

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 數學科

探究精神獎

050409

Menger Sponge 點邊面的探討

學校名稱：臺北市立第一女子高級中學

| | |
|---------------|---------------------|
| 作者： 高三 龍湘宜 | 指導老師： 楊宗穎 黃思齊 |
|---------------|---------------------|

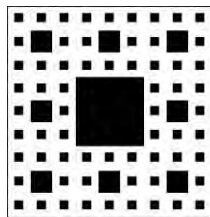
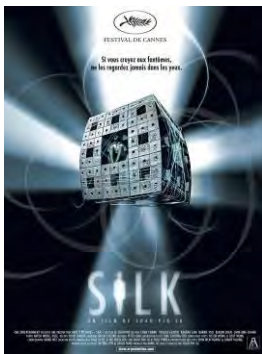
關鍵詞：Menger Sponge、Angular Defect、虧格數

摘要

給定正立方體，執行以下動作：(1) 把正立方體平均分割為 27 個小正立方體；(2) 把每一面的中間的小正立方體刪除掉，亦將最中心的小正立方體刪除掉；(3) 把遺留下來的小正立方體都依序重複步驟 (1)、(2)。重複以上步驟，若操作 n 回後，則將殘存形體稱為第 n 階的『門格海綿 Menger sponge』，並記為 M_n 。本文將第 n 階的門格海綿 M_n 視為由『true vertices、true edges、true faces』所組合而成的幾何形體，分析結構並建立遞迴關係式來計算出 M_n 中三者的數量，進一步分別運用『Total Angular Defect Formula』和『遞迴堆疊的結構關係』計算出門格海綿的虧格數。

壹、研究動機

在數列與級數的單元中，曾經遇過以下問題：『一單位長的正方形，第一次將其平分成 9 塊（九宮格形），然後挖去中間一塊。第二次再將剩餘各小正方形各平分成 9 塊，分別去掉中間各一塊，之後依此類推（如中下圖所示）。試求執行 n 次後，所刪去掉的面積總量為何？』對於這個圖形，我們覺得它呈現一種特別的數學之美，因此我們好奇，像這樣的利用遞迴手法建構出來的平面圖形，能否將類似的概念擴展到三度空間的形體？上網搜尋資料後，我們得知此問題的三度空間版本稱為門格海綿（如右下圖所示），英文為 **Menger sponge**，是一個可以擁有無限表面積，但體積趨近於 0 的形體。在收集資料的過程中，亦得知門格海綿曾經出現在 2006 年台灣科幻驚悚電影『詭絲』的劇情中（左下圖為電影海報），讓門格海綿更具有某種神秘感，這更添加了我們對於門格海綿的研究興趣。因此我們利用 3D 列印，製作了一個第 3 階門格海綿的模型，進一步觀察其結構。



有關門格海綿的表面積、體積與邊長等度量指標，皆已有完整的研究。因此我們改以不同的角度來看待門格海綿，在不計較長度、體積、表面積的情況下，延續第 50 屆北市科展作品『Menger Sponge』的內容，轉而針對新定義下的 true vertices、true edges、true faces 的數量進行研究。同時我們試著運用不同的觀點，來探討門格海綿的虧格數。

貳、研究目的

令 M_n 為第 n 階的門格海綿，我們的研究目的如下：

- (1) 針對不同長度的 true edges，求其元素數量；
- (2) 針對不同類型的 true faces，求其元素數量；
- (3) 針對不同度數的 true vertices，求其元素數量；
- (4) 計算 Menger Sponge 的虧格數。

參、研究設備及器材

方格紙、筆、電腦、繪圖與文書軟體 (Powerpoint、Word、Excel)、Mathtype、3D 列印。

肆、研究過程或方法

一、基本概念、名詞解釋與先備知識

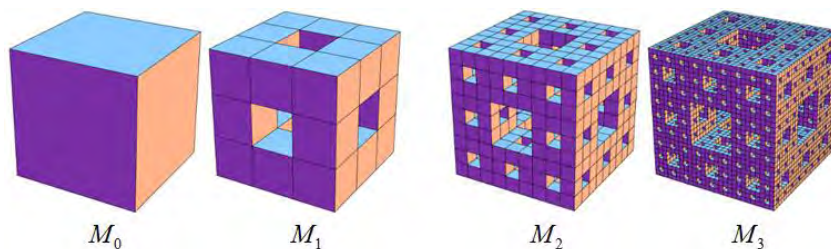
在研究過程中，我們將定義幾個名詞，用以來描述門格海綿的結構特徵。以下將依序介紹所需的先備知識。

Menger sponge 的定義

給定一個正立方體，依序執行下列步驟：

- (步驟 1)：把正立方體平均分割為 27 個小正立方體（此時正立方體的每一個面被平均分割為 9 個正方形）。
- (步驟 2)：把每一面的中間的小正立方體刪除掉，亦將最中心的小正立方體刪除掉。
- (步驟 3)：把遺留下來的 20 個小正立方體都依序重複步驟 1、步驟 2。

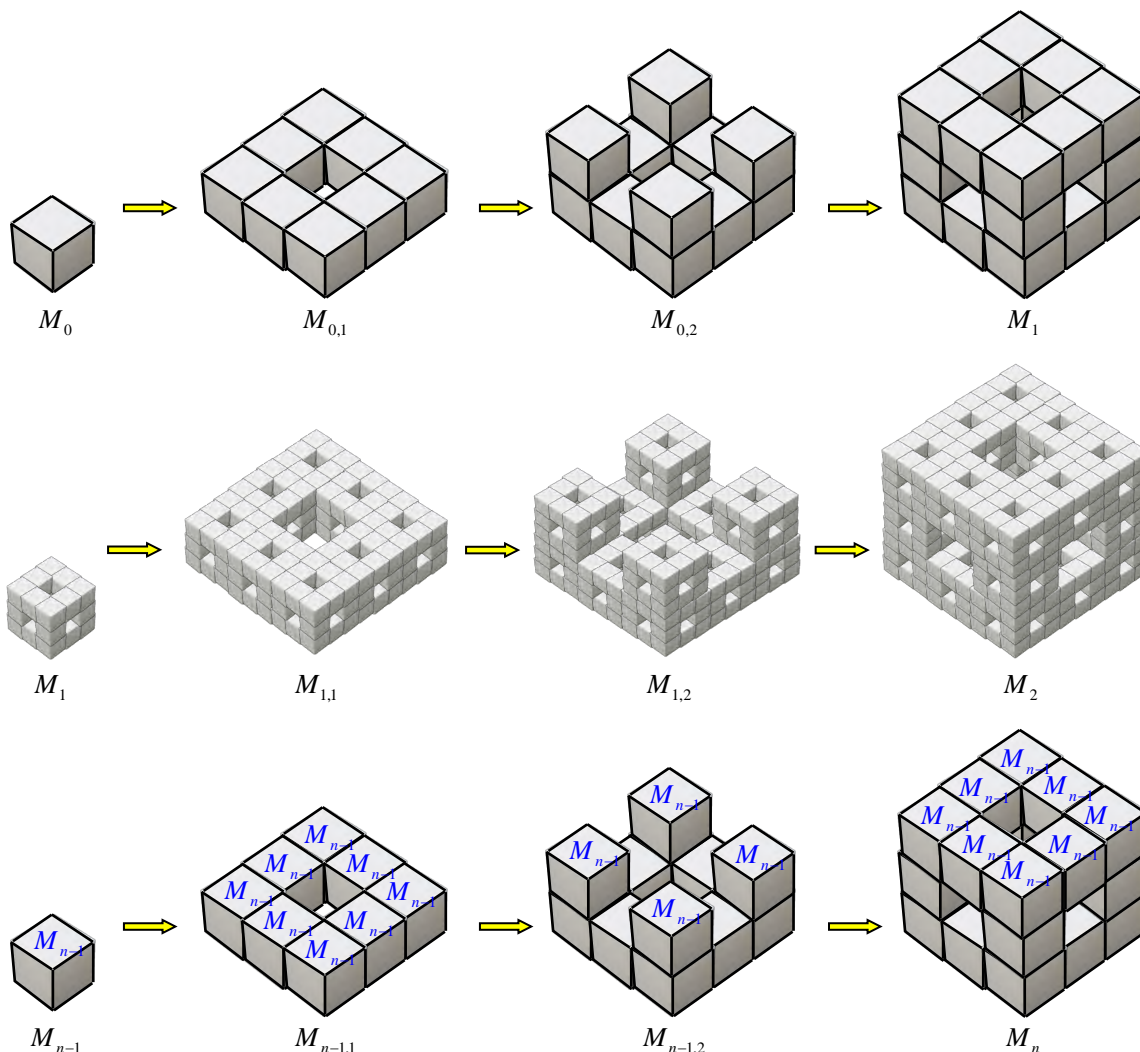
每當執行完步驟 1、步驟 2 時，此時可以選擇停止，或繼續執行步驟 3。把以上步驟重複操作，若操作 n 回後，則將所得的殘存形體稱為第 n 階的『門格海綿 Menger sponge』，並記為『 M_n 』。特別的，我們將原始的正立方體視為第 0 階的門格海綿。由上述的構造方法可知，門格海綿是由一個正立方體透過幾個固定的步驟，遞迴式方法所建構出來的三度空間形體。下圖即為第 0 階到第 3 階的門格海綿示意圖：



Menger sponge 的堆疊法

由上述的門格海綿建構過程可知，越高階的門格海綿將被分割成更多且更細緻的小正立方體，而高階的門格海綿，都是透過前一階的門格海綿所建構出來的。換句話說，對任意自然數 n 而言， M_n 是由 M_{n-1} 所分割出來的。為了方便研究 M_n 的結構，在不計較長度、體積、表面積的情況下，我們將門格海綿『遞迴式分割』的過程轉換為『遞迴式堆疊』的建構方法。以下我們將利用遞迴式堆疊的方式來重新定義門格海綿，定義如下：

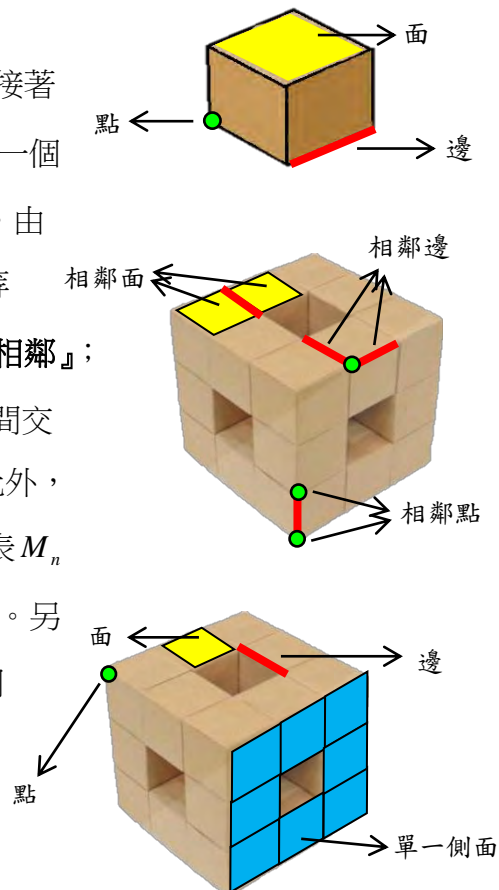
- (1) 令正立方體為第 0 階門格海綿，並記為 M_0 ；
- (2) 將 8 個 M_{n-1} 圍成一個正方形，其中每邊恰用 3 個 M_{n-1} 。將所得的形體記為 $M_{n-1,1}$ ；
- (3) 再將 4 個 M_{n-1} 堆放在 $M_{n-1,1}$ 角落的 M_{n-1} 上方。將所得形體記為 $M_{n-1,2}$ ；
- (4) 再將另一個 $M_{n-1,1}$ 放置在 $M_{n-1,2}$ 的上方；
- (5) 透過 (2)、(3)、(4) 步驟所得的形體記為 M_n ，即為第 n 階的門格海綿。



透過上述堆疊的概念可知，對任意自然數 n ， M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊出來的。因為 M_0 是一個正立方體，所以 M_n 的結構中即包含 20^n 個 M_0 。

點、邊、面的概念

使用遞迴式堆疊的方式來瞭解門格海綿 M_n 的結構後，接著分析 M_n 的點、邊、面。對於正立方體 M_0 ，我們將 M_0 視為一個由 8 個點、12 條邊、6 個面組成的形體（如右側上圖所示）。由於 M_n 是透過眾多的 M_0 所組合而成，故亦可將點、邊、面等概念套用至 M_n 上。若兩個點之間有邊相連，則稱此『兩點相鄰』；若兩個邊交會在一點，則稱此『兩邊相鄰』；若兩個面之間交會於一條邊，則稱此『兩面相鄰』（如右側中間圖所示）。此外，給定 M_n ， $V(M_n)$ 代表 M_n 的所有點形成的集合； $E(M_n)$ 代表 M_n 的所有邊形成的集合； $F(M_n)$ 代表 M_n 的所有面形成的集合。另外我們特別定義『單一側面』是指：在圖形最外側，且在同一平面上所有面所形成的面集合（如右側下圖所示）。



第 50 屆北市科展作品『Menger Sponge』中（參考資料 2），刻畫了第 n 階門格海綿 M_n 的點、邊、面數量，已有以下結果：

參考文獻結果： $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，令 $|V(M_n)|$ 、 $|E(M_n)|$ 、 $|F(M_n)|$ 分別為第 n 階門格海綿 M_n 的點、

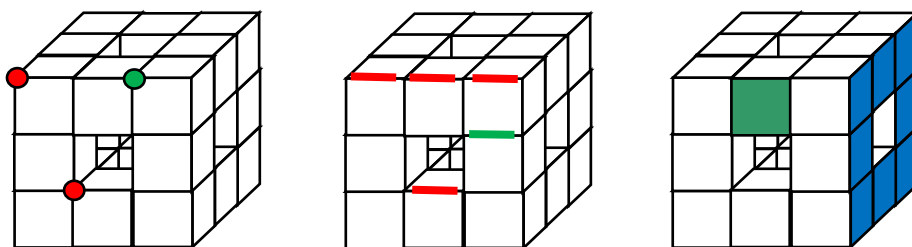
邊、面的數量，則 (1) $|V(M_n)| = \frac{32}{19} \times 20^n + \frac{24}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}$ ；

(2) $|E(M_n)| = 4 \times 20^n + 8^{n+1}$ ；

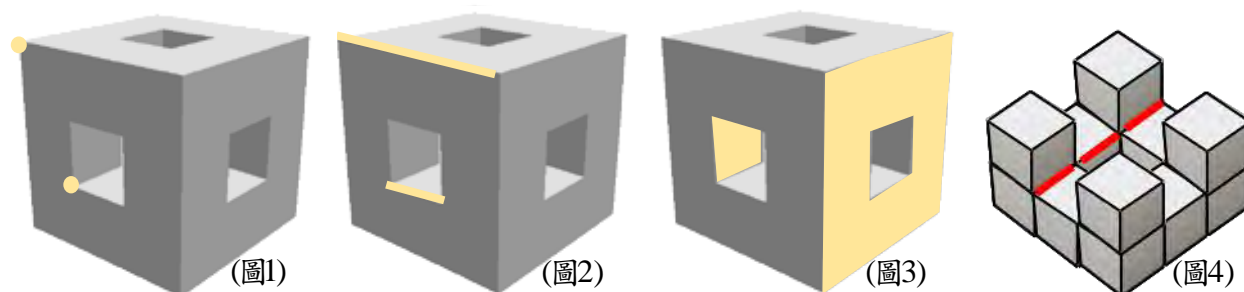
(3) $|F(M_n)| = 2 \times 20^n + 4 \times 8^n$ ；

(4) $|V(M_n)| - |E(M_n)| + |F(M_n)| = \frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}$ 。

二、Menger Sponge 的 true edges、true faces、true vertices 數量計算



在參考資料 2 中，我們是用遞迴式堆疊的觀點在討論門格海綿的點、邊、面，如左上圖的紅色及綠色點都視為點，中上圖的紅色和綠色線段都視為邊，右上圖的綠色及藍色區塊都視為面。接下來，我們試著改用門格海綿最初的建構方式，也就是遞迴式分割的觀點來分析它。如此，將圖 1、圖 2 與圖 3 中黃色部份視為新定義的點、邊、面，而上圖的綠色（點與邊）及綠色（面）則不算。以分割的觀點來重新定義的點、邊、面，我們分別稱為門格海綿的『true vertices』、『true edges』以及『true faces』。



我們將同一個平面上的所有連通的區域看成是一個 true face (圖 3)。將同一條稜線上的邊看作是一條 true edge (圖 2)，但在門格海綿內部同一條稜線上的邊，我們將其視為三條不同的 true edges (圖 4)，意即兩個 true faces 的交界即為 true edge。然而一條 true edge 兩側的端點則是 true vertices (圖 1)。方便起見，以下我們所討論的點、邊、面分別為本文中重新定義的 true vertices、true edges、true faces。我們好奇的是，如何刻畫 M_n 的 true vertices、true edges、true faces 的數量？

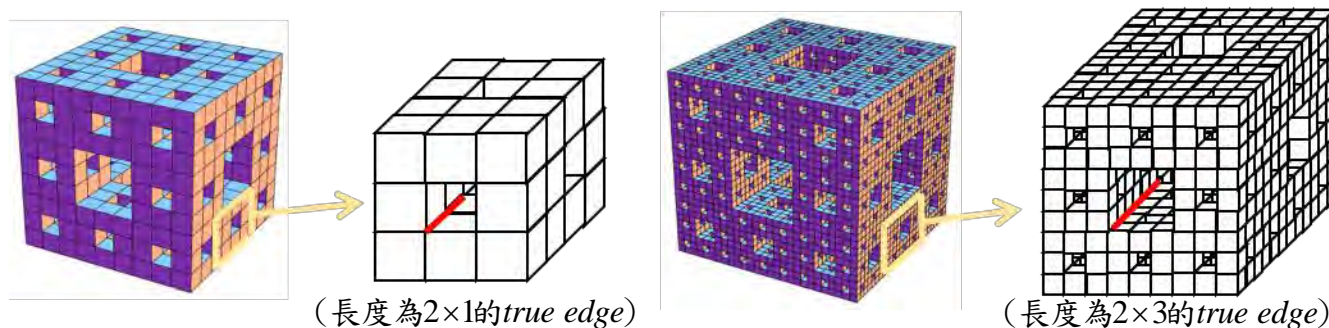
M_n 的 true edges

對於門格海綿 true edges 的長度，若將 true edge 以遞迴式堆疊的觀點看待，可視為由 n 個 M_0 的稜線所構成，則定義此 true edge 的長度為 n 。如左下圖紅色的 true edge 以遞迴式堆疊的觀點，是由 3 個 M_0 的稜線所構成，故其長度為 3；而黃色的 true edge 以遞迴式堆疊的觀點，為 M_0 的稜線，故其長度為 1。特別的，我們將 M_n 在第 n 次分割時挖去的小正立方體所形成的洞稱為『單

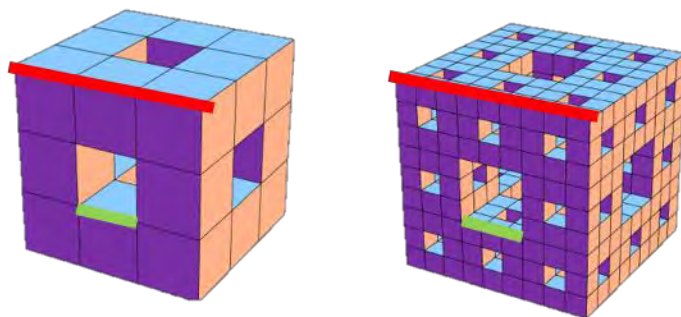
位洞』，可知單位洞其周圍的 true edges 長度皆為 1。



若以堆疊的觀點來看待第 n 階門格海綿中 true edges 的長度種類，不難得知，會有長度為 1、3、 3^2 、 \dots 、 3^n 的邊；除此之外，堆疊過程中的側面重合處，面上的洞會相接而形成長度為 2×1 、 2×3 、 2×3^2 、 \dots 、 $2 \times 3^{n-2}$ 的邊（如下圖紅色的邊）。故 true edges 可依長度將其分為 1×3^i 及 2×3^j ，其中 $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ 、 $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ 。



觀察下圖中 M_1 、 M_2 的 true edges，我們發現『 M_2 中長度為 3^2 的邊』與『 M_1 中長度為 3 的邊（紅色邊）』數量相同，『 M_2 中長度為 3 的邊』與『 M_1 中長度為 1 的邊（綠色邊）』數量也相同。這是因為 M_n 是由 M_{n-1} 所分割而成，故 M_n 中長度為 3^i 的邊與 M_{n-1} 中長度為 3^{i-1} 的邊數量會相同，其中 $1 \leq i \leq n$ 。同樣地， M_n 中長度為 2×3^j 和 M_{n-1} 中長度為 $2 \times 3^{j-1}$ 的邊數量相同，其中 $1 \leq j \leq n-2$ 。

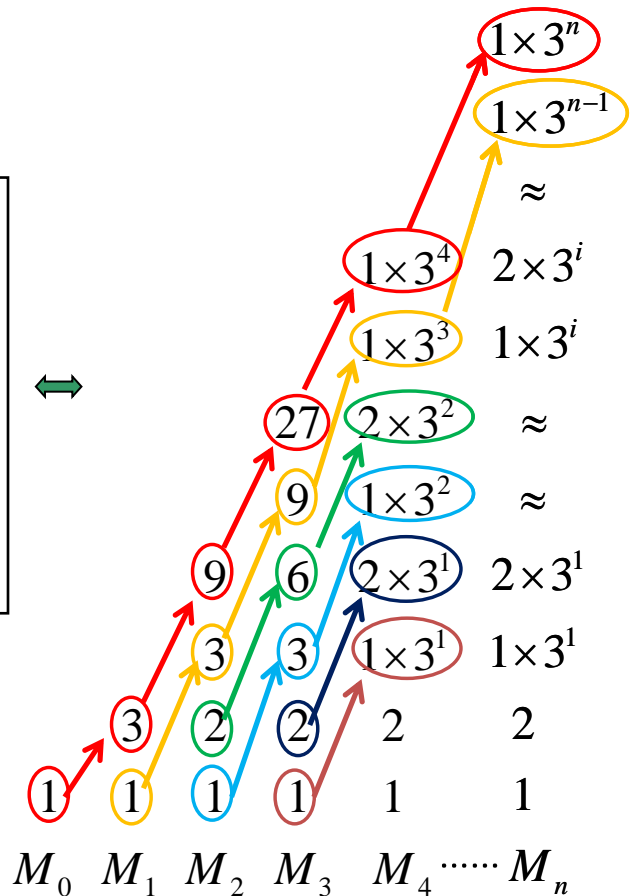


(M_1 中長度為 3 的 true edge \leftrightarrow M_2 中長度為 3^2 的 true edge)

依照此想法，我們列出各階層的門格海綿中各種 true edges 的長度，並將數量相同的 true edges 以箭頭呈現對應關係，即可得到以下示意圖：

| |
|--|
| M_n 中長度為 1×3^i 、 2×3^i 的 true edges 數量 |
| |
| M_{n-1} 中長度為 $1 \times 3^{i-1}$ 、 $2 \times 3^{i-1}$ 的 true edges 數量 |
| |
| M_{n-2} 中長度為 $1 \times 3^{i-2}$ 、 $2 \times 3^{i-2}$ 的 true edges 數量 |
| |
| ⋮ |
| |
| M_{n-i} 中長度為 1×3^0 、 2×3^0 的 true edges 數量 |

(高階與低階的對應關係)

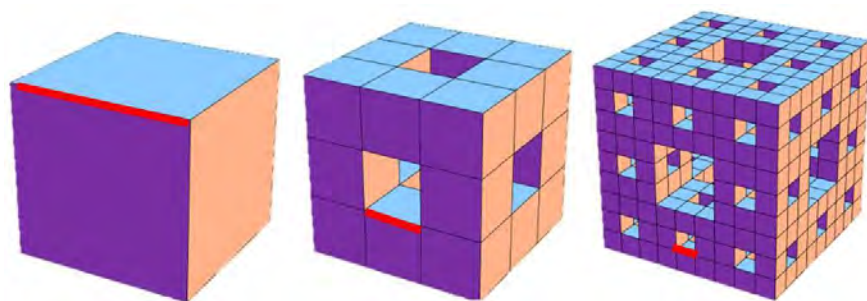


觀察上表， M_n 的 true edges 除了長度為 1 和 2 的數量外，其餘在數量上皆可與 M_{n-1} 中的一個長度對應。例如 M_4 中長度為 1×3^3 的邊與 M_3 中長度為 1×3^2 的邊數量相同，也與 M_2 中長度為 1×3 及 M_1 中長度為 1 的邊數量相同。意即『 M_4 中長度為 1×3^3 的邊』與『 M_1 中長度為 1 的邊』有相同的數量。同理，『 M_4 中長度為 2×3^2 的邊』與『 M_2 中長度為 2 的邊』有相同的數量。這表示 M_n 的 true edges 的數量，除了長度為 1 與 2 以外，皆可對應到某一個較低階的門格海綿，將其對應至長度為 1 或 2 的 true edges 的數量。

根據上述推論可知，在計算 M_n 中 true edges 的數量時，我們真正需要刻畫的只有 M_n 中長度為 1 或 2 的 true edges 的數量。以下我們將依 true edges 的兩種不同長度進行討論。

M_n 中長度為 1 的 true edges

對任意非負整數 n ，定義『 g_n 』為 M_n 上長度為 1 的邊數量，可知 $g_0 = 12$ 、 $g_1 = 60$ 。在計算出 $g_2 = 816$ 的過程中，我們得知可以由遞迴關係來求得 g_n 的一般式，說明如下。

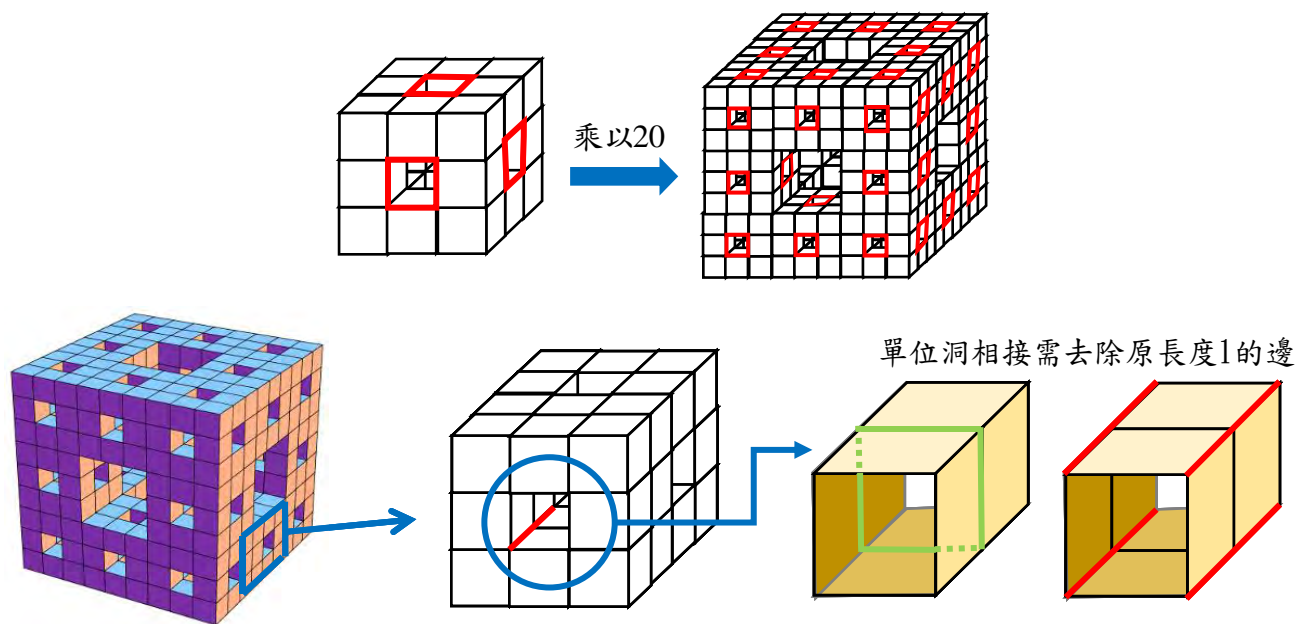


第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，又連接側面的單位洞在相接時，會有 4 條邊重合，而不能算作是 M_n 的 true edges，此外，在單位洞內則會有 4 條長度為 1 的邊因相接而形成長度為 2 的 true edges（右下圖）。故計算長度為 1 的邊時，每個連接側面的單位洞皆有 8 條邊需去除，相接處包含 2 個單位洞，每一連接側面有 8^{n-2} 個單位洞，又連接側面共有 24 個，因此可得

$$g_n = 20g_{n-1} - 8 \times 2 \times 24 \times 8^{n-2} \quad , n \geq 2 \quad .$$

$$g_1 = 60$$

故可建立遞迴關係



令 p 為實數，滿足 『 $g_n = 20g_{n-1} - 8 \times 2 \times 24 \times 8^{n-2} \Leftrightarrow g_n + p \times 8^n = 20(g_{n-1} + p \times 8^{n-1})$ 』。

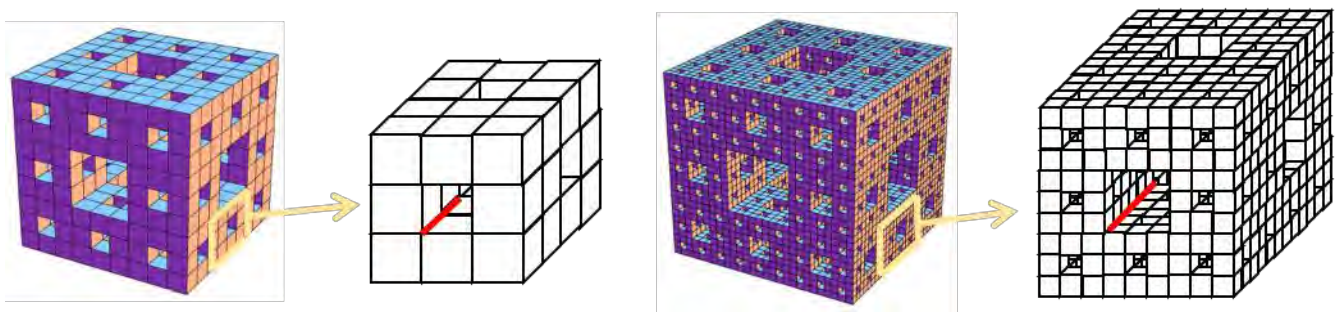
因為 $g_n + p \times 8^n = 20(g_{n-1} + p \times 8^{n-1}) \Leftrightarrow g_n = 20g_{n-1} + 12p \times 8^{n-1}$ ，比較係數後可知 $p = -4$ ，所以 $g_n - 4 \times 8^n = 20(g_{n-1} - 4 \times 8^{n-1})$ 。對任意正整數 n ，定義 $G_n = g_n - 4 \times 8^n$ ，可知新數列 $\langle G_n \rangle$ 為首項 $G_1 = 28$ 且公比為 20 的等比數列，所以 $G_n = 20^{n-1} \times G_1 = 28 \times 20^{n-1}$ ，故數列 $\langle g_n \rangle$ 的一般式為 $g_n = 28 \times 20^{n-1} + 4 \times 8^n$ 。

M_n 中長度為 1 的邊數量： $\forall n \in \mathbb{N}$ ， M_n 中長度為 1 的邊數量為 $g_n = 28 \times 20^{n-1} + 4 \times 8^n$ 。

特別的， $g_0 = 12$ 。

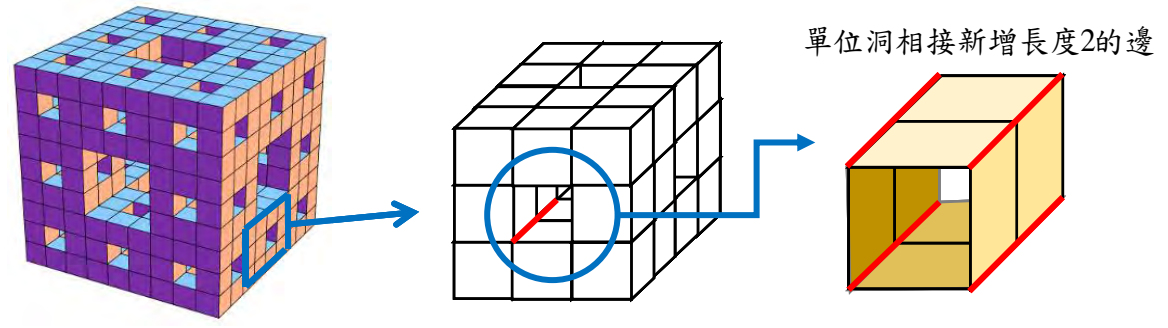
M_n 中長度為 2 的 true edges

對任意非負整數 n ，定義 j_n 為 M_n 上長度為 2 的邊數量，可知 $j_0 = 0$ 、 $j_1 = 0$ 、 $j_2 = 96$ 。



第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，在連接側面的單位洞內會有 4 條長度為 1 的邊因相接而形成長度為 2 的 true edges (右下圖)。每一連接側面有 8^{n-2} 個單位洞，且有 24 個連接側面，因此可得 $j_n = 20j_{n-1} + 4 \times 24 \times 8^{n-2}$ 。

故可建立遞迴關係
$$\begin{cases} j_n = 20j_{n-1} + 4 \times 24 \times 8^{n-2} & , n \geq 2 \\ j_1 = 0 \end{cases}$$



因為 $j_n + p \times 8^n = 20(j_{n-1} + p \times 8^{n-1}) \Leftrightarrow j_n = 20j_{n-1} + 12p \times 8^{n-1}$ ，比較係數後可知 $p = 1$ ，所以 $j_n + 8^n = 20(j_{n-1} + 8^{n-1})$ 。對任意正整數 n ，定義 $J_n = j_n + 8^n$ ，可知新數列 $\langle J_n \rangle$ 為首項 $J_1 = 8$ 且公比為 20 的等比數列，所以 $J_n = 20^{n-1} \times J_1 = 8 \times 20^{n-1}$ ，故數列 $\langle j_n \rangle$ 的一般式為 $j_n = 8 \times 20^{n-1} - 8^n$ 。

M_n 中長度為 2 的邊數量： $\forall n \in \mathbb{N}$ ， M_n 中長度為 2 的邊數量為 $j_n = 8 \times 20^{n-1} - 8^n$ 。
 特別的， $j_0 = 0$ 。

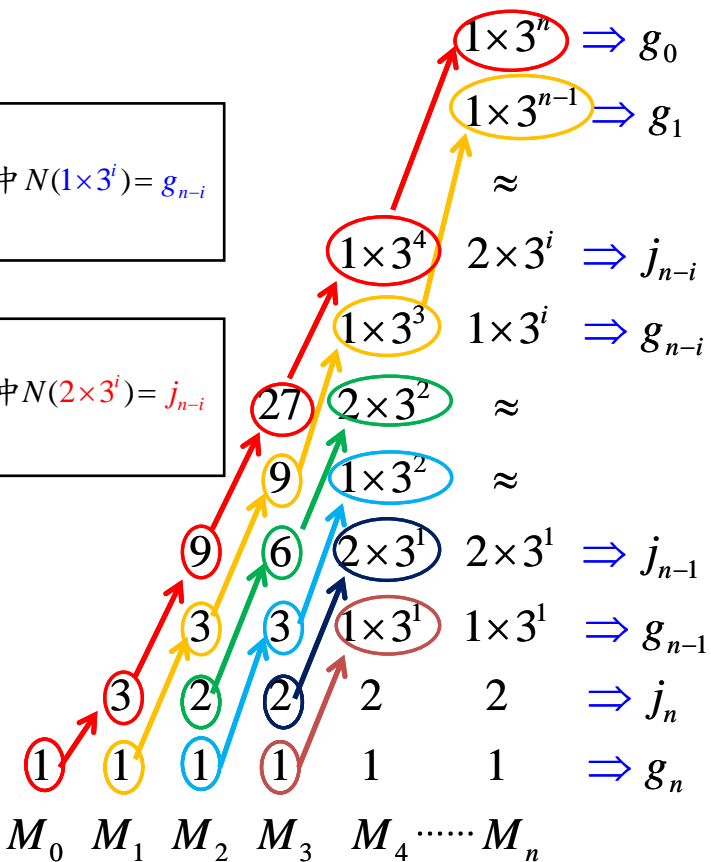
M_n 中 true edges 的數量

M_n 的 true edges 可依長度將其分為 1×3^i 及 2×3^i ，其中 $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ 、 $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ ，亦可表示為 $\{t \times 3^i : t \in \{1, 2\}, i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\} \cup \{3^{n-1}, 3^n\}$ 。對於長度為 $t \times 3^i$ 的 true edges 數量以符號記為『 $N(t \times 3^i)$ 』，皆可對應至較低階的門格海綿 M_{n-i} 中長度為 1 或 2 的 true edges 數量。

M_n 中長度為 1×3^i 的 true edges 數量
 \parallel
 M_{n-i} 中長度為 1 的 true edges 數量
 $\longleftrightarrow M_n$ 中 $N(1 \times 3^i) = g_{n-i}$

M_n 中長度為 2×3^i 的 true edges 數量
 \parallel
 M_{n-i} 中長度為 2 的 true edges 數量
 $\longleftrightarrow M_n$ 中 $N(2 \times 3^i) = j_{n-i}$

(高階與低階的對應關係)

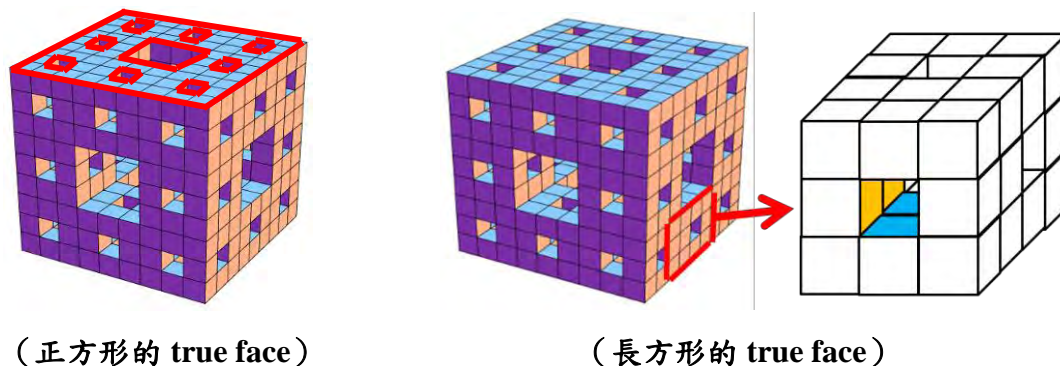


綜合以上討論，對於刻畫 M_n 的 true edges 數量有以下結果：

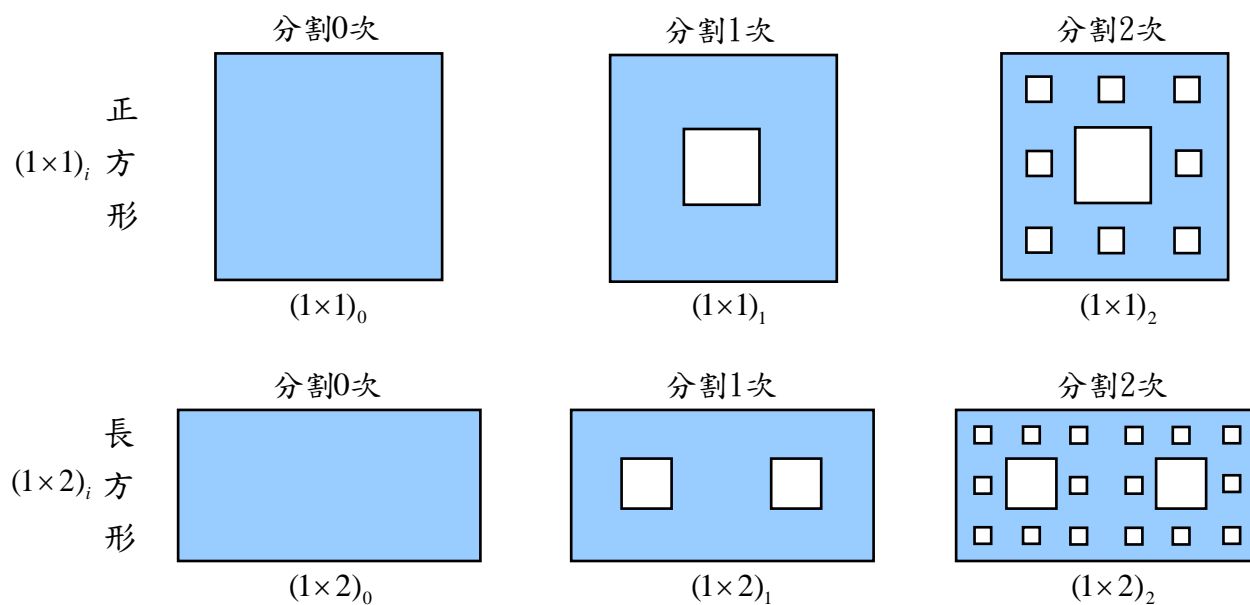
Theorem 1 : M_n 的 true edges 數量
 M_n 的 true edges 長度類型有 $\{t \times 3^i : t \in \{1, 2\}, i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\} \cup \{3^{n-1}, 3^n\}$ 。
 其數量為 $N(t \times 3^i) = \begin{cases} g_{n-i} = 28 \times 20^{n-i-1} + 4 \times 8^{n-i} & , t = 1 \\ j_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} - 8^{n-i} & , t = 2 \end{cases}$ ， $N(3^{n-1}) = 60$ ， $N(3^n) = 12$ 。
 M_n 的 true edges 總數量為 $\sum_{k=0}^n g_k + \sum_{k=0}^n j_k = \frac{36}{19} \times 20^n + \frac{24}{7} \times 8^n + \frac{888}{133}$ 。

M_n 的 true faces

我們先以遞迴式堆疊的觀點來觀察第 n 階門格海綿中 true faces 的形狀，不難得知，會有外輪廓線為正方形的 true face；除此之外，堆疊的過程中側面重合處，面上的洞會相接而在內部形成輪廓線為長方形的 true face。

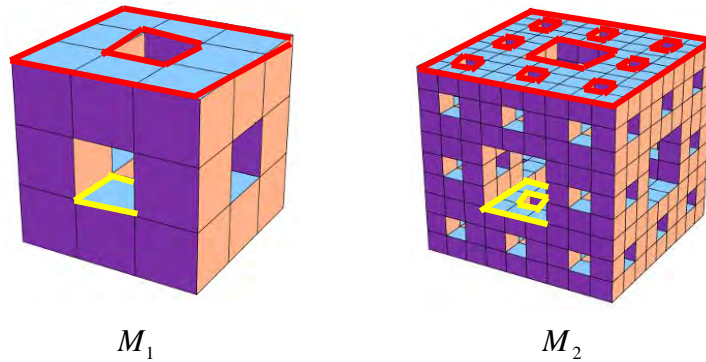


利用此發現，若將 true face 以遞迴式分割的觀點，可看成分割 i 次的正方形，則以符號『 $(1 \times 1)_i$ 』表示。例如左上圖紅色的 true face 以遞迴式分割的觀點，可看成分割 2 次的正方形，故以符號 $(1 \times 1)_2$ 表示。此外，若將 true face 以遞迴式分割的觀點，可看成分割 i 次的長方形，則以符號『 $(1 \times 2)_i$ 』表示。例如右上圖黃色和藍色的 true faces 以遞迴式分割的觀點，均可看成分割 0 次的長方形，故以符號 $(1 \times 2)_0$ 表示。

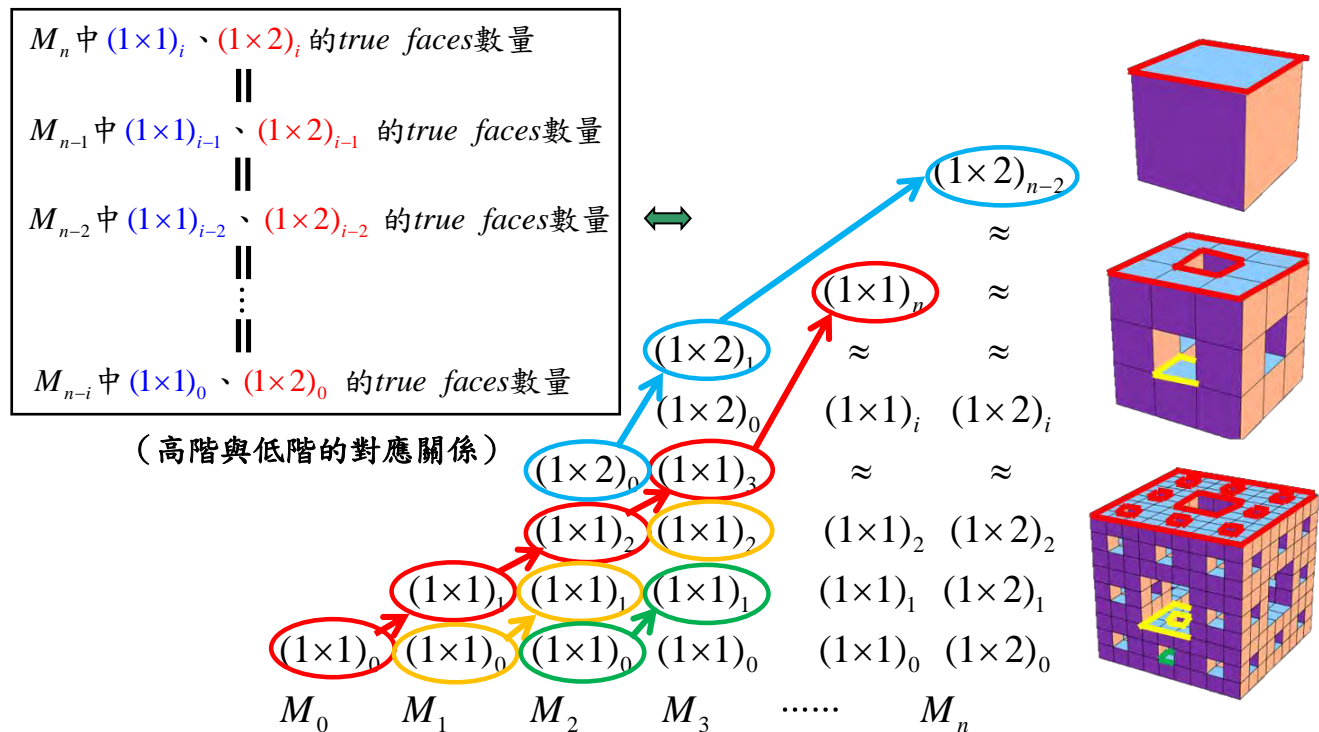


(True faces 的兩大類型)

觀察下圖中 M_1 、 M_2 的 true faces，我們發現『 M_2 中 $(1 \times 2)_2$ 的面與 M_1 中 $(1 \times 1)_1$ 的面（紅色面）數量相同』，『 M_2 中 $(1 \times 1)_1$ 的面與 M_1 中 $(1 \times 1)_0$ 的面（黃色面）數量也相同』。因為 M_n 可視為由 M_{n-1} 所分割一次而成，故 M_n 中 $(1 \times 1)_i$ 的面與 M_{n-1} 中 $(1 \times 1)_{i-1}$ 的面數量會相同，其中 $1 \leq i \leq n$ 。同樣地， M_n 中 $(1 \times 2)_i$ 和 M_{n-1} 中 $(1 \times 2)_{i-1}$ 的面數量相同，其中 $1 \leq i \leq n-2$ 。



依照此想法，我們列出各階層門格海綿中的各種 true faces，並將數量相同的 true faces 以箭頭呈現對應關係，即可得到以下示意圖：



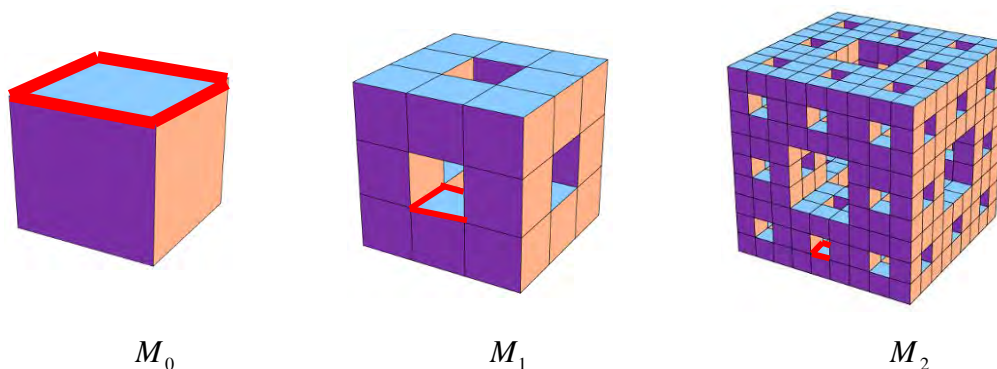
觀察上表， M_n 的 true faces 除了 $(1 \times 1)_0$ 和 $(1 \times 2)_0$ 的數量外，其餘皆可與 M_{n-1} 中的一個面對應，亦可對應到某一個較低階的門格海綿中 $(1 \times 1)_0$ 或 $(1 \times 2)_0$ 的 true faces 的數量。例如 M_3 中 $(1 \times 1)_3$ 的面與 M_2 中 $(1 \times 1)_2$ 的面數量相同，也與 M_1 中 $(1 \times 1)_1$ 及 M_0 中 $(1 \times 1)_0$ 的面數量相同。意即『 M_3 中 $(1 \times 1)_3$

的面』與『 M_0 中 $(1 \times 1)_0$ 的面』有相同的數量。同理，『 M_4 中 $(1 \times 2)_2$ 的面』與『 M_2 中 $(1 \times 2)_0$ 的面』有相同的數量。

由此可知，計算 M_n 中 true faces 的數量時，我們真正需要刻畫的只有 M_n 中 $(1 \times 1)_0$ 和 $(1 \times 2)_0$ 的 true faces 的數量。以下我們將依 true faces 的兩種不同類型進行討論。

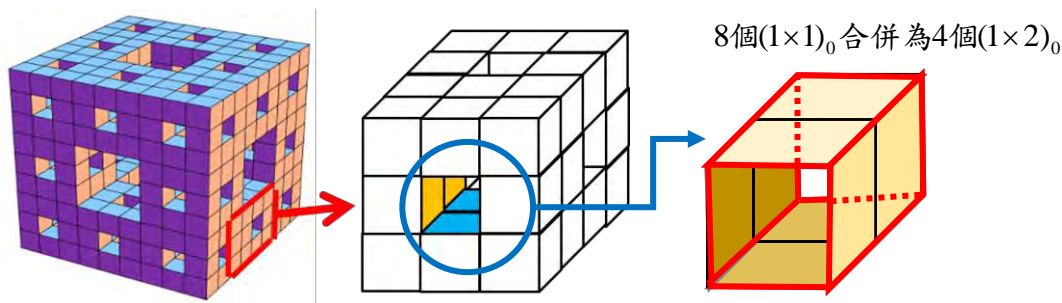
M_n 中 $(1 \times 1)_0$ 的 true faces

對任意非負整數 n ，定義『 y_n 』為 M_n 中 $(1 \times 1)_0$ 的面數量，可知 $y_0 = 6$ 、 $y_1 = 24$ 。在計算出 $y_2 = 288$ 的過程中，我們得知可以由遞迴關係來求得 y_n 的一般式，說明如下。



第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，又連接側面的單位洞內，有 4 個面因相接而形成 $(1 \times 2)_0$ 的面（如下圖）。故計算 $(1 \times 1)_0$ 的面時，在堆疊的過程中，每個連接側面的單位洞皆有 4 個面需去除，此 8 個 $(1 \times 1)_0$ 的面將合併為 4 個 $(1 \times 2)_0$ 的面，而每一連接側面各有 8^{n-2} 個單位洞，且共有 24 個連接側面，因此可得 $y_n = 20y_{n-1} - 2 \times 4 \times 24 \times 8^{n-2}$ 。故可建立遞迴關係

$$\begin{cases} y_n = 20y_{n-1} - 2 \times 4 \times 24 \times 8^{n-2}, & n \geq 2 \\ y_1 = 24 \end{cases}$$



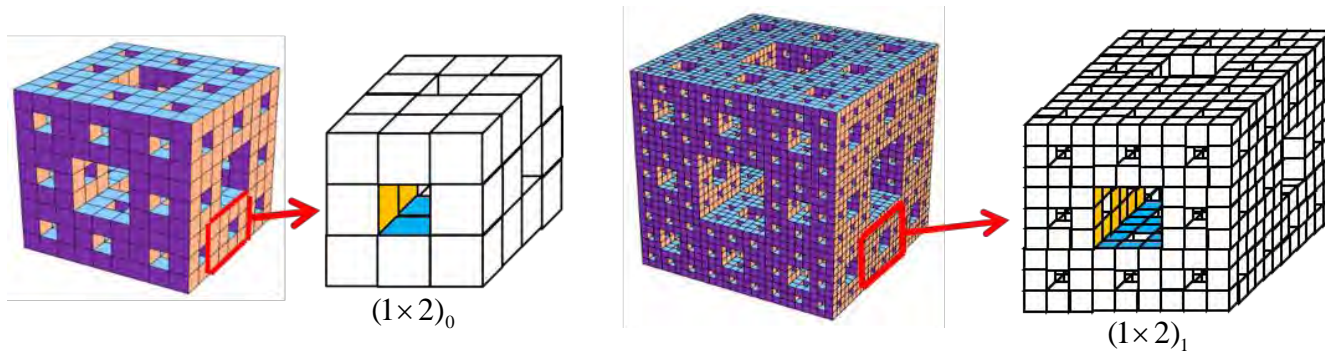
令 p 為實數，滿足 『 $y_n = 20y_{n-1} - 2 \times 4 \times 24 \times 8^{n-2} \Leftrightarrow y_n + p \times 8^n = 20(y_{n-1} + p \times 8^{n-1})$ 』。

因為 $y_n + p \times 8^n = 20(y_{n-1} + p \times 8^{n-1}) \Leftrightarrow y_n = 20y_{n-1} + 12p \times 8^{n-1}$ ，比較係數後可知 $p = -2$ ，所以 $y_n - 2 \times 8^n = 20(y_{n-1} - 2 \times 8^{n-1})$ 。對任意非負整數 n ，定義 $Y_n = y_n - 2 \times 8^n$ ，可知新數列 $\langle Y_n \rangle$ 為首項 $Y_1 = 8$ 且公比為 20 的等比數列，所以 $Y_n = 20^{n-1} \times Y_1 = 8 \times 20^{n-1}$ ，故數列 $\langle y_n \rangle$ 的一般式為 $y_n = 8 \times 20^{n-1} + 2 \times 8^n$

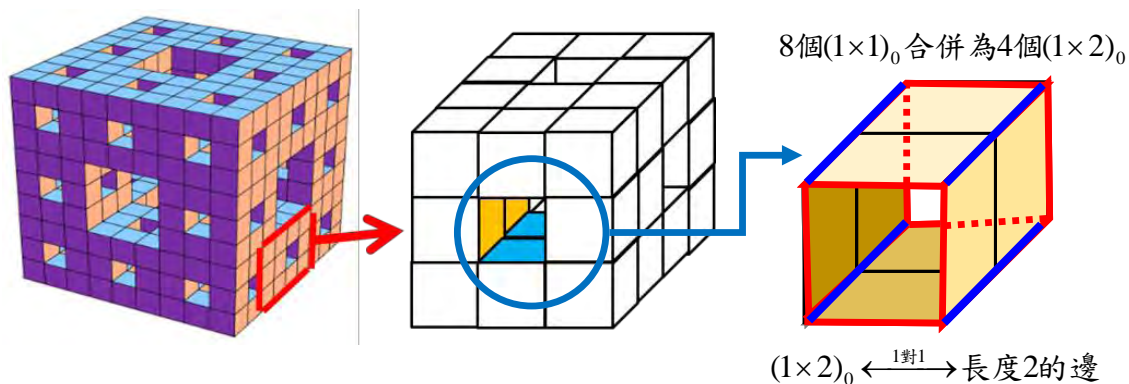
M_n 中 $(1 \times 1)_0$ 的面數量： $\forall n \in \mathbb{N}$ ， M_n 中 $(1 \times 1)_0$ 的面數量為 $y_n = 8 \times 20^{n-1} + 2 \times 8^n$ 。
特別的， $y_0 = 6$ 。

M_n 中 $(1 \times 2)_0$ 的 true faces

對任意非負整數 n ，定義 『 z_n 』 為 M_n 中 $(1 \times 2)_0$ 的面數量，可知 $z_0 = 0$ 、 $z_1 = 0$ 、 $z_2 = 96$ 。



第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，在連接側面的單位洞內會有 4 個面因相接而形成 $(1 \times 2)_0$ 的面（如下圖）。每一連接側面各有 8^{n-2} 個單位洞，且共有 24 個連接側面，因此可得 $z_n = 20z_{n-1} + 4 \times 24 \times 8^{n-2}$ 。故可建立遞迴關係 $\begin{cases} z_n = 20z_{n-1} + 4 \times 24 \times 8^{n-2} & , n \geq 2 \\ z_1 = 0 \end{cases}$ 。



令 p 為實數，滿足 $\lceil z_n = 20z_{n-1} + 4 \times 24 \times 8^{n-2} \Leftrightarrow z_n + p \times 8^n = 20(z_{n-1} + p \times 8^{n-1}) \rceil$ 。

因為 $z_n + p \times 8^n = 20(z_{n-1} + p \times 8^{n-1}) \Leftrightarrow z_n = 20z_{n-1} + 12p \times 8^{n-1}$ ，比較係數後可知 $p=1$ ，所以 $z_n + 8^n = 20(z_{n-1} + 8^{n-1})$ 。對任意正整數 n ，定義 $Z_n = z_n + 8^n$ ，可知新數列 $\langle Z_n \rangle$ 為首項 $Z_1 = 8$ 且公比為 20 的等比數列，所以 $Z_n = 20^{n-1} \times Z_1 = 8 \times 20^{n-1}$ ，故數列 $\langle z_n \rangle$ 的一般式為 $z_n = 8 \times 20^{n-1} - 8^n$ 。

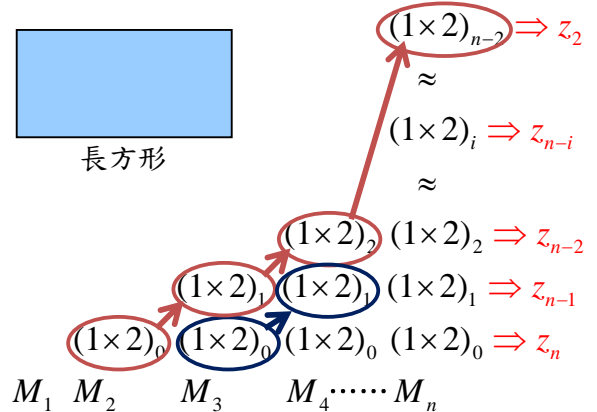
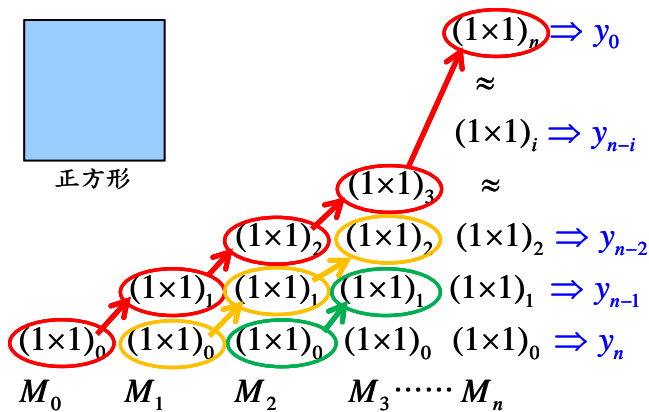
M_n 中 $(1 \times 2)_0$ 的面數量： $\forall n \in \mathbb{N}$ ， M_n 中 $(1 \times 2)_0$ 的面數量為 $z_n = 8 \times 20^{n-1} - 8^n$ 。

特別的， $z_0 = 0$ 。

我們可以發現， M_n 中 $\lceil (1 \times 2)_0$ 的面數量 $z_n \rceil$ 與 \lceil 長度為 2 的邊數量 $j_n \rceil$ 具有相同的數量，意即 $z_n = j_n = 8 \times 20^{n-1} - 8^n$ 。堆疊的過程當中，不難得知 $\lceil (1 \times 2)_0$ 的面 \rceil 與 \lceil 長度為 2 的邊 \rceil 是伴隨而生，兩者具有一對一對應關係。

M_n 中 true faces 的數量

M_n 的 true faces 可分為正方形類 $(1 \times 1)_i$ 以及長方形類 $(1 \times 2)_j$ ，其中 $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ 、 $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ 。亦可表示為 $\{(1 \times t)_i : t \in \{1, 2\}, i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\} \cup \{(1 \times 1)_{n-1}, (1 \times 1)_n\}$ 。對於分割 i 次的 true faces 數量 $N((1 \times t)_i)$ ，我們皆可表示為 i 的一般式。



M_n 中 $(1 \times 1)_i$ 的 true faces 數量

⇕

M_{n-i} 中 $(1 \times 1)_0$ 的 true faces 數量

M_n 中 $(1 \times 2)_i$ 的 true faces 數量

⇕

M_{n-i} 中 $(1 \times 2)_0$ 的 true faces 數量

M_n 中 $N((1 \times 1)_i) = y_{n-i}$

M_n 中 $N((1 \times 2)_i) = z_{n-i}$

(高階與低階的對應關係)

綜合以上討論，對於刻畫 M_n 的 true faces 數量有以下結果：

Theorem 2 : M_n 的 true faces 數量

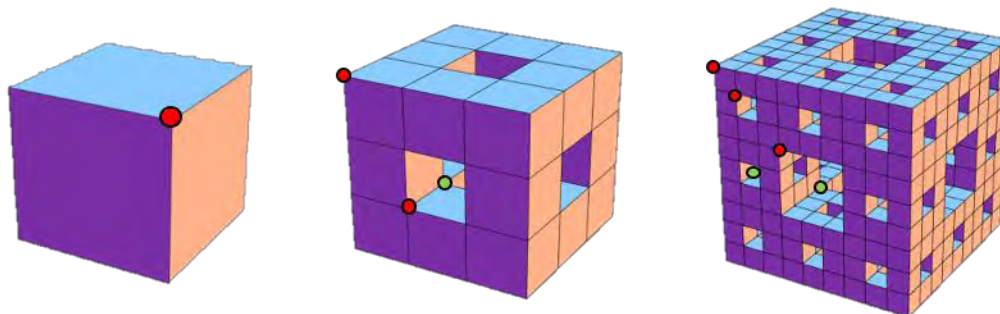
M_n 的 true faces 類型可分為 $\{(1 \times t)_i : t \in \{1, 2\}, i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\} \cup \{(1 \times 1)_{n-1}, (1 \times 1)_n\}$ 。

$$\text{其數量為 } N((1 \times t)_i) = \begin{cases} y_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} + 2 \times 8^{n-i} & , t = 1 \\ z_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} - 8^{n-i} & , t = 2 \end{cases} , N((1 \times 1)_{n-1}) = 24, N((1 \times 1)_n) = 6。$$

$$M_n \text{ 的 true faces 總數量為 } \sum_{k=0}^n y_k + \sum_{k=0}^n z_k = \frac{16}{19} \times 20^n + \frac{8}{7} \times 8^n + \frac{534}{133}。$$

M_n 的 true vertices

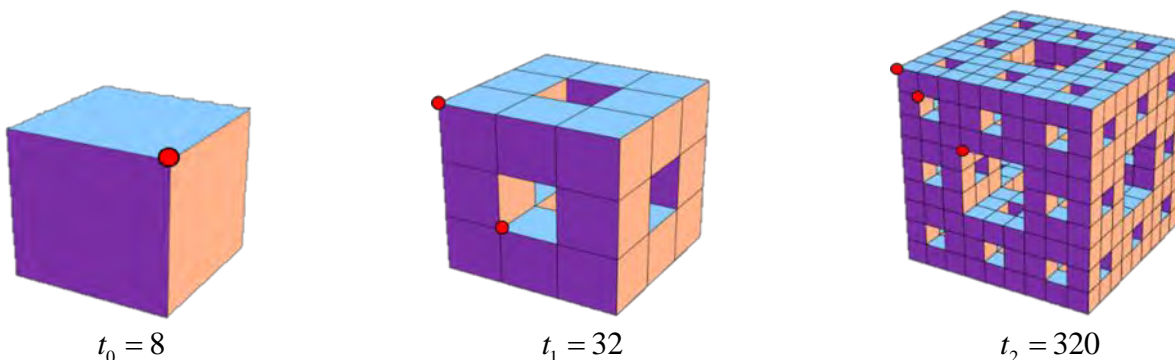
對於任意階層的門格海綿 M_n 的 true vertices，定義點 v 相連的 true edges 數量為 $\text{deg}(v)$ ，可區別為兩種情形，分別為 $\text{deg}(v) = 3$ （紅色的點）及 $\text{deg}(v) = 6$ （綠色的點）。



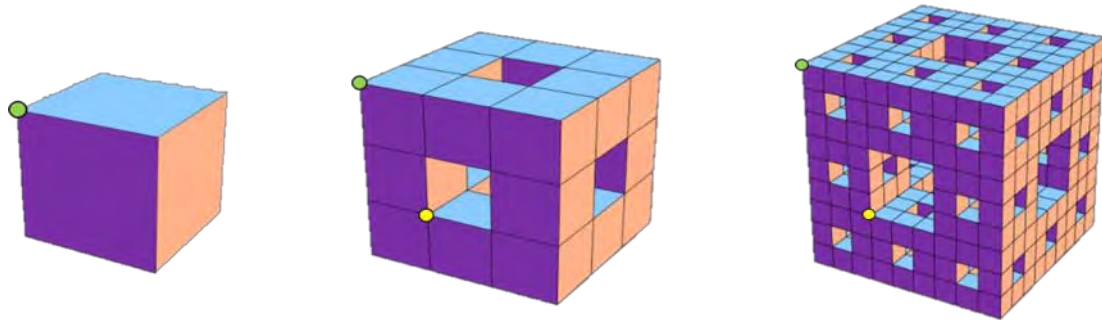
經過觀察後，我們發現 $\text{deg}(v) = 6$ 的點只會出現在第 n 階門格海綿的內部，而 $\text{deg}(v) = 3$ 的點除了在 M_n 的內部會出現之外，還會在門格海綿的表面出現，因此有關 $\text{deg}(v) = 3$ 的點數量計算是相對複雜的。

M_n 中 $\text{deg}(v) = 3$ 的 true vertices

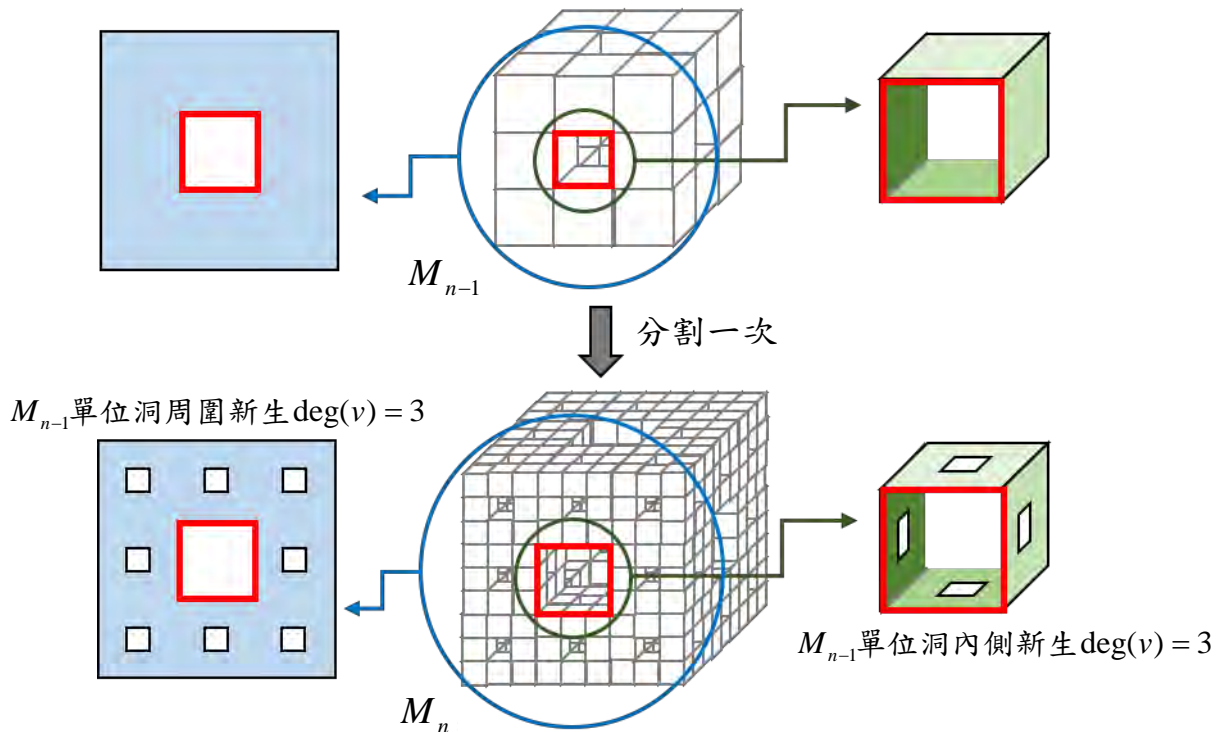
對任意非負整數 n ，定義 t_n 為 M_n 中 $\text{deg}(v) = 3$ 的點數量。可知 $t_0 = 8$ 、 $t_1 = 32$ 。在計算出 $t_2 = 320$ 的過程中，我們得知可以由遞迴關係來求得 t_n 的一般式，說明如下。



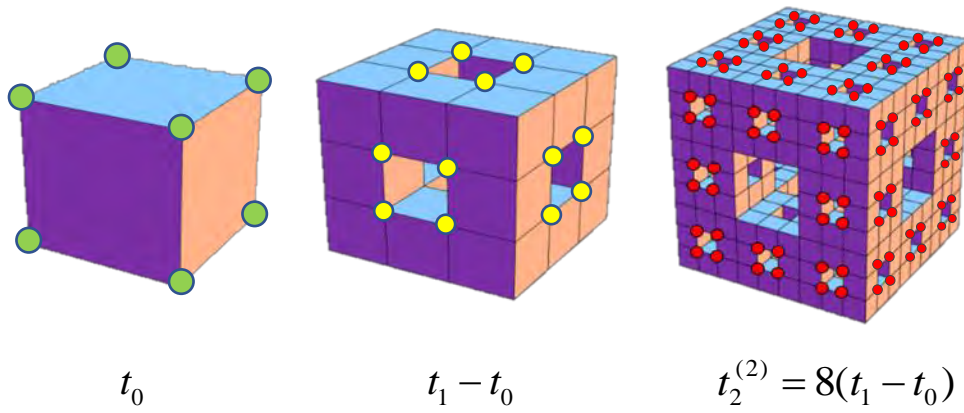
對任意正整數 n ，以遞迴式分割的觀點觀察 M_n ，原本 M_{n-1} 中 $\deg(v) = 3$ 的點經過分割之後，在 M_n 上仍會是 $\deg(v) = 3$ 的點數量（如下圖綠點及黃點所示），定義其為『 $t_n^{(1)}$ 』，故可得 $t_n^{(1)} = t_{n-1}$ 。



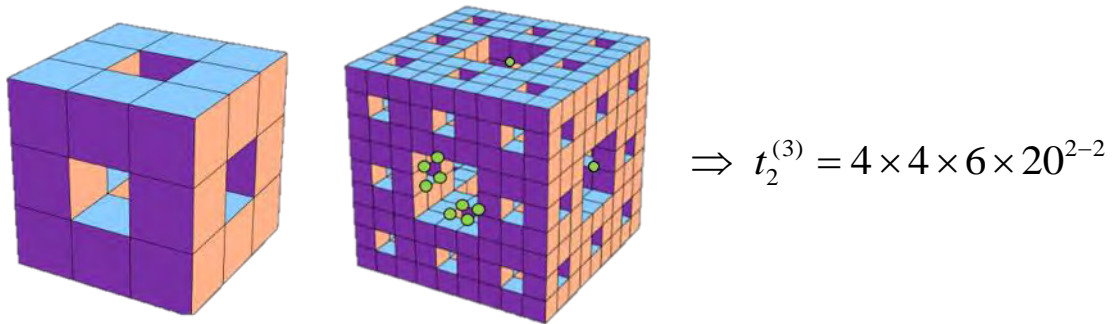
除了這些原有的點之外，在 M_{n-1} 分割為 M_n 的過程中會有新的 $\deg(v) = 3$ 的點產生，而新生成的點會出現在 M_{n-1} 單位洞的洞口周圍（如左下圖）及內側（如右下圖），我們進一步將其分為這兩類討論。



對任意正整數 n ， M_{n-1} 中每一個單位洞洞口的 4 個 true vertices 皆為 $\deg(v) = 3$ ，又單位洞洞口點數量為『 $t_{n-1} - t_{n-2}$ 』。若將洞口視為九宮格的中心，在分割成 M_n 時周圍會產生 8 個 M_n 的單位洞，可視為 4 個 $\deg(v) = 3$ 的點數量複製 8 次。定義『 $t_n^{(2)}$ 』為 M_{n-1} 單位洞的洞口周圍在分割時新生成的點數量，可得 $t_n^{(2)} = (t_{n-1} - t_{n-2}) \times 8$ 。



M_{n-1} 中單位洞內側的 4 個面，在分割成 M_n 時各會產生 1 個 M_n 的單位洞，又單位洞洞口皆有 4 個 $\deg(v) = 3$ 的 true vertices。而每個 M_1 有 6 個單位洞，由堆疊的觀點來看， M_{n-1} 可視為 $20^{(n-1)-1}$ 個 M_1 堆疊而成，定義『 $t_n^{(3)}$ 』為 M_{n-1} 單位洞內側分割出新的 $\deg(v) = 3$ 的點數量，故可得

$$t_n^{(3)} = 4 \times 4 \times 6 \times 20^{n-2} = 96 \times 20^{n-2}。$$


因為 M_n 中 $\deg(v) = 3$ 的點可以分成三個部分來計算，分別是『 M_{n-1} 原有的 $t_n^{(1)}$ 』，以及當 M_{n-1} 進行一次分割所得 M_n 時所新生成的『 M_{n-1} 單位洞的洞口周圍 $t_n^{(2)}$ 』與『 M_{n-1} 單位洞的內側 $t_n^{(3)}$ 』。因此可得 $t_n = t_n^{(1)} + t_n^{(2)} + t_n^{(3)} = t_{n-1} + (t_{n-1} - t_{n-2}) \times 8 + 96 \times 20^{n-2}$ 。故可建立遞迴關係式

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + 8(t_{n-1} - t_{n-2}) + 96 \times 20^{n-2} & , n \geq 2 \\ t_0 = 8, t_1 = 32 \end{cases}。$$

透過將遞迴式加總，

$$\text{可得 } t_n = t_1 + 8t_{n-1} - 8t_0 + 96 \sum_{k=0}^{n-2} 20^k$$

$$\Leftrightarrow t_n = 8t_{n-1} + \frac{96}{19} \times 20^{n-1} - \frac{704}{19}。$$

| | |
|----|--|
| | $t_n = t_{n-1} + 8(t_{n-1} - t_{n-2}) + 96 \times 20^{n-2}$ $t_{n-1} = t_{n-2} + 8(t_{n-2} - t_{n-3}) + 96 \times 20^{n-3}$ \vdots $t_3 = t_2 + 8(t_2 - t_1) + 96 \times 20^1$ $t_2 = t_1 + 8(t_1 - t_0) + 96 \times 20^0$ |
| +) | $\Rightarrow t_n = t_1 + 8t_{n-1} - 8t_0 + 96 \sum_{k=0}^{n-2} 20^k$ |

(遞迴式加總)

令 p, q 為實數，滿足『 $t_n = 8t_{n-1} + \frac{96}{19} \times 20^{n-1} - \frac{704}{19} \Leftrightarrow t_n + p \cdot 20^n + q = 8(t_{n-1} + p \cdot 20^{n-1} + q)$ 』。

因為 $t_n + p \cdot 20^n + q = 8(t_{n-1} + p \cdot 20^{n-1} + q) \Leftrightarrow t_n = 8t_{n-1} - 12p \cdot 20^{n-1} + 7q$ ，比較係數後可知 $p = \frac{-8}{19}$

且 $q = \frac{-704}{133}$ ，所以 $t_n - \frac{8}{19} \times 20^n - \frac{704}{133} = 8 \left(t_{n-1} - \frac{8}{19} \times 20^{n-1} - \frac{704}{133} \right)$ 。對任意非負整數 n ，定義

$T_n = t_n - \frac{8}{19} \times 20^n - \frac{704}{133}$ ，可知新數列 $\langle T_n \rangle$ 為首項 $T_0 = \frac{16}{7}$ 且公比為 8 的等比數列，所以

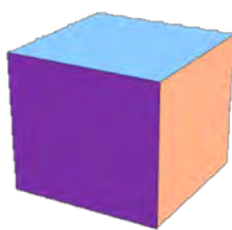
$T_n = 8^n \times T_0 = \frac{16}{7} \times 8^n$ ，故數列 $\langle t_n \rangle$ 的一般式為 $t_n = \frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133}$ 。

M_n 中 $\deg(v) = 3$ 的點數量：

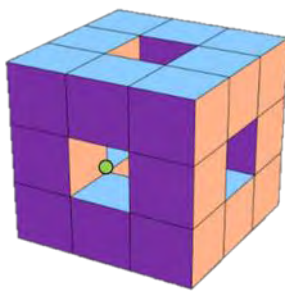
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， M_n 中 $\deg(v) = 3$ 的點數量為 $t_n = \frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133}$ 。

M_n 中 $\deg(v) = 6$ 的 true vertices

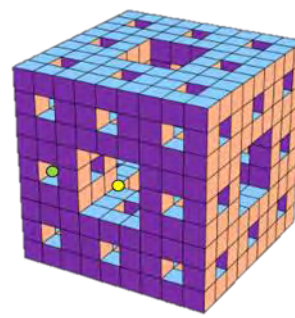
對任意非負整數 n ，定義『 u_n 』為 M_n 中 $\deg(v) = 6$ 的點數量。可知 $u_0 = 0$ 、 $u_1 = 8$ 。在計算出 $u_2 = 168$ 的過程中，我們得知可以由遞迴關係來求得 u_n 的一般式，說明如下。



$u_0 = 0$



$u_1 = 8$



$u_2 = 168$

第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，我們發現 M_{n-1} 中 $\deg(v) = 6$ 的點經過堆疊之後在 M_n 中仍為 $\deg(v) = 6$ (如右上圖綠點)，又堆疊成 M_n 時在最中心處會新生成 8 個 $\deg(v) = 6$

的點 (如右上圖黃點)。故可建立遞迴關係 $\begin{cases} u_n = 20u_{n-1} + 8, & n \geq 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$ 。

令 p 為實數，滿足『 $u_n = 20u_{n-1} + 8 \Leftrightarrow u_n + p = 20(u_{n-1} + p)$ 』。因為 $u_n + p = 20(u_{n-1} + p) \Leftrightarrow$

$u_n = 20u_{n-1} + 19p$ ，比較係數後可知 $p = \frac{8}{19}$ ，所以 $u_n + \frac{8}{19} = 20 \left(u_{n-1} + \frac{8}{19} \right)$ 。對任意非負整數 n ，定

義 $U_n = u_n + \frac{8}{19}$ ，可知新數列 $\langle U_n \rangle$ 為首項 $U_0 = \frac{8}{19}$ 且公比為 20 的等比數列，所以

$$U_n = 20^n \times U_0 = \frac{8}{19} \times 20^n，故數列 $\langle u_n \rangle$ 的一般式為 $u_n = \frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19}$ 。$$

M_n 中 $\deg(v) = 6$ 的點數量：

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}，M_n \text{ 中 } \deg(v) = 6 \text{ 的點數量為 } u_n = \frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19}。$$

M_n 中 true vertices 的數量

因為 M_n 的 true vertices 種類只有 $\deg(v) = 3$ 、 $\deg(v) = 6$ 兩種，故可得其總數量為 $t_n + u_n$ ，可

$$\text{知 } t_n + u_n = \left(\frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133} \right) + \left(\frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19} \right) = \frac{16}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{648}{133}。$$

綜合以上討論，對於計算 M_n 的 true vertices 數量有以下結果：

Theorem 3： M_n 的 true vertices 數量

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}，M_n \text{ 的 true vertices 可區分為 } \begin{cases} \deg(v) = 3 \text{ 的點數量：} t_n = \frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133}。 \\ \deg(v) = 6 \text{ 的點數量：} u_n = \frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19} \end{cases}$$

$$M_n \text{ 的 true vertices 總數量為 } t_n + u_n = \frac{16}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{648}{133}。$$

三、Menger Sponge 的 Total Angular Defect

在計算出第 n 階門格海綿 M_n 的 true edges、true faces 與 true vertices 的數量後，我們將 M_n 視為是鑲嵌在封閉曲面上平面化的圖形，意即 M_n 可畫在封閉曲面上使得邊不相交。進一步討論該封閉曲面的『虧格數』。

曲面的虧格數

在拓樸學中，對於一個封閉曲面 S ，在曲面 S 上，若最多存在 k 條不同的封閉曲線能使曲面 S 不被分開，則稱此曲面 S 的『虧格數 *genus*』為 k 。若一個曲面的虧格數為 k ，則將此曲面記

為『 S_k 』。給定一個圖 G ，若圖 G 可以畫在曲面 S 上使得邊不相交，則稱圖 G 可以『鑲嵌』在曲面 S 上，意即圖 G 是在曲面 S 上的平面圖（一般圖論中的平面圖指的是在球面 S_0 上的平面圖）。若 k 為最小的整數能使得圖 G 可以鑲嵌在曲面 S_k 上，則稱 k 為 G 的虧格數，並記為『 $\gamma(G) = k$ 』。意即 $\gamma(G) = \min\{k : \text{圖 } G \text{ 可鑲嵌在曲面 } S_k \text{ 上}\}$ 。



曲面 S_0



曲面 S_1



曲面 S_2



曲面 S_3

M_n 的 *genus*-歐拉定理

一般科普書籍中都會介紹球面上平面圖的點、邊、面具有下列關係式：

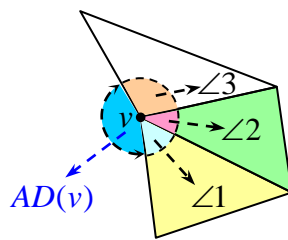
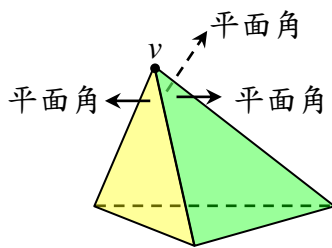
歐拉定理：對於任意曲面 S_0 上的連通平面圖 G ， $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ 恆成立。

上述的歐拉定理述說著球面 S_0 的拓樸表徵，事實上，曲面的虧格數將會決定曲面 S_k 上平面圖的點、邊、面的定量關係，而歐拉定理的結論可以推廣至任意曲面 S_k 上，定理敘述如下：

廣義歐拉定理：令連通圖 G 的虧格數為 k ， $|V(G)|$ 、 $|E(G)|$ 、 $|F(G)|$ 分別為圖 G 鑲嵌在曲面 S_k 上的點、邊、面的數量，則 $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2 - 2k$ 恆成立。

角度缺陷-*angular defect*

在幾何學中，給定一個三度空間中的多面體 P ，令 v 為多面體 P 的頂點，若 $\deg(v) = k$ ，則 v 與 k 個面相鄰，意即 v 與 k 個平面角相鄰，令此 k 個平面角為 $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle k$ 。將此 k 個平面角展開在二度空間的平面上，考慮完整的圓周角 2π 與此 k 個平面角總和之間的差，將 2π 減去 $(\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle k)$ 的量稱為頂點 v 的『**Angular defect**』，並以符號記為『**AD(v)**』。



$$AD(v) = 2\pi - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3)$$

多面體的 Angular Defect :

令 v 為多面體 P 的頂點，若 v 與 k 個平面角 $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle k$ 相鄰，則定義頂點 v 的 angular defect

為 $2\pi - \sum_{i=1}^k \angle i$ ，以符號記為 $AD(v)$ 。

例如：(1) 考慮正四面體，因為頂點 v 與三個正三角形相鄰，正三角形的平面角為 $\frac{\pi}{3}$ 。

所以頂點 v 的 angular defect $2\pi - (\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \pi$ ，故 $AD(v) = \pi$ 。

(2) 考慮正十二面體，因為頂點 v 與三個正五邊形相鄰，正五邊形的平面角為 $\frac{3\pi}{5}$ 。

所以頂點 v 的 angular defect $2\pi - (\frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}) = \frac{\pi}{5}$ ，故 $AD(v) = \frac{\pi}{5}$ 。

考慮三度空間中五個正多面體，將每個頂點的 angular defect 記錄於下表：

| | 頂點數量 | 每個面的形狀 | $AD(v)$ | Angular defect 總和 |
|-------|------|--------|------------------|----------------------------------|
| 正四面體 | 4 | 正三角形 | π | $4 \times \pi = 4\pi$ |
| 正六面體 | 8 | 正方形 | $\frac{\pi}{2}$ | $8 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi$ |
| 正八面體 | 6 | 正三角形 | $\frac{2\pi}{3}$ | $6 \times \frac{2\pi}{3} = 4\pi$ |
| 正十二面體 | 20 | 正五邊形 | $\frac{\pi}{5}$ | $20 \times \frac{\pi}{5} = 4\pi$ |
| 正二十面體 | 12 | 正三角形 | $\frac{\pi}{3}$ | $12 \times \frac{\pi}{3} = 4\pi$ |

由上述表格可發覺，在正多面體中，每個正多面體的頂點數不同，而每個頂點的 angular defect 也不同。但特別的是，在正多面體中，若將每個頂點的 angular defect 加總起來，皆會得到相同的總和 4π 。我們當然好奇，對於任意多面體，不論面的形狀、頂點數的多寡，也不論頂點所在

的立體角的凹凸性，其 angular defect 的總和是否皆為定值 4π ？對於任意多面體 P ，我們將每個頂點的 angular defect 總和定義為多面體 P 的『Total angular defect』，並以符號記為『 $TAD(P)$ 』。

多面體的 Total Angular Defect：

給定多面體 P ，各頂點的 angular defect 總和稱為 P 的 total angular defect，以符號記為 $TAD(P)$ 。

意即 $TAD(P) = \sum_{v \in V(P)} AD(v)$ 。

任意多面體 P ， $|V(P)| - |E(P)| + |F(P)|$ 的值稱為『歐拉特徵數』，此為一個拓樸不變量，其值反應著該多面體 P 的拓樸特性，可以顯示該多面體的虧格數。事實上，任意多面體 P 的 total angular defect 的值亦與歐拉特徵數具有相當密切的關係。17 世紀時笛卡爾（Descartes）已經說明了 $TAD(P)$ 與 $(|V(P)| - |E(P)| + |F(P)|)$ 之間的恆等式，其定理敘述如下：

笛卡爾定理 Total Angular Defect Formula：

給定多面體 P ， $TAD(P) = \sum_{v \in V(P)} AD(v) = 2\pi(|V(P)| - |E(P)| + |F(P)|)$ 。

【證明】：

給定多面體 P ，令 P 的點、邊與面的集合分別為 V 、 E 、 F 。

令 v 為 P 的頂點，則頂點 v 的 angular defect 為 $AD(v) = 2\pi - \sum(\text{v相鄰的平面角})$ 。

考慮所有頂點的 angular defect 總和，則多面體 P 的 total angular defect 為 $TAD(P)$ 。

$$\begin{aligned}
 TAD(P) &= \sum_{v \in V} AD(v) = \sum_{v \in V} (2\pi - \sum(\text{v相鄰的平面角})) = 2\pi \cdot |V| - \sum_{v \in V} (\sum(\text{v相鄰的平面角})) \\
 &= 2\pi \cdot |V| - \sum_{f \in F} (\sum(f\text{周圍的平面角})) \quad (\text{所有平面角的總和等於所有面上的內角總和}) \\
 &= 2\pi \cdot |V| - \sum_{f \in F} ((d(f) - 2) \cdot \pi) \quad (n\text{邊形的內角和為}(n-2) \cdot \pi) \\
 &= 2\pi \cdot |V| - \pi \cdot \sum_{f \in F} d(f) + 2\pi \cdot |F| \\
 &= 2\pi \cdot |V| - 2\pi \cdot |E| + 2\pi \cdot |F| \quad (\sum_{f \in F} d(f) = 2|E|) \\
 &= 2\pi \cdot (|V| - |E| + |F|)
 \end{aligned}$$

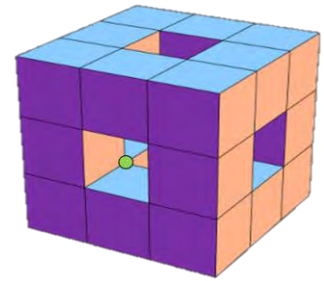
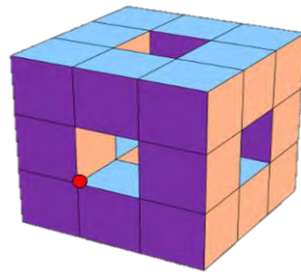
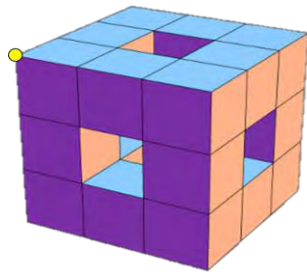


上述的笛卡爾定理事實上為微分幾何學中的『**The Gauss-Bonnet Theorem**』在多面體的特例，定理說明了任意封閉曲面上的多面體，其 total angular defect 恆等於 2π 乘以該多面體的歐拉特徵數。因為歐拉特徵數 $|V(P)| - |E(P)| + |F(P)| = 2 - 2\gamma(P)$ ，其中 $\gamma(P)$ 為虧格數。換句話說，求得多面體的 angular defect 總和，即可求得多面體的歐拉特徵數與虧格數，並得知其拓樸性質。

M_n 各頂點的 Angular Defect

我們將門格海綿 M_n 視為鑲嵌在封閉曲面上的一個多面體，對於 M_n 的頂點（僅考慮 true vertices），將其分成三種類型（分別如左下、中下、右下圖所示）：

- (1) 若 v 滿足 $\deg(v) = 3$ 且在 M_n 最外面的八個角落，則 $AD(v) = 2\pi - \frac{\pi}{2} \times 3 = \frac{\pi}{2}$ ；
- (2) 若 v 滿足 $\deg(v) = 3$ 且不在 M_n 最外面的八個角落，則 $AD(v) = 2\pi - (\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \times 2) = \frac{-\pi}{2}$ ；
- (3) 若 v 滿足 $\deg(v) = 6$ ，則 $AD(v) = 2\pi - (\frac{\pi}{2} \times 6) = -\pi$ 。



$$\left\{ v : \deg(v) = 3 \text{ 且 } AD(v) = \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\left\{ v : \deg(v) = 3 \text{ 且 } AD(v) = \frac{-\pi}{2} \right\}$$

$$\left\{ v : \deg(v) = 6 \text{ 且 } AD(v) = -\pi \right\}$$

以下我們分別說明三種點集合的數量：

- (1) $\left\{ v : \deg(v) = 3 \text{ 且 } AD(v) = \frac{\pi}{2} \right\}$:

由於滿足 $\deg(v) = 3$ 且 angular defect 為 $\frac{\pi}{2}$ 的點只出現在第 n 階門格海綿 M_n 最外側的 8 個頂

點上，所以符合 $\deg(v) = 3$ 且 $AD(v) = \frac{\pi}{2}$ 條件的點數量為 8。

- (2) $\left\{ v : \deg(v) = 3 \text{ 且 } AD(v) = \frac{-\pi}{2} \right\}$:

由於滿足 $\deg(v) = 3$ 且 angular defect 為 $\frac{-\pi}{2}$ 的點會出現在第 n 階門格海綿 M_n 非最外側的頂

點上，所以符合 $\deg(v) = 3$ 且 $AD(v) = \frac{-\pi}{2}$ 條件的點數量為 $t_n - 8$ 。

(3) $\{v : \deg(v) = 6 \text{ 且 } AD(v) = -\pi\}$:

由於滿足 $\deg(v) = 6$ 的所有頂點其 angular defect 皆為 $-\pi$ ，所以符合 $\deg(v) = 6$ 且 $AD(v) = -\pi$ 條件的點數量為 u_n 。

M_n 的 genus-Total Angular Defect Formula

前面我們已經求出 M_n 中 $\deg(v) = 3$ 的點數量為 $t_n = \frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133}$ ； M_n 中 $\deg(v) = 6$ 的點數量為 $u_n = \frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19}$ 。以下我們將進一步計算第 n 階門格海綿 M_n 的 angular defect 總和 $TAD(M_n)$ 。每一階門格海綿的點都可以被區分為上述三種類型，因此我們可以建立出第 n 階門格海綿的 total angular defect 的關係式 $TAD(M_n) = 8 \times \frac{\pi}{2} + (t_n - 8) \times \frac{-\pi}{2} + u_n \times (-\pi)$ 。

$$\begin{aligned} \text{所以 } TAD(M_n) &= 4\pi - \left(\frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n - \frac{360}{133}\right) \times \frac{\pi}{2} - \left(\frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19}\right) \times \pi \\ &= 2\pi \left(\frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}\right)。 \end{aligned}$$

根據笛卡爾定理可知， $TAD(M_n) = 2\pi(|V(M_n)| - |E(M_n)| + |F(M_n)|) = 2\pi(2 - 2\gamma(M_n))$ 。

$$\begin{aligned} \Rightarrow TAD(M_n) &= 2\pi \left(\frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}\right) = 2\pi(2 - 2\gamma(M_n)) \\ \Rightarrow 2 - 2\gamma(M_n) &= \frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133} \\ \Rightarrow \gamma(M_n) &= \frac{3}{19} \times 20^n + \frac{2}{7} \times 8^n - \frac{59}{133}。 \end{aligned}$$

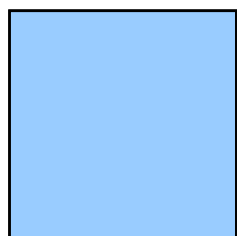
此結果和在參考資料 2 中利用廣義歐拉定理及點、邊、面數量通式（第 5 頁的已知結果）所計算出來的虧格數通式具有一致性。

$$M_n \text{ 的虧格數： } \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, M_n \text{ 的虧格數 } \gamma(M_n) = \frac{3}{19} \times 20^n + \frac{2}{7} \times 8^n - \frac{59}{133}。$$

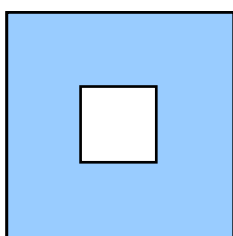
M_n 的 genus-透迴關係

另一個觀點，我們亦可利用透迴式堆疊的想法來計算門格海綿的虧格數。以下討論，為了方便建立透迴關係，我們將第 n 階的門格海綿 M_n 的虧格數記為『 γ_n 』，意即 $\gamma_n = \gamma(M_n)$ 。

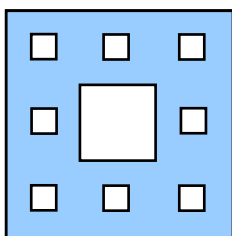
首先我們考慮 M_n 單一側面上每個被挖去的正方形數量，定義 h_n 為第 n 階門格海綿 M_n 單一側面上的被挖去的正方形數量。



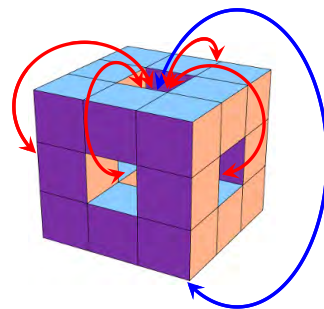
$$h_0 = 0$$



$$h_1 = 1$$



$$h_2 = 9$$



$$\gamma(M_1) = 5$$

透過簡單的觀察可得知 $h_0 = 0$ 、 $h_1 = 1$ 、 $h_2 = 9$ （如上圖所示）。現在考慮 M_n 單一側面上被挖去的正方形數量 h_n ，根據透迴堆疊的過程可知， M_n 的單側面是由 8 個 M_{n-1} 的單側面所連接而成的，在每次連接的過程中最中間都會多出一個新的正方形，故 $h_n = 8h_{n-1} + 1$ 。由此可建立透迴關係

$$\begin{cases} h_n = 8h_{n-1} + 1, & n \geq 1 \\ h_0 = 0 \end{cases} \text{。因為 } h_n = 8h_{n-1} + 1 \Leftrightarrow h_n + \frac{1}{7} = 8(h_{n-1} + \frac{1}{7}) \text{，這表示我們可將數列 } \langle h_n \rangle \text{ 平}$$

移後，使其成為等比數列。對任意非負整數 n ，定義 $H_n = h_n + \frac{1}{7}$ ，可知新數列 $\langle H_n \rangle$ 為首項

$H_0 = h_0 + \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$ ，公比為 8 的等比數列，所以 $H_n = 8^n \times H_0 = \frac{1}{7} \times 8^n$ ，故數列 $\langle h_n \rangle$ 的一般式為

$$h_n = \frac{8^n - 1}{7} \text{。}$$

M_n 單一側面上被挖去的正方形數量：

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, M_n \text{ 中單一側面上被挖去的正方形數量為 } h_n = \frac{8^n - 1}{7} \text{。}$$

第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，在堆疊的過程中，兩個相鄰的 M_{n-1} 在其連接側面上將會有 h_{n-1} 個重複的洞，然而堆疊後的整體會多出 5 個洞。由於堆疊 20 個 M_{n-1} 的過程中，共有 24 個連接側面，這意味著 $\gamma_n = 20\gamma_{n-1} - 24h_{n-1} + 5$ ，其中 $n \geq 1$ ， $\gamma_0 = 0$ 。

因為 M_{n-1} 單一側面上被挖去的洞數量等於被重複計算的洞數量 h_{n-1} 。故可建立透迴關係如下：

$$\begin{cases} \gamma_n = 20\gamma_{n-1} - 24 \times \frac{8^{n-1} - 1}{7} + 5, & n \geq 1 \\ \gamma_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_n = 20\gamma_{n-1} - 24 \times \frac{8^{n-1}}{7} + \frac{59}{7}, & n \geq 1 \\ \gamma_0 = 0 \end{cases}$$

令 p, q 為實數，滿足『 $\gamma_n = 20\gamma_{n-1} - 24 \times \frac{8^{n-1}}{7} + \frac{59}{7} \Leftrightarrow \gamma_n + p \times 8^n + q = 20(\gamma_{n-1} + p \times 8^{n-1} + q)$ 』。

因為 $\gamma_n + p \times 8^n + q = 20(\gamma_{n-1} + p \times 8^{n-1} + q) \Leftrightarrow \gamma_n = 20\gamma_{n-1} + 12p \times 8^{n-1} + 19q$ 。

比較係數後可知 $\begin{cases} p = \frac{-2}{7} \\ q = \frac{59}{133} \end{cases}$ ，所以 $\gamma_n - \frac{2}{7} \times 8^n + \frac{59}{133} = 20(\gamma_{n-1} - \frac{2}{7} \times 8^{n-1} + \frac{59}{133})$ 。

對任意非負整數 n ，定義 $\Gamma_n = \gamma_n - \frac{2}{7} \times 8^n + \frac{59}{133}$ ，可知新數列 $\langle \Gamma_n \rangle$ 為首項 $\Gamma_0 = \frac{3}{19}$ 且公比為 20 的

等比數列，所以 $\Gamma_n = 20^n \times \Gamma_0 = \frac{3}{19} \times 20^n$ ，故數列 $\langle \gamma_n \rangle$ 的一般式為 $\gamma_n = \frac{3}{19} \times 20^n + \frac{2}{7} \times 8^n - \frac{59}{133}$ 。

M_n 的虧格數： $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， M_n 的虧格數 $\gamma(M_n) = \frac{3}{19} \times 20^n + \frac{2}{7} \times 8^n - \frac{59}{133}$ 。

(經計算可得 $\gamma(M_0) = 0$ ， $\gamma(M_1) = 5$ ， $\gamma(M_2) = 81$ ， $\gamma(M_3) = 1409$)

悠遊在 Menger sponge 的組合與拓樸世界，一個簡單的碎形結構，許多美妙的遞迴關係蘊藏其中，也許分割，抑或堆疊，不同觀點，各有玄機。從點、邊、面出發，看見了歐拉特徵數，偶然巧遇了 Gauss-Bonnet 定理，趨近於零的魔幻立方體，傾訴著數學的浩瀚無窮，這趟研究之旅，沿路的數學風景，足以揚起嘴角，換得一抹微笑。

伍、研究結果

對任意自然數 n ，令 M_n 為第 n 階的門格海綿，對於 true edges、true faces、true vertices，以下為我們的研究結果：

(1) M_n 的 true edges 長度類型有 $\{t \times 3^i : t \in \{1, 2\}, i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\} \cup \{3^{n-1}, 3^n\}$ ；

$$M_n \text{ 的 true edges 數量為 } N(t \times 3^i) = \begin{cases} g_{n-i} = 28 \times 20^{n-i-1} + 4 \times 8^{n-i}, & t = 1 \\ j_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} - 8^{n-i}, & t = 2 \end{cases}, \begin{cases} N(3^{n-1}) = 60 \\ N(3^n) = 12 \end{cases}.$$

$$M_n \text{ 的 true edges 總數量為 } \frac{36}{19} \times 20^n + \frac{24}{7} \times 8^n + \frac{888}{133}.$$

(2) M_n 的 *true faces* 類型有 $\{(1 \times t)_i : t \in \{1, 2\}, i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\} \cup \{(1 \times 1)_{n-1}, (1 \times 1)_n\}$;

$$M_n \text{ 的 } \textit{true faces} \text{ 數量為 } N((1 \times t)_i) = \begin{cases} y_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} + 2 \times 8^{n-i} & , t = 1 \\ z_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} - 8^{n-i} & , t = 2 \end{cases} , \begin{cases} N((1 \times 1)_{n-1}) = 24 \\ N((1 \times 1)_n) = 6 \end{cases} .$$

$$M_n \text{ 的 } \textit{true faces} \text{ 總數量為 } \frac{16}{19} \times 20^n + \frac{8}{7} \times 8^n + \frac{534}{133} .$$

$$(3) \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} , M_n \text{ 的 } \textit{true vertices} \text{ 中 } \begin{cases} \text{度數為3的數量為 } t_n = \frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133} \\ \text{度數為6的數量為 } u_n = \frac{160}{19} \times 20^{n-1} - \frac{8}{19} \end{cases} .$$

$$M_n \text{ 的 } \textit{true vertices} \text{ 總數量為 } \frac{16}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{648}{133} .$$

$$(4) \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} , M_n \text{ 的 } \textit{total angular defect} \text{ 為 } TAD(M_n) = 2\pi \left(\frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133} \right) .$$

$$\text{進一步可知 } M_n \text{ 的虧格數為 } \gamma(M_n) = \frac{3}{19} \times 20^n + \frac{2}{7} \times 8^n - \frac{59}{133} .$$

陸、討論

門格海綿在數學上大多探討其身為碎形的特性，因此我們這次用不同的角度切入，以拓樸學的角度探討其 *true edges*、*true faces*、*true vertices* 的數量。門格海綿的定義可視為遞迴式的分割，亦可想成是遞迴式的堆疊，對於不同的問題，需採用不同的觀點進行分析。由於門格海綿為立體圖形，且在堆疊的過程中會有許多新增或者是被重複計算到的 *true edges*、*true faces*、*true vertices*，故在計算數量的過程中，我們都尋求能以一種有規律的方法討論各種情形。因此我們層層分析，根據門格海綿的結構，依序建立遞迴關係式，運用高中所學的數學技巧，精確的算出數量，過程中環環相扣，在理性的論證中，展現數學的結構之美。

柒、結論與應用

一、結論

給定一個第 n 階的門格海綿，有辦法利用公式快速得知其 *true edges*、*true faces*、*true vertices* 的數量，而我們所研究的性質，呈現思考的過程，進而從思考中得出規律，再將得到的規律推廣到所有高階的門格海綿，而所得的通式能夠套用在所有的門格海綿，是因為它具有極佳的規律性。門格海綿形體整齊而美麗，我們努力地想抽絲剝繭，卻始終只能勾勒出些皮毛。探索門格海

綿在拓樸上的骨架，研究方向自然將延伸到曲面的虧格數，運用多面體角度缺陷的總和，可轉換為門格海綿所在曲面的虧格數。門格海綿的規律性讓我們在思考以及計算的過程中都能更好地找到方向，也讓我們深深體會到門格海綿的神秘以及那無與倫比的吸引力，高對稱性的拓樸結構，引人入勝。

然而為了研究門格海綿的虧格數，研究之路引領我們走向拓樸學的世界，分析過程中都強烈運用到門格海綿的碎形特質，方能完美的呈現蘊藏的遞迴關係，相當適合身為高中生的我們，能夠透過課堂上所學來進行研究。最後從歐拉定理、笛卡爾定理以致於能觸即到 **The Gauss-Bonnet Theorem**，這對我們高中生而言，研究的過程能夠觸及高等數學的領域，雖然超乎高中生的研究能力，但也令我們感到相當的興奮，同時讚嘆數學領域的博大精深。

二、應用

利用門格海綿具有無限大的表面積和趨近於 0 的體積，其規律的特質，或許未來可以將其應用在電路板、晶片或是醫療等相關方面上。舉例來說，晶片是必須在小範圍中塞入相當多的資訊，而如果我們將不同資訊放置在每一個門格海綿組成方塊的表面上，運用其構成規律的特性，就能將具有相似性質的資訊擺在相對應的位置，發生問題時也能比較迅速去找到問題資訊所在處。

三、未來展望

在研究的過程中，我們發現門格海綿的 true vertices、true edges 和 true faces 總數量的分母皆與 7、19 這兩個數字有關，未來我們想要更深入探討這兩個數字與門格海綿的組合結構是否有特殊關聯性。此外，研究門格海綿在拓樸學中的性質以及在物理上的應用，同時開發類似魔術方塊等益智玩具並分析蘊藏其中的數學原理。

捌、參考資料及其他

1. 張鎮華，蔡牧村，圖論及其演算法，(台大數學系圖論課程教材)。
2. 龍湘宜，陳宜君，Menger Sponge，臺北市第 50 屆中小學科學展覽會。
3. E. D. Bloch, *The angle defect for arbitrary polyhedra*, Beitr. Algebra Geom. 39, 379-393, (1998).
4. Gary Chartrand, Linda Lesniak and Ping Zhang, *Graphs and Digraphs*, 6th, CRC Press, (2016).
5. P. J. Federico, *Descartes on polyhedra: A study of the de solidorum elements*, Springer-Verlag New York, (1982).
6. D. S. Richeson, *The polyhedron formula and its birth of topology*, Princeton University Press.
7. Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2nd, Pearson Education, (2008).

【評語】 050409

本作品主要是研究 Menger Sponge 所推導出來的圖形之拓撲性質；在適當地定義所謂的邊，點，面 (True edge, vertex and face) 之後來看看這個圖的虧格 (Genus)。整體而言，作者能夠把第 n 階的 Menger 海綿所對應圖的各種參數以遞迴的關係計算出來，然後代入 (Euler-Poincare Theorem) 來求出答案，似乎是不錯的結果。不過有兩個注意事項提供作者參考：(1)虧格的產生，是來自該圖嵌入在曲面上所得到的答案，應該注意該曲面是否為可定向的曲面 (Orientable)。(2)公式的使用也要注意所討論的圖是否為連通圖；連通與不連通，兩者的公式並不一樣。

摘要

我們以不同的角度來分析門格海綿，在不計較長度、體積、表面積的情況下，進行 *true edges*、*true faces*、*true vertices* 的數量研究。同時利用 *total angular defect formula*，對門格海綿的結構進行探討。

目的

令 M_n 為第 n 階的門格海綿，以下為我們的研究目的：

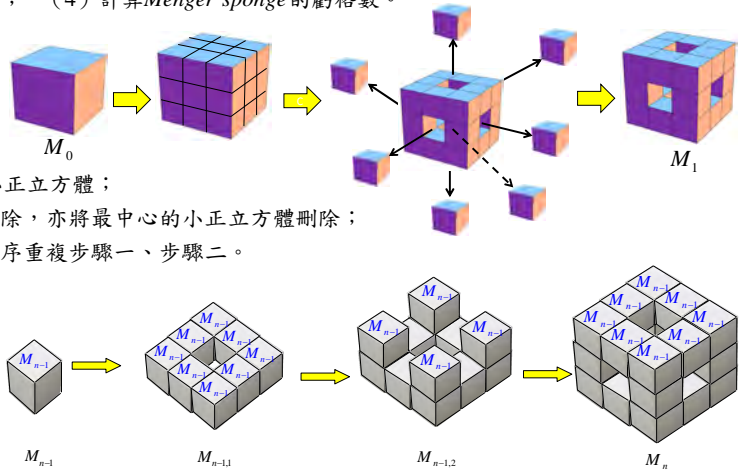
- (1) 針對不同長度的 *true edges*，求其數量；
- (2) 針對不同類型的 *true faces*，求其數量；
- (3) 針對不同度數的 *true vertices*，求其數量；
- (4) 計算 *Menger sponge* 的虧格數。

過程和方法

Menger sponge 的定義

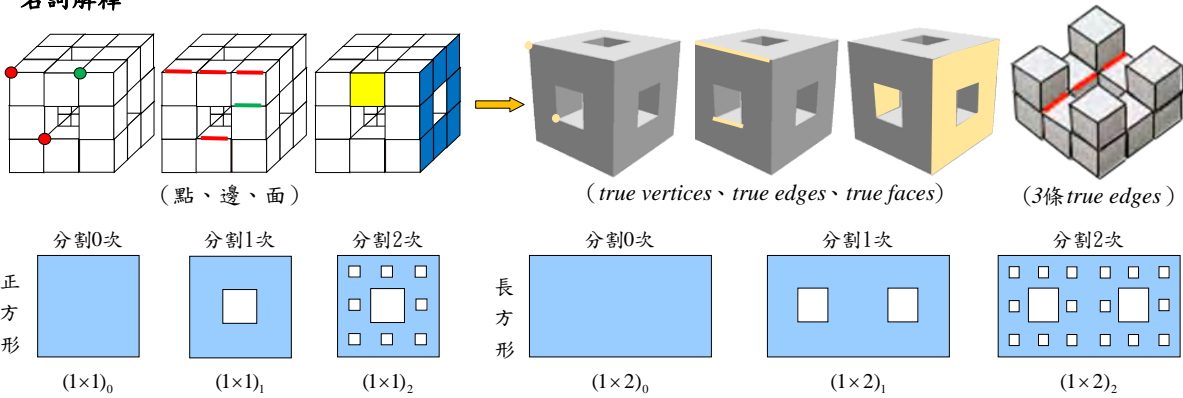
- (步驟一)：把正立方體平均分割為 27 個小正立方體；
- (步驟二)：把每一面中間的小正立方體刪除，亦將最中心的小正立方體刪除；
- (步驟三)：把遺留下來的小正立方體都依序重複步驟一、步驟二。

每當執行完步驟一、步驟二時，此時可以選擇停止，或繼續執行步驟三。把以上步驟重複操作，若操作 n 回後，則將所得殘存形體稱為『第 n 階門格海綿 Menger Sponge』，並記為『 M_n 』。



我們可將原始的『遞迴式分割』轉換為『遞迴式堆疊』的建構方法，並綜合運用兩種觀點來分析門格海綿。

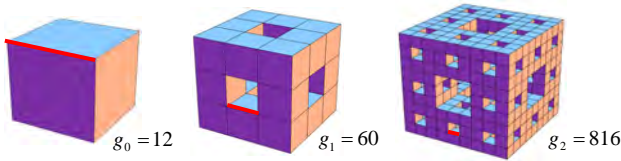
名詞解釋



Menger sponge 的 true edges, true faces, true vertices

true edges

- M_n 中長度為 1 的 *true edges*：定義『 g_n 』為 M_n 上長度為 1 的邊數量。

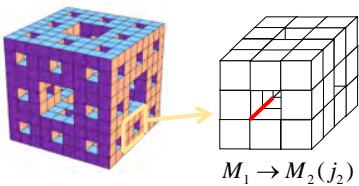


因此可建立遞迴關係式：

$$\begin{cases} g_n = 20g_{n-1} - 8 \times 2 \times 24 \times 8^{n-2}, & n \geq 2 \\ g_1 = 60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_n = 28 \times 20^{n-1} + 4 \times 8^n$$

- M_n 中長度為 2 的 *true edges*：定義『 j_n 』為 M_n 中長度為 2 的邊數量。



可建立遞迴關係式：

$$\begin{cases} j_n = 20j_{n-1} + 4 \times 24 \times 8^{n-2}, & n \geq 2 \\ j_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow j_n = 8 \times 20^{n-1} - 8^n$$

M_n 中長度為 1×3^i 的 *true edges* 數量
 \parallel
 M_{n-1} 中長度為 1 的 *true edges* 數量 $\leftarrow M_n$ 中 $N(1 \times 3^i) = g_{n-i}$

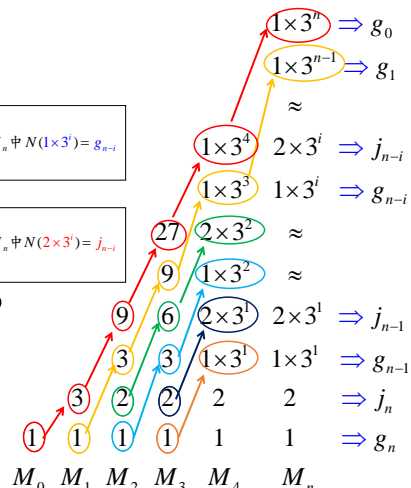
M_n 中長度為 2×3^i 的 *true edges* 數量
 \parallel
 M_{n-1} 中長度為 2 的 *true edges* 數量 $\leftarrow M_n$ 中 $N(2 \times 3^i) = j_{n-i}$

M_n 的 true edges 數量

綜合以上討論，刻劃 M_n 的 *true edges* 有以下結果：
 長度類型有 $\{t \times 3^i : t \in \{1, 2\}, i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\} \cup \{3^{n-1}, 3^n\}$ 。

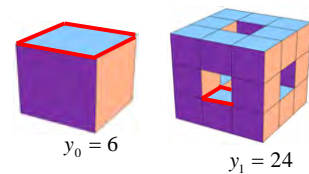
其數量為 $N(t \times 3^i) = \begin{cases} g_{n-i} = 28 \times 20^{n-i-1} + 4 \times 8^{n-i}, & t = 1 \\ j_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} - 8^{n-i}, & t = 2 \end{cases}$

$N(3^{n-1}) = 60, N(3^n) = 12$ 。



true faces

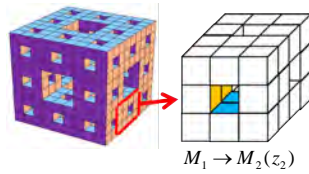
- M_n 中 $(1 \times 1)_0$ 的 true faces : 定義 『 y_n 』 為 M_n 中 $(1 \times 1)_0$ 的面數量。
- M_n 中 $(1 \times 2)_0$ 的 true faces : 定義 『 z_n 』 為 M_n 中 $(1 \times 2)_0$ 的面數量。



可建立遞迴關係式：

$$\begin{cases} y_n = 20y_{n-1} - 2 \times 4 \times 24 \times 8^{n-2}, & n \geq 2 \\ y_1 = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_n = 8 \times 20^{n-1} + 2 \times 8^n$$



可建立遞迴關係式：

$$\begin{cases} z_n = 20z_{n-1} + 4 \times 24 \times 8^{n-2}, & n \geq 2 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_n = 8 \times 20^{n-1} - 8^n$$

► M_n 的 true faces 數量

綜合以上討論，刻劃 M_n 的 true faces 有以下結果：

true faces 類型有

$$\{(1 \times t)_i : t \in \{1, 2\}, i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\} \cup \{(1 \times 1)_{n-1}, (1 \times 1)_n\}$$

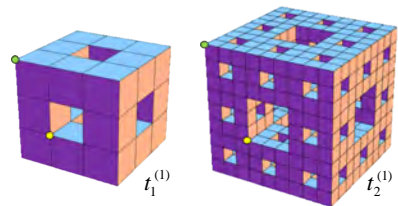
其數量為 $N((1 \times t)_i) = \begin{cases} y_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} + 2 \times 8^{n-i}, & t = 1 \\ z_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} - 8^{n-i}, & t = 2 \end{cases}$

$$N((1 \times 1)_{n-1}) = 24, N((1 \times 1)_n) = 6$$

true vertices

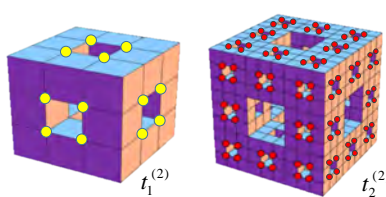
- M_n 中 $\deg(v) = 3$ 的 true vertices : 『 t_n 』

經過分割後 $\deg(v)$ 仍為 3 的點



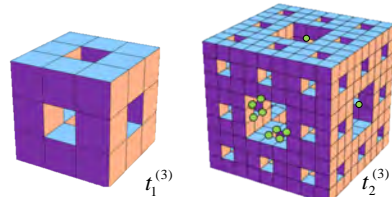
$$t_n^{(1)} = t_{n-1}$$

分割後單位洞周圍新增 $\deg(v) = 3$ 的點



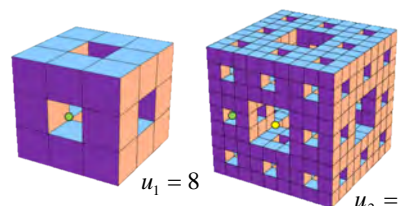
$$t_n^{(2)} = (t_{n-1} - t_{n-2}) \times 8$$

分割後單位洞內側新增 $\deg(v) = 3$ 的點



$$t_n^{(3)} = 4 \times 4 \times 6 \times 20^{n-2} = 96 \times 20^{n-2}$$

- M_n 中 $\deg(v) = 6$ 的 true vertices : 『 u_n 』



$$u_1 = 8$$

$$u_2 = 168$$

可建立遞迴關係式：

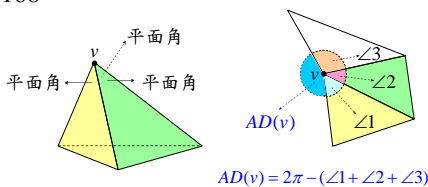
$$\begin{cases} u_n = 20u_{n-1} + 8, & n \geq 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19}$$

故可建立遞迴關係式：

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + t_n^{(2)} + t_n^{(3)} = t_{n-1} + (t_{n-1} - t_{n-2}) \times 8 + 96 \times 20^{n-2}, & n \geq 2 \\ t_0 = 8, t_1 = 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133}$$



► M_n 中 true vertices 的數量

門格海綿的 true vertices 種類只有 $\deg(v) = 3$ 、 $\deg(v) = 6$ 兩種，因此可知

M_n 的 true vertices 數量為 $t_n + u_n$ 。

因為

$$\begin{cases} t_n = \frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133} \\ u_n = \frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19} \end{cases}$$

故可得 $t_n + u_n = \frac{16}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{648}{133}$



total angular defect 皆為 4π

Menger sponge 的 Total Angular Defect

- 曲面的虧格數： $\gamma(G) = k$: k 為 G 的『虧格數』，即 $\gamma(G) = \min\{k : \text{圖 } G \text{ 可鑲嵌在曲面 } S_k \text{ 上}\}$ 。

廣義歐拉定理：令圖 G 的虧格數為 k ，其中 $|V(G)|$ 、 $|E(G)|$ 、 $|F(G)|$ 分別為圖 G 鑲嵌在曲面 S_k 上的點、邊、面的數量，

$$\text{則 } |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2 - 2k \text{ 恆成立。}$$

- Angular Defect : 令 v 為多面體 P 的頂點，若 $\deg(v) = k$ ，則 v 與 k 個面相鄰，意即 v 與 k 個平面角相鄰，令此 k 個平面角為 $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle k$ 。將 2π 減去 $(\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle k)$ 的量稱為頂點 v 的『angular defect』，並以符號記為『 $AD(v)$ 』。

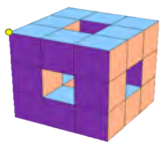
- Total Angular Defect : 給定多面體 P ，各頂點的 angular defect 總和稱為 P 的『total angular defect』，以符號記為『 $TAD(P)$ 』。

意即 $TAD(P) = \sum_{v \in V(P)} AD(v)$ 。

- Total Angular Defect Formula : 給定多面體 P ， $TAD(P) = \sum_{v \in V(P)} AD(v) = 2\pi(|V(P)| - |E(P)| + |F(P)|)$ 。

策略：因為歐拉特徵數 $|V(P)| - |E(P)| + |F(P)| = 2 - 2\gamma(P)$ ，其中 $\gamma(P)$ 為虧格數。故求得多面體的 angular defect 總和，即可求得多面體的歐拉特徵數與虧格數。

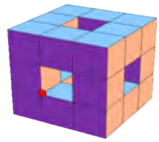
$$\left\{ v : \deg(v) = 3 \text{ 且 } AD(v) = \frac{\pi}{2} \right\}$$



只出現在 M_n 最外側的 8 個頂點上。

$$\left| \left\{ v : \deg(v) = 3 \text{ 且 } AD(v) = \frac{\pi}{2} \right\} \right| = 8$$

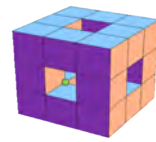
$$\left\{ v : \deg(v) = 3 \text{ 且 } AD(v) = \frac{-\pi}{2} \right\}$$



只出現在 M_n 非最外側的頂點上。

$$\left| \left\{ v : \deg(v) = 3 \text{ 且 } AD(v) = \frac{-\pi}{2} \right\} \right| = t_n - 8$$

$$\left\{ v : \deg(v) = 6 \text{ 且 } AD(v) = -\pi \right\}$$



滿足 $\deg(v) = 6$ 的所有頂點。

$$\left| \left\{ v : \deg(v) = 6 \text{ 且 } AD(v) = -\pi \right\} \right| = u_n$$

Menger sponge 的虧格數

● 利用 Total Angular Defect Formula

M_n 中 $\deg(v) = 3$ 的 true vertices 數量為 $t_n = \frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133}$;

而 M_n 中 $\deg(v) = 6$ 的 true vertices 數量為 $u_n = \frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19}$ 。

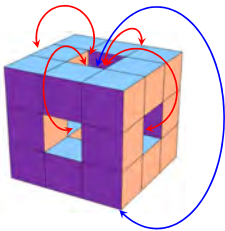
門格海綿的 true vertices 都可以區分為上述三種 angular defect 類型，因此可建立出第 n 階門格海綿的 total angular defect 的關係式

$$\begin{aligned} TAD(M_n) &= 8 \times \frac{\pi}{2} + (t_n - 8) \times \frac{-\pi}{2} + u_n \times (-\pi) \\ &= 4\pi - \left(\frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n - \frac{360}{133}\right) \times \frac{\pi}{2} - \left(\frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19}\right) \times \pi \\ &= 2\pi \left(\frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}\right) \end{aligned}$$

因為 $TAD(M_n) = 2\pi(|V(M_n)| - |E(M_n)| + |F(M_n)|) = 2\pi(2 - 2\gamma(M_n))$

所以 $TAD(M_n) = 2\pi\left(\frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}\right) = 2\pi(2 - 2\gamma(M_n))$

$$\Rightarrow \text{虧格數 } \gamma(M_n) = \frac{3}{19} \times 20^n + \frac{2}{7} \times 8^n - \frac{59}{133}$$



$\gamma(M_1) = 5$



曲面 S_0



曲面 S_1



曲面 S_2



曲面 S_3

研究結果

對任意自然數 n ，令 M_n 為第 n 階的門格海綿，對於 true edges、true faces、true vertices。以下為我們的研究結果：

(1) M_n 的 true edges 長度類型有 $\{t \times 3^i : t \in \{1, 2\}, i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\} \cup \{3^{n-1}, 3^n\}$ 。

$$M_n \text{ 的 true edges 數量為 } N(t \times 3^i) = \begin{cases} g_{n-i} = 28 \times 20^{n-i-1} + 4 \times 8^{n-i} & , t = 1 \\ j_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} - 8^{n-i} & , t = 2 \end{cases}, N(3^{n-1}) = 60, N(3^n) = 12。$$

$$M_n \text{ 的 true edges 總數量為 } \frac{36}{19} \times 20^n + \frac{24}{7} \times 8^n + \frac{888}{133}。$$

(2) M_n 的 true faces 類型有 $\{(1 \times t)_i : t \in \{1, 2\}, i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\} \cup \{(1 \times 1)_{n-1}, (1 \times 1)_n\}$ 。

$$M_n \text{ 的 true faces 數量為 } N((1 \times t)_i) = \begin{cases} y_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} + 2 \times 8^{n-i} & , t = 1 \\ z_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} - 8^{n-i} & , t = 2 \end{cases}, N((1 \times 1)_{n-1}) = 24, N((1 \times 1)_n) = 6。$$

$$M_n \text{ 的 true faces 總數量為 } \frac{16}{19} \times 20^n + \frac{8}{7} \times 8^n + \frac{534}{133}。$$

(3) $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， M_n 的 true vertices 中度數為 3 的數量為 $t_n = \frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133}$ ；度數為 6 的數量為 $u_n = \frac{160}{19} \times 20^{n-1} - \frac{8}{19}$ 。

$$M_n \text{ 的 true vertices 總數量為 } \frac{16}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{648}{133}。$$

(4) $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， M_n 的 total angular defect 為 $TAD(M_n) = 2\pi\left(\frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}\right)$ 。

$$\text{進一步可知 } M_n \text{ 的虧格數為 } \gamma(M_n) = \frac{3}{19} \times 20^n + \frac{2}{7} \times 8^n - \frac{59}{133}。$$

未來展望

1. 探討 7 與 19 在門格海綿中所代表的組合意義？
2. 研究門格海綿在拓樸學中的性質以及在物理上的應用。同時開發類似魔術方塊等益智玩具並分析蘊藏其中的數學原理。

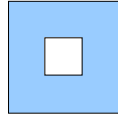
參考資料

1. 張鎮華，蔡牧村，圖論及其演算法，(台大數學系圖論課程教材)。
2. 龍湘宜，陳宜君，Menger Sponge，臺北市第50屆中小學科學展覽會(2017)。
3. Ethan D. Bloch, The angle defect for arbitrary polyhedra, Beitr. Algebra Geom. 39, 379 - 393, (1998).
4. P.J. Federico, Descartes on polyhedra: A study of the de solidorum elements, Springer - Verlag New York (1982).
5. David S. Richeson, The polyhedron formula and its birth of topology, Princeton University Press (2008).
6. Douglas B. West, Introduction to Graph Theory, 2nd, Pearson Education Taiwan (2008).

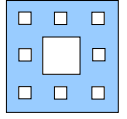
● 利用遞迴關係



$h_0 = 0$



$h_1 = 1$



$h_2 = 9$

可建立遞迴關係式：
$$\begin{cases} h_n = 8h_{n-1} + 1, & n \geq 1 \\ h_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_n = \frac{8^n - 1}{7}$$

由於堆疊 20 個 M_{n-1} 的過程中，共有 24 個連接側面，這意味著 $\gamma_n = 20\gamma_{n-1} - 24h_{n-1} + 5$ ，其中 $n \geq 1$ ， $\gamma_0 = 0$ 。

因為 M_{n-1} 單側面上被挖去的洞數量等於被重複計算的洞數量 h_{n-1} 。故可建立遞迴關係如下：

$$\begin{cases} \gamma_n = 20\gamma_{n-1} - 24 \times \frac{8^{n-1} - 1}{7} + 5, & n \geq 1 \\ \gamma_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_n = 20\gamma_{n-1} - 24 \times \frac{8^{n-1}}{7} + \frac{59}{7}, & n \geq 1 \\ \gamma_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{虧格數 } \gamma_n = \frac{3}{19} \times 20^n + \frac{2}{7} \times 8^n - \frac{59}{133}$$