

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 數學科

050410

碳球模型與多面體

學校名稱：嘉義市私立興華高級中學

作者： 高三 王培宇 高三 莊惠雯 高二 李怡寬	指導老師： 李碩才
---	------------------

關鍵詞：碳球模型、多面體

摘要

在組裝碳球模型的過程中，我們好奇碳球模型之五邊形、六邊形、七邊形的數量是否有其特殊關係，才會組成多面體，希望經由研究後，可以發現令平面形成多面體的原因，且應證碳球模型中，五邊形、六邊形、七邊形之特殊關係恆成立，並進一步延伸至其他多面體。

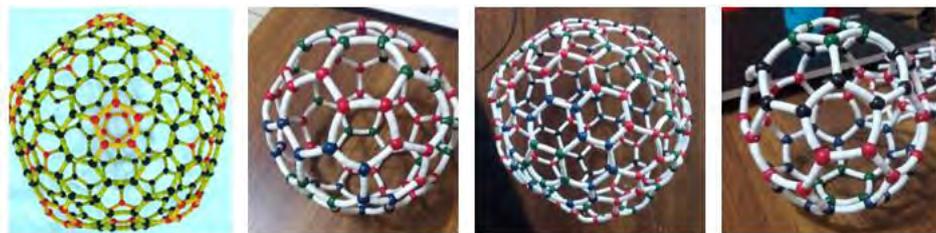
由文獻探討中，得知多面體缺角和為 720° 、尤拉定理的:點+面=邊+2、及巴克球與碳球模型之性質，進而進行相關之研究。

由研究中，我們得到的結論為:

- 一、五邊形數量減七邊形數量等於 12
- 二、 n 顆碳原子模型(n 為偶數且 ≥ 20)組成之碳球模型，有 $[0.25n-5]+1$ 個組合方式。
- 三、對於符合每個點連接 3 條邊的多面體， $\sum_{k=1}^{\infty} (6 - N_k) = 12$ 關係式恆成立。
- 四、對於符合 $2 \cdot \text{邊} - 3 \cdot \text{點} = \alpha$ 的多面體， $\sum_{k=1}^{\infty} (6 - N_k) = 12 + 2\alpha$ 關係式恆成立。

壹、研究動機

在組裝碳球模型的過程中，我們觀察到當一頂點的周圍角度和不足 360° 時，即會折起一個角度，最終形成多面體。此外，我們也好奇碳球模型中，五邊形、六邊形、七邊形的數量是否有其特殊關係，才會組成多面體，這些有趣的情況，激起了我們進一步探究的渴望，開啟了此次科學展覽的研究。



貳、研究目的

希望經由研究後，可以發現令平面形成多面體的原因，且應證碳球模型中，五邊形、六邊形、七邊形之特殊關係恆成立，並進一步延伸至其他多面體。

參、研究設備及器材

- 一、碳原子模型 240 顆。
- 二、筆記本 1 本。
- 三、鉛筆數支。

肆、研究過程

一、文獻探討:

(一)、多面體之缺角和

在一多面體中以 P 點為頂點之各面角為 $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle n$ ，則此頂點 P 之缺角定義為:

頂點 P 之缺角 = $360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n)$

例如:由圖 4-1(正四面體)而言，其頂點 A 由三個不同之面 ABC、ACD、ABD 相交組合而成，而就頂點 A 而言，A 點之缺角為 $360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 360^\circ - 3 \times 60^\circ = 180^\circ$

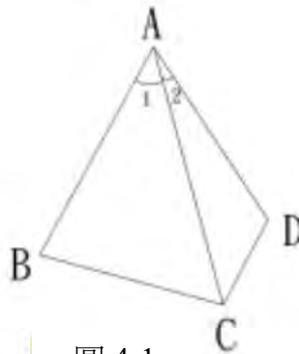


圖 4-1

< pf >

假定有一多面體之某一面，如圖 4-2。

而單就此面之多邊形之總角度和 $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n = 360^\circ$

$$(Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n) + (X_1 + X_{2n}) + (X_2 + X_3) + (X_4 + X_5) + \dots + (X_{2n-2} + X_{2n-1}) \text{-----式①}$$

其中 $X_1 + X_2 + Z_1 = 180^\circ$

$$X_3 + X_4 + Z_2 = 180^\circ$$

:

$$X_{2n-1} + X_{2n} + Z_n = 180^\circ$$

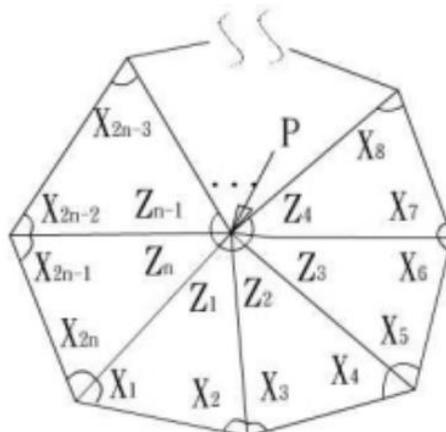


圖 4-2

甲、形成新多面體後角度變化後期總和依然不變(P 點向外延伸後至 P₁)，如圖 4-3。

$$(z_1+z_2+z_3+\dots+z_n)+(x_1+x_{2n})+(x_2+x_3)+(x_4+x_5)+\dots+(x_{2n-2}+x_{2n-1})\text{-----式②}$$

又因為 $x_1+x_2+z_1=180^\circ$

$$x_3+x_4+z_2=180^\circ$$

⋮

$$x_{2n-1}+x_{2n}+z_n=180^\circ$$

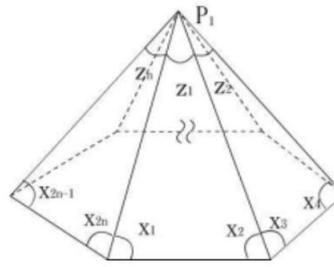


圖 4-3

式①、式②相等，又因為原 P 點面角和為 360°，故不影響各頂點缺角和，得證。

乙、又 P 點向內縮回至 P₂，角度變化後，其總和依然不變，如圖 4-4。

$$(k_1+k_2+k_3+\dots+k_n)+(y_1+y_{2n})+(y_2+y_3)+(y_4+y_5)+\dots+(y_{2n-2}+y_{2n-1})\text{-----式③}$$

又因為 $y_1+y_2+k_1=180^\circ$

$$y_3+y_4+y_2=180^\circ$$

⋮

$$y_{2n-1}+y_{2n}+k_2=180^\circ$$

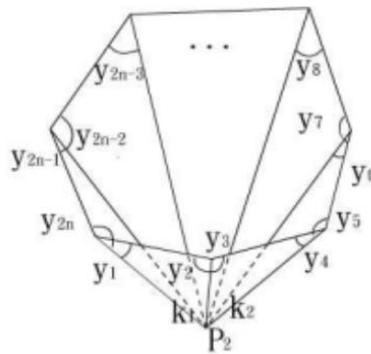


圖 4-4

由式①、式③相等，得證。

丙、在變形過程中，稜線可任意伸縮而不影響各頂點之缺角和：

因為稜線伸縮並不會影響各面的面角總和，故不影響各點之缺角和。如圖 4-5 所示的四面體之缺角和依然為 $4 \times 180^\circ$ ，其他多面體亦是如此。

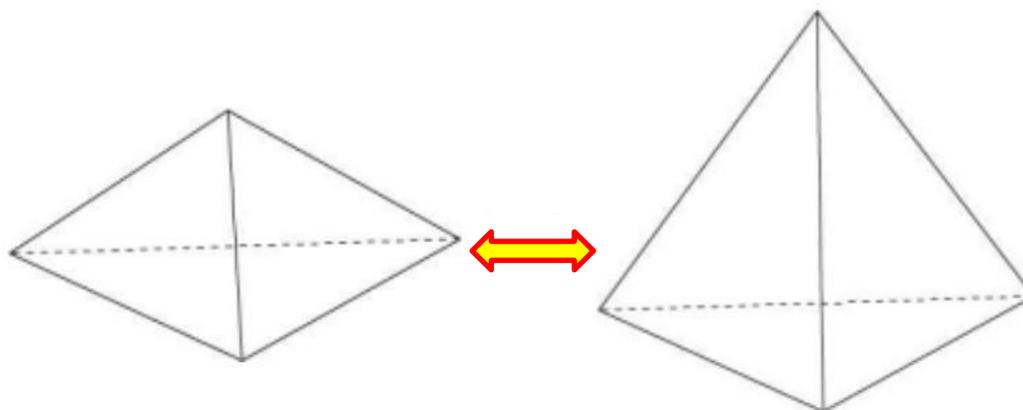


圖 4-5

(二)、尤拉定理

對於任意多面體，其點、邊、面個數之關係滿足 **點+面=邊+2**

(三)、巴克球

碳六十(C60)分子，又稱為弗勒碳(fullerene)，或是巴克球(Buckyball)，外型上與足球外觀類似的。基本上與足球外觀是一樣的，在 1970 年開始有人臆測這種結構分子的存在，1984 年起由 Smalley 等人紛紛證實這種足球結構分子的存在，也因此於 1996 獲得諾貝爾化學獎。由於該結構與足球外觀相近，且在尺規上僅有零點數個奈米，所以我們也稱他為奈米碳球。

C60 是由 60 個碳所構成，所以我們已經知道頂點的數目是 60，接下來我們發揮我們的推理能可以推算出有多少菱邊呢？科學家已經告訴我們碳原子在這個結構是以 SP2 分子軌域鍵結，所以每個碳提供**三隻腳**與其他一樣的碳鍵結共用所以 $60 \times 3 / 2 = 90$ 有 90 個菱邊，接下來我們再依據 Euler 定理可以算出這個碳球結構有 32 個面。科學家經過一連串的分析後，更進一步了解這 32 個面，分別由 12 個五邊形 20 個六邊形所構成。您有可以找其他有這個模型的人，一起來組更大的碳球模型或碳管結構，不過一個大原則，您僅能有**五邊形、六邊形、七邊形的面**。

二、碳球模型的研究

研究一:多面體缺角和為 720°

在文獻探討(一)中,有多面體缺角和為 720° 的證明,但是否有更簡易的方式來證明呢?

我們的證明方式如下:

設點=多面體中點的個數 邊=多面體中邊的個數 面=多面體中面的個數

缺角和=點 $\times 360^\circ$ -各面角度和=點 $\times 360^\circ - \sum_{k=1}^{\overline{\text{面}}}(N_k - 2) \times 180^\circ$ (N_k 表示第 k 個面的邊數)

=點 $\times 360^\circ - (\sum_{k=1}^{\overline{\text{面}}} N_k - \overline{\text{面}} \times 2) \times 180^\circ = \text{點} \times 360^\circ - (2 \text{ 邊} - 2 \text{ 面}) \times 180^\circ = 360^\circ \times (\text{點} - \text{邊} + \text{面})$

接著從尤拉定理的等式:點+面=邊+2 移項,得到:點+面-邊=2

帶入原式缺角和= $360^\circ \times (\text{點} - \text{邊} + \text{面}) = 360^\circ \times 2 = 720^\circ$

對於任意多面體,其缺角和皆為 720° ,故得證。

研究二:碳球模型點與邊的關係

在碳球模型中,每個點皆連接 3 條邊,而每條邊皆連接 2 個點。因此,點 $\times 3 = \text{邊} \times 2$ 。

由此可知,點的個數必須為偶數。

例如: 60 個點會構成 90 個邊($60 \times 3 = \text{邊} \times 2$, 得到:邊=90)

65 個點則無法形成多面體(因為 $65 \times 3 = \text{邊} \times 2$, 得到:邊=97.5, 與事實不符)

研究三:碳球模型與五邊形、六邊形之關係

在碳球模型中，我們可以任意組裝，但有一個大原則，那就是只能有五邊形、六邊形、七邊形所組成。在組裝碳球模型的過程中，我們拼湊出了比 C_{60} 更大的 C_{80} 、 C_{120} 、 C_{180} 、 C_{240} 模型，並發覺其五邊形之數量皆為 12 個，只是差在六邊形數量的不同，如表 4-1 所示。

表 4-1:碳球模型與五邊形六邊形之關係

	C_{60}	C_{80}	C_{120}	C_{180}	C_{240}
五邊形	12	12	12	12	12
六邊形	20	30	50	80	110

設 C_{60} 六邊形的數量為 X

說明:共有 12 個五邊形與 X 個六邊形，由於每個邊被計算了 2 次，

因此其邊的數量為: $(12*5+6*X)/2$

則 $12*5+6*X=2*邊=3*點=3*60$ ， $X=20$

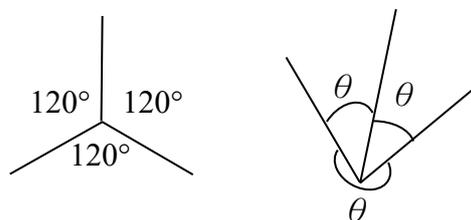
同理可證， C_{80} 會有 $(3*80-12*5)/6=30$ 個六邊形

以此類推。

此外，利用多面體缺角和為 720° ，可知在只有五邊形與六邊形的情況下，五邊形必為 12 個，證明如下:

若以平面論，被平均切分成 3 等分的平面各佔 $360^\circ * \frac{1}{3} = 120^\circ$

如下圖所示，若平面的 360° 被壓縮成立體，使得後角 $\theta <$ 前角的標準 120° ，則產生的缺角為 $120^\circ - \theta$ 。



因五邊形的各個角皆為立體角的 $\frac{1}{3}$ 部分，故得到**五邊形造成之總缺角為:**

$$120^\circ * 5 - (5-2) * 180^\circ = 120^\circ * 5 - (180^\circ * 5 - 360^\circ) = 600^\circ - 540^\circ = 60^\circ$$

再由多面體之缺角和為 720° 可得: $720^\circ = 60^\circ * 12 = 60^\circ * \text{五邊形數量}$ ，故**五邊形數量必為 12**

研究四：碳球模型與五邊形、六邊形、七邊形之關係

但碳球模型可以包含的並不只有五邊形與六邊形，還有七邊形。若是將七邊形也考慮進去，會發生什麼狀況呢？

從研究三的證明中，我們也可以得到七邊形造成之總缺角為：

$$120^\circ \cdot 7 - (7-2) \cdot 180^\circ = 120^\circ \cdot 7 - (180^\circ \cdot 7 - 360^\circ) = 840^\circ - 900^\circ = -60^\circ$$

再由多面體缺角和 $=720^\circ = \text{五邊形數量} \cdot 60^\circ + \text{七邊形數量} \cdot (-60^\circ)$ ，同除 60° 得：

$$\text{五邊形數量} - \text{七邊形數量} = 12$$

因此，以運用 60 顆碳原子模型進行組裝為例，我們可以假設：

七邊形的數量為 X 個，則五邊形的數量為 $X+12$

並且，運用尤拉定理，我們可以列得面的個數 Y 的方程式： $60+Y=60 \cdot 3/2+2$ ，得 $Y=32$

故六邊形的數量 $=Y - \text{五邊形數量} - \text{七邊形數量} = Y - (X+12) - X = 32 - (2X+12) = 20 - 2X$

由表 4-2 中可得知 C_{60} 的碳球模型共有 11 種組合。

表 4-2: C_{60} 的碳球模型組合

C_{60}	五邊形數量	六邊形數量	七邊形數量	面的總數量	缺角和
組合一	12	20	0	32	720°
組合二	13	18	1	32	720°
組合三	14	16	2	32	720°
組合四	15	14	3	32	720°
組合五	16	12	4	32	720°
組合六	17	10	5	32	720°
組合七	18	8	6	32	720°
組合八	19	6	7	32	720°
組合九	20	4	8	32	720°
組合十	21	2	9	32	720°
組合十一	22	0	10	32	720°

同理得知: C_{80} 的碳球模型組合共有 16 種方式, C_{120} 的碳球模型組合共有 26 種方式, C_{180} 的碳球模型組合共有 41 種方式。 C_{240} 的碳球模型組合共有 56 種方式。如表 4-3 所示。

表 4-3:碳球模型組合情況

	總面數	五邊形數量	六邊形數量	七邊形數量	組合情況
C_{60}	32	12+X	20-2X	X	X=0~10, 共 11 種組合
C_{80}	42	12+X	30-2X	X	X=0~15, 共 16 種組合
C_{120}	62	12+X	50-2X	X	X=0~25, 共 26 種組合
C_{180}	92	12+X	80-2X	X	X=0~40, 共 41 種組合
C_{240}	122	12+X	110-2X	X	X=0~55, 共 56 種組合

研究五:使用 n 顆碳原子模型, 五邊形、六邊形、七邊形的組合數(n 為偶數且 ≥ 20)

由研究二可知, n 為偶數。而由研究三可知, 最小的碳球模型 12 個五邊形和 0 個六邊形組成, 因此至少要有 $12 \times 5/3 = 20$ 顆碳原子模型所組成, 故 $n \geq 20$ 。

以 n 顆碳原子模型組成之碳球模型, 可利用 2 邊-3 點=0, 求得其邊的數量為 $1.5n$, 再從尤拉定理的點+面=邊+2 可知, 其面的數量=邊-點+2= $1.5n-n+2=0.5n+2$

故當七邊形的數量為 X 時, 五邊形的數量為 $X+12$, 而六邊形的數量則為

$$0.5n+2-X-(X+12)=0.5n-2X-10 \geq 0$$

得 $0.25n-5 \geq X$, 故 X 有 $[0.25n-5]+1$ 個可能, 所以 C_n 的碳球模型, 共有 $[0.25n-5]+1$ 個組合 (+1 是因為 X 可以等於 0)

研究六:能使用的多邊形不僅限於五、六、七邊形時，如表 4-4 所示。

表 4-4 其他符合每個點連接 3 條邊的多面體

	正四面體	正六面體	N 角柱
三角形	4	0	0
四邊形	0	6	N
N 邊形	0	0	2

我們發現，這些多面體都會符合： $\sum_{k=1}^{\overline{\text{面}}} (6 - N_k) = 12$ ，證明如下：

設 N_k 表示第 k 個面的邊數

而由研究三的方式中，我們可以列得 N_k 邊形造成的總缺角為：

$$120^\circ * N_k - (N_k - 2) * 180^\circ = 120^\circ * N_k - (180^\circ * N_k - 360^\circ) = 360^\circ - N_k * 60^\circ = 60^\circ * (6 - N_k)$$

再由多面體之缺角和為 720° 可得多面體缺角和 = $720^\circ = 60^\circ * 12 = \sum_{k=1}^{\overline{\text{面}}} 60^\circ * (6 - N_k)$

因此得到 $\sum_{k=1}^{\overline{\text{面}}} (6 - N_k) = 12$

研究七:能使用的多邊形不僅限於五、六、七邊形，且每個點可連接不只 3 條邊時

當每個點可連接的邊不只 3 條時，我們可列得： $2 * \text{邊} \geq 3 * \text{點}$

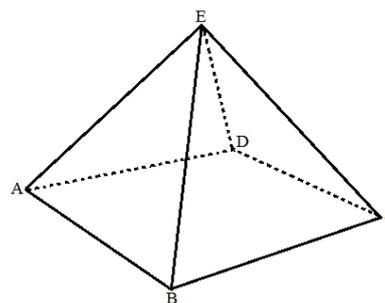
(等號成立時，每個點恰好接 3 條邊)

因此，我們假設一個變數 α ，使 $2 * \text{邊} - 3 * \text{點} = \alpha$ (α 為正整數或 0)

以右圖的四角錐為例，其頂點 E 接了 4 條邊，

而點 A、點 B、點 C、點 D 則都連接 3 條邊，

因此其 $\alpha = 1$ 。



當一多面體符合 $2 * \text{邊} - 3 * \text{點} = \alpha$ 時，

其每條邊亦連接 2 個點，並設每個點平均連接了 X 條邊，列得 $2 * \text{邊} = X * \text{點}$ 。

將 $2 * \text{邊} - 3 * \text{點} = \alpha$ 移項，得 $2 * \text{邊} = \alpha + 3 * \text{點}$ 。

帶入 $2 * \text{邊} = X * \text{點}$ ，得 $\alpha + 3 * \text{點} = X * \text{點}$ ，同除以“點”後，得到 $X = 3 + (\alpha / \text{點})$ 。

而由研究三的方式中，可知其標準角應為 $360^\circ/X$ 。

再由研究三的方式中，我們列得 N_k 邊形造成的總缺角和為：

$$\begin{aligned}
 360^\circ/X * N_k - (N_k - 2) * 180^\circ &= 360^\circ/X * N_k - (180^\circ * N_k - 360^\circ) \\
 &= N_k \{ (360^\circ/X) - 180^\circ \} + 360^\circ \\
 &= N_k \{ (360^\circ/3 + \alpha/\text{點}) - 180^\circ \} + 360^\circ \\
 &= N_k \{ (360^\circ * \text{點}/3 * \text{點} + \alpha) - 180^\circ \} + 360^\circ \\
 &= N_k \{ (-180^\circ * \text{點} - 180^\circ * \alpha) / (\alpha + 3 * \text{點}) \} + 360^\circ \\
 &= 360^\circ - 60^\circ * N_k \{ (3 * \text{點} + 3\alpha) / (\alpha + 3 * \text{點}) \} \\
 &= 360^\circ - 60^\circ * N_k \{ [2\alpha / (\alpha + 3 * \text{點})] + 1 \} \\
 &= 360^\circ - 60^\circ * N_k - 60^\circ * N_k * [2\alpha / (\alpha + 3 * \text{點})]
 \end{aligned}$$

又由缺角和為 720° 得：

$$720^\circ = \sum_{k=1}^{\overline{m}} \{ 360^\circ - 60^\circ * N_k - 60^\circ * N_k * [2\alpha / (\alpha + 3 * \text{點})] \}$$

$$\text{同除以 } 60^\circ \text{ 後移項，得 } 12 + \sum_{k=1}^{\overline{m}} [(N_k * 2\alpha) / (\alpha + 3 * \text{點})] = \sum_{k=1}^{\overline{m}} (6 - N_k)$$

$$\text{整理後得到 } 12 + [(2\alpha) / (\alpha + 3 * \text{點})] * \sum_{k=1}^{\overline{m}} N_k = \sum_{k=1}^{\overline{m}} (6 - N_k)$$

$$\text{將 } \sum_{k=1}^{\overline{m}} N_k = 2 * \text{邊} = 3 * \text{點} + \alpha \text{ 帶入上式，得 } 12 + [(2\alpha) / (\alpha + 3 * \text{點})] * (3 * \text{點} + \alpha) = 12 + 2\alpha = \sum_{k=1}^{\overline{m}} (6 - N_k)$$

$$\text{因此得到 } \sum_{k=1}^{\overline{m}} (6 - N_k) = 12 + 2\alpha$$

伍、研究結果

- 一、除了文獻探討外，我們用了不同的方法證明了多面體缺角和為 720° 是正確的。
- 二、欲構成碳球所需的點必為偶數，否則無法連成碳球多面體。
- 三、碳球模型的多邊形只為五邊形與六邊形時，則不論其偶數點為何，其五邊形數量均為 12。
- 四、五邊形數量減七邊形數量等於 12。
- 五、碳球模型若同時考慮五邊形、六邊形與七邊形時，可以組合的情況則不是唯一，會有多種情況，如表 4-2 與表 4-3 所示。
- 六、 n 顆碳原子模型(n 為偶數且 ≥ 20)組成之碳球模型，有 $[0.25n-5]+1$ 個組合方式。
- 七、對於符合每個點連接 3 條邊的多面體， $\sum_{k=1}^{\infty} (6 - N_k) = 12$ 關係式恆成立。
- 八、對於符合 $2 * \text{邊} - 3 * \text{點} = \alpha$ 的多面體， $\sum_{k=1}^{\infty} (6 - N_k) = 12 + 2\alpha$ 關係式恆成立。

陸、討論

- 一、再研究包含弧線的立體圖形，如圓錐、圓柱等。
- 二、未來應可再研究碳球模型的排列數。

柒、結論

在組裝碳球模型的過程中，我們也遇到了許多問題，像是五邊形和六邊形應該怎麼接，才能形成球形的 C_{180} 、 C_{240} 模型，在文獻探討中，已證明出缺角和為 720° ，但是我們再用不同的方法證明其結果是正確的。

我們也在研究的過程中，找出了他人尚未研究之性質。研究的過程雖然費時且辛苦，但我們卻從中學到了許多寶貴的經驗。

捌、參考文獻

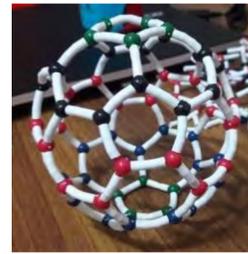
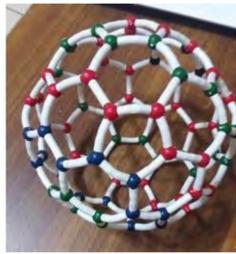
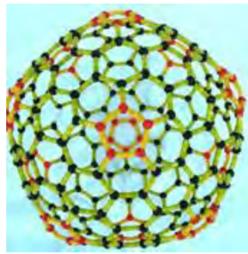
- 一、中華民國第 42 屆中小學科學展覽會「多面體的缺角和」
<https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/42/pdf/e/4/040411.pdf>
- 二、小論文:尤拉公式與多面體
<http://www.shs.edu.tw/works/essay/2008/03/2008032812145307.pdf>
- 三、巴克球 http://www.teconano.com.tw/Bg_version/work-2-6.html
- 四、高錦仁 蘇意倫 編著，選修化學(上冊)講義，康熹文化事業股份有限公司。

【評語】 050410

本作品主要是在研究碳球模型之五邊形，六邊形，七邊形的數量之間的關係，並進一步延伸到其它多面體；利用平面圖的尤拉公式，作者整理出它們之間的相關性，算是一個不錯的研究成果。這方向的研究，比較缺乏它的前瞻性；如果能夠就可行的組合，真正把那樣的碳球模型建構出來，相信會有更具體的貢獻，例如作品中所提到的 C_{60} 。另外，也可以考慮一般各種不同大小的多邊形組成的形式，並將它寫成一個通式。

壹、研究動機

在組裝碳球模型的過程中，我們觀察到當一頂點的周圍角度和不足 360° 時，即會折起一個角度，最終形成多面體。此外，我們也好奇碳球模型中，五邊形、六邊形、七邊形的數量是否有其特殊關係，才會組成多面體，這些有趣的情況，激起了我們進一步探究的渴望，開啟了此次科學展覽的研究。



貳、研究目的

希望經由研究後，可以發現令平面形成多面體的原因，且應證碳球模型中，五邊形、六邊形、七邊形之特殊關係恆成立，並進一步延伸至其他多面體。

參、研究設備及器材

一、碳原子模型240顆。 二、筆記本數本。 三、鉛筆數支。

肆、研究過程

一、文獻探討

(一)、多面體之缺角和

在一多面體中以P點為頂點之各面角為 $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle n$ ，則頂點P之缺角 $=360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n)$

例如:由圖4-1(正四面體)而言，其頂點A由三個不同之面ABC、ACD、ABD相交組合而成，而就頂點A而言，A點之缺角為 $360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 360^\circ - 3 \times 60^\circ = 180^\circ$

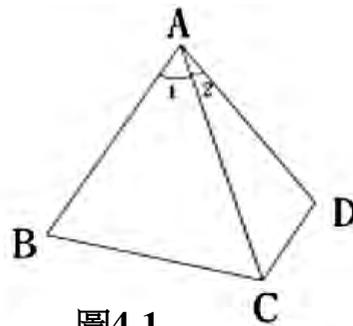


圖4-1

(二)、尤拉定理

對於任意多面體，其點、邊、面個數之關係滿足 **點+面=邊+2**

(三)、巴克球

C₆₀是由60個碳所構成，所以我們已經知道頂點的數目是60，接下來我們發揮我們的推理能可以推算出有多少菱邊呢？科學家已經告訴我們碳原子在這個結構是以SP₂分子軌域鍵結，所以每個碳提供**三隻腳**與其他一樣的碳鍵結共用所以 $60 \times 3 / 2 = 90$ 有90個菱邊，接下來我們再依據Euler定理可以算出這個碳球結構有32個面。可以找其他有這個模型的人，一起來組更大的碳球模型或碳管結構，不過一個大原則，您僅能有**五邊形、六邊形、七邊形**的面。

二、碳球模型的研究

研究一:多面體缺角和為720°

在文獻探討(一)中，有多面體缺角和為720°的證明，但是否有更簡易的方式來證明呢？

我們的證明方式如下：

設點=多面體中點的個數 邊=多面體中邊的個數 面=多面體中面的個數

缺角和=點*360°-各面角度和=點*360°- $\sum_{k=1}^{\text{面}} (N_k - 2) * 180^\circ$ (N_k表示第k個面的邊數)

=點*360°-($\sum_{k=1}^{\text{面}} N_k - \text{面} * 2$)*180°=點*360°-(2邊-2面)*180°=360°*(點-邊+面)

接著從尤拉定理的等式:點+面=邊+2 移項，得到:點+面-邊=2

帶入原式缺角和=360°*(點-邊+面)=360°*2=720°，故得證。

研究二:碳球模型點與邊的關係

在碳球模型中，每個點皆連接3條邊，而每條邊皆連接2個點。因此，點*3=邊*2。

由此可知，點的個數必須為偶數。

例如: 60個點會構成90個邊。(60*3=邊*2，得到:邊=90)

65個點則無法形成多面體。(因為65*3=邊*2，得到:邊=97.5，與事實不符)

研究三:碳球模型與五邊形、六邊形之關係

在碳球模型中，我們可以任意組裝，但有一個大原則，那就是只能有五邊形、六邊形、七邊形所組成。在組裝碳球模型的過程中，我們拼湊出了比C₆₀更大的C₈₀、C₁₂₀、C₁₈₀、C₂₄₀模型，並發覺其五邊形之數量皆為12個，只是差在六邊形數量的不同，如表4-1所示。

表4-1:碳球模型與五邊形六邊形之關係

	C ₆₀	C ₈₀	C ₁₂₀	C ₁₈₀	C ₂₄₀
五邊形	12	12	12	12	12
六邊形	20	30	50	80	110

設C₆₀六邊形的數量為X。

說明:共有12個五邊形與X個六邊形，由於每個邊被計算了2次，因此其邊的數量為:(12*5+6*X)/2。

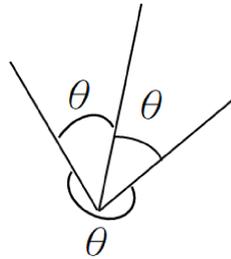
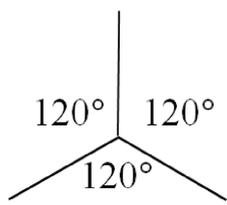
則12*5+6*X=2*邊=3*點=3*60，得到X=20。

同理可證，C₈₀會有(3*80-12*5)/6=30個六邊形，其餘以此類推。

此外，利用多面體缺角和為720°，可知在只有五邊形與六邊形的情況下，五邊形必為12個，證明如下:

若以平面論，被平均切分成3等分的平面各佔360° * $\frac{1}{3}$ =120°

如左下圖所示，若平面的360°被壓縮成立體，使得後角θ<前角的標準120°，則產生的缺角為120°-θ。



因五邊形的各個角皆為立體角的 $\frac{1}{3}$ 部分，

故得到**五邊形造成之總缺角為:**

$$120^\circ * 5 - (5-2) * 180^\circ = 120^\circ * 5 - (180^\circ * 5 - 360^\circ) = 600^\circ - 540^\circ = 60^\circ$$

再由多面體之缺角和為720°可得:720°=60°*12=60°*五邊形數量，故**五邊形數量必為12。**

研究四: 碳球模型與五邊形、六邊形、七邊形之關係

但碳球模型可以包含的並不只有五邊形與六邊形，還有七邊形。若是將七邊形也考慮進去，會發生什麼狀況呢?

從研究三的證明中，我們也可以得到**七邊形造成之總缺角為:**120°*7-(7-2)*180°=120°*7-(180°*7-360°)=840°-900°=-60°

再由多面體缺角和=720°=五邊形數量*60°+七邊形數量*(-60°)，同除60°得:**五邊形數量-七邊形數量=12。**

因此，以運用60顆碳原子模型進行組裝為例，我們可以假設:七邊形的數量為X個，所以五邊形的數量為X+12個

運用尤拉定理，我們可以列得面的個數Y的方程式:60+Y=60*3/2+2，得Y=32

故六邊形的數量=Y-五邊形數量-七邊形數量=Y-(X+12)-X=32-(2X+12)=20-2X

由表4-2中可得知C₆₀的碳球模型共有11種組合。

表4-2: C₆₀的碳球模型組合

C ₆₀	五邊形數量	六邊形數量	七邊形數量	面的總數量	缺角和
組合一	12	20	0	32	720°
組合二	13	18	1	32	720°
組合三	14	16	2	32	720°
組合四	15	14	3	32	720°
組合五	16	12	4	32	720°
組合六	17	10	5	32	720°
組合七	18	8	6	32	720°
組合八	19	6	7	32	720°
組合九	20	4	8	32	720°
組合十	21	2	9	32	720°
組合十一	22	0	10	32	720°

同理得知: C₈₀的碳球模型組合共有16種方式，C₁₂₀的碳球模型組合共有26種方式，C₁₈₀的碳球模型組合共有41種方式。C₂₄₀的碳球模型組合共有56種方式，如表4-3所示。

表4-3:碳球模型組合情況

	總面數	五邊形數量	六邊形數量	七邊形數量	組合情況
C ₆₀	32	12+X	20-2X	X	X=0~10，共11種組合
C ₈₀	42	12+X	30-2X	X	X=0~15，共16種組合
C ₁₂₀	62	12+X	50-2X	X	X=0~25，共26種組合
C ₁₈₀	92	12+X	80-2X	X	X=0~40，共41種組合
C ₂₄₀	122	12+X	110-2X	X	X=0~55，共56種組合

研究五:使用n顆碳原子模型，五邊形、六邊形、七邊形的組合數 (n為偶數且≥20)

由研究二可知，n為偶數。而由研究三可知，最小的碳球模型12個五邊形和0個六邊形組成，因此至少要有 $12 \times 5/3 = 20$ 顆碳原子模型所組成，故 $n \geq 20$ 。

以n顆碳原子模型組成之碳球模型，可利用2邊-3點=0，求得其邊的數量為1.5n，再從尤拉定理的點+面=邊+2可知，其面的數量=邊-點+2=1.5n-n+2=0.5n+2

故當七邊形的數量為X時，五邊形的數量為X+12，而六邊形的數量則為 $0.5n+2-X-(X+12)=0.5n-2X-10 \geq 0$ 得 $0.25n-5 \geq X$ ，又因X可等於0，故X有 $[0.25n-5]+1$ 種可能，所以 C_n 的碳球模型，共有 $[0.25n-5]+1$ 種組合。

研究六:能使用的多邊形不僅限於五、六、七邊形時(如表4-4表示)

表4-4:其他符合每個點連接3條邊的多面體

	正四面體	正六面體	N角柱
三角形	4	0	0
四邊形	0	6	N
N邊形	0	0	2

我們發現，這些多面體都會符合： $\sum_{k=1}^{\text{面}} (6 - N_k) = 12$ ，證明如下:(設 N_k 表示第k個面的邊數)

而由研究三的方式中，我們可以列得 N_k 邊形造成的總缺角為:

$$120^\circ \cdot N_k - (N_k - 2) \cdot 180^\circ = 120^\circ \cdot N_k - (180^\circ \cdot N_k - 360^\circ) = 360^\circ - N_k \cdot 60^\circ = 60^\circ \cdot (6 - N_k)$$

再由多面體之缺角和為 720° 可得多面體缺角和= $720^\circ = 60^\circ \cdot 12 = \sum_{k=1}^{\text{面}} 60^\circ \cdot (6 - N_k)$ ，因此得到 $\sum_{k=1}^{\text{面}} (6 - N_k) = 12$ 。

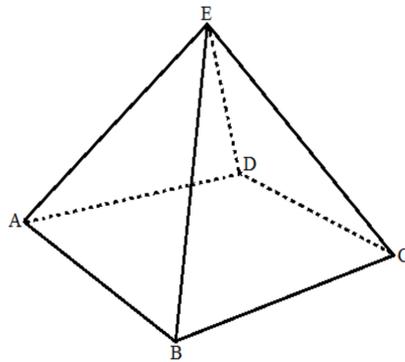
研究七:能使用的多邊形不僅限於五、六、七邊形，且每個點可連接不只3條邊時

當每個點可連接的邊不只3條時，我們可列得:2*邊 ≥ 3*點

(等號成立時，每個點恰好接3條邊)

因此，我們假設一個變數 $\alpha = 2 \cdot \text{邊} - 3 \cdot \text{點}$ (α 為正整數或0)

以右圖的四角錐為例，其頂點E接了4條邊，而點A、點B、點C、點D則都連接3條邊，因此其 $\alpha = 1$ 。



當一多面體符合 $\alpha = 2 \cdot \text{邊} - 3 \cdot \text{點}$ 時，

其每條邊亦連接2個點，並設每個點平均連接了X條邊，列得 $2 \cdot \text{邊} = X \cdot \text{點}$ 。

將 $\alpha = 2 \cdot \text{邊} - 3 \cdot \text{點}$ 移項後，代入 $2 \cdot \text{邊} = X \cdot \text{點}$ ，得 $\alpha + 3 \cdot \text{點} = X \cdot \text{點}$ ，同除以"點"後，得到 $X = 3 + (\alpha / \text{點})$ 。

由研究三的方式中，可知其標準角應為 $360^\circ / X$ 。

再由研究三的方式中，我們列得 N_k 邊形造成的總缺角和為:

$$360^\circ / X \cdot N_k - (N_k - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ / X \cdot N_k - (180^\circ \cdot N_k - 360^\circ) = N_k \{ (360^\circ / X) - 180^\circ \} + 360^\circ = N_k \{ (360^\circ / (3 + \alpha / \text{點})) - 180^\circ \} + 360^\circ$$

$$= N_k \{ (360^\circ \cdot \text{點} / (3 \cdot \text{點} + \alpha)) - 180^\circ \} + 360^\circ = N_k \{ (-180^\circ \cdot \text{點} - 180^\circ \cdot \alpha) / (\alpha + 3 \cdot \text{點}) \} + 360^\circ$$

$$= 360^\circ - 60^\circ \cdot N_k \{ (3 \cdot \text{點} + 3\alpha) / (\alpha + 3 \cdot \text{點}) \} = 360^\circ - 60^\circ \cdot N_k \{ [2\alpha / (\alpha + 3 \cdot \text{點})] + 1 \} = 360^\circ - 60^\circ \cdot N_k - 60^\circ \cdot N_k \cdot [2\alpha / (\alpha + 3 \cdot \text{點})]$$

又由缺角和為 720° 列得: $720^\circ = \sum_{k=1}^{\text{面}} \{ 360^\circ - 60^\circ \cdot N_k - 60^\circ \cdot N_k \cdot [2\alpha / (\alpha + 3 \cdot \text{點})] \}$

同除以 60° 後移項，得 $12 + \sum_{k=1}^{\text{面}} [(N_k \cdot 2\alpha) / (\alpha + 3 \cdot \text{點})] = \sum_{k=1}^{\text{面}} (6 - N_k)$

整理後得到 $12 + [(2\alpha) / (\alpha + 3 \cdot \text{點})] \cdot \sum_{k=1}^{\text{面}} N_k = \sum_{k=1}^{\text{面}} (6 - N_k)$

將 $\sum_{k=1}^{\text{面}} N_k = 2 \cdot \text{邊} = 3 \cdot \text{點} + \alpha$ 帶入上式，得 $12 + [(2\alpha) / (\alpha + 3 \cdot \text{點})] \cdot (3 \cdot \text{點} + \alpha) = 12 + 2\alpha = \sum_{k=1}^{\text{面}} (6 - N_k)$

因此得到 $\sum_{k=1}^{\text{面}} (6 - N_k) = 12 + 2\alpha$

伍、研究結果

- 一、除了文獻探討外，我們用了不同的方法證明了多面體缺角和為 720° 是正確的。
- 二、欲構成碳球所需的點必為偶數，否則無法連成碳球多面體。
- 三、碳球模型的多邊形只為五邊形與六邊形時，則不論其偶數點為何，其五邊形數量均為12。
- 四、五邊形數量減七邊形數量等於12。
- 五、碳球模型若同時考慮五邊形、六邊形與七邊形時，可以組合的情況則不是唯一，會有多種情況，如表4-2與表4-3所示。
- 六、n顆碳原子模型(n為偶數且≥20)組成之碳球模型，有 $[0.25n-5]+1$ 個組合方式。
- 七、對於符合每個點連接3條邊的多面體， $\sum_{k=1}^{\text{面}} (6 - N_k) = 12$ 關係式恆成立。
- 八、對於符合 $2 \cdot \text{邊} - 3 \cdot \text{點} = \alpha$ 的多面體， $\sum_{k=1}^{\text{面}} (6 - N_k) = 12 + 2\alpha$ 關係式恆成立。

陸、討論

- 一、再研究包含弧線的立體圖形，如圓錐、圓柱等。
- 二、未來應可再研究碳球模型的排列數。

柒、結論

在組裝碳球模型的過程中，我們也遇到了許多問題，像是五邊形和六邊形應該怎麼接，才能形成球形的 C_{180} 、 C_{240} 模型，在文獻探討中，已證明出缺角和為 720° ，但是我們再用不同的方法證明其結果是正確的。我們也在研究的過程中，找出了他人尚未研究之性質。研究的過程雖然費時且辛苦，但我們卻從中學到了許多寶貴的經驗。