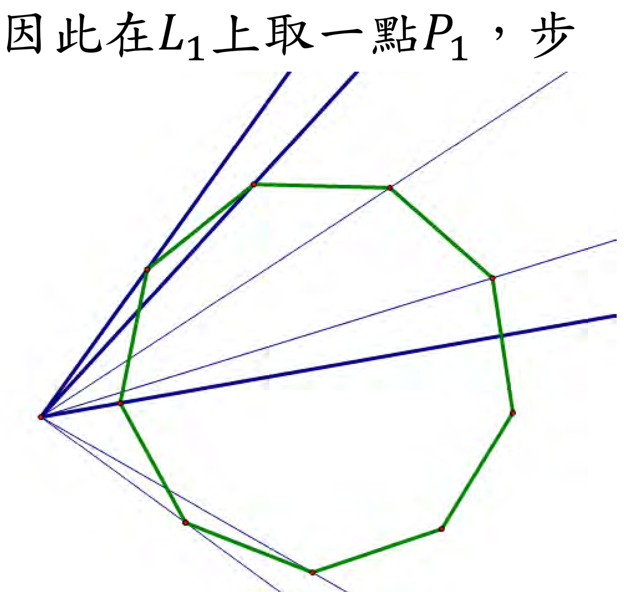
▲圖1-5

《$Pl(n)$作圖流程》&《 $Pl(n)$解的情形》：

由引理二、引理三，我們得出結論，**當落在單位圓上的正n邊形旋轉任意角度，分別在x軸上最右側之三點序號和最左側的三點序號必為連續正整數**，因此我們利用此結論來說明**當n條平行線鑲接正n邊形時，P_1、P_2、P_3和P_{n-2}、P_{n-1}、P_n必為相鄰頂點**。因此在L_1上取一點P_1，步驟同$Pl(4)$作圖法可得鑲接正n邊形，其解的狀況亦為無解或是2個解。

二、從一點出發n條射線

問題：無法確定與L_1上點P_1相鄰的兩點究竟在哪兩條線上(如圖2)，因此我們找到特殊的M點及引理五來解決問題!


▲圖2

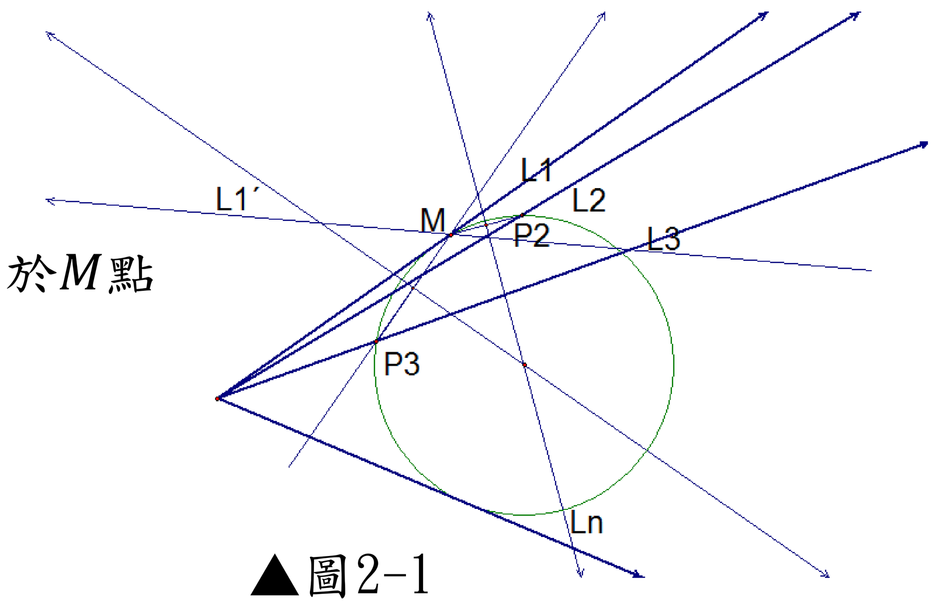
（一）$Ra(n)$ 作圖法 ------- ▲定義：$Ra(n)$：n條從一點出發的相異射線鑲接正n邊形

【引理四】 已知L_2上一點P_2、L_1上一點P_1、一點L_2上、一點P_3，且P_1、P_2、P_3為正n邊形其中相鄰三點，夾角為正n邊形內角θ，以P_2為旋轉中心，將L_1旋轉θ交L_1於M點，**則P_1、P_2、P_3、M四點共圓**

【引理五】 已知 L_1、L_2 ...、L_{n-1}、L_n 相異直線交於一點，設此n條線可鑲接正n邊形，**則 L_1、L_2和L_{n-1}、L_n 上的點必為正n邊形上相鄰的頂點**。(定義：L_1 為圖形最上方之射線，往下依序為 L_2...、L_{n-1}、L_n)

《$Ra(n)$作圖流程》：

已知n條線交於一點分別為 L_1、L_2 ...、L_{n-1}、L_n，並含有接正n邊形在L_2上取一點 P_2(如右圖2-1)



▲圖2-1

1°我們發現【引理五】此性質，所以我們可以在L_2上取P_2，並當作旋轉中心，逆時針L_1旋轉 $\frac{(n-2)\pi}{n}$，交L_1於M點

2°利用【引理四】共圓的性質，以及圓周角，可得在 L_3上的兩點 P_3、P_3'

3°連接 P_2、M以及P_3、M並作 $\overline{P_2M}$、$\overline{P_3M}$ 中垂線，得一圓心 O（為正n邊形外接圓圓心）;

連接P_2、M以及P_3'、M並作$\overline{P_2M}$、$\overline{P_3'M}$中垂線，得一圓心 O′（為正n邊形外接圓圓心）

4°以 O 為圓心，將 P_2 逆時針旋轉$n-1$次，分別交於L_1、L_3 ...、L_{n-1}、L_n於P_1、P_3 ...、P_{n-1}、P_n，則P_1、P_3 ...、P_{n-1}、P_n所形成的正n邊形即為所求；若無法交於L_1、L_3 ...、L_{n-1}、L_n，以O'為圓心，將P_2逆時針旋轉$n-1$次，分別交於L_1、L_3 ...、L_{n-1}、L_n於 $P_1{}'$、$P_3{}'$ ...、$P_{n-1}{}'$、$P_n{}'$，則 $P_1{}'$、$P_3{}'$ ...、$P_{n-1}{}'$、$P_n{}'$所形成的正n邊形即為所求

5°若以上2種無法畫出，則以第一步驟順時針旋轉(為不同側的圖形)，並重複2、3、4步驟，順逆時針均相反，即可求出

（二）$Ra(n)$解的情形

【定理一】

若n條從一點出發的相異射線可鑲接正n邊形，則只含有一解(相對應的每個邊互相平行視為同一種)

$Ra(n)$解的情形：若交點落在圓外，則僅有一解或是無解；若交點落於圓內、圓上、圓心，解的狀況分述如下：

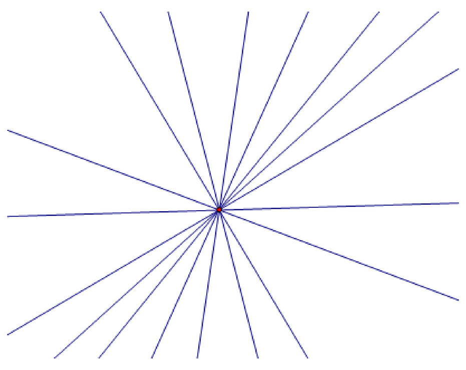
圓內：一解或是無解；圓上：僅含有一解；圓心：僅有一解。

三、n條直線交於一點

問題：若n條直線，除去鑲接正n邊形，我們會分不清楚上下左右，無法確認哪一條線為L_1，因此以探討直線間夾角大小來解決問題，說明如下

（一）$Co(n)$作圖法---- ▲定義：$Co(n)$為n條直線交於一點

真線/假線：將直線以交點分割成兩個射線，包含鑲接正n邊形頂點令為真線，不包含令為假線。

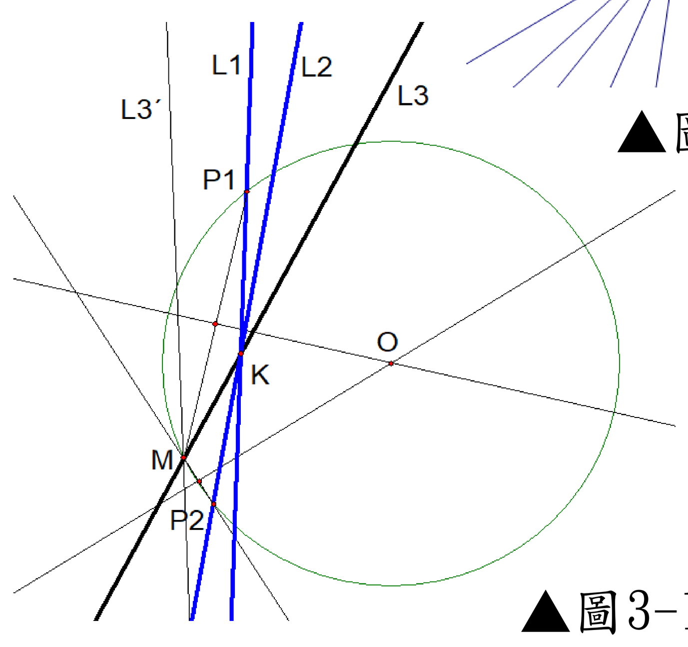

▲圖3

【引理六】 已知圓內一點K，並將圓上之正n邊連線，若任2條線夾角小於$\frac{\pi}{n}$，則2條線必有一條為真線，另一條為假線

《$Co(n)$作圖流程》：

Case 1：若交點在圓外，以射線的作圖法討論。

Case 2：交點位於圓內：



▲圖3-1

1°由【引理六】可知n條直線交於一點K，含有鑲接正n邊形，我們可以找出3條相鄰直線L_1、L_2、L_3，其中相鄰2直線，別為L_1、L_2，且符合夾角小於$\frac{\pi}{n}$(如圖3-1)

2°在L_1上任選一點P_1，以 P_1為旋轉中心，將L_3順時針旋轉$\frac{(n-2)\pi}{n}$得$L_3{}'$交L_3於M點。

3°以M為逆時針中心旋轉L_3 $\frac{\pi}{n}$交L_2於P_2，連接P_1、M以及P_2、M並作$\overline{P_1M}$、$\overline{P_2M}$中垂線，得一圓心O（為正n邊形外接圓心）。

4°仿造$Ra(n)$的做圖法即可作出鑲接正n邊形。

（二）$Co(n)$解的情形

$Co(n)$解的情形：若交點落在圓外：含有2解或是無解；若交點落在圓內：含有2解或是無解，

若交點落在圓心、圓上會為同一圖形，含有4解(同時擁有交點在圓內、圓外的4種解)。

四、任意n邊形鑲接正n邊形

問題：我們無法確定鑲接正n邊形邊長的大小及頂點的位置，因此提出引理七及定理四來解決問題！

(一) $Ar(4)$作圖法 ----- ▲定義：$Ar(4)$為任意四邊形鑲接正四邊形

【引理七】 已知L_1、L_2為兩不平行之直線，相交於M，令P_1、R_1分別為L_1、L_2之一點，以R_1為圓心，$\overline{P_1R_1}$為旋轉半徑，逆時針旋轉θ，得Y_1點，以R_2為圓心，$\overline{P_2R_2}$為旋轉半徑，逆時針旋轉θ得Y_2，則M、Y_1、Y_2共線。

【定理二】 考慮$Ar(n)$，已知三條相異直線L_1、L_2、L_n兩兩相交於一點圍成一n邊形的相鄰三邊，P_1在L_1上、P_2在L_2上P_n在L_n上滿足P_1當$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1P_n}$，**當$P_1$在$L_1$上任意移動時，$P_3$、$P_4\cdots P_{n-2}$、$P_{n-1}$之動點軌跡也為一直線。**

依【定理二】，得知動點軌跡為一直線，而動點軌跡如何用尺規作圖畫出呢？**我們提出〈建立軌跡**

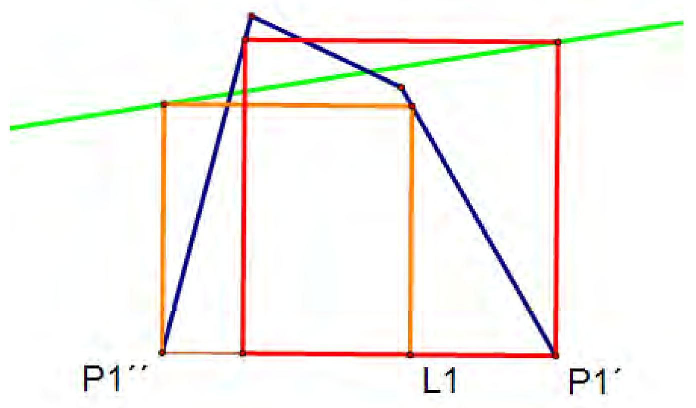
1°以L_1、L_n交點$P_1{}'$為旋轉中心，將L_1逆旋轉$\frac{\pi}{n}$，交L_2於$P_3{}'$。

2°作$P_1{}'$、$P_3{}'$中垂線，交L_1於$P_{2'}$，以$P_1{}'$、$P_2{}'$、$P_3{}'$畫出正n邊形。

3°以L_1、L_2交點$P_1{}''$為旋轉中心，將L_1順旋轉$\frac{\pi}{n}$，交L_n於$P_{n-1}{}''$。

4°作$P_1{}''$、$P_{n-1}{}''$中垂線，交L_1於$P_2{}''$，以$P_1{}''$、$P_2{}''$、$P_{n-1}{}''$畫出正n邊形。

5°將$P_1{}'$、$P_1{}''$連起；$P_2{}'$、$P_2{}''$連起…$P_n{}'$、$P_n{}''$連起，每條連線分別為各頂點的動點軌跡。



▲圖4

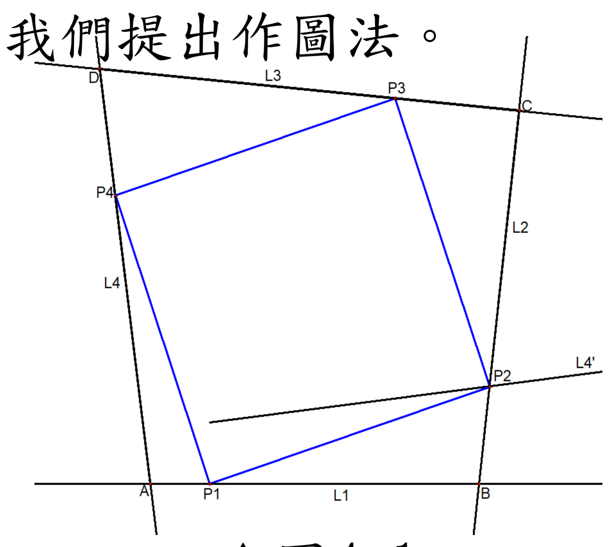
我們利用【定理二】：軌跡為一直線及找出了〈建立軌跡的方式〉，確認軌跡與直線的交點，我們將其令為P_1，因此可把問題縮減成「當確認鑲接正n邊形其中一頂點P_1，在任意n邊形上，將其鑲接正n邊形求出」，於是我們提出作圖法。

《$Ar(4)$作圖流程》：(如右圖4-1)

已知任意四邊形含有鑲接正四邊形P_1，P_1為任意四邊形內接正四邊形L_1上之一點

1°以P_1為旋轉中心，依【引理一】可得P_2、P_4，且使$\angle P_2P_1P_4=90^{\circ}$

2°以P_4為圓心，將$\overline{P_1P_4}$逆時針旋轉90°，交L_3於P_3，則任意四邊形鑲接正四邊形$P_1P_2P_3P_4$即為所求



▲圖4-1

(二) $Ar(4)$解的情形：無解、一解、無限多組解

(三) $Ar(n)$作圖流程與解的情形與$Ar(4)$相同

應用：*Inscribed square problem*

一、任意p邊形鑲接正三邊形

問題：若以旋轉方式作圖，作出的鑲接正三角形其中2個頂點可能會都落在同一直線上的情況，不符合「鑲接」的定義，所以我們找到一個方式來確保我們可以快速地找到解。

《$Ar(p,3)$作圖流程》：---- ▲定義：$Ar(p,3)$：任意p邊形鑲接正三角形

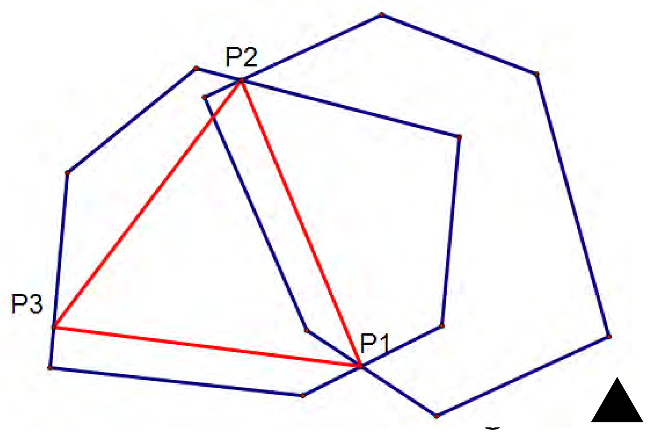
1°尋找此p邊形之**最小邊**上任一取一點P_1

2°以P_1為中心旋轉此任意多邊形順時針旋轉60°，其與原p邊形至少交一個交點，

我們隨意取一點P_2，利用【引理一】可得P_3點，連P_1、P_2、P_3，即為所求

3°若P_2、P_3在同一直線上，則以以P_1為中心旋轉此p邊形逆時針旋轉60°，其與原p邊形至

我們隨意取除P_3外的一點$P_2{}'$，利用【引理一】可得$P_3{}'$點，連P_1、$P_2{}'$、$P_3{}'$，即為所求



▲圖5

二、任意p邊形鑲接正四邊形

問題：我們發現，當為任意p邊形時，**鑲接正四邊形的頂點軌跡非為單純的直線，而為折線**，那要如何找到其軌跡呢?

(一)軌跡折點的產生：因**三條邊決定一動點軌跡**，當動點P_1在第一邊上移動時，P_2或P_4會移動至另一邊的緣故，共有兩狀況。

(二)**《$Ar(p,4)$作圖流程》**---- ▲定義：$Ar(p,4)$：p邊形鑲接正四邊形

在任意p邊形上任取一條邊，在$\overline{AB}$上的任意一點P_1，

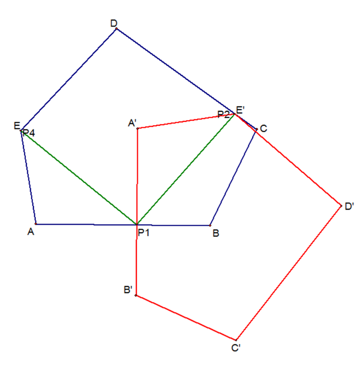
令P_i為：若發生$Case$ 1(如右圖5-1)，則P_i為順時針旋轉後p邊形的邊碰到原p邊形的**頂點**；若發生$Case$ 2 (如右圖5-2) ，則P_i為順時針旋轉後p邊形的**頂點**碰到原p邊形的邊。

1°分別以A、B為圓心，將任意p邊形順時針旋轉90°，若在起始圖形和最終圖形發生$Case$ 1、$Case$ 2情形，則利用平移手法可分別得到各情況P_1點的位置

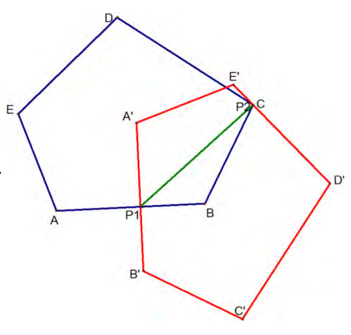
2°以P_i為圓心，以$\overline{P_1P_i}$為半徑，將P_1順時針旋轉90°，即為折點。

3°將**相鄰折點**依序連起，利用所形成得折線與原p邊形之交點令為第一頂點。

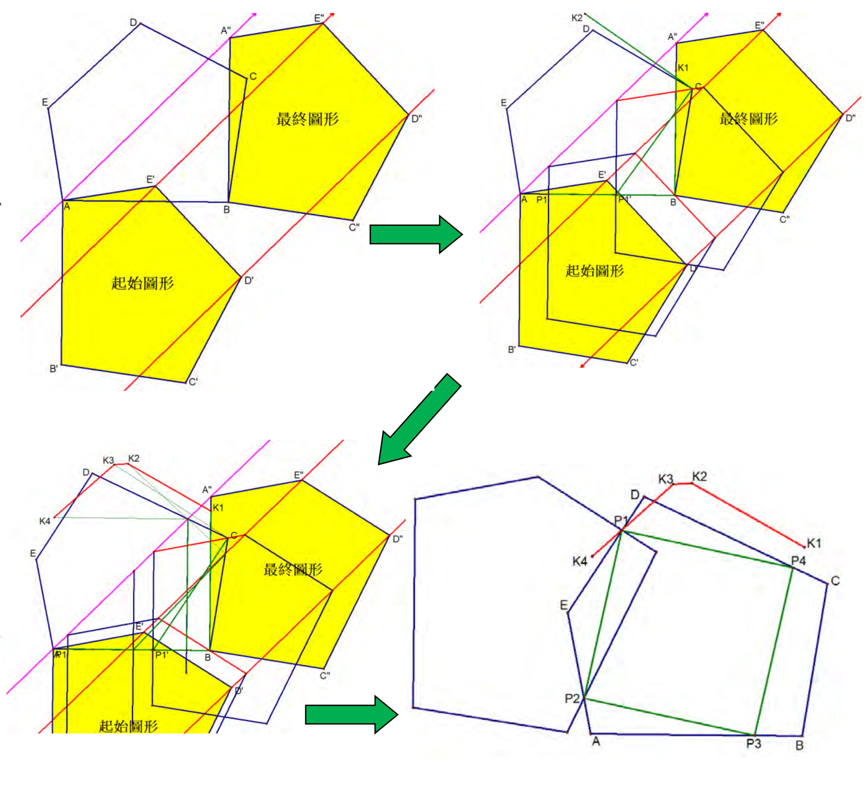
4°依〈$Ar(4)$作圖法〉作圖的p邊形鑲接正四邊形即為所求。



▲圖5-1



▲圖5-2



▲圖5-3 $Ar(p,4)$作圖流程

討論

$Ar(p,3)$以及$Ar(p,4)$的討論方法在凹多邊形會失效，而在未來，我們希望繼續延伸至凹多邊形，甚至簡單封閉曲線鑲接正四邊形，找出應對的作圖法以及討論解的情況。

結論

我們利用引理一為工具，分析平行線的情況找到了相鄰三頂點的位置，找出了平行線的作圖法；再延伸到n條直線交於一點，但因圖形過於複雜，我們先討論射線情況，遇到了頂點順序會改變的困難，我們利用正n邊形含有外接圓的性質找出新的作圖方法解決困難，也找出n條直線交於一點的作圖方法；而我們再推廣至任意n邊形鑲接的正n邊形的情況，而研究的過程中，我們無法確定P_1，我們利用動點軌跡來解決困難；之後為了解決***Inscribed square problem***，我們先將其簡化至任意p邊形鑲接正三、四邊形，然而鑲接正三角形、鑲接正四邊形其中2個頂點可能會都落在同一直線上的情況，不符合「鑲接」的定義，最後我們也成功找出新的作圖方法解決困難。另外我們也討論出以上各個條件下鑲接正n邊形的解的情形。

參考資料與其他

一、平面幾何 范端喜、鄧博文編著(華東師範大學出版社) 二、游森棚(2011)。*普通高級中學數學第三冊*。新北市：翰林出版社

三、科展第38屆「平行線問題之研究推廣」 四、西元2012年國際科展「過平面上n定點作正n邊形問題與其對偶命題」