中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050411

五「心」鏡射奇「跡」—三角形共線點對稱角平分線與中垂線等之共線性研究

學校名稱：國立新竹高級中學

作者：	指導老師：
高二 李至傑 高二 胡項淵	江青山

關鍵詞：三點共線、斜角坐標、對稱

摘要

取一條直線 L ，交 ΔABC 三邊或邊之延長線於三點，再將此三點依序對角平分線以及中垂線等，分別作對稱後，所得三點會有何性質呢?

我們借助數學軟體 Gsp 以及 Geogebra 進行數學實驗與觀察，並由斜角坐標的觀點，利用向量的手法研究與證明，得到以下一些重要的結果：

關於三角形的五心，我們解決了 ΔABC 三邊或邊之延長線上三點，分別對稱五心連線後，所得三點共線的參數條件解，並對共線性質做了一些探討，發現一些軌跡直線的包絡線，與二次曲線間的關聯，以及這些曲線與給定三角形的一些特別的連結。

此外，我們也就此研究問題，解決除了三角形五心之外的其它心的共線解，求出其與某類特定三次方程式間的關聯，並試圖尋找具有特別性質的未知新心。

壹、研究動機

我們在尋找題目時，在國外的一個專門利用電腦來發現並解決數學問題的期刊網站：International Journal of Computer Discovered Mathematics 上，看到一篇關於三角形中一條直線對角平分線對稱後共線性的研究。

雖然我們對這篇論文所提出的結果很有興趣，但我們發現文中使用的手法並不是我們熟悉的方法，且結論也沒有詳盡的計算過程，讓我們不禁好奇：有甚麼我們可以掌握的方法可以解決同樣的問題呢？加上其探討的僅有內心，因此我們開始思考是否可將類似問題延伸推廣至其它情形呢？

於是我們展開，並完成了此篇科展研究。

貳、研究目的

任取一條直線 L ，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點，再將此三點依序對

一、ΔABC 的內心與三頂點 A 、 B 、 C 的連線
二、ΔABC 的三中垂線
三、ΔABC 的三中線
四、ΔABC 的三高
五、ΔABC 的旁心與三頂點 A 、 B 、 C 的連線
六、一定點 X (稱 X*Heart*)與三頂點 A 、 B 、 C 的連線

分別作對稱後，研究：

(一)、對稱所得三點共線的條件為何？

(二)、共線性質與軌跡直線包絡之圖形探討。

參、研究設備及器材

紙筆及其餘文書用具、軟體 Geogebra(GGB)、軟體 GSP、電腦

肆、研究過程與方法

一、選定斜角坐標系統

給定ΔABC，考慮兩向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$，以$\overrightarrow{e_1}$表示$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{e_2}$表示$\overrightarrow{AC}$，則對平面上之任意一點P，存在唯一實數x,y，使得$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$。我們稱數對$<x,y>$為點$P$相對於斜角坐標系$<\mathrm{A};\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}>$的坐標，並以$P<x,y>$記之。

二、求出$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{BQ}$、$\overrightarrow{CR}$以$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{AC}$為基底向量之線性組合表達式

設ΔABC中，$R,\ Q$分別在直線$\overleftrightarrow{AB},\ \overleftrightarrow{AC}$上，$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$

令$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AB}=<s,0>$　$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AC}=<0,t>$　$s,t\neq 0$，由孟氏定理，可求得

$$\overrightarrow{AP}=\frac{-s(1-t)}{t-s}\overrightarrow{AB}+\frac{t(1-s)}{t-s}\overrightarrow{AC}=\left\langle\frac{-s(1-t)}{t-s},\frac{t(1-s)}{t-s}\right\rangle\text{，}\overrightarrow{BQ}=\langle -1,t\rangle\text{，}\overrightarrow{CR}=\langle s,-1\rangle$$

三、推導出一向量對一直線的對稱向量，可得

公式一：在斜角坐標系$<\mathrm{A};\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}>$下，向量$<u,v>$對稱$<x,y>$之對稱向量$<u',v'>$為

$$\left\langle\frac{\left(x^2c^2-y^2b^2\right)u+\left[2yb^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)x\right]xv}{x^2c^2+y^2b^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)xy},\frac{\left(y^2b^2-x^2c^2\right)v+\left[2xc^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)y\right]yu}{x^2c^2+y^2b^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)xy}\right\rangle$$

四、求出直角坐標系與斜角坐標系的變換公式

在直角坐標系的ΔABC中，設$A(0,0),\ B(c,0),\ C(X_c,Y_c)$，則$\overrightarrow{AB}=(\mathrm{c},0)$、$\overrightarrow{AC}=(X_c,Y_c)$，其中$X_c=b\cos A$，$Y_c=b\sin A$。我們令斜角坐標系為$\langle x',y'\rangle$、直角坐標為$(x,y)$，由解聯立

$\begin{cases}x=cx'+X_cy'\\ y=Y_cy'\end{cases}$，可得 **公式二：斜角坐標對直角坐標的變換公式** $x'=\dfrac{x}{c}-\dfrac{X_cy}{cY_c},y'=\dfrac{y}{Y_c}$

伍、研究成果

一、任取一條直線 L_1，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點，再將此三點依序對內角平分線 $\overleftrightarrow{AI},\overleftrightarrow{BI},\overleftrightarrow{CI}$ 分別作對稱後，得 P_I、Q_I、R_I 三點。

(一) 求出 $\overrightarrow{AQ_I}$、$\overrightarrow{AR_I}$、$\overrightarrow{AP_I}$ 以 $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{AC}$ 為基底向量之線性組合表達式

1. 以 $\overrightarrow{AI}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ 為對稱軸向量，對 $\overrightarrow{AP}=\left\langle \dfrac{-s(1-t)}{t-s},\dfrac{t(1-s)}{t-s}\right\rangle$ 作對稱。

令 $x=\dfrac{b}{a+b+c},y=\dfrac{c}{a+b+c}$ ，以及 $u=\dfrac{-s(1-t)}{t-s},v=\dfrac{t(1-s)}{t-s}$ 分別代入**公式一**，得

$$u'=\frac{b\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}{c\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}v=\frac{b}{c}v=\frac{b}{c}\left[\frac{t(1-s)}{t-s}\right]\text{，}v'=\frac{c\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}{b\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}u=\frac{c}{b}u=\frac{c}{b}\left[\frac{-s(1-t)}{t-s}\right]$$

$$\overrightarrow{AP_I}=<u',v'>=\left\langle \frac{b}{c}\left[\frac{t(1-s)}{t-s}\right],\frac{c}{b}\left[\frac{-s(1-t)}{t-s}\right]\right\rangle$$

2. 以 $\overrightarrow{BI}=\dfrac{-a-c}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\left\langle \dfrac{-a-c}{a+b+c},\dfrac{c}{a+b+c}\right\rangle$ 為對稱軸向量，對 $\overrightarrow{BQ}=\langle -1,t\rangle$ 作對稱求得 $\overrightarrow{BQ_I}$ 。

令 $x=\dfrac{-a-c}{a+b+c},y=\dfrac{c}{a+b+c}$ ，以及 $u=-1,v=t$ 分別代入**公式一**，

得 $\overrightarrow{BQ_I}=<u',v'>$ ，其中

$$u'=\frac{a^2b^2-a^4+2ac^3-2a^3c-b^2c^2+c^4}{2a^2c^2+ac^3+a^3c-ab^2c}v+\frac{a^2c+2ac^2+c^3-b^2c}{2a^2c+ac^2+a^3-ab^2}u$$

$$v'=\frac{b^2c-a^2c-2ac^2-c^3}{2a^2c+ac^2+a^3-ab^2}u+\frac{b^2c-a^2c-2ac^2-c^3}{2a^2c+ac^2+a^3-ab^2}v$$

而 $\overrightarrow{AQ_I}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ_I}=\langle 1,0\rangle+<u',v'>=\left\langle \dfrac{(a-c)[c-(a+c)t]}{ac},\dfrac{-c(t-1)}{a}\right\rangle$

3. 同理，利用公式一，先求以 $\overrightarrow{CI}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{-a-b}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\left\langle \frac{b}{a+b+c},\frac{-a-b}{a+b+c}\right\rangle$ 為對稱軸向

量，對 $\overrightarrow{CR}=\langle s,-1\rangle$ 作對稱，得 $\overrightarrow{CR_I}=<u',v'>$。其中，

$$u'=\frac{bc^2-a^2b-2ab^2-b^3}{2a^2b+ab^2+a^3-ac^2}(-1)+\frac{bc^2-a^2b-2ab^2-b^3}{2a^2b+ab^2+a^3-ac^2}s$$

$$v'=\frac{a^2b+2ab^2+b^3-bc^2}{2a^2b+ab^2-ac^2+a^3}(-1)-\frac{a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2+2a^3b-2ab^3}{2a^2b^2+ab^3-abc^2+a^3b}s$$

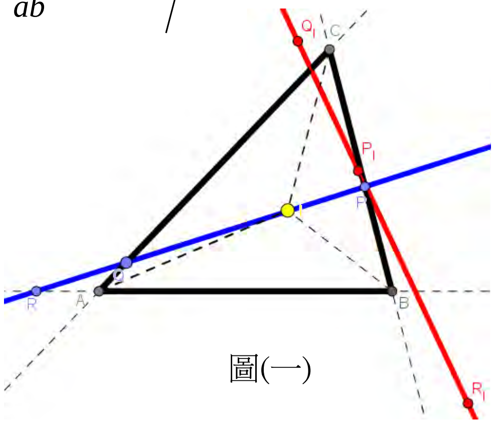
而 $\overrightarrow{AR_I}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR_I}=<0,1>+<u',v'>=\left\langle \frac{-b(s-1)}{a},\frac{(a-b)\left[b-(a+b)s\right]}{ab}\right\rangle$

(二) 首先，我們利用 Geogebra 觀察到當 L_1 過內心時，

P_1 、 Q_I 、 R_I 會三點共線，如圖(一)示

接著我們想要了解，三點 P_I、Q_I、R_I 共線的 L_1 ，

在什麼條件下，才會通過內心。



圖(一)

因為 $\overrightarrow{AR}=s\,\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AQ}=t\,\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AP}=\frac{-s(1-t)}{t-s}\overrightarrow{AB}+\frac{t(1-s)}{t-s}\overrightarrow{AC}$

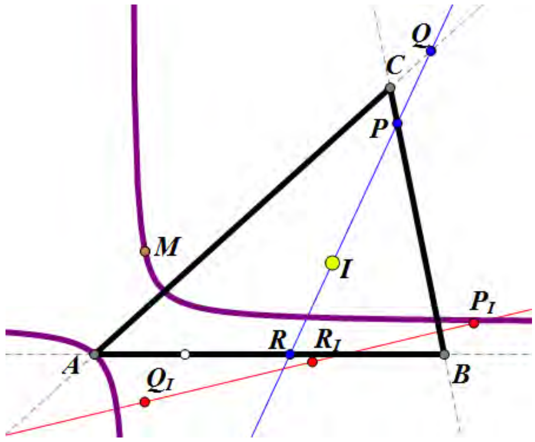
L_1 的位置會受到參數 s,t 的影響，所以我們需計算

當 s,t 滿足甚麼條件時， L_1 會通過內心。

由 $\overrightarrow{RQ}=\langle -s,t\rangle$ ， $\overrightarrow{RI}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AI}=\left\langle \frac{b-as-bs-cs}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right\rangle$

當 P、Q、R 三點共線時， $\begin{vmatrix} -s & t \\ \frac{b-as-bs-cs}{a+b+c} & \frac{c}{a+b+c} \end{vmatrix}=0$

整理得 $t=\frac{sc}{s(a+b+c)-b}$ --- (1)



圖(二)

或者 $(t-\frac{c}{a+b+c})(s-\frac{b}{a+b+c})=\frac{bc}{(a+b+c)^2}$ ，發現當 s,t 在一條雙曲線上時，P_I、Q_I、R_I 三點共線之 L_1 會通過內心，而且此時 P_I, R_I 及 Q_I 會共線。利用 Geogebra 繪圖驗證，得圖(二)。

證明： 由 $\overrightarrow{R_IP_I}=\overrightarrow{AP_I}-\overrightarrow{AR_I}=\left\langle \frac{b}{c}\left(\frac{t(1-s)}{t-s}\right)+\frac{b(s-1)}{a},\frac{c}{b}\left(\frac{-s(1-t)}{t-s}\right)+\frac{(a-b)\left[b-(a+b)s\right]}{ab}\right\rangle$---①

$$\overrightarrow{Q_IR_I}=\overrightarrow{AR_I}-\overrightarrow{AQ_I}=\left\langle \frac{-b(s-1)}{a}+\frac{(a-c)\left[c-(a+c)t\right]}{ac},\frac{c(t-1)}{a}+\frac{(a-b)\left[b-(a+b)s\right]}{ab}\right\rangle \text{---②}$$

以 $t=\dfrac{sc}{s(a+b+c)-b}$ 代入①，②，得

$\overrightarrow{R_IP_I}$ 的 x 分量：$\dfrac{b}{c}\left(\dfrac{t(1-s)}{t-s}\right)+\dfrac{b(s-1)}{a}=\dfrac{b(s-1)(b+c-as-bs-cs-a)}{a(b+c-as-bs-cs)}$

y 分量：$\dfrac{c}{b}\left(\dfrac{-s(1-t)}{t-s}\right)+\dfrac{(a-b)\left[b-(a+b)s\right]}{ab}=\dfrac{\left[b-(a+b)s\right]\left\{ac-(a-b)\left[b+c-s(a+b+c)\right]\right\}}{ab\left[b+c-s(a+b+c)\right]}$

$\overrightarrow{Q_IR_I}$ 的 x 分量：$\dfrac{-b(s-1)}{a}+\dfrac{(a-c)\left[c-(a+c)t\right]}{ac}=\dfrac{b(1-s)\left[s(a+b+c)-b+a-c\right]}{a\left[s(a+b+c)-b\right]}$

y 分量：$\dfrac{c(t-1)}{a}+\dfrac{(a-b)\left[b-(a+b)s\right]}{ab}=\dfrac{b-as-bs}{a}\left\{\dfrac{bc+\left[a-b\right]\left[s(a+b+c)-b\right]}{\left[s(a+b+c)-b\right]b}\right\}$

由 $\begin{vmatrix}\overrightarrow{Q_IR_I}\\ \overrightarrow{R_IP_I}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{b(1-s)\left[s(a+b+c)+a-b-c\right]}{\mathrm{a}\left[b+c-s(a+b+c)\right]} & \dfrac{\left[b-(a+b)s\right]\left\{bc+\left[s(a+b+c)-b\right](a-b)\right\}}{ab\left[b+c-s(a+b+c)\right]}\\ \dfrac{b(1-s)\left[s(a+b+c)+a-b-c\right]}{\mathrm{a}\left[s(a+b+c)-b\right]} & \dfrac{\left[b-(a+b)s\right]\left\{bc+\left[s(a+b+c)-b\right](a-b)\right\}}{ab\left[s(a+b+c)-b\right]}\end{vmatrix}=0$

知 P_I、Q_I、R_I 三點共線，得證。

(三) 一般而言

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{Q_IR_I}\\ \overrightarrow{R_IP_I}\end{vmatrix}=\frac{1}{a^2cb(t-s)}\begin{vmatrix}-b(s-1)c+(a-c)\left[c-(a+c)t\right] & bc(t-1)+(a-b)\left[b-(a+b)s\right]\\ abt(1-s)+bc(s-1)(t-s) & -acs(1-t)+(t-s)(a-b)\left[b-(a+b)s\right]\end{vmatrix}$$

當 P_I、Q_I、R_I 三點共線時，

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{Q_IR_I}\\ \overrightarrow{R_IP_I}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-b(s-1)c+(a-c)\left[c-(a+c)t\right] & bc(t-1)+(a-b)\left[b-(a+b)s\right]\\ abt(1-s)+bc(s-1)(t-s) & -acs(1-t)+(t-s)(a-b)\left[b-(a+b)s\right]\end{vmatrix}=0$$

觀察上式的展開式，發現可以看成是一個 t 的二次多項式方程式，令為 $A't^2+B't+C'=0$

已知其中一根為當直線 L 過內心時的條件，$t=\dfrac{sc}{s(a+b+c)-b}$

(四) 接下來要求另外一根 t，由根與係數的關係，利用兩根相乘(因為一次項的係數太複雜)，經過反覆的計算，得到

$$A'=a(a-c)(a-b+c)\lfloor b-(a+b+c)s\rfloor$$

$$B'=-a(b-a)(a+b-c)(a+b+c)s^2-2a(b-c)(a^2-b^2-bc-c^2)s-ab(b-c)(b+c-a)$$

$$C'=acs\lfloor (b-c)(a-b-c)-s(a-b)(a+b-c)\rfloor$$

由兩根之乘積為

$$\frac{acs\lfloor (b-c)(a-b-c)-s(a-b)(a+b-c)\rfloor}{a(a-c)(a-b+c)[b-(a+b+c)s]}=\frac{sc}{s(a+b+c)-b}\times t$$，得

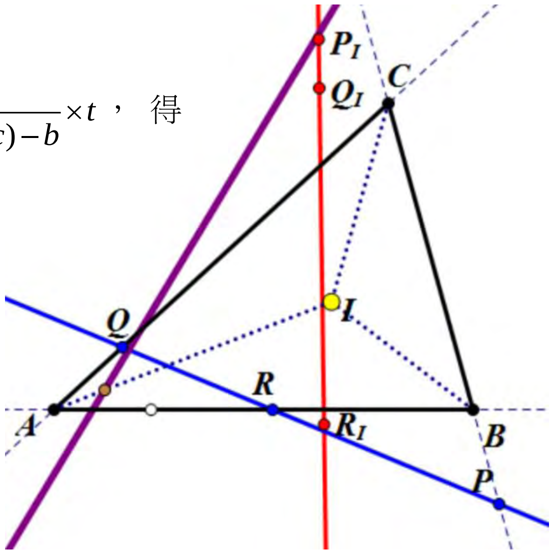
$$t=\frac{(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)}{(a-c)(a-b+c)} \text{-----(2)}$$

發現參數 s,t 的軌跡方程式為一直線，

且可以得知此 t 是 P_I、Q_I、R_I 三點共線

的另一個解。

利用 Geogebra 繪圖驗證，得圖(三)。

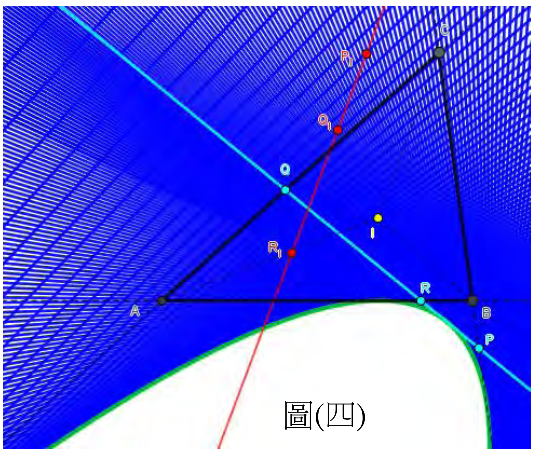


圖(三)

(五) 題目最初是探討 L_1 過內心時，其 P_I、Q_I、R_I 之共線關係，得到(1)式。而這時當 t 與 s 滿足(2)式時，也會使 P_I、Q_I、R_I 共線，因此我們想要了解當 t 與 s 滿足(2)式時，直線 L_1 的性質。

而這時我們使用了 Geogebra 的直線軌跡功能，觀察直線族，當 $t=\dfrac{(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)}{(a-c)(a-b+c)}$

時，直線 L_1 的軌跡所包絡出的一條曲線，如圖(四)。看起來就是一個在 ΔABC 外，與 ΔABC 的邊以及邊的延長線相切的斜拋物線。



圖(四)

(六) 求出拋物線方程式

由**公式二**，將 $R_I < s,0 >, Q_I < 0,t >$ 轉成 $R_I\left(sc,0\right),\ Q_I\left(X_c t, Y_c t\right)$

可得 $\overleftrightarrow{Q_I R_I} = L_1$ ： $y = \dfrac{Y_c t}{X_c t - sc}x + \left(\dfrac{-scY_c t}{X_c t - sc}\right)$

代入 $t = \dfrac{(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)}{(a-c)(a-b+c)}$ ，

得 $$y = \frac{Y_c\left\lfloor(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)\right\rfloor}{X_c\left[(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)\right]-sc(a-c)(a-b+c)}x$$

$$+\left(\frac{-scY_c\left\lfloor(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)\right\rfloor}{X_c\left[(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)\right]-sc(a-c)(a-b+c)}\right) \text{-----(3)}$$

同乘 $X_c\left\lfloor(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)\right\rfloor - sc(a-c)(a-b+c)$ 之後，整理

$$y\left\{X_c\left[(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)\right]-sc(a-c)(a-b+c)\right\}$$

$$=\left\{Y_c\left[(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)\right]\right\}x-\left\{scY_c\left[(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)\right]\right\}$$

得到一個以 s 為參數的直線族 $f\left(x.y.s\right)=0$ 。

為了求得此直線族所包絡出的曲線，需解聯立方程組： $\begin{cases} f\left(x.y.s\right)=0 \\ \dfrac{\partial f\left(x.y.s\right)}{\partial s}=0 \end{cases}$

先將 $f\left(x.y.s\right)$ 對 s 作偏微分

$$2scY_c(a-b)(a+b-c)=$$

$$(a-b)(a+b-c)Y_c x-(a-b)(a+b-c)X_c y+c(a-c)(a-b+c)y-cY_c(b-c)(b+c-a)$$

整理得

$$s=\frac{(a-b)(a+b-c)Y_c x-(a-b)(a+b-c)X_c y+c(a-c)(a-b+c)y-cY_c(b-c)(b+c-a)}{2cY_c(a-b)(a+b-c)}$$

$$=\frac{x}{2c}-\frac{X_c y}{2cY_c}+\frac{c(a-c)(a-b+c)y-cY_c(b-c)(b+c-a)}{2cY_c(a-b)(a+b-c)}$$

將 s 代入(3)式

即可求直線族 $f(x.y.s)=0$ 所包絡出的軌跡方程式。但因為符號過於複雜，為了簡化

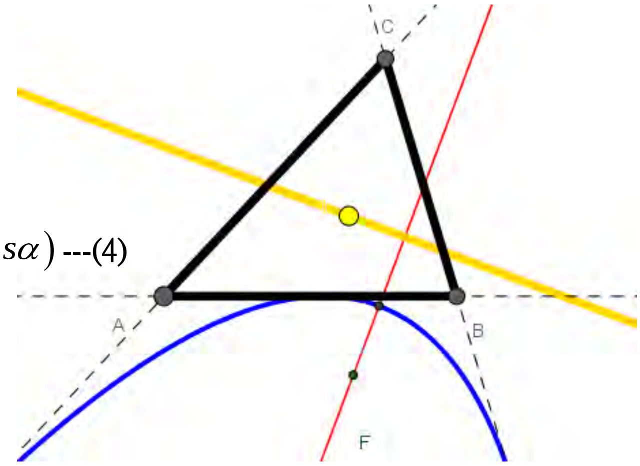
先令 $\begin{cases}(a-b)(a+b-c)=\alpha\\(a-c)(a-b+c)=\beta\\(b-c)(b+c-a)=\gamma\end{cases}$ 代入(3)式，整理成

$$y\{X_c(\gamma+s\alpha)-sc\beta\}=Y_c(\gamma+s\alpha)x-scY_c(\gamma+s\alpha)\text{ ---(4)}$$

再將 s 代入(4)

最後整理，即可得所求包絡線的軌跡方程式如下

$$\left[Y_c\alpha x+(\beta c-X_c\alpha)y+cY_c\gamma\right]^2=4c^2Y_c\beta\gamma y\text{ ---(5)}$$



圖(五)

我們將此求得的拋物線方程式輸入數學軟體，利用 Geogebra 繪圖驗證，得圖(五)。

(七) 準線的性質與證明

1. 當我們證明包絡出之圖形為拋物線後，我們很好奇這拋物線有何特殊性質？

我們利用 Geogebra 軟體繪出準線後，發現準線(圖(五)中黃色的線)似乎會經過內心。

以下我們給出證明：

首先將方程式整理為可看出對稱軸與準線的方程式，

由(5)式，

$$\left[Y_c\alpha x+(\beta c-X_c\alpha)y+cY_c\gamma\right]^2=4c^2Y_c\beta\gamma y$$

經由配方法，令成

$$\left[Y_c\alpha x+(\beta c-X_c\alpha)y+k\right]^2-2k\left[Y_c\alpha x+(\beta c-X_c\alpha)y\right]-k^2$$

$$+2cY_c\gamma\left\lfloor Y_c\alpha x+(\beta c-X_c\alpha)y\right\rfloor+c^2Y_c^2\gamma^2-4cY_c\beta c\gamma y=0$$

解得 $k=\dfrac{cY_c\gamma\left(b^2\alpha^2-c^2\beta^2\right)}{b^2\alpha^2-c\beta(c\beta-2X_c\alpha)}$

此時

$$cY_c\gamma-k=cY_c\gamma\left[1-\frac{b^2\alpha^2-c^2\beta^2}{b^2\alpha^2+c\beta(c\beta-2X_c\alpha)}\right]=\frac{2c^2Y_c\beta\gamma(c\beta-X_c\alpha)}{b^2\alpha^2+c\beta(c\beta-2X_c\alpha)}$$

$$cY_c\gamma+k=cY_c\gamma\left[1+\frac{b^2\alpha^2-c^2\beta^2}{b^2\alpha^2+c\beta(c\beta-2X_c\alpha)}\right]=\frac{2cY_c\gamma\left(b^2\alpha^2-X_c\alpha c\beta\right)}{b^2\alpha^2+c\beta(c\beta-2X_c\alpha)}$$

所以得一斜拋物線

$$\left[Y_c\alpha x+(c\beta-X_c\alpha)y+\frac{cY_c\gamma\left(b^2\alpha^2-c^2\beta^2\right)}{b^2\alpha^2+c\beta(c\beta-2X_c\alpha)}\right]^2=-2Y_c\alpha\frac{2c^2Y_c\beta\gamma(c\beta-X_c\alpha)}{b^2\alpha^2+c\beta(c\beta-2X_c\alpha)}x$$

$$+2\left[X_c\alpha\frac{2c^2Y_c\beta\gamma(c\beta-X_c\alpha)}{b^2\alpha^2+c\beta(c\beta-2X_c\alpha)}+c\beta\left(cY_c\gamma+\frac{2cY_c\gamma\left(b^2\alpha^2-c\beta X_c\alpha\right)}{b^2\alpha^2+c\beta(c\beta-2X_c\alpha)}\right)\right]y$$

$$+\left(\frac{cY_c\gamma\left(b^2\alpha^2-c^2\beta^2\right)}{b^2\alpha^2+c\beta(c\beta-2X_c\alpha)}\right)^2-c^2Y_c^2\gamma^2$$

$$=\frac{-4c^2Y_c\beta\gamma}{b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha}\left[Y_c\alpha(c\beta-X_c\alpha)x+\alpha^2\left(X_c^2-b^2\right)y+\frac{cY_c\gamma(c\beta-X_c\alpha)\left(b^2\alpha^2-c\beta X_c\alpha\right)}{b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha}\right]$$

$$\Rightarrow\left[Y_c\alpha x+(c\beta-X_c\alpha)y+\frac{cY_c\gamma\left(b^2\alpha^2-c^2\beta^2\right)}{b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha}\right]^2,\quad X_c^2-b^2=-Y_c^2$$

$$=\frac{4c^2Y_c^2\alpha\beta\gamma}{b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha}\left[(c\beta-X_c\alpha)x-\alpha Y_c y+\frac{c\gamma(c\beta-X_c\alpha)\left(b^2\alpha-c\beta X_c\right)}{b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha}\right]\text{-----(6)}$$

此時所得等號右方二元一次方程式並非準線，但

解對稱軸 $Y_c\alpha x+(c\beta-X_c\alpha)y+\dfrac{cY_c\gamma\left(b^2\alpha^2-c^2\beta^2\right)}{b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha}=0$ -----(7)

與過頂點垂軸線 $\left(c\beta-X_c\alpha\right)x-\alpha Y_c y+\dfrac{c\gamma\left(c\beta-X_c\alpha\right)\left(b^2\alpha-c\beta X_c\right)}{b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha}=0$ -----(8)

的交點，可求出此拋物線的頂點坐標$V(v_1,v_2)$， 由克拉瑪公式

$$v_1=\frac{\Delta_{v_1}}{\Delta}=\frac{c\gamma\left\lfloor \alpha Y_c^2\left(c^2\beta^2-b^2\alpha^2\right)+\left(c\beta-X_c\alpha\right)^2\left(b^2\alpha-c\beta X_c\right)\right\rfloor}{\left(b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha\right)^2}$$

$$v_2=\frac{\Delta_{v_2}}{\Delta}=\frac{cY_c\gamma\left(c\beta-X_c\alpha\right)\left(c^2\beta^2-c\beta X_c\alpha\right)}{\left(b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha\right)^2}$$

而焦距$\left|C\right|$之 $C=\dfrac{c^2Y_c^2\alpha\beta\gamma}{\left(b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}$

2. 由於拋物線方程式等號右方之二元一次方程式為過頂點且垂直於對稱軸之方程式，故欲證明準線過內心，則只需證明內心到頂點垂軸線(8)式 的距離為焦距即可

由於 $\overrightarrow{AI}=\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}=\left\langle\dfrac{b}{a+b+c},\dfrac{c}{a+b+c}\right\rangle$

利用**公式二**，將其轉換為直角坐標，得 $I\left(\dfrac{c\left(X_c+b\right)}{a+b+c},\dfrac{cY_c}{a+b+c}\right)$

利用點到直線距離公式，得

$$\frac{\left|\left(\alpha X_c-\beta c\right)\times\left[\dfrac{c\left(X_c+b\right)}{a+b+c}\right]+\left(Y_c\alpha\right)\times\left(\dfrac{cY_c}{a+b+c}\right)+\dfrac{c\gamma\left(\alpha X_c-\beta c\right)\left(\alpha b^2-\beta cX_c\right)}{\alpha^2b^2-2\alpha cX_c\beta+\beta^2c^2}\right|}{\sqrt{\left(\alpha X_c-\beta c\right)^2+\left(Y_c\alpha\right)^2}}$$

$$=\frac{\left|\left\{\dfrac{c}{a+b+c}\left[\alpha b^2-b\beta c+\alpha bX_c-X_c\beta c+\gamma X_c\left(a+b+c\right)\right]\right\}\left(\alpha^2b^2-2\alpha cX_c\beta+\beta^2c^2\right)-\alpha\beta\gamma c^2Y_c^2\right|}{\left(\alpha^2b^2-2\alpha cX_c\beta+\beta^2c^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

由上式可知，若$\alpha b^2-b\beta c+\alpha bX_c-X_c\beta c+\gamma X_c\left(a+b+c\right)=0$ ，則假設得證

3. 整理$\alpha b-\beta c$得$\alpha b-\beta c=\left(c-b\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)=2cX_c\left(c-b\right)$

$\alpha b^2-b\beta c+\alpha bX_c-X_c\beta c+\gamma X_c\left(a+b+c\right)$

$$=2bcX_c(c-b)+X_c(c-b)(b^2+c^2-a^2)+\gamma X_c(a+b+c)=0$$

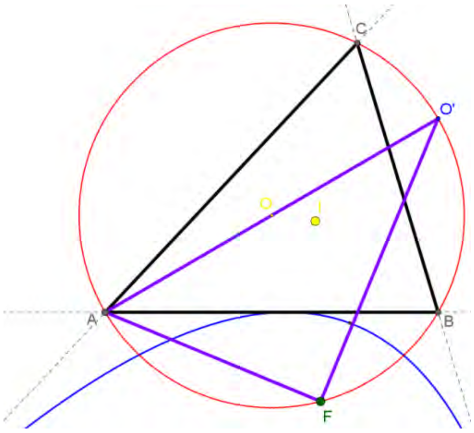
可得內心到此直線的距離為 $\dfrac{\left|\alpha\beta c^2\gamma Y_c^{\ 2}\right|}{\left(\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c\right)^{\frac{3}{2}}}$，即為焦距，準線必過內心。

(八) 焦點之位置與證明

1. 繼續由 Geogebra 觀察焦點，會發現焦點位置似乎在 ΔABC 的外接圓上(如圖(六))。

證明如下：

由於已證明準線必過內心 $\left(\dfrac{c(X_c+b)}{a+b+c},\dfrac{cY_c}{a+b+c}\right)$



因此整理準線方程式

圖(六)

$$(\alpha X_c-\beta c)x+(Y_c\alpha)y=\frac{c(X_c+b)}{a+b+c}\times(\alpha X_c-\beta c)+(Y_c\alpha)\times\frac{cY_c}{a+b+c}=\frac{c(X_c+b)(\alpha b-\beta c)}{a+b+c}$$

以及對稱軸方程式 $(Y_c\alpha)x-(\alpha X_c-\beta c)y=\dfrac{-Y_cc\gamma\left(\alpha^2b^2-\beta^2c^2\right)}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c}$

於是可由克拉瑪公式求出此二方程式的交點 (X',Y')

$$X'=c(\alpha b-\beta c)\times\frac{Y_c^{\ 2}\alpha\gamma(-\alpha b-\beta c)(a+b+c)+(X_c+b)(\alpha X_c-\beta c)\left(\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c\right)}{\left(\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c\right)^2(a+b+c)}$$

$$Y'=Y_cc(\alpha b-\beta c)\times\frac{\gamma(\alpha b+\beta c)(\alpha X_c-\beta c)(a+b+c)+\alpha(X_c+b)\left(\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c\right)}{\left(\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c\right)^2(a+b+c)}$$

又焦點與 (X',Y') 的中點，即為頂點坐標 $V(v_1,v_2)$

因此得焦點坐標 $F(x,y)=F\left(\dfrac{-c\gamma\left(\alpha b^2-\beta cX_c\right)}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c},\dfrac{\beta\gamma c^2Y_c}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c}\right)$

2. 令通過 A 和 ΔABC 外心 O 的直線 $\overleftrightarrow{AO}$ 交 ΔABC 外接圓於 O'

若焦點位於三角形外接圓上，則 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FO'}=0$

已知外心坐標為 $O\left(\frac{c}{2},\frac{{X_c}^2+{Y_c}^2-cX_c}{2Y_c}\right)$，並求得 O' 坐標為 $\left(c,\frac{{X_c}^2+{Y_c}^2-cX_c}{Y_c}\right)$

$$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{-c\gamma\left(\alpha b^2-\beta cX_c\right)}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c},\frac{\beta\gamma c^2Y_c}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c}\right)$$

$$\overrightarrow{FO'}=\left(c-\frac{c\gamma\left(-\alpha b^2+\beta cX_c\right)}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c},\frac{b^2-cX_c}{Y_c}-\frac{\beta\gamma c^2Y_c}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c}\right)$$

則

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FO'}=\frac{-c\gamma\left(\alpha b^2-\beta cX_c\right)}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c}\left[c-\frac{c\gamma\left(-\alpha b^2+\beta cX_c\right)}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c}\right]$$

$$+\frac{\beta\gamma c^2Y_c}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c}\left[\frac{b^2-cX_c}{Y_c}-\frac{\beta\gamma c^2Y_c}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c}\right]=\frac{b^2c^2\gamma\left(\beta-\alpha-\gamma\right)}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c}$$

由於

$$\left(\beta-\alpha-\gamma\right)=\left(a-c\right)\left(a-b+c\right)-\left(a-b\right)\left(a+b-c\right)-\left(b-c\right)\left(b+c-a\right)$$

$$=\left(a^2+ac-ab-ac-c^2+bc\right)-\left(a^2+ab-ac-ab-b^2+bc\right)-\left(b^2+bc-ab-bc-c^2+ac\right)=0$$

故 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FO'}=0$

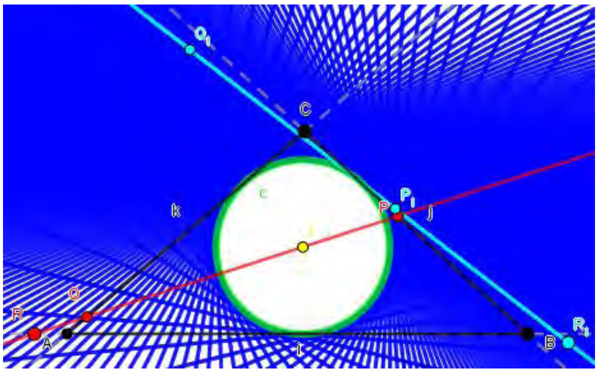
因此拋物線焦點位於三角形外接圓之假設成立

(九) 當 L_1 通過內心時，L_1' 包絡出的圖形觀察與證明

1. 當解決了(六)(七)(八) 中的直線 L_1 所包絡出之拋物線的特殊性質後。我十分好奇在討論**(二)**

中，當 L_1 過內心時，其共線對稱點 P_I', Q_I', R_I' 的連線 L_1' 究竟會包絡出何種圖形？

利用 GSP 軟體觀察後，L_1' 包絡出的圖形看似為 ΔABC 的內切圓，如圖(七)，因為在正三角形時外心與內心重合，其包絡出的圖形為圓形，或許當三角形為任意三角形時，L_1' 包絡出的圖形亦為圓形。以下給出證明。



圖(七)

證明：

利用**公式二**，將 Q_I, R_I 之直角坐標求出，得出

$$Q_I\left(\frac{(a-c)[c-(a+c)t]}{a}+\frac{-cX_c(t-1)}{a},\frac{-Y_c c(t-1)}{a}\right)$$

$$R_I\left(\frac{-bc(s-1)}{a}+\frac{X_c(a-b)\lfloor b-(a+b)s\rfloor}{ab},\frac{Y_c(a-b)\lfloor b-(a+b)s\rfloor}{ab}\right)$$

進而求出 $L_1'=\overleftrightarrow{Q_IR_I}$ 的方程式

$$L_1':\left\{Y_c\left[(a+b)(a-b)(a+b+c)s^2-2b\left(a^2-b^2-bc\right)s+b^2(a-b-c)\right]\right\}x$$
$$-\left\{(a+b+c)\left[(a+b)(a-b)X_c+b^2c\right]s^2-2b\left[bc(b+c)+X_c\left(a^2-b^2-bc\right)\right]s+b^2(a-b-c)(X_c-c)\right\}y$$
$$-bcY_c(a-b-c)\lfloor(a+b)s^2-(a+2b)s+b\rfloor=0$$

2. 將 $\overrightarrow{AI}=\left\langle\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right\rangle$ 轉成 $I\left(\frac{c(b+X_c)}{a+b+c},\frac{cY_c}{a+b+c}\right)$ 並利用點到距離公式，求出 I 到 L_1' 的距離，經過繁複的計算，將

$$\frac{\left\{Y_c\left[(a+b)(a-b)(a+b+c)s^2-2b\left(a^2-b^2-bc\right)s+b^2(a-b-c)\right]\right\}\frac{c(b+X_c)}{a+b+c}-\left\{(a+b+c)\left[(a+b)(a-b)X_c+b^2c\right]s^2-2b\left[bc(b+c)+X_c\left(a^2-b^2-bc\right)\right]s+b^2(a-b-c)(X_c-c)\right\}\frac{cY_c}{a+b+c}-bcY_c(a-b-c)\left[(a+b)s^2-(a+2b)s+b\right]}{\sqrt{\left\{Y_c\left[(a+b)(a-b)(a+b+c)s^2-2b\left(a^2-b^2-bc\right)s+b^2(a-b-c)\right]\right\}^2+\left\{(a+b+c)\left[(a+b)(a-b)X_c+b^2c\right]s^2-2b\left[bc(b+c)+X_c\left(a^2-b^2-bc\right)\right]s+b^2(a-b-c)(X_c-c)\right\}}}$$

化簡為 $\frac{Y_c c}{a+b+c}$，由於 ΔABC 的內切圓半徑確為 $\frac{Y_c c}{a+b+c}$，故得證。

研究問題一 結論：

設 ΔABC 中，$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$，$I$ 為內心。直線 L_1 分別與 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 交於 P、Q、R 三點，

並依序對 $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}$ 分別作對稱後，得 P_I、Q_I、R_I 三點。令 $\overrightarrow{AR}=s\,\overrightarrow{AB}$ ，$\overrightarrow{AQ}=t\,\overrightarrow{AC}$ ，則有

1-1.若 s,t 在雙曲線 $t=\dfrac{sc}{s(a+b+c)-b}$ 上，則直線 L_1 會通過內心 I ，且此時 P_I、Q_I、R_I 三點共線。

參考圖(二)。

1-2.對稱所得三點共線之直線 $P_IQ_IR_I=L_1'$

$$L_1':\left\{Y_c\left[(a+b)(a-b)(a+b+c)s^2-2b\left(a^2-b^2-bc\right)s+b^2(a-b-c)\right]\right\}x$$

$$-\left\{(a+b+c)\left[(a+b)(a-b)X_c+b^2c\right]s^2-2b\left[bc(b+c)+X_c\left(a^2-b^2-bc\right)\right]s+b^2(a-b-c)(X_c-c)\right\}y$$

$$-bcY_c(a-b-c)\left\lfloor (a+b)s^2-(a+2b)s+b\right\rfloor=0$$

所包絡出的圖形，恰為 ΔABC 的內切圓。參考圖(七)。

1-3.若 s 與 t 在直線 $t=\dfrac{(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)}{(a-c)(a-b+c)}$ 上，則直線 L_1 所包絡出的圖形為拋物

線，且此時 P_I、Q_I、R_I 三點共線。參考圖(三)。

1-4.滿足 1-3 之 L_1 所包絡出的拋物線方程式為：

$$\Gamma:\left[Y_c\alpha x+(c\beta-X_c\alpha)y+\frac{cY_c\gamma\left(b^2\alpha^2-c^2\beta^2\right)}{b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha}\right]^2$$

$$=\frac{4c^2Y_c^2\alpha\beta\gamma}{b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha}\left[(c\beta-X_c\alpha)x-\alpha Y_cy+\frac{c\gamma(c\beta-X_c\alpha)\left(b^2\alpha-c\beta X_c\right)}{b^2\alpha^2+c^2\beta^2-2c\beta X_c\alpha}\right]$$ 參考圖(四)。

其中，$\alpha=(a-b)(a+b-c),\ \beta=(a-c)(a-b+c),\ \gamma=(b-c)(b+c-a)$

1-5.拋物線 Γ 的準線

$$(\alpha X_c-\beta c)x+(Y_c\alpha)y=\frac{c(X_c+b)}{a+b+c}\times(\alpha X_c-\beta c)+(Y_c\alpha)\times\frac{cY_c}{a+b+c}=\frac{c(X_c+b)(\alpha b-\beta c)}{a+b+c}$$

必過 ΔABC 的內心 I 。參考圖(五)。

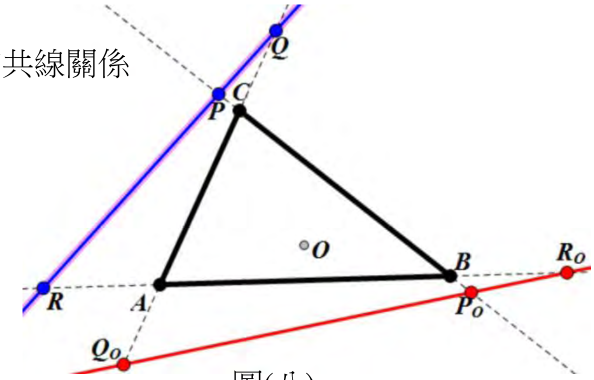
1-6.拋物線 Γ 的焦點

$$F\left(\frac{-c\gamma\left(\alpha b^2-\beta cX_c\right)}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c},\frac{\beta\gamma c^2Y_c}{\alpha^2b^2+\beta^2c^2-2\alpha\beta cX_c}\right)$$，位於 ΔABC 的外接圓上。參考圖(六)。

二、任取一條直線 L，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點，再將此三點依序對三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 之中垂線分別作對稱後，得 P_O、Q_O、R_O 三點。

(一) P、Q、R 三點對三邊之中垂線做對稱點 P_O、Q_O、R_O 的共線關係

我們利用 Gsp 觀察到，P、Q、R 三點對三邊之中垂線作的對稱點 P_O、Q_O、R_O，在任何情況下都會三點共線。如圖(八)



圖(八)

證明：令 $\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AB}=\langle s,0\rangle$，$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AC}=\langle 0,t\rangle$

則 $\overrightarrow{AR_O}=(1-s)\overrightarrow{AB}=\langle 1-s,0\rangle$，及 $\overrightarrow{AQ_O}=(1-t)\overrightarrow{AC}=\langle 0,1-t\rangle$

又已知，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{-s(1-t)}{t-s}\overrightarrow{AB}+\dfrac{t(1-s)}{t-s}\overrightarrow{AC}=\left\langle \dfrac{-s(1-t)}{t-s},\dfrac{t(1-s)}{t-s}\right\rangle$

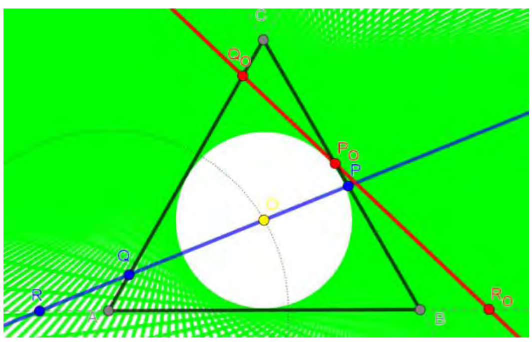
及中點公式得 $\overrightarrow{AP_O}=\dfrac{(1-s)t}{t-s}\overrightarrow{AB}+\dfrac{-s(1-t)}{t-s}\overrightarrow{AC}=\left\langle \dfrac{(1-s)t}{t-s},\dfrac{-s(1-t)}{t-s}\right\rangle$

$\Rightarrow \overrightarrow{Q_OR_O}=\overrightarrow{AR_O}-\overrightarrow{AQ_O}=\langle 1-s,t-1\rangle$

$\overrightarrow{P_OR_O}=\overrightarrow{AR_O}-\overrightarrow{AP_O}=\left\langle \dfrac{(1-s)t}{t-s},\dfrac{-s(1-t)}{t-s}-1+t\right\rangle=\left\langle \dfrac{t(1-s)}{t-s},\dfrac{t(t-1)}{t-s}\right\rangle$

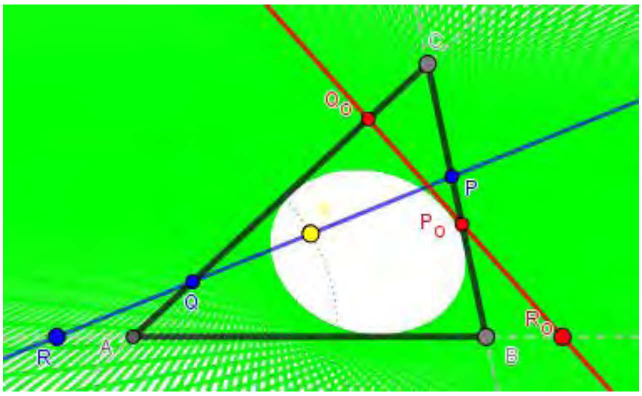
得 $\overrightarrow{Q_OR_O}=\dfrac{t-s}{t}\overrightarrow{P_OR_O}$，可知 $\overrightarrow{Q_OR_O}//\overrightarrow{P_OR_O}$。故在此條件下，三點必共線。

(二) 由於在研究問題一中，當 L_1 通過內心時，L_1' 可包絡出 ΔABC 的內切圓。因此我十分好奇當 L_2 通過外心時，L_2' 會包絡出什麼圖形？因此我們用 GSP 觀察，並經過計算以後發現

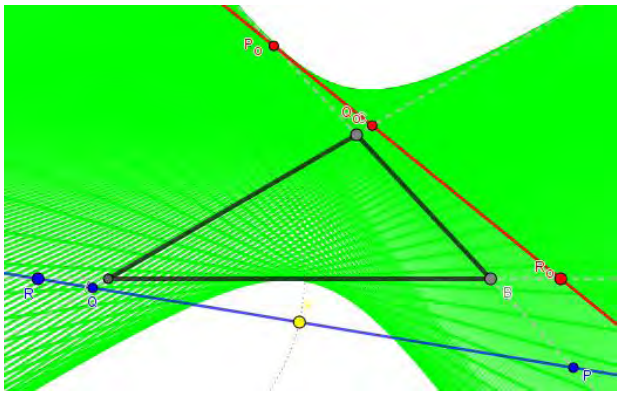


圖(九)

1. 在正三角形時，Γ軌跡為”圓形”，如圖(九)。
2. 在銳角三角形時，Γ軌跡為”橢圓”，如圖(十)。
3. 在鈍角三角形時，Γ軌跡為”雙曲線”，如圖(十一)。
4. 在直角三角形時，無法包絡出圖形。



圖(十)



圖(十一)

(三) 當 L_2 通過任意點 X 時的性質

經過以上的觀察，發現 L_2' 會包絡出什麼圖形？似乎跟 ΔABC 是什麼樣的三角形有關，又或者跟 L_2 所通過的定點在什麼位置有關。於是我們繼續利用 GSP 觀察，讓 L_2 通過平面上任意一個定點 X，看看在此情況下，對稱所得直線 L_2' 會包絡出什麼圖形？結果得到如圖(十三)、圖(十四)、圖(十五)、圖(十六)等圖形。以下是我們的論證：

我們先將平面分成十個區域，令 $\overrightarrow{AX}=u\,\overrightarrow{AB}+v\,\overrightarrow{AC}=\langle u,v\rangle$

然後如圖(十二)所示，指定 X 在Ⅰ到Ⅹ區，限制條件如下：

Ⅰ: $0<u<1, 0<v<1, u+v<1$

Ⅱ: $u>0, v>0, u+v>1$

Ⅲ: $v=0$

Ⅳ: $u<0, v<0, u+v<0$

Ⅴ: $u<0, v>0, u+v<1$

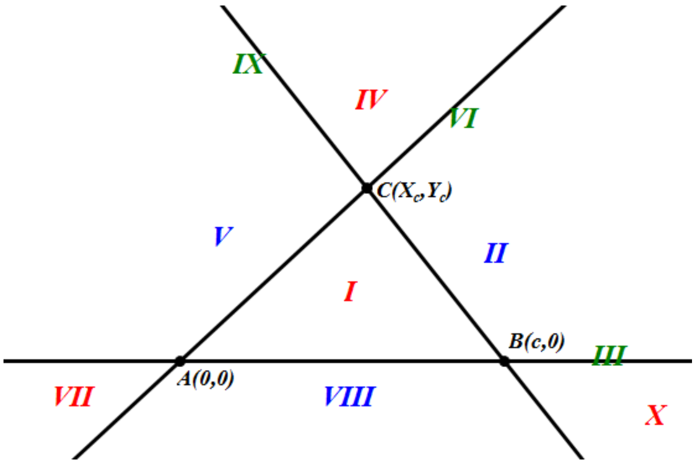
Ⅵ: $u=0$

Ⅶ: $u>1, v<0, u+v>1$

Ⅷ: $0<u<1, v<0, u+v<1$

Ⅸ: $u+v=1$

Ⅹ: $u<0, v>1, u+v>1$



圖(十二)

當 R、Q、G 三點共線的條件為 $t=\dfrac{vs}{s-u}$

已知對稱後的直線 L_2' 的方程式為 $y=\dfrac{(t-1)Y_c}{(1-s)c+(t-1)X_c}\left[x-(1-s)c\right]$，代入 $t=\dfrac{vs}{s-u}$，得

$$y\left\{\left[-s^2+(u+1)s-u\right]c+X_c\left[s(v-1)+u\right]\right\}=Y_c x\left[s(v-1)+u\right]-cY_c(1-s)\left[s(v-1)+u\right]$$

對 s 偏微分

得 $s=\dfrac{\lfloor c(u+1)+(v-1)X_c\rfloor y-Y_c(v-1)x+cY_c(v-u-1)}{2c\left[Y_c(v-1)+y\right]}$，將之代回

$$y\left\{\left[-s^2+(u+1)s-u\right]c+X_c\left[s(v-1)+u\right]\right\}=Y_cx\left[s(v-1)+u\right]-cY_c(1-s)\left[s(v-1)+u\right]$$

得

$$\left\{\left[c(u+1)+(v-1)X_c\right]y-Y_c(v-1)x+cY_c(v-u-1)\right\}^2+4cu\left[Y_c(v-1)+y\right]\left(X_cy-Y_cx-cy+cY_c\right)=0$$

令其整理後為 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

可知

$$A=Y_c^{\,2}(v-1)^2$$

$$B=-2\left\{\left[c(u+1)+(v-1)X_c\right]Y_c(v-1)+2cuY_c\right\}$$

$$C=\left[c(u+1)+(v-1)X_c\right]^2+4cu\left(X_c-c\right)$$

由判別式 B^2-4AC

$$=4\left\{\left[c(u+1)+(v-1)X_c\right]Y_c(v-1)+2cuY_c\right\}^2-4Y_c^{\,2}(v-1)^2\left\{\left[c(u+1)+(v-1)X_c\right]^2+4cu\left(X_c-c\right)\right\}$$

$$=4c^2Y_c^{\,2}uv(u+v-1)$$

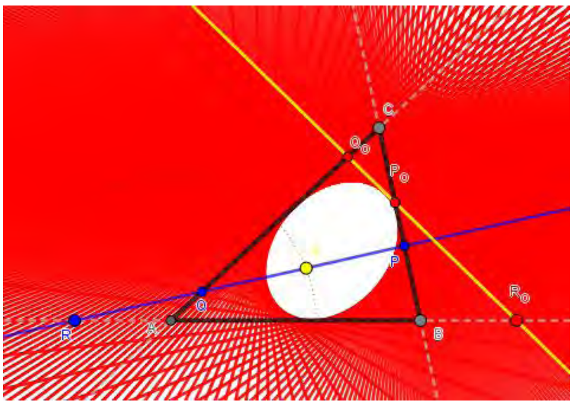
分析可知當定點 X 落在各區時，L_2'所包絡出的圖形如下：

Ⅰ區 $B^2-4AC<0$，包絡出一內切橢圓如圖(十三)

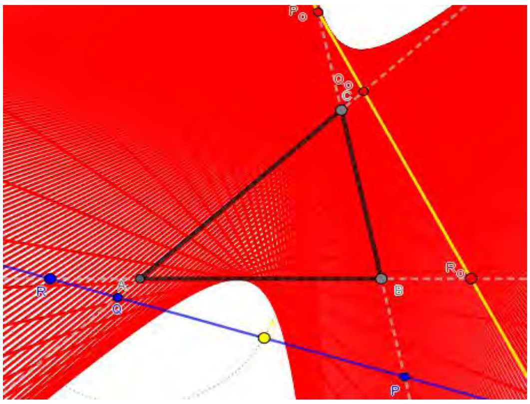
Ⅱ、Ⅴ、Ⅷ區 $B^2-4AC>0$，包絡出一旁切雙曲線如圖(十四)

Ⅲ、Ⅵ、Ⅸ區(三角形邊或其延長線上) $B^2-4AC=0$，拋物線的退化，無圖形如圖(十五)

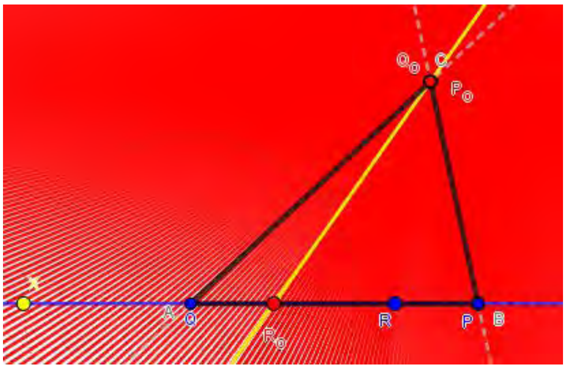
Ⅳ、Ⅶ、Ⅹ區 $B^2-4AC<0$，則為一旁切橢圓如圖(十六)



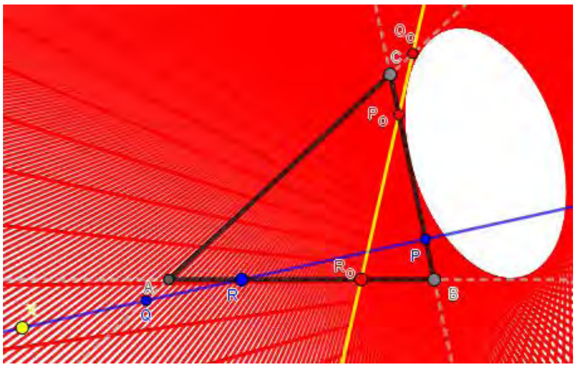
圖(十三)



圖(十四)



圖(十五)



圖(十六)

研究問題二 結論：

2-1.給定 ΔABC ，取一直線 L_2 ，且分別與 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 交於 P、Q、R 三點，再將此三點依序對三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 之中垂線作對稱後，得 P_O、Q_O、R_O 三點，此三點必共一直線 L_2' 。

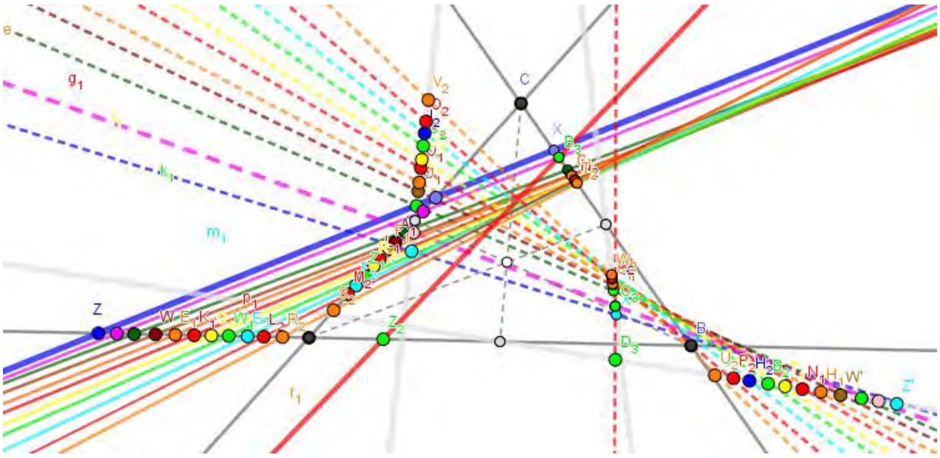
2-2.直線 L_2 過任一定點 X ，且分別與 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 交於 P、Q、R 三點，再將此三點依序對三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 之中垂線作對稱後，依 X 所在位置(參考圖(十二))， L_2' 包絡出的圖形如下：

(1)在Ⅰ區 包絡出一內切橢圓。參考圖(十三)。
(2)在Ⅱ、Ⅴ、Ⅷ區 包絡出一旁切雙曲線。參考圖(十四)。
(3)在Ⅲ、Ⅵ、Ⅸ區 為拋物線的退化，即無圖形。參考圖(十五)。
(4)在Ⅳ、Ⅶ、Ⅹ區 包絡出一旁切橢圓。參考圖(十六)。

2-3.當定點 X 為 ΔABC 的外心時，猜測外心恰為所包絡出圓錐曲線的焦點。參考圖(十)、(十一)。

三、 任取一條直線 L_1 ，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點，再將此三點依序對中線 $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}$ 分別作對稱後，得 P_G、Q_G、R_G 三點。

(一) 首先利用 GGB 觀察，如圖(十七)，實線為欲對稱三點所連的線，虛線為對稱後的線。觀察後，看不出 P、Q、R 三點在何種情況下， P_G、Q_G、R_G 三點會共線。



圖(十四)

(二)因為無法利用數學軟體觀察出其解，所以我們以直接計算的方式，求出其解的條件式。

1. 令 G 為 ΔABC 的重心，則

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\left\langle\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\rangle$$

$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\left\langle\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right\rangle$$

$$\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\left\langle\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right\rangle$$

令 $\overrightarrow{AP}=\left\langle\frac{-s(1-t)}{t-s},\frac{t(1-s)}{t-s}\right\rangle$ 對 $\overrightarrow{AG}$ 之對稱向量為 $\overrightarrow{AP_G}$ ， $\overrightarrow{AQ}=\langle 0,t\rangle$ 對 $\overrightarrow{BG}$ 之對稱向量為 $\overrightarrow{AQ_G}$ ， $\overrightarrow{AR}=\langle \mathrm{s}，0\rangle$ 對 $\overrightarrow{CG}$ 之對稱向量為 $\overrightarrow{AR_G}$

利用對稱**公式一**，得

$$\overrightarrow{AP_G}=\left\langle\frac{(c^2-b^2)(ts-s)+(3b^2+c^2-a^2)(t-ts)}{(2b^2+2c^2-a^2)(t-s)},\frac{(b^2-c^2)(t-ts)+(b^2+3c^2-a^2)(ts-s)}{(2b^2+2c^2-a^2)(t-s)}\right\rangle$$

$$\overrightarrow{AQ_G}=\left\langle\frac{4t(c^2-a^2)+2(a^2-c^2)}{(2a^2-b^2+2c^2)},\frac{t(b^2-4c^2)+a^2-b^2+3c^2}{(2a^2-b^2+2c^2)}\right\rangle$$

$$\overrightarrow{AR_G}=\left\langle\frac{s(c^2-4b^2)+a^2+3b^2-c^2}{(2a^2+2b^2-c^2)},\frac{4s(b^2-a^2)+2(a^2-b^2)}{(2a^2+2b^2-c^2)}\right\rangle$$

2. 令 $\overrightarrow{R_GQ_G}=\langle \mathrm{X}_1,Y_1\rangle$

$$X_1=\frac{(2a^2+2b^2-c^2)\lfloor 4t(c^2-a^2)+2(a^2-c^2)\rfloor-(2a^2-b^2+2c^2)\lfloor s(c^2-4b^2)+a^2+3b^2-c^2\rfloor}{(2a^2-b^2+2c^2)(2a^2+2b^2-c^2)}$$

$$Y_1=\frac{(2a^2+2b^2-c^2)\lfloor t(b^2-4c^2)+a^2-b^2+3c^2\rfloor-(2a^2-b^2+2c^2)\lfloor 4s(b^2-a^2)+2(a^2-b^2)\rfloor}{(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2-b^2+2c^2)}$$

令 $\overrightarrow{R_GP_G}=\langle X_2,Y_2\rangle$

$$X_2=\frac{\lfloor(c^2-b^2)(ts-s)+(3b^2+c^2-a^2)(t-ts)\rfloor(2a^2+2b^2-c^2)-\lfloor s(c^2-4b^2)+a^2+3b^2-c^2\rfloor(2b^2+2c^2-a^2)(t-s)}{(2b^2+2c^2-a^2)(t-s)(2a^2+2b^2-c^2)}$$

$$Y_2=\frac{\lfloor (b^2-c^2)(t-ts)+(b^2+3c^2-a^2)(ts-s)\rfloor(2a^2+2b^2-c^2)-\lfloor 4s(b^2-a^2)+2(a^2-b^2)\rfloor(2b^2+2c^2-a^2)(t-s)}{(2a^2+2b^2-c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(t-s)}$$

3. 欲使 P_G, Q_G, R_G 三點共線 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow X_1Y_2-X_2Y_1=0$

$$\Leftrightarrow \left\{(2a^2+2b^2-c^2)\left[4t(c^2-a^2)+2(a^2-c^2)\right]-(2a^2-b^2+2c^2)\left[s(c^2-4b^2)+a^2+3b^2-c^2\right]\right\}\times$$

$$\left\{\left[t\left(b^2-c^2\right)\left(1-s\right)+s\left(t-1\right)\left(b^2+3c^2-a^2\right)\left(2a^2+2b^2-c^2\right)\right]-\left[4s(b^2-a^2)+2(a^2-b^2)\right](2b^2+2c^2-a^2)(t-s)\right\}$$

$$-\left\{\left[s(c^2-b^2)(t-1)+t(3b^2+c^2-a^2)(1-s)\right](2a^2+2b^2-c^2)-\left[s(c^2-4b^2)+a^2+3b^2-c^2\right](2b^2+2c^2-a^2)(t-s)\right\}\times$$

$$\left\{(2a^2+2b^2-c^2)\left[t(b^2-4c^2)+a^2-b^2+3c^2\right]-(2a^2-b^2+2c^2)\left[4s(b^2-a^2)+2(a^2-b^2)\right]\right\}=0$$

令 $A_1=(2b^2+2c^2-a^2)$，$A_2=(2a^2-b^2+2c^2)$，$A_3=(2a^2+2b^2-c^2)$

$B_1=(a^2-b^2)$，$B_2=(b^2-c^2)$，$B_3=(c^2-a^2)$，$B_4=(b^2-4c^2)$，$B_5=(c^2-4b^2)$

$C_1=(b^2+3c^2-a^2)$，$C_2=(a^2-b^2+3c^2)$，$C_3=(a^2+3b^2-c^2)$，$C_4=(3b^2+c^2-a^2)$

得條件式 (9)

$$\Delta_G=\left\{A_3\left[4B_3t-2B_3\right]-A_2\left[sB_5+C_3\right]\right\}\times\left\{\left[tB_2(1-s)+sC_1(t-1)\right]A_3-\left[-4sB_1+2B_1\right]A_1(t-s)\right\}$$

$$-\left\{\left[-sB_2(t-1)+tC_4(1-s)\right]A_3-\left[sB_5+C_3\right]A_1(t-s)\right\}\times\left\{A_3\left[tB_4+C_2\right]-A_2\left[-4sB_1+2B_1\right]\right\}$$

$$=\lfloor -4B_1A_1s^2+(C_1A_3-B_2A_3+4B_1A_1)st+(2B_1A_1-C_1A_3)s+(B_2A_3-2B_1A_1)t\rfloor\times$$

$$\left\{-A_2B_5s+4A_3B_3t-(A_2C_3+2A_3B_3)\right\}$$

$$-\left\{\left[B_5A_1s^2-(B_2A_3+C_4A_3+B_5A_1)st+(B_2A_3+A_1C_3)s+(C_4A_3-A_1C_3)t\right]\right\}\times$$

$$\left\{4A_2B_1s+A_3B_4t+(A_3C_2-2A_2B_1)\right\}=0$$

4. 比較 $\Delta_G=0$ 與 $As^3+Bs^2t+Cst^2+Dt^3+Es^2+Fst+Gt^2+Hs+It+J=0$

得 A=0，D=0，$J=0$

$$B = -16B_1A_1A_3B_3 - (C_1A_3 - B_2A_3 + 4B_1A_1)A_2B_5 - B_5A_1A_3B_4 + 4A_2B_1(B_2A_3 + C_4A_3 + B_5A_1)$$

$$= -16B_1A_1A_3B_3 - [A_3(C_1 - B_2) + 4B_1A_1]A_2B_5 - B_5A_1A_3B_4 + 4A_2B_1[A_3(B_2 + C_4) + B_5A_1]$$

$$C = 4A_3B_3(C_1A_3 - B_2A_3 + 4B_1A_1) + A_3B_4(B_2A_3 + C_4A_3 + B_5A_1)$$

$$E = 4B_1A_1(A_2C_3 + 2A_3B_3) - A_2B_5(2B_1A_1 - C_1A_3) - B_5A_1(A_3C_2 - 2A_2B_1) - 4A_2B_1(B_2A_3 + A_1C_3)$$

$$F = -(A_2C_3 + 2A_3B_3)(C_1A_3 - B_2A_3 + 4B_1A_1) + 4A_3B_3(2B_1A_1 - C_1A_3) - A_2B_5(B_2A_3 - 2B_1A_1)$$

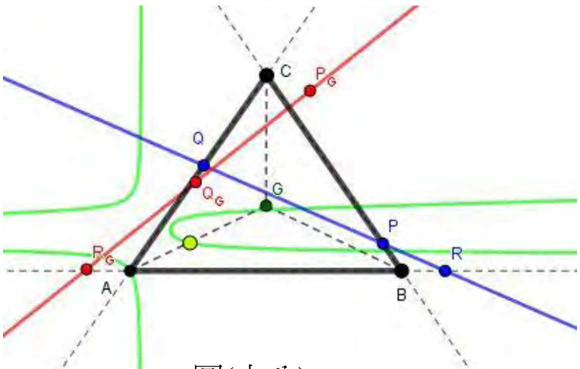
$$+(A_3C_2 - 2A_2B_1)(B_2A_3 + C_4A_3 + B_5A_1) - A_3B_4(B_2A_3 + A_1C_3) - 4A_2B_1(C_4A_3 - A_1C_3)$$

$$G = 4A_3B_3(B_2A_3 - 2B_1A_1) - A_3B_4(C_4A_3 - A_1C_3)$$

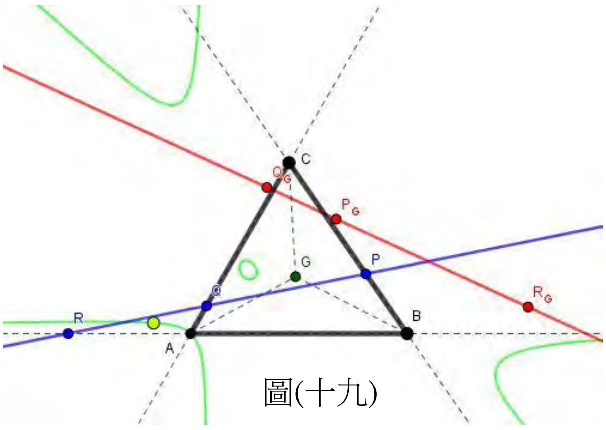
$$H = -(A_2C_3 + 2A_3B_3)(2B_1A_1 - C_1A_3) - (B_2A_3 + A_1C_3)(A_3C_2 - 2A_2B_1)$$

$$I = -(A_2C_3 + 2A_3B_3)(B_2A_3 - 2B_1A_1) - (C_4A_3 - A_1C_3)(A_3C_2 - 2A_2B_1)$$

以 GGB 驗證，得圖(十八)、圖(十九)，圖中綠色線為條件式在不同三角形中的軌跡圖形，可以發現其圖形頗為複雜。



圖(十八)



圖(十九)

5. 因此嘗試將其因式分解，仿造內心看是否能分出兩個解。

令此條件式 $\Delta_G = As^3 + Bs^2t + Cst^2 + Dt^3 + Es^2 + Fst + Gt^2 + Hs + It + J = 0$ -----(10)

為 $(as^2 + bst + ct^2 + ds + et + f)(\alpha s + \beta t + \gamma) = 0$

比較係數得

$A = a\alpha = 0$，$B = b\alpha + a\beta$，$C = b\beta + c\alpha$，$D = c\beta = 0$

$E = a\gamma + d\alpha$，$F = b\gamma + d\beta + e\alpha$，$G = c\gamma + e\beta$，$H = d\gamma + f\alpha$

$I = e\gamma + f\beta$，$J = f\gamma = 0$

因為需同時滿足 $A = a\alpha = 0$，$D = c\beta = 0$，$J = f\gamma = 0$ 且其它係數均不為 0，只需討論以下 8 種情況。

Case1 到 Case4: $a=\beta=\gamma=0$，$\alpha=c=\gamma=0$，$\alpha=\beta=f=0$，$\alpha=\beta=\gamma=0$

均會使原式有缺項，故不成立。

Case5: $a=c=f=0$可得到其中$\frac{G}{I}=\frac{\beta}{\gamma}$，$\frac{B}{C}=\frac{\alpha}{\beta}$，$\frac{H}{E}=\frac{\gamma}{\alpha}$，而此時$\frac{G}{I}\times\frac{B}{C}\times\frac{H}{E}=1$

，利用軟體 GGB 計算發現在重心情況下，其乘積不為 1，故不合。

Case6: $a=c=\gamma=0$可發現到此時$B\times I=C\times H=\alpha\beta bf$ 利用軟體 GGB 計算

$B\times I=C\times H$ 乘積不相同，故不合。

Case7: $a=\beta=f=0$此時發現到方程式中的$\alpha s+\beta t+\gamma$被改寫為$\alpha s+\gamma$，此為一鉛

直線，且$E\times G=H\times C=d\alpha c\gamma$利用軟體 GGB 計算不合。

Case8: $\alpha=c=f=0$可發現到此時$B\times I=E\times G=ae\beta\gamma$利用軟體 GGB 計算

$B\times I=E\times G$乘積不相同，故不合。

由以上 8 種情況，推論此三次方程式Δ_G是不能像內心因式分解成一個二次式及一直線的。

而比較內心情況對應上述 Case5，可驗證出在內心情況下$\frac{G}{I}\times\frac{B}{C}\times\frac{H}{E}=1$。

研究問題三 結論：

設ΔABC中，$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$，$G$為內心。直線$L_3$分別與$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$交於$P$、$Q$、$R$三點，

並依序對$\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}$分別作對稱後，得$P_G$、$Q_G$、$R_G$三點。令$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AC}$，則有

3-1.當s,t滿足以下方程式(參考式(9)、(10))。

$$\Delta_G=Bs^2t+Cst^2+Es^2+Fst+Gt^2+Hs+It=0$$

P_G、Q_G、R_G三點共線。參考圖(十八)、(十九)，且上式無法分解成一個二次式及一直線。

四、任取一條直線L_4，交給定ΔABC三邊或邊之延長線於P、Q、R三點，H為垂心，再將此三點依序對$\overrightarrow{AH}$、$\overrightarrow{BH}$、$\overrightarrow{CH}$分別作對稱後，得P_H、Q_H、R_H三點。

(一)求得P_H、Q_H、R_H共線的條件

設X為平面上任一點，已知

$$\overrightarrow{XH}=\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{16\Delta^2}\overrightarrow{XA}+\frac{(b^2+c^2-a^2)(b^2+a^2-c^2)}{16\Delta^2}\overrightarrow{XB}+\frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{16\Delta^2}\overrightarrow{XC}$$

令 $A\perp\overleftrightarrow{BC}$ 之垂足為 A_H ，則 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP_H}=2\overrightarrow{AA_H}$

已知 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{-s(1-t)}{t-s}\overrightarrow{AB}+\dfrac{t(1-s)}{t-s}\overrightarrow{AC}=\left\langle\dfrac{-s(1-t)}{t-s},\dfrac{t(1-s)}{t-s}\right\rangle$

因此 $\overrightarrow{AP_H}=\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2}+\dfrac{s(1-t)}{t-s},\dfrac{a^2+c^2-b^2}{a^2}-\dfrac{t(1-s)}{t-s}\right)$

令 $a^2+b^2-c^2=\alpha$ ， $a^2+c^2-b^2=\beta$ ， $b^2+c^2-a^2=\gamma$

$\overrightarrow{BQ}=\langle -1,t\rangle$ 對 $\overrightarrow{BH}=\langle -(\alpha+\gamma),\gamma\rangle$ 並代入**公式一**，得

$$\overrightarrow{BQ_H}=\left\langle\frac{-\left[(\alpha+\gamma)^2c^2-\gamma^2b^2\right]-\gamma\left[2b^2-(\alpha+\gamma)\right](\alpha+\gamma)t}{c^2(\alpha+\gamma)^2+\gamma^2b^2-\gamma^2(\alpha+\gamma)},\frac{-\left[(\alpha+\gamma)^2c^2-\gamma^2b^2\right]t-\left[-2c^2(\alpha+\gamma)-\gamma^2\right]\gamma}{c^2(\alpha+\gamma)^2+\gamma^2b^2-\gamma^2(\alpha+\gamma)}\right\rangle$$

$\overrightarrow{AQ_H}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ_H}$

$$=\langle 1,0\rangle+\left\langle\frac{-\left[(\alpha+\gamma)^2c^2-\gamma^2b^2\right]-\gamma\left[2b^2-(\alpha+\gamma)\right](\alpha+\gamma)t}{c^2(\alpha+\gamma)^2+\gamma^2b^2-\gamma^2(\alpha+\gamma)},\frac{-\left[(\alpha+\gamma)^2c^2-\gamma^2b^2\right]t-\left[-2c^2(\alpha+\gamma)-\gamma^2\right]\gamma}{c^2(\alpha+\gamma)^2+\gamma^2b^2-\gamma^2(\alpha+\gamma)}\right\rangle$$

$$=\left\langle 0,\frac{(\gamma-b^2t)}{b^2}\right\rangle$$

$\overrightarrow{CR}=\langle s,-1\rangle$ 對 $\overrightarrow{CH}=\langle\gamma,-(\beta+\gamma)\rangle$ 並代入**公式一**，得

$$\overrightarrow{CR_H}=\left\langle\frac{s\left[c^2\gamma^2-b^2(\beta+\gamma)^2\right]-\left[-2(\beta+\gamma)b^2+\gamma^2\right]\gamma}{c^2\gamma^2+b^2(\beta+\gamma)^2-(\beta+\gamma)\gamma^2},\frac{\left[c^2\gamma^2-b^2(\beta+\gamma)^2\right]-(\beta+\gamma)\left[2\gamma c^2-\gamma(\beta+\gamma)\right]s}{c^2\gamma^2+b^2(\beta+\gamma)^2-(\beta+\gamma)\gamma^2}\right\rangle$$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR_H}$

$$=\langle 1,0\rangle+\left\langle\frac{s\left[c^2\gamma^2-b^2(\beta+\gamma)^2\right]-\left[-2(\beta+\gamma)b^2+\gamma^2\right]\gamma}{c^2\gamma^2+b^2(\beta+\gamma)^2-(\beta+\gamma)\gamma^2},\frac{\left[c^2\gamma^2-b^2(\beta+\gamma)^2\right]-(\beta+\gamma)\left[2\gamma c^2-\gamma(\beta+\gamma)\right]s}{c^2\gamma^2+b^2(\beta+\gamma)^2-(\beta+\gamma)\gamma^2}\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{\gamma-sc^2}{c^2},0\right\rangle$$

因此有 $\overrightarrow{Q_HR_H}=\left\langle \frac{\gamma-sc^2}{c^2},\frac{b^2t-\gamma}{b^2}\right\rangle$ ， $\overrightarrow{P_HQ_H}=\left\langle \frac{s(t-1)}{t-s}-\frac{\alpha}{a^2},\frac{\gamma-b^2t}{b^2}-\frac{\beta}{a^2}+\frac{t(1-s)}{t-s}\right\rangle$

當 $\begin{vmatrix}\overrightarrow{Q_HR_H}\\ \overrightarrow{P_HQ_H}\end{vmatrix}=0$ 時， P_H,Q_H,R_H 會共線，因此展開 $\begin{vmatrix}\frac{\gamma-sc^2}{c^2} & \frac{s(t-1)}{t-s}-\frac{\alpha}{a^2}\\ \frac{b^2t-\gamma}{b^2} & \frac{\gamma-b^2t}{b^2}-\frac{\beta}{a^2}+\frac{t(1-s)}{t-s}\end{vmatrix}$

整理得式(11) 如下：

$$\Delta_H=c^2\left(a^2c^2-a^4-b^2c^2+b^4\right)s^2+2b^2c^2\left(c^2-b^2\right)st+b^2\left(b^2c^2-c^4-a^2b^2+a^4\right)t^2$$

$$+\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(2b^2c^2-b^4-c^4+a^4-a^2c^2\right)s+\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^4+c^4-2b^2c^2-a^4+a^2b^2\right)t=0$$

將此關係式以 geogebra 繪出，可得出此關係式為一雙曲線，以下給出**證明：**

令式(11)為 $As^2+Bst+Ct^2+Ds+E=0$ ，其中

$$A=c^2\left(a^2c^2-a^4-b^2c^2+b^4\right)$$

$$B=2b^2c^2\left(c^2-b^2\right)$$

$$C=b^2\left(b^2c^2-c^4-a^2b^2+a^4\right)$$

由判別式 $B^2-4AC=\dfrac{a^6+b^6+c^6+\left(a^2b^4+a^4b^2\right)+\left(b^2c^4+b^4c^2\right)+\left(a^2c^4+a^4c^2\right)-3a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}$

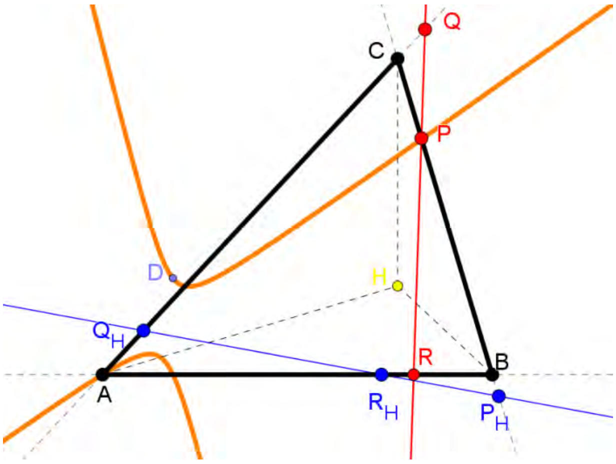
其中

$$\left(a^2b^4+a^4b^2\right)+\left(b^2c^4+b^4c^2\right)+\left(a^2c^4+a^4c^2\right)$$

$$\geq 6\sqrt[6]{a^{12}b^{12}c^{12}}=6a^2b^2c^2$$

由以上可知， $B^2-4AC>0$

$\Delta_H=0$ 的圖形為一雙曲線。如圖(二十)



圖(二十)

研究問題四 結論：

設 ΔABC 中，$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$，$H$ 為垂心。直線 L_4 分別與 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 交於 P、Q、R 三點，

並依序對 $\overleftrightarrow{AI},\overleftrightarrow{BI},\overleftrightarrow{CI}$ 分別作對稱後，得 P_H、Q_H、R_H 三點。令 $\overrightarrow{AR}=s\,\overrightarrow{AB}$ ，$\overrightarrow{AQ}=t\,\overrightarrow{AC}$ ，則有

4-1.當 s,t 滿足以下方程式(11)：

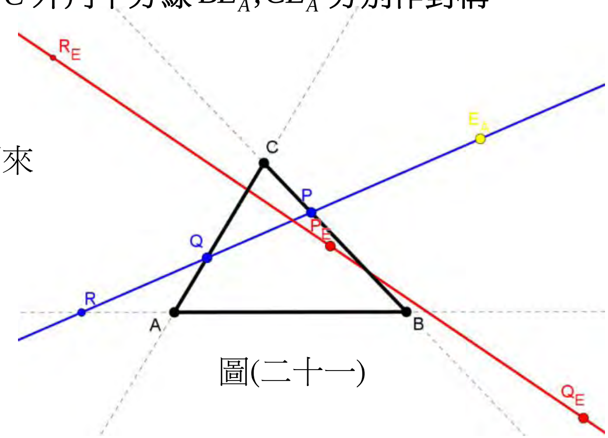
$$\Delta_H=c^2\left(a^2c^2-a^4-b^2c^2+b^4\right)s^2+2b^2c^2\left(c^2-b^2\right)st+b^2\left(b^2c^2-c^4-a^2b^2+a^4\right)t^2$$

$$+\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(2b^2c^2-b^4-c^4+a^4-a^2c^2\right)s+\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^4+c^4-2b^2c^2-a^4+a^2b^2\right)t=0$$

P_H、Q_H、R_H 三點共線，且 $\Delta_H=0$ 的圖形為一雙曲線。參考圖(二十)。

五、任取一條直線 L_5 ，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點，E_A 為相對頂點 A 之旁心。再將此三點依序對 A 內角平分線 $\overleftrightarrow{AE_A}$ 與 B,C 外角平分線 $\overleftrightarrow{BE_A},\overleftrightarrow{CE_A}$ 分別作對稱後，得三點 P_{E_A}、Q_{E_A}、R_{E_A} 。

(一) 既然已經討論完 ΔABC 的四心，於是我們回過頭來反問，與內心關係密切的旁心，會不會有類似的性質呢？
首先，利用 Geogebra 觀察到當 L_5 過旁心 E_A 時，
P_{E_A},Q_{E_A} 及 R_{E_A} 會三點共線，如圖(二十一)。



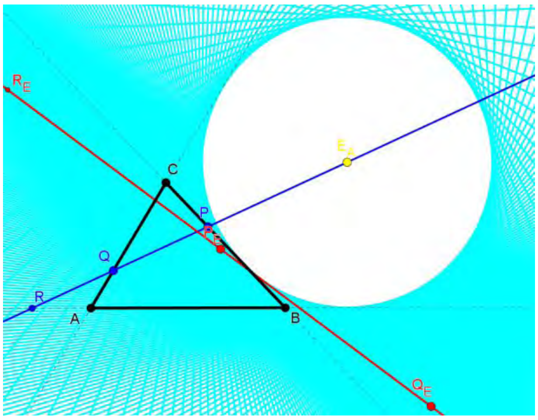
圖(二十一)

(二) 接著我們模仿研究問題一的手法，求出 $\overrightarrow{AQ_{E_A}}$、$\overrightarrow{AR_{E_A}}$、$\overrightarrow{AP_{E_A}}$ 以 $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{AC}$ 為基底向量之線性組合表達式 $\overrightarrow{AP_{E_A}}=\left\langle \frac{b}{c}\left[\frac{t(1-s)}{t-s}\right],\frac{c}{b}\left[\frac{-s(1-t)}{t-s}\right]\right\rangle$

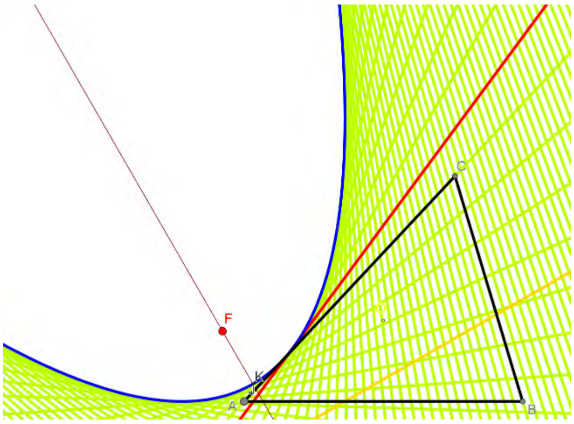
$\overrightarrow{AQ_{E_A}}=\left\langle \frac{(a+c)[c+(a-c)t]}{ac},\frac{c(t-1)}{a}\right\rangle$ ，以及 $\overrightarrow{AR_{E_A}}=\left\langle \frac{b(s-1)}{a},\frac{(a+b)\left[b+(a-b)s\right]}{ab}\right\rangle$

然後在利用 Geogebra 觀察與計算的過程中發現：

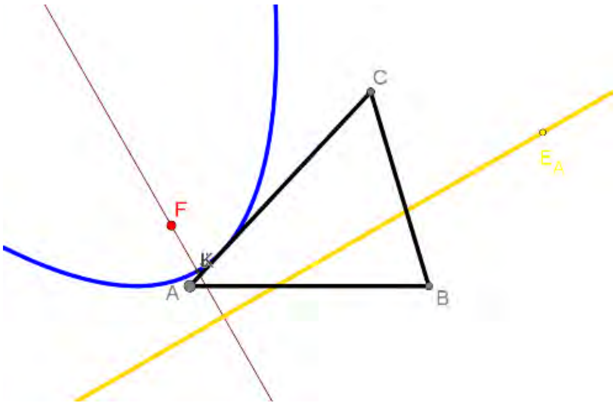
1. 在內心問題中所發現具有的性質，旁心問題皆有對應一樣的性質。
2. 在計算過程中，以 E_A 為例，只要將內心問題中出現的符號 a 改為 $-a$ ，如重新假設 $\alpha=(-a-b)(-a+b-c),\ \beta=(-a-c)(-a-b+c),\ \gamma=(b-c)(b+c+a)$ ，還要注意如果是代表 ΔABC 邊長的符號 a,b,c ，不要更動變號，即可得到相對應的結果。而旁心 E_B 、E_C 以此類推。



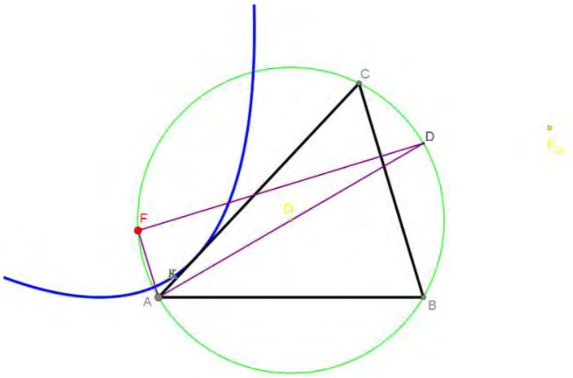
圖(二十二)



圖(二十三)



圖(二十四)



圖(二十五)

研究問題五 結論：

設 ΔABC 中，$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$，$E_A$ 為相對頂點 A 之旁心，直線 L_5 分別與 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 交於 P、Q、R 三點，並依序對 A 內角平分線 $\overleftrightarrow{AE_A}$ 與 B,C 外角平分線 $\overleftrightarrow{BE_A},\overleftrightarrow{CE_A}$ 分別作對稱後，得 P_{E_A}、Q_{E_A}、R_{E_A} 三點。令 $\overrightarrow{AR}=s\,\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=t\,\overrightarrow{AC}$，則有(旁心 E_B,E_C 性質，同理可推)

5-1.若 s,t 滿足 $t=\dfrac{sc}{s(-a+b+c)-b}$ 上，則直線 L_5 會通過旁心 E_A，且此時 P_{E_A}、Q_{E_A}、R_{E_A} 三點共線。

5-2.對稱後三點共線之直線 L_5' 所包絡出的圖形，恰為 ΔABC 以 E_A 為圓心的旁切圓。
參考圖(二十二)。

5-3.若 s 與 t 在直線 $t=\dfrac{(b-c)(a+b+c)+s(a+b)(a-b+c)}{(a+c)(a+b-c)}$ 上，則直線 L_5 所包絡出的圖形為拋物線 Γ_A，且此時 P_{E_A}、Q_{E_A}、R_{E_A} 三點共線。參考圖(二十三)。

5-4 拋物線 Γ_A 的準線必過 ΔABC 的旁心 E_A。參考圖(二十四)。

5-5 拋物線 Γ_A 的焦點，位於 ΔABC 的外接圓上。參考圖(二十五)。

六、任取一條直線 L_6，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點，X ($XHeart$)為一定點，再將此三點依序對 $\overrightarrow{AX}$、$\overrightarrow{BX}$、$\overrightarrow{CX}$ 分別作對稱後，得 P_X、Q_X、R_X 三點。

解決了三角形五心鏡射的相關問題後，我們不禁想問，還有其它的心有類似的性質，或者更有意思的性質嗎？於是展開了尋心($XHeart$)之旅。

(一)直接令 $\overrightarrow{AX} = X\,\overrightarrow{AB} + Y\,\overrightarrow{AC} = \langle X, Y\rangle$， X 為平面上某定點。則有

$$\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AB} = \langle X, Y\rangle - \langle 1, 0\rangle = \langle X-1, Y\rangle \text{，} \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AC} = \langle X, Y\rangle - \langle 0, 1\rangle = \langle X, Y-1\rangle$$

(二)求得 $\overrightarrow{AP_X}$、$\overrightarrow{AQ_X}$、$\overrightarrow{AR_X}$

利用**公式一**，得

$\overrightarrow{AP} =< \dfrac{-s(1-t)}{t-s}, \dfrac{t(1-s)}{t-s} >$ 對 $\overrightarrow{AX} = \langle X, Y\rangle$ 的對稱向量 $\overrightarrow{AP_X} =< u'_p, v'_p >$

$$u'_p = \frac{-\left(X^2c^2 - Y^2b^2\right)s(1-t) + X\left(2Yb^2 + (b^2+c^2-a^2)X\right)t(1-s)}{\left(X^2c^2 + Y^2b^2 + (b^2+c^2-a^2)XY\right)(t-s)}$$

$$v'_p = \frac{\left(Y^2b^2 - X^2c^2\right)t(1-s) - Y\left(2Xc^2 + (b^2+c^2-a^2)Y\right)s(1-t)}{\left(X^2c^2 + Y^2b^2 + (b^2+c^2-a^2)XY\right)(t-s)}$$

同理可得 $\overrightarrow{BQ_X} = < u'_Q, v'_Q >$

$$u'_Q = \frac{-\left((X-1)^2c^2 - Y^2b^2\right) + (X-1)\left(2Yb^2 + (b^2+c^2-a^2)(X-1)\right)t}{(X-1)^2c^2 + Y^2b^2 + (b^2+c^2-a^2)(X-1)Y}$$

$$v'_Q = \frac{\left(Y^2b^2 - (X-1)^2c^2\right)t - Y\left(2(X-1)c^2 + (b^2+c^2-a^2)Y\right)}{(X-1)^2c^2 + Y^2b^2 + (b^2+c^2-a^2)(X-1)Y}$$

再將 $< u'_Q, v'_Q >$ 平移 $\overrightarrow{AB}$ 得 $\overrightarrow{AQ_X} =< u'_Q + 1, v'_Q >$

同理得 $\overrightarrow{CR_X} =< u'_R, v'_R >$

$$u'_R = \frac{\left(X^2c^2 - (Y-1)^2b^2\right)s - X\left(2(Y-1)b^2 + (b^2+c^2-a^2)X\right)}{X^2c^2 + (Y-1)^2b^2 + (b^2+c^2-a^2)X(Y-1)}$$

$$v'_R = \frac{-\left((Y-1)^2b^2 - X^2c^2\right) + (Y-1)\left(2Xc^2 + (b^2+c^2-a^2)(Y-1)\right)s}{X^2c^2 + (Y-1)^2b^2 + (b^2+c^2-a^2)X(Y-1)}$$

再將 $< u'_R, v'_R >$ 平移 $\overrightarrow{AC}$ 得 $\overrightarrow{AR_X} =< u'_R, v'_R + 1 >$

(三) 求得 P_X、Q_X、R_X 三點共線的條件

令 $\overrightarrow{R_X P_X} = \overrightarrow{AP_X} - \overrightarrow{AR_X} = < X_1, Y_1 >$，$\overrightarrow{R_X Q_X} = \overrightarrow{AQ_X} - \overrightarrow{AR_X} = < X_2, Y_2 >$，

$A_1 = \left(X^2c^2 + Y^2b^2 + (b^2+c^2-a^2)XY \right)$、$B_{11} = \left(X^2c^2 - Y^2b^2 \right)$

$A_2 = X^2c^2 + (Y-1)^2 b^2 + (b^2+c^2-a^2)X(Y-1)$、$B_{21} = \left(X^2c^2 - (Y-1)^2 b^2 \right)$

$B_{22} = X\left(2(Y-1)b^2 + (b^2+c^2-a^2)X \right)$、$A_3 = (X-1)^2 c^2 + Y^2b^2 + (b^2+c^2-a^2)(X-1)Y$

$B_{31} = \left(Y^2b^2 - (X-1)^2 c^2 \right)$、$B_{32} = Y\left(2(X-1)c^2 + (b^2+c^2-a^2)Y \right)$

$C_{11} = \left(Y^2b^2 - X^2c^2 \right)$、$C_{12} = Y\left(2Xc^2 + (b^2+c^2-a^2)Y \right)$

$C_{21} = \left((Y-1)^2 b^2 - X^2c^2 \right)$、$C_{22} = (Y-1)\left(2Xc^2 + (b^2+c^2-a^2)(Y-1) \right)$

$C_{31} = \left((X-1)^2 c^2 - Y^2b^2 \right)$、$C_{32} = (X-1)\left(2Yb^2 + (b^2+c^2-a^2)(X-1) \right)$

可得，

$X_1 = \dfrac{-B_{11}s(1-t) + B_{12}t(1-s)}{A_1(t-s)} - \dfrac{B_{21}s - B_{22}}{A_2}$，$Y_1 = \dfrac{C_{11}t(1-s) - C_{12}s(1-t)}{A_1(t-s)} + \dfrac{C_{21} - C_{22}s}{A_2} - 1$

$X_2 = \dfrac{-C_{31} + C_{32}t}{A_3} - \dfrac{B_{21}s - B_{22}}{A_2} + 1$，$Y_2 = \dfrac{B_{31}t - B_{32}}{A_3} + \dfrac{C_{21} - C_{22}s}{A_2} - 1$

P_X、Q_X、R_X 共線符合 $X_1Y_2 - X_2Y_1 = 0$

$\Leftrightarrow As^3 + Bs^2t + Cst^2 + Dt^3 + Es^2 + Fst + Gt^2 + Hs + It + J = 0$ -----(12)

其中

$A = 0$

$B = A_1A_2\left(B_{21}B_{31} - C_{22}C_{32} \right) - A_2A_3\left(B_{11}C_{22} - B_{12}C_{22} + B_{21}C_{11} - B_{21}C_{12} \right)$

$C = A_1A_2\left(C_{22}C_{32} - B_{21}B_{31} \right) + A_2A_2\left(B_{11}B_{31} - B_{12}B_{31} + C_{11}C_{32} - C_{12}C_{32} \right)$

$D = 0$

$E = A_1A_2\left(C_{22}C_{31} - B_{21}B_{32} - A_3C_{22} \right) + A_2A_3\left(B_{11}C_{22} - B_{21}C_{12} \right)$

$F = A_1A_2\left(A_3C_{22} - A_2C_{32} + B_{21}B_{32} - B_{22}B_{31} + C_{21}C_{32} - C_{22}C_{31} \right)$

$\quad -A_2A_2\left(B_{11}B_{31} + B_{11}B_{32} - B_{12}B_{32} + C_{11}C_{31} - C_{12}C_{31} - C_{12}C_{32} \right)$

$$+A_2A_3\left(B_{11}C_{21}-B_{12}C_{21}-B_{12}C_{22}+B_{21}C_{11}+B_{22}C_{11}-B_{22}C_{12}\right)-A_2A_2A_3\left(B_{11}-B_{12}-C_{11}+C_{12}\right)$$

$$G=A_2B_{31}\left(A_1B_{22}+A_2B_{12}\right)+A_2C_{32}\left(A_1A_2-A_1C_{21}-A_2C_{11}\right)$$

$$H=\left(A_2A_3+A_2B_{32}-A_3C_{21}\right)\left(A_1B_{22}+A_2B_{11}\right)-\left(A_2A_3-A_2C_{31}+A_3B_{22}\right)\left(A_1A_2-A_1C_{21}-A_2C_{12}\right)$$

$$I=\left(A_2A_3-A_2C_{31}+A_3B_{22}\right)\left(A_1A_2-A_1C_{21}-A_2C_{11}\right)-\left(A_2A_3+A_2B_{32}-A_3C_{21}\right)\left(A_1B_{22}+A_2B_{12}\right)$$

$$J=0$$

由此，式(12) 即為當 X 為一定點時，P、Q、R 三點依序對 $\overrightarrow{AX}$、$\overrightarrow{BX}$、$\overrightarrow{CX}$ 分別作對稱後，所得 P_X、Q_X、R_X 三點共線的控制參數 s,t 之解的形式。

研究問題六 結論：

設 ΔABC **中，**$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$ **，** X **為某定點。直線** L_6 **分別與** $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ **交於** P、Q、R **三點，依序對** $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}$ **分別作對稱後，得** P_X、Q_X、R_X **三點。令** $\overrightarrow{AR}=s\,\overrightarrow{AB}$ **，** $\overrightarrow{AQ}=t\,\overrightarrow{AC}$ **，則有**

6-1.當 s,t **滿足以下方程式(式(12))。**

$$\Delta_X=Bs^2t+Cst^2+Es^2+Fst+Gt^2+Hs+It=0$$

P_X、Q_X、R_X **三點共線。參考圖(二十九)、圖(三十)。**

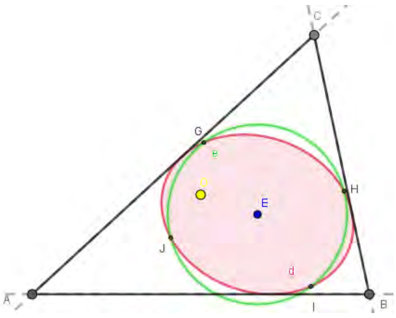
陸、討論

一、在研究結果二中之包絡線圖形，其曲線焦點看似為外心，因此我們利用軟體 GGB 繪圖驗證，步驟如下:

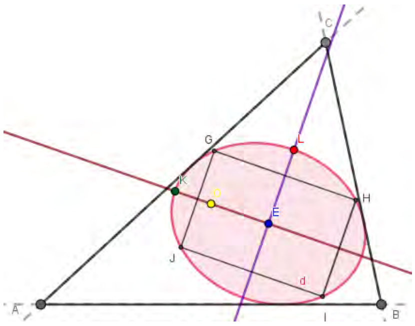
1. 首先，利用圓錐曲線任兩平行弦中點連線必過中心，找出圓錐曲線的中心 E 。並以此中心為圓心，畫出一與圓錐曲線交於四點 G, H, I, J 的圓(圖(二十六))。

2. 分別把兩兩相鄰的點互相連接，得四條線段 $\overline{GH}$,$\overline{IJ}$,$\overline{HI}$,$\overline{GJ}$ ，此四條線段分別與橢圓的長軸與短軸、雙曲線的貫軸與正焦弦平行，通過中心作出與四條線段平行的兩平行線，若為橢圓，即為長軸與短軸；若為雙曲線，則可做出兩對稱軸(圖(二十七))。

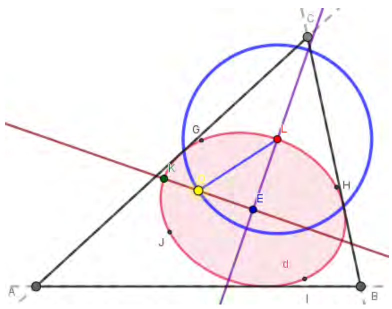
3. 若為橢圓，則以短軸上一頂點 L 為圓心，半長軸為半徑，發現外心 O 必為於此圓上；若為雙曲線，則以外心對對稱軸作對稱，並在雙曲線上任取一點，將此點與外心及其對稱點分別連線，以距離短者為半徑，此點為圓心畫圓。並以外心與其對稱點另一點為圓心，貫軸長為半徑畫圓，則可發現此兩圓相切且切點恰位於雙曲線上那點與外心及其對稱點的連線距離長者之上。故可得之外心確為圓錐曲線之一焦點(圖(二十八))。(圖以橢圓為例)



圖(二十六)

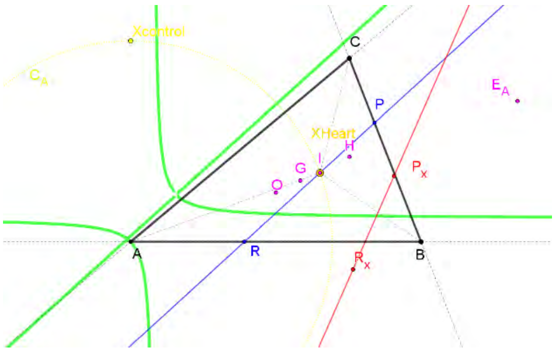


圖(二十七)

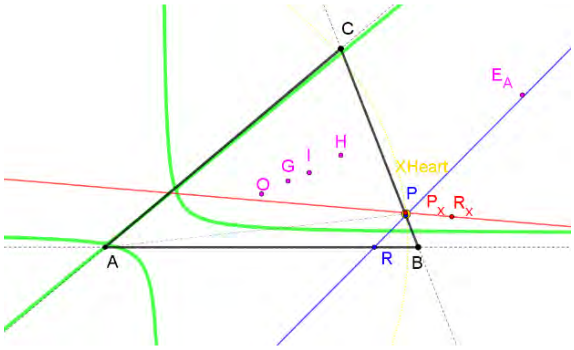


圖(二十八)

二、我們把研究結果六解之方程式，利用軟體 GGB 觀察，發現到若 *XHeart* 在三角形的內心上可得到雙曲線跟一條直線所組成的解，而 *XHeart* 在三角形的邊上也有類似的結果。因此我們希望能藉由觀察 *XHeart* 找到更多有特殊性質的點。



圖(二十九)



圖(三十)

柒、結論

本研究主要利用 Gsp、Geogebra 等動態幾何軟體進行數學實驗，透過許多的觀察、猜測及證明，解決了研究目的所提出的問題，而得到了許多讓我們意想不到的有意思的結果。

在研究過程中，無論實驗看得出結果，看不出結果，我們都利用所學，或者找到了可以掌握的方法，經過無數次的驗算，對結論加以嚴謹的證明，或者進行推論。並藉由這篇作品的研究，除了印證課本所學，更是學到了許多課本中沒有講授的數學知識，例如斜角坐標、包絡線軌跡方程式的求解、以及對稱軸不平行坐標軸的各種圓錐曲線等等，深刻地體會到了數學的力與美。

捌、参考資料

一、Paul Yiu (2015) Collinearity of the reflections of the intercepts of a line in the angle bisectors of a triangle. International Journal Of Computer Discovered Mathematics，0-0.
http://www.journal-1.eu/

二、李虎雄等 (2001) ● 高中數學甲教師手冊上冊 ● 台中市:康熙

三、國立編譯館 (1976) ● 高中數學實驗教材第四冊(自然組) ● 台灣書店

四、包絡線 Envelope. 取自維基百科.
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8C%85%E7%B5%A1%E7%B7%9A

五、賀功保 葉美雄 (2009) ● 三角形的五心 ● 哈爾濱工業大學出版社

【評語】050411

1. 本作品從解析的角度切入，得到不錯的結論，如果反過來從幾何角度解釋，是否依然可以找到幾何性質印證結果的正確性呢？

2. 最後研究嘗試從共線性質推得一般化結果，得到一個二元三次式，可從參數 S、T 回頭驗證前面結果。

3. 坐標系之間的轉換對於圖形的描述，需要更清楚的論述來確認研究結果的正確性。

作品海報

摘要

取一條直線L，交ΔABC三邊或邊之延長線於三點，再將此三點依序對內角平分線以及中垂線等，分別作對稱後，所得三點會有何性質呢?

我們借助數學軟體 Gsp 以及 Geogebra 進行數學實驗與觀察，並由斜角坐標的觀點，利用向量的手法研究與證明，得到以下一些重要的結果：

關於三角形的五心，我們解決了ΔABC三邊或邊之延長線上三點，分別對稱五心連線後，所得三點共線的參數條件解，並對共線性質做了一些探討，發現一些軌跡直線的包絡線，與二次曲線間的關聯，以及這些曲線與給定三角形的一些特別的連結。

此外，我們也就此研究問題，試圖尋找具有特別性質的未知新心。

壹、研究動機

我們在尋找題目時，在國外的一個專門利用電腦來發現並解決數學問題的期刊網站：International Journal of Computer Discovered Mathematics 上，看到一篇關於三角形中一條直線對角平分線對稱後共線性的研究。

雖然我們對這篇論文所提出的結果很有興趣，但我們發現文中使用的手法並不是我們熟悉的方法，且結論沒有詳盡的計算過程，讓我們不禁好奇：有甚麼我們可以掌握的方法可以解決同樣的問題呢？加上其探討的僅有內心，因此我們開始思考是否可將類似問題延伸推廣至其它情形呢？

貳、研究目的

取一條直線L，交給定ΔABC三邊或邊之延長線於P、Q、R三點，再將此三點依序對

一、ΔABC的內心與三頂點A、B、C的連線

二、ΔABC的三中垂線

三、ΔABC的三中線

四、ΔABC的三高

五、ΔABC的旁心與三頂點A、B、C的連線

六、一定點 X(稱$XHeart$)與三頂點A、B、C的連線分別作對稱後，研究：

(一)、對稱所得三點共線的條件為何？

(二)、共線性質與軌跡直線包絡之圖形探討。

參、研究設備及器材

紙筆及其餘文書用具、軟體 Geogebra(GGB)、軟體 GSP、電腦

肆、研究過程與方法

一、選定斜角坐標系統

二、求出$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{BQ}$、$\overrightarrow{CR}$以$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{AC}$為基底向量之線性組合表達式

三、推導出一向量對一直線的對稱向量，可得

公式一：在斜角坐標系$<A;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}>$下，向量$<u,v>$對稱$<x,y>$之對稱向量$<u',v'>$為

$$\left\langle \frac{(x^2c^2-y^2b^2)u+\left[2yb^2+(b^2+c^2-a^2)x\right]xv}{x^2c^2+y^2b^2+(b^2+c^2-a^2)xy}, \frac{(y^2b^2-x^2c^2)v+\left[2xc^2+(b^2+c^2-a^2)y\right]yu}{x^2c^2+y^2b^2+(b^2+c^2-a^2)xy} \right\rangle$$

四、求出直角坐標系與斜角坐標系的變換公式$x'=\dfrac{x}{c}-\dfrac{X_c y}{cY_c}, y'=\dfrac{y}{Y_c}$

伍、研究成果

一、任取一條直線L_1，交給定ΔABC三邊或邊之延長線於P、Q、R三點，再將此三點依序對內角平分線$\overleftrightarrow{AI},\overleftrightarrow{BI},\overleftrightarrow{CI}$分別作對稱後，得$P_I$、$Q_I$、$R_I$三點。

研究問題一 結論：

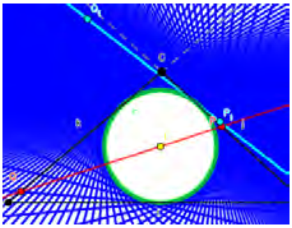
1-1. 若s,t在雙曲線$t=\dfrac{sc}{s(a+b+c)-b}$上，則直線L_1會通過內心I，且此時P_I、Q_I、R_I三點共線。

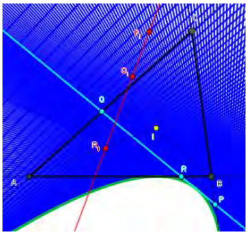
1-2. 對稱所得三點共線之直線$P_IQ_IR_I=L_1'$

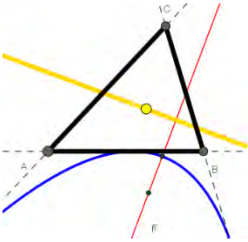
所包絡出的圖形，恰為ΔABC的內切圓。參考圖(一)。

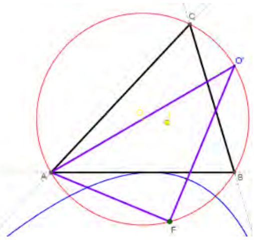
1-3. 若s與t在直線$t=\dfrac{(b-c)(b+c-a)+s(a-b)(a+b-c)}{(a-c)(a-b+c)}$上，則直線$L_1$所包絡出的圖形為一拋物線，且此時$P_I$、$Q_I$、$R_I$三點共線。參考圖(二)。

1-4. 拋物線的準線必過 ΔABC 的內心 I 。參考圖(三)。
1-5. 拋物線的焦點，位於 ΔABC 的外接圓上。參考圖(四)。


圖(一)


圖(二)


圖(三)


圖(四)

二、任取一條直線 L_2 ，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點，再將此三點依序對三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 之中垂線分別作對稱後，得 P_O、Q_O、R_O 三點。

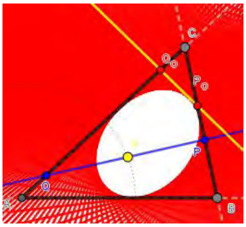
研究問題二 結論：

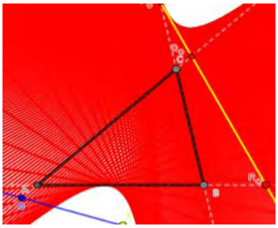
2-1. 給定 ΔABC ，取一直線 L_2 ，且分別與 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 交於 P、Q、R 三點，再將此三點依序對三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 之中垂線作對稱後，得 P_O、Q_O、R_O 三點，此三點必共一直線 L_2' 。

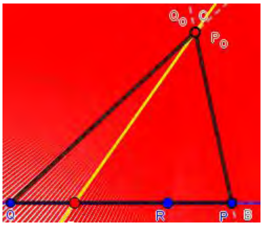
2-2. 直線 L_2 過任一定點 X ，且分別與 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 交於 P、Q、R 三點，再將此三點依序對三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 之中垂線作對稱後，依 X 所在位置， L_2' 包絡出的圖形如下：

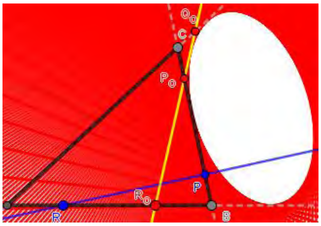
(1)在Ⅰ區 包絡出一內切橢圓。參考圖(五)。 (2)在Ⅱ、Ⅴ、Ⅷ區 包絡出一外切雙曲線。參考圖(六)。
(3)在Ⅲ、Ⅵ、Ⅸ區 為拋物線的退化，即無圖形。參考圖(七)。
(4)在Ⅳ、Ⅶ、Ⅹ區 包絡出一外切橢圓。參考圖(八)。

2-3. 當定點 X 為 ΔABC 的外心時，猜測外心恰為所包絡出圓錐曲線的焦點。


圖(五)


圖(六)


圖(七)


圖(八)

三、 任取一條直線 L_3 ，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點，再將此三點依序對中線 $\overleftrightarrow{AI},\overleftrightarrow{BI},\overleftrightarrow{CI}$ 分別作對稱後，得 P_G、Q_G、R_G 三點。

研究問題三 結論：

3-1. 當 s,t 滿足方程式 $\Delta_G = Bs^2t + Cst^2 + Es^2 + Fst + Gt^2 + Hs + It = 0$ ， P_G、Q_G、R_G 三點共線。且上式無法分解成一個二次式及一直線。

四、任取一條直線 L_4 ，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點， H 為垂心，再將此三點依序對 $\overrightarrow{AH}$、$\overrightarrow{BH}$、$\overrightarrow{CH}$ 分別作對稱後，得 P_H、Q_H、R_H 三點。

研究問題四 結論：

4-1. 當 s,t 滿足方程式

$$\Delta_H = c^2\left(a^2c^2 - a^4 - b^2c^2 + b^4\right)s^2 + 2b^2c^2\left(c^2 - b^2\right)st + b^2\left(b^2c^2 - c^4 - a^2b^2 + a^4\right)t^2$$
$$+\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(2b^2c^2 - b^4 - c^4 + a^4 - a^2c^2\right)s + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - a^4 + a^2b^2\right)t = 0$$

P_H、Q_H、R_H 三點共線，且 $\Delta_H = 0$ 的圖形為一雙曲線。

五、任取一條直線 L_5 ，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點， E_A 為相對頂點 A 之旁心。再將此三點 依序對 A 內角平分線 $\overleftrightarrow{AE_A}$ 與 B,C 外角平分線 $\overleftrightarrow{BE_A},\overleftrightarrow{CE_A}$ 分別作對稱後，得三點 P_{E_A}、Q_{E_A}、R_{E_A} 。

研究問題五 結論：

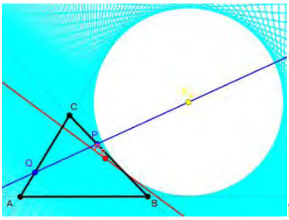
5-1. 若 s,t 滿足 $t = \dfrac{sc}{s(-a+b+c)-b}$ 上，則直線 L_5 會通過旁心 E_A ，且此時 P_{E_A}、Q_{E_A}、R_{E_A} 三點共線。

5-2. 對稱後三點共線之直線 L_5' 所包絡出的圖形，恰為 ΔABC 以 E_A 為圓心的旁切圓。
參考圖(九)。

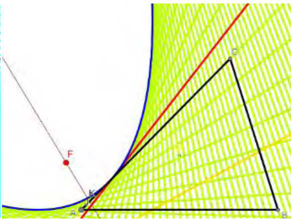
5-3. 若 s 與 t 在直線 $t=\dfrac{(b-c)(a+b+c)+s(a+b)(a-b+c)}{(a+c)(a+b-c)}$ 上，則直線 L_5 所包絡出的圖形為拋物線，且此時 P_{E_A}、Q_{E_A}、R_{E_A} 三點共線。參考圖(十)。

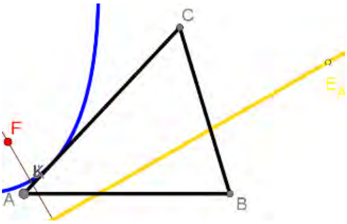
5-4 拋物線的準線必過 ΔABC 的旁心 E_A。參考圖(十一)。

5-5 拋物線的焦點，位於 ΔABC 以 E_A 為圓心的旁切圓上。



圖(九)


圖(十)



圖(十一)

六、任取一條直線 L_6，交給定 ΔABC 三邊或邊之延長線於 P、Q、R 三點，X ($XHeart$) 為一定點，再將此三點依序對 $\overrightarrow{AX}$、$\overrightarrow{BX}$、$\overrightarrow{CX}$ 分別作對稱後，得 P_X、Q_X、R_X 三點。

研究問題六 結論：

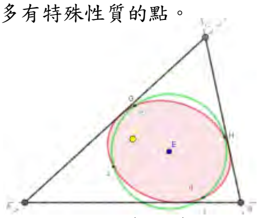
設 ΔABC 中，$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$，$X$ 為某定點。直線 L_6 分別與 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 交於 P、Q、R 三點，依序對 $\overline{AI},\overline{BI},\overline{CI}$ 分別作對稱後，得 P_X、Q_X、R_X 三點。令 $\overrightarrow{AR}=s\,\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=t\,\overrightarrow{AC}$，有

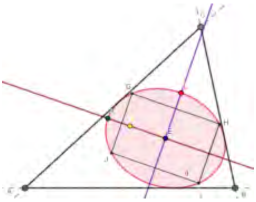
6-1. **當 s,t 滿足以下方程式 $\Delta_X=Bs^2t+Cst^2+Es^2+Fst+Gt^2+Hs+It=0$**
P_X、Q_X、R_X 三點共線。

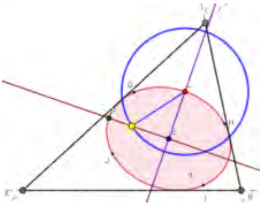
陸、討論

一、在研究結果二中之包絡線圖形，其曲線焦點看似為外心，因此我們利用軟體 GGB 繪圖驗證，確認圓錐曲線焦點即為外心。如圖(十二) 、圖(十三)、 圖(十四)。

二、我們把研究結果六解之方程式，利用軟體 GGB 觀察，發現到若在三角形的內心上可得到雙曲線跟一條直線所組成的解，而在三角形的邊上也有類似的結果。因此我們希望能藉由觀察找到更多有特殊性質的點。


圖(十二)


圖(十三)


圖(十四)

柒、結論

本研究主要利用 Gsp、Geogebra 等動態幾何軟體進行數學實驗，透過許多的觀察、猜測及證明，解決了研究目的所提出的問題，而得到了許多讓我們意想不到的有意思的結果。

在研究過程中，無論實驗看得出結果，看不出結果，我們都利用所學，或者找到了可以掌握的方法，經過無數次的驗算，對結論加以嚴謹的證明，或者進行推論。並藉由這篇作品的研究，除了印證課本所學，更是學到了許多課本中沒有講授的數學知識，例如斜角坐標、包絡線軌跡方程式的求解、以及對稱軸不平行坐標軸的各種圓錐曲線等等，深刻地體會到了數學的力與美。

捌、參考資料

一、Paul Yiu (2015) Collinearity of the reflections of the intercepts of a line in the angle bisectors of a triangle. International Journal Of Computer Discovered Mathematics，0-0.

二、賀功保 葉美雄 (2009) ● 三角形的五心● 哈爾濱工業大學出版社

三、國立編譯館 (1976) ● 高中數學實驗教材第四冊(自然組) ● 台灣書店