# 中華民國第58屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

高級中等學校組　數學科

050408

**面對橢圓的微笑**

學校名稱：花蓮縣慈濟大學附屬高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 林彥勳 | 鍾孟然 |
| 高二 牛加芯 | 陳盈臻 |


關鍵詞：橢圓、三角函數、圓錐面

# 摘要

本研究以丹德林球體為發想基礎，將空間中平面與圓柱、圓錐面節痕所產生的圓錐曲線展開至平面並觀察其表現。發現圓柱面上的橢圓在圓柱面展開為平面後將形成餘弦函數圖形，此外我們也此想法推廣至平面的任意函數，推導任意直角坐標函數取一定範圍捲成圓柱面後的表現。而圓錐面上的橢圓、拋物線、雙曲線在圓錐面展開為扇形，並將扇形的角度擴張為完整平面後，將形成平面上的新圓錐曲線，並且平面上圓錐曲線的類型和圓錐面上圓錐曲線類型相同。

# 壹、 研究動機

在高中二次曲線的教材裡面，有關橢圓部分大多直接給予橢圓定義，並透過定義了解有關橢圓的其他性質，但這樣的方式對於我們來說沒辦法了解其內涵，於是我們便想更深入了解橢圓定義的來源及證明。聯想到橢圓是從圓錐面與平面相交而出的曲線，我們便往這個方向查詢資料，因此而發現了比利時數學家丹德林(Germinal Dandelin)的橢圓公式證明方法─丹德林球體(Dandelin Spheres)。透過圓錐面及兩顆不相交的圓錐內切球即可簡潔的證明出橢圓的公式，而這樣的證明方法也可以使用在圓柱上。在使用 cabri 3d 繪製出圓柱版本的圖形時突發奇想：如果把圓柱面攤開成平面的話，那在於其上的橢圓圖形會變成如何？是否可歸納出方程式？進而推廣到圓錐面上，將圓錐面展開後，圓錐上曲線在平面將如何表現？

# 貳、 研究目的

一、圓柱上橢圓展開後的函數式，若給定一型如此函數式，其對應的橢圓的 a 與 c

二、任意平面函數取一定範圍捲成圓柱的轉換方式

三、圓錐面展開成平面後，原本為在圓錐面上的圓錐曲線的表現將為何？

# 參、　研究設備及器材

一、紙

二、筆

三、Cabei 3d

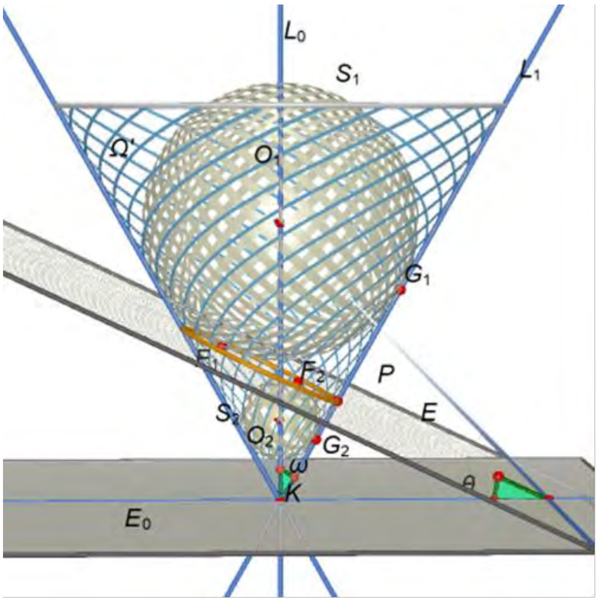
四、Geogebra

五、電腦

# 肆、　研究過程與方法

一、瞭解橢圓定義及丹德林球體

(一) 丹德林球體



圖(一)

如圖(一)

線 $L_0$ 及線 $L_1$ 為空間中取兩相交直線，以線 $L_0$ 為軸心旋轉線 $L_1$ 即可形成圓錐面 Ω'

令線 $L_0$ 線 $L_1$ 交點為圓錐頂點 K，線 $L_0$ 線 $L_1$ 交角 ω 為圓錐頂角。

平面 $E_0$ 為垂直線 $L_0$ 且包含點 K 之平面，截平面 E 為空間中不通過點 K 的平面，令 E 及 $E_0$ 交的兩面角為 θ，當 $0 <\theta<90°-\omega$ 時，截平面 E 與 Ω'

的相交線即為橢圓。

球 $S_1$、球 $S_2$ 為兩個同時切於圓錐面 Ω'及面 E 的球，令兩球球心為點 $O_1$、點 $O_2$。

對於橢圓上任意一點 P，皆存在兩點點 $G_1$、點 $G_2$，使得點 $G_1$、點 $G_2$、點 P 共一條位於圓錐面上的線且點 $G_1$、點 $G_2$ 分別在球 $S_1$、球 $S_2$ 上。

$\because \overline{G_1G_2} = \overline{G_1K} - \overline{G_2K} = \cos(\omega)\overline{O_1K} + \cos(\omega)\overline{O_2K} = \cos(\omega)\,\overline{O_1O_2}$

$\therefore$當 θ、ω 為定值時，$\overline{G_1G_2}$ 的長度亦為定值

→ $\overline{G_1G_2}$ 的長度不受到點 P 位置影響

又根據割線定理$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PG_1} + \overline{PG_2} = \overline{G_1G_2}$

橢圓為平面 E 上任何點q使得$\overline{qF_1} + \overline{qF_2} = \overline{G_1G_2}$

$\because \angle O_1G_1O_2$ 和 $\angle O_2G_2O_1$ 皆為直角

$\therefore \overline{O_1O_2} = \overline{G_1G_2}$

又根據割線定理可知

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PG_1} + \overline{PG_2} = \overline{O_1O_2}$$

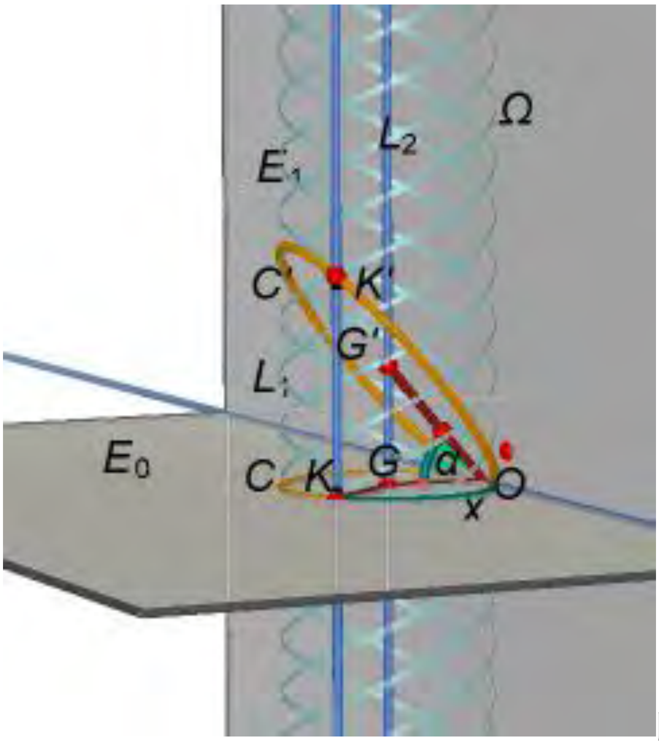
橢圓為平面 E 上任何點q使得$\overline{qF_1} + \overline{qF_2} = \overline{O_1O_2}$

二、使用綜合方法找出所求

# 伍、 研究結果

一、圓柱上橢圓的展開

(一) 標號解釋



圖(二)

如圖(二)

面 $E_0$、面 $E_1$ 為兩垂直平面

面 $E_0$、面 $E_1$ 交線為線 $L_1$

點 O 為線 $L_1$ 上一點

點 O 往垂直面 E1 的方向延伸 r 單位為點 G

線 $L_2$ 為垂直面 E0 且包含點 G 的直線

圓柱Ω以線 $L_2$ 為中軸 r 為半徑之圓柱

點 G’為線 $L_2$ 上異於點 G 的點

平面 E 為包含線 L1、點 G’之平面(避免畫面過於複雜，平面 E 並未顯示於圖(四))。

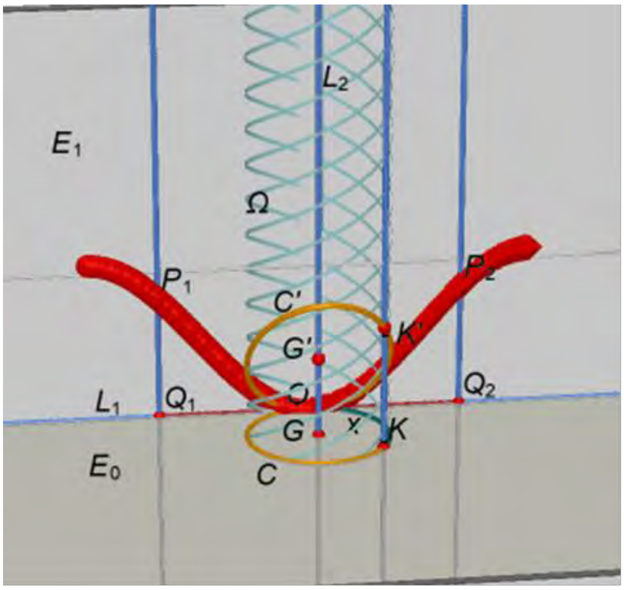
圓 C 為面 $E_0$ 交圓柱Ω之曲線，橢圓 C’為面 E 交圓柱Ω之曲線

角 α 為∠GOG’，並將角 α 截平面揚角

點 K 為圓 C 上動點，x 為 $\overset{\frown}{OK}$ (在圓 C 上的劣弧長度，為了使圓柱面展開成平面，當 x 位於右側時將其值定為正，x 位於左側時其值定為負

(二) 猜測

一開始使用手繪的方式觀察圖形，展開後應為曲線，又將圓柱上橢圓重複展開後的曲線應為週期性函數，故猜測與三角函數有關。



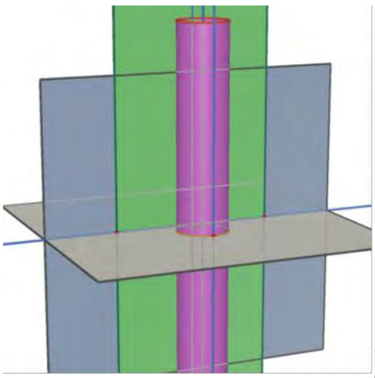
圖(三)

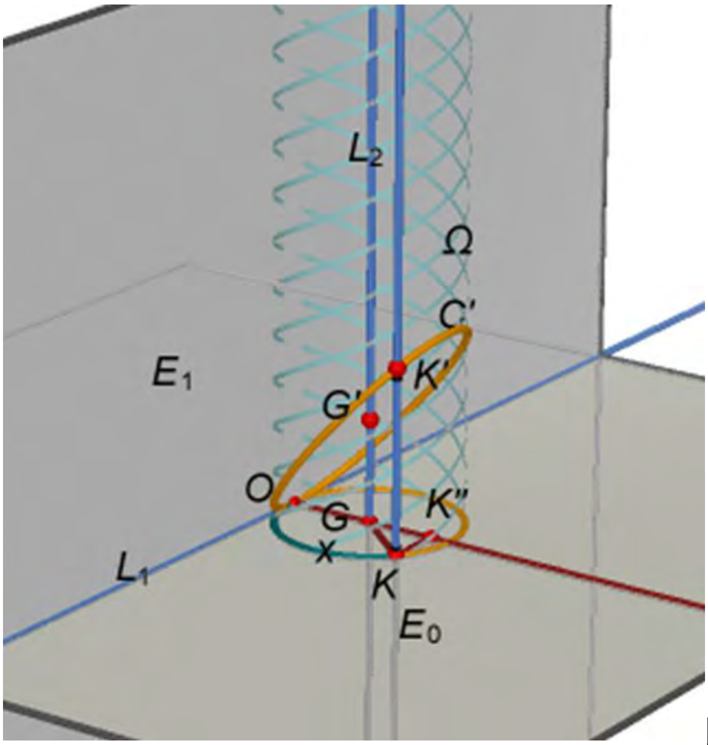
在圖(三)中，我們在 $L_1$ 上將 X 長度由 O 點往兩側量度轉移得到動點 $Q_1$、$Q_2$，再來我們將$\overline{KK'}$的長度從 $Q_1$、$Q_2$ 以垂直 $E_1$ 並且和橢圓 C′同側的方向量度轉移，並且得到動點 $P_1$、$P_2$，$P_1$、$P_2$ 所形成之軌跡即為橢圓 C′形成的新圖形。可知展開後的周期函數與 $E_0$ 最大距離為$2r \times \tan(\alpha)$，且其週期為$2\pi r$。

(三) 證明函數

1. 三角幾何

在三角幾何證明中，我們將圓柱從中央剖半並往兩側貼上如圖(四)


圖(四)



圖(五)

再來我們將橢圓 C′展開至平面上，如圖(五)

做$\overrightarrow{OG}$射線，將$\overline{GK}$垂直投影於$\overrightarrow{OG}$上的K’’

$\overline{GK''} = r \times \cos\angle KGK''$

$= -r \times \cos(180° - \angle KGK'')$

$= -r \times \cos\angle KGO$

$= -r \times \cos\dfrac{x}{r}$

$\overline{OK''} = r - r \times \cos\frac{x}{r} = r(1 - \cos\frac{x}{r})$

$\overline{KK''} = \tan\alpha \times \overline{OK''} = r \times \tan\alpha \times (1 - \cos\dfrac{x}{r})$

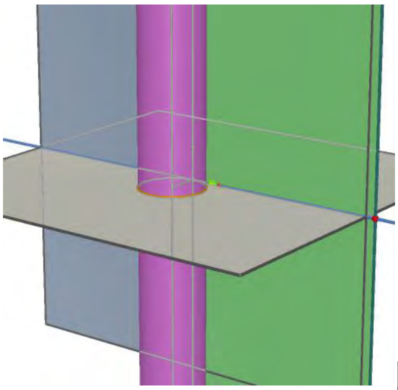
由此可之圓柱面上橢圓展開後的週期函數為

$r \times \tan\alpha\,(1 - \cos\dfrac{x}{r})$

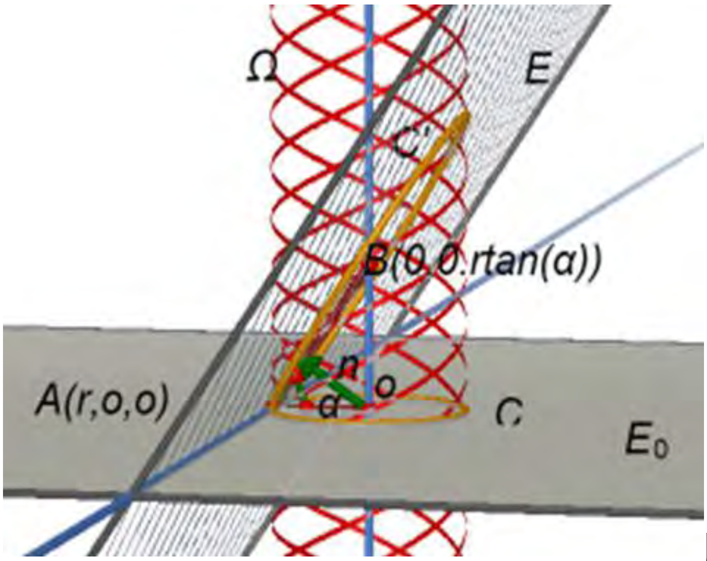
2. 解析幾何

在解析幾何證明時，為了方便證明，我們將圓柱面由一側撕開並貼

往另一面，如圖(六)



圖(六)




圖(七)

如圖(七)

令圓柱Ω為$\begin{cases} x = r \times \cos t \\ y = r \times \sin t \end{cases}$，t 為實數

A 點為$(r, 0,0)$

B 點為$(0,0, r \times \tan \alpha\ )$

平面 E 為包含 AB 兩點且與 x-y 平面交角為 α 之平面

向量$\vec{n}$為 E 之單位方向向量

圓 C 為圓柱Ω與 x-y 平面的交線

橢圓 C'為圓柱Ω與平面 E 的交線

$\because \vec{n}$與$\overline{OA}$交角為$\pi - \alpha$，且$|\vec{n}|$為 1

$\therefore \vec{n}$=$(\sin \alpha, 0 ,\cos \alpha)$

又平面 E 通過點 A(r,0,0)

$\rightarrow E = x \times \sin\alpha + z \times \cos\alpha \ = r \times \sin\alpha$

聯立$\begin{cases} x = r \times \cos t \ldots ① \\ y = r \times \sin t \ldots ② \\ x \times \sin\alpha + z \times \cos\alpha \ = r \times \sin\alpha \ldots ③ \end{cases}$ 則可得橢圓 C'之參數式

先整理③

因角α恆小於 90°，$\sin\alpha \neq 0$

固可將③等號雙邊同除$\sin\alpha$

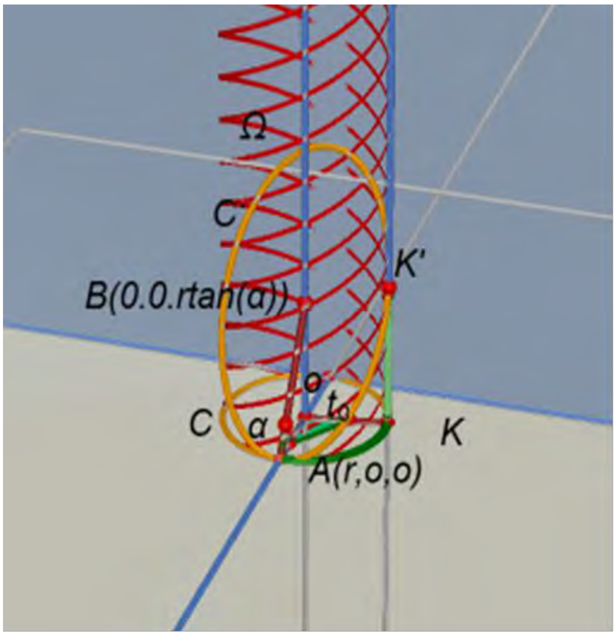
$x + \frac{z}{\tan\alpha} = r \ldots ④$

將式①帶入式④

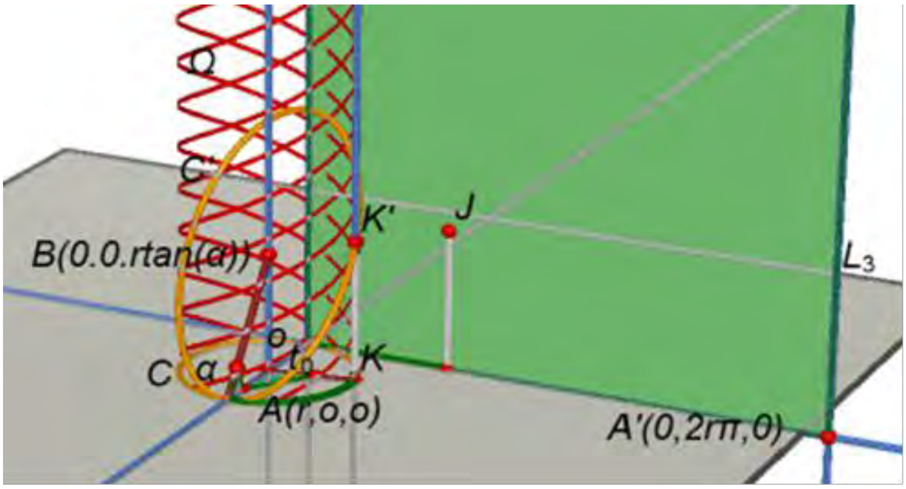
$r \times \cos t + \frac{z}{\tan\alpha} = r$

$\rightarrow z = r \times \tan\alpha \times (1 - \cos t)$

$\rightarrow C' = \begin{cases} x = r \times \cos t \\ y = r \times \sin t \\ z = r \times \tan\alpha \times (1 - \cos t)) \end{cases}$



圖(八)




圖(九)

在來我們將圓柱面展開，如圖(八)(九)

在圖(八)中，當$t = t_0$時，所對應到橢圓C'上的點為點K，過K點做$x-y$平面之垂直線交橢圓C'於點K'，顯然此時$t_0$為K以x軸正向為始邊的有向角。在圖(十)中將圓柱由直線$x = r$順時針展開並貼到$y-z$平面上，並使為$y = 0$為起始邊，如圖(九)中的綠色平面，此時的終邊為$y = 2r\pi$

令點J為點K'在展開後的對應點，點J的y座標值為$t_0$在圓C上所對應到的弧長；z座標值為$\overline{KK'}$的長度，又$\overline{KK'}$的長度即是點K'的z座標

$\rightarrow$ J點座標為$(0, rt_0, r \times \tan\alpha \times (1-\cos t_0))$

此時點J的z座標為其y座標的函數

$z = f(y) = \ r \times \tan\alpha\,(1-\cos\frac{y}{r})$

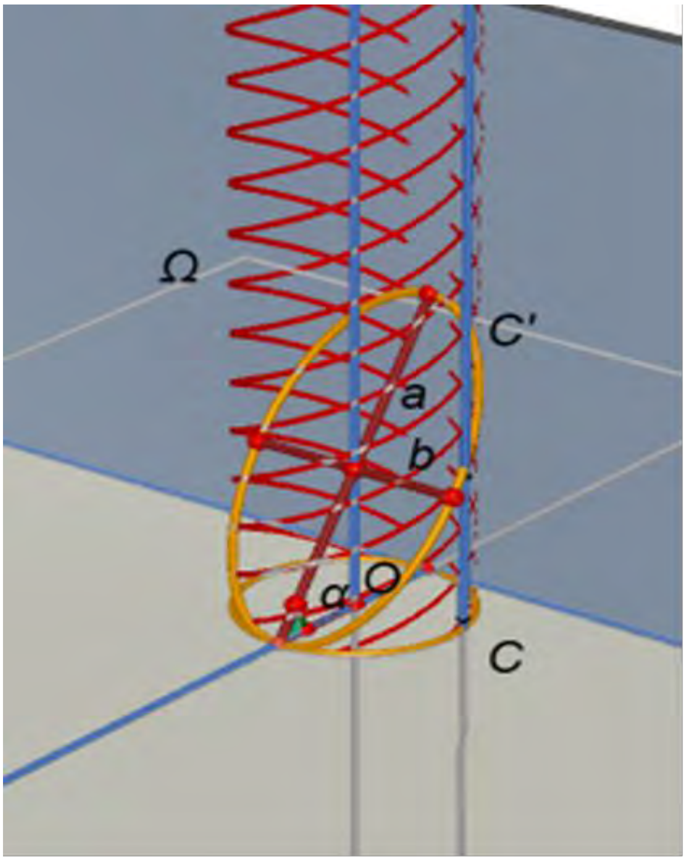
此式等價先前使用三角幾何所得之結果

二、從餘弦函數圖形回推回圓柱面上橢圓

(一) 引理

| |
|---|
| 當一截平面以揚角為 $\alpha_0$ 交易半徑為 $r_0$ 之圓柱面時<br>相交橢圓之$a = \frac{r_0}{\cos(\alpha_0)}$、$b = r_0$、$c = r_0\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha_0} - 1}$ |

證明如下



圖(十)

由圖(十)可知圓柱Ω的半徑 r = b

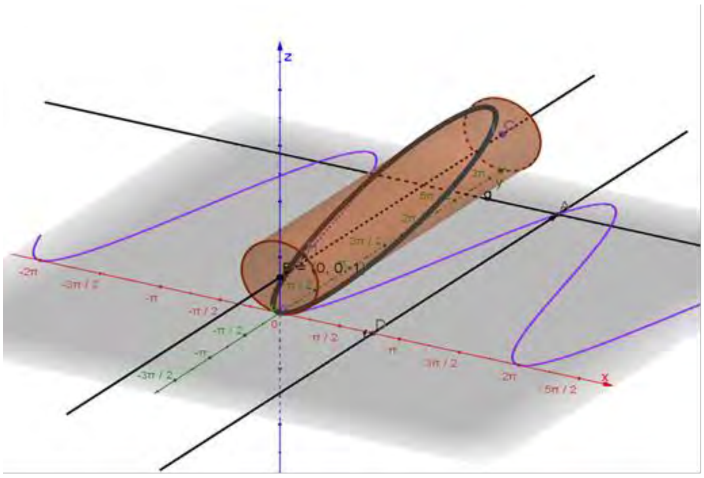
又$\cos\alpha = \frac{b}{a}$

$$\rightarrow a = \frac{b}{\cos\alpha_0} = \frac{r_0}{\cos\alpha_0}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{b^2}{\cos^2\alpha_0} - b^2} = \sqrt{\frac{{r_0}^2}{\cos^2\alpha_0} - {r_0}^2} = r_0\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha_0} - 1}$$

(二) 當一函數為$f(x) = m \times \cos\frac{x}{n}$時其中m、n為正實數，若將平面座標系橫向以$2n\pi$為圓周長捲成一圓柱面其形成的橢圓之$a = \frac{\sqrt{4n^2+m^2}}{2}$、$b = n$、$c = \frac{m}{2}$

證明如下



圖(十一)

因為餘弦函數圖形的週期性，我們不妨就只取$0 \leq x \leq 2n\pi$的區間。

由式一可知，一位於半徑為 r 的圓柱面上的橢圓在圓柱面展開後所形成之函數圖形是一以餘弦函數為基底的函數圖形，且其週期為$2\pi r$，換言之若將$f(x) = m \times \cos\frac{x}{n}$以一個週期$2n\pi$捲成圓柱面應可得一橢圓如圖(十一)，且此橢圓位在一半徑為n的圓柱上。再來透過式一與$m \times \cos\frac{x}{n}$的比較係數可解出截平面仰角$\alpha$

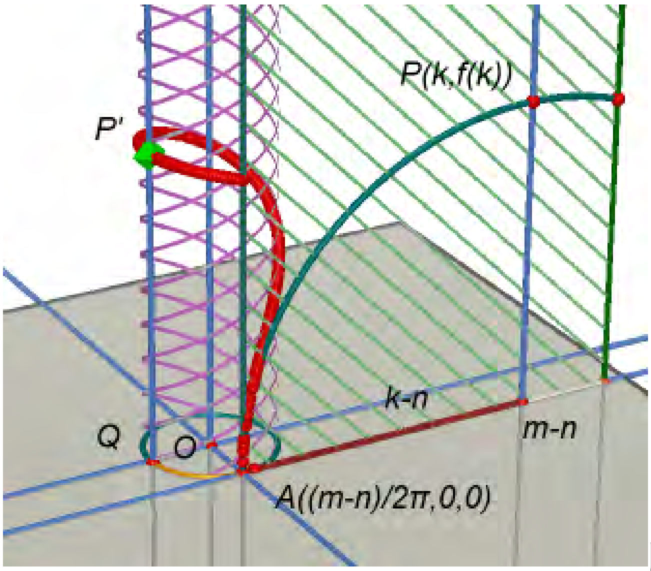
$m = 2n \times \tan\alpha$

$\rightarrow \tan\alpha = \dfrac{m}{2n}$

$\rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2n}{\sqrt{4n^2 + m^2}}$

再透過引理可得此橢圓$a = \frac{\sqrt{4n^2+m^2}}{2}$、$b = n$、$c = \frac{m}{2}$，得證

三、任意平面函數在一定 x 值範圍內捲成圓柱面後得表現



圖(十二)

如圖(十二)

令平面上圖形為函數$y = f(x)$

取$n \le x \le m$(n、m 為實數且 $n \ne m$)的區段，將此平面以$m-n$為周長捲成圓柱面並置於空間中，並討論其捲成圓柱後原平面上的函數將如何表現。

為了方便參數式的使用我們使 z 軸為此圓柱面的中軸，平面起始線(即平面上$x = n$處)交空間中x軸於點$A\left(\frac{m-n}{2\pi}, 0,0\right)$，並且使平面平行於空間中得 y-z 軸，再將平面逆時針捲起

首先先求捲成圓柱後的半徑 r

$\because$圓柱面周長$m-n = 2r\pi$

$\therefore r = \frac{m-n}{2\pi}$

假設點 P為平面中函數$f(x)$上的一點，其平面座標為$(k, f(k))((n \le k \le m)$，

點$P'$為 P 點在平面捲成圓柱面後對應到的點

先處理點$P'$在空間中的z座標

$\because$點$P'$到x-y平面的距離即是點 P在平面上到x軸的距離

$\therefore$點$P'$空間中的z座標為$f(k)$

再來我們處理$P'$在空間中的x、y座標

過點$P'$做垂直x-y平面的直線並交x-y平面於點 Q

在圓柱面上，逆時針由點A到點 Q的距離即是$k-n$

$\rightarrow \angle AOQ = \frac{k-n}{\frac{m-n}{2\pi}}$，並令此角為$\theta(0 \le \theta \le 2\pi)$

$\rightarrow$ 點 Q在空間中的座標為$(\cos\theta \times \frac{m-n}{2\pi}, \sin\theta \times \frac{m-n}{2\pi}, 0)$

$\rightarrow$點$P'$空間中的x、y座標分別為$\cos\theta \times \frac{m-n}{2\pi}, \sin\theta \times \frac{m-n}{2\pi}$

$\rightarrow$點$P'$空間中的座標為$\begin{cases} x = \cos\theta \times \frac{m-n}{2\pi} \\ y = \sin\theta \times \frac{m-n}{2\pi} \\ z = f(k) = f(\frac{m-n}{2\pi}\theta + n) \end{cases}$

又 P'點所形成之軌跡即為平面函數$y = f(x)$在平面捲成圓柱面後其圖形

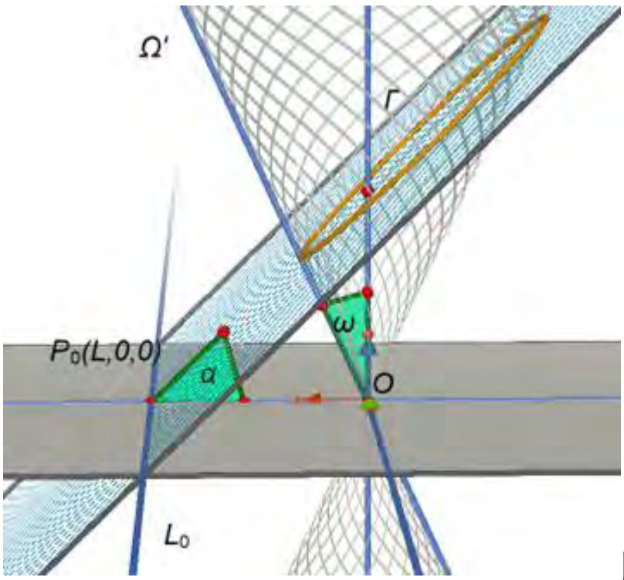
$\rightarrow$原本在平面函數$y = f(x)$在平面捲成圓柱面後其圖形參數式為

$$\begin{cases} x = \frac{m-n}{2\pi} \times \cos(\theta) \\ y = \frac{m-n}{2\pi} \times \sin(\theta)\ (0 \le \theta \le 2\pi) \\ z = f\left(\frac{m-n}{2\pi}\theta + n\right) \end{cases}$$

四、圓錐上曲線展開後表現

我們知道一平面與一圓錐相交的圖形總共有八種狀況 1.無圖形 2.一點 3.一直線 4.圓 5.二相交直線 6.拋物線 7.橢圓 8. 雙曲線，在此我們只討論拋物線、橢圓、雙曲線展開後的圖形。

(一) 標號解釋




圖(十三)

如圖(十三)

首先先針對圓柱上所使用的標號解釋

圓錐 Ω’為以 z 軸為中軸，原點 O 為頂點的圓錐

角 ω 為圓錐 Ω’之頂角

點$P_0$為(L,0,0)其中為 L 正實數

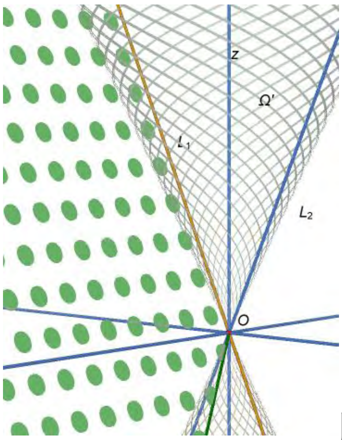
$L_0$為平行 y 軸且過點$P_0$的直線

截平面 E 過$L_0$且與 x-y 平面交角為α，$\alpha \neq 0$。考慮到上下對稱性，不妨將交角α限定於 z 座標大於零的掛限

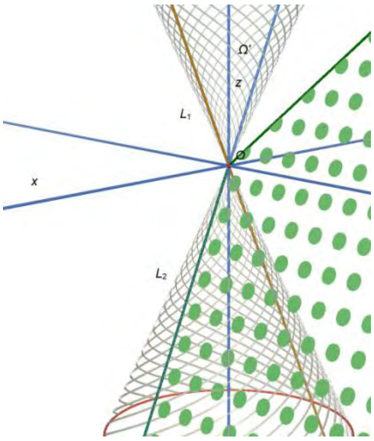
曲線 Γ 為圓錐 Ω’ 與截平面π相交的圓錐曲線

(二) 圓錐展開後的圖形

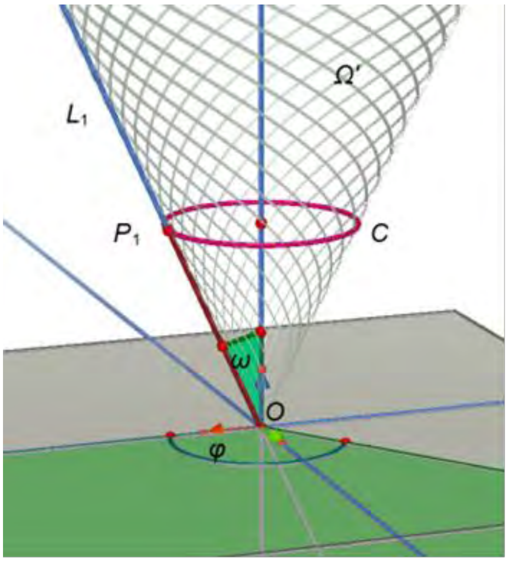
接下來解釋我們如何展開圓錐




圖(十四)




圖(十五)




圖(十六)

在圖(十四)、圖(十五)中，線 $L_1$、$L_2$ 在圓錐 Ω’上且 $L_1$、$L_2$、x 軸、z 軸共面，$L_1$ 的上半部在 x 值為正的區間，$L_2$ 的下半部在 x 值為正的區間，將圓錐 Ω’上半部沿 $L_1$ 展開、下半部沿著 $L_2$ 展開後可得二扇形，為了搭配極座標使用，我們將兩扇形貼在 x-y 平面上，如圖(十六)，並使其位於原點 O、始邊對齊 x 軸正向。令φ為其中心角

點 $P_1$ 在線 $L_1$ 上且使$\overline{P_1O} = 1$，以及 $P_1$ 的 x 座標值為

正圓 C 為過 $P_1$ 且位在圓錐 Ω’上的橢圓

∵圓 C 周長等於$\overline{P_1O}$在展開後扇形所形成的弧長

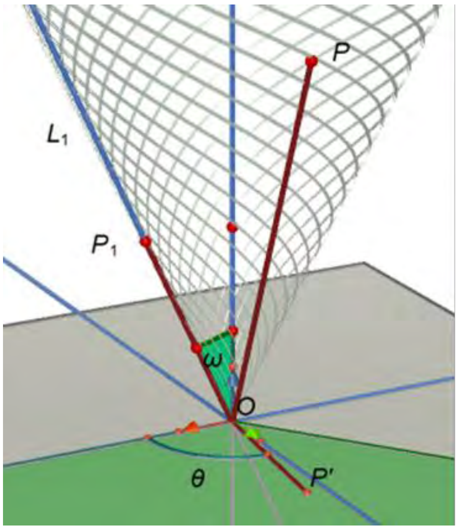
$\therefore 2\pi\overline{P_1O}\sin\omega = 2\pi\overline{P_1O}\frac{\varphi}{360°}$

$\rightarrow 360° \times \sin\omega = \varphi$

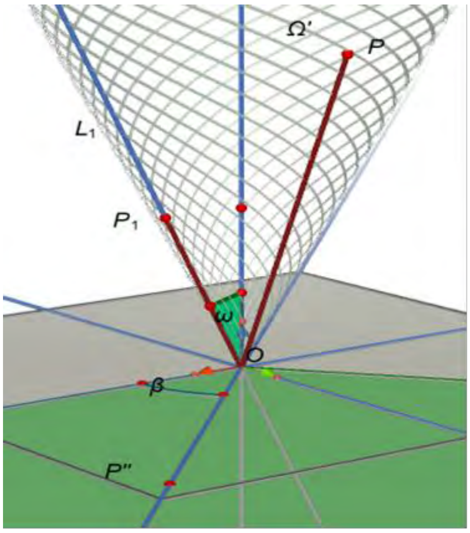
由此可知展開後扇形中心角φ大小取決於圓錐頂角ω，且其關係為

$360° \times \sin\omega = \varphi$

(三) 圓錐上的點展開後表現



圖(十七)



圖(十八)

如圖(十七)(十八)

點 P 為圓錐 Ω'上的任意一點，點 P'為點 P 垂直投射到 x-y 平面上的對應點

此時我們定義在 x-y 平面上，以 x 軸正向為始邊、$\overline{OP'}$為終邊的有向角為中央轉角 θ

因此可以令點 P 為$(\cos\theta\times\tan\omega\times|z_0|,\sin\theta\times\tan\omega\times|z_0|,z_0)$，其中 M為實數

點 P''為點 P 展開後所對應到的點，角β為 P''點在 x-y 平面上的有向角

因為要使用極座標表示 P''在 x-y 上的位置， 必須透過 P 點座標解出角β以及$\overline{OP''}$

$\because 2\overline{OP}\pi\times\frac{\beta}{360°}=2\overline{OP'}\pi\times\frac{\theta}{360°}$；且$\overline{OP'}=\sin\omega\times\overline{OP}$

$\therefore\overline{OP}\times\beta=\overline{OP'}\times\theta$

$\rightarrow\overline{OP}\times\beta=\sin\omega\times\overline{OP}\times\theta$

$\rightarrow\beta=\sin\omega\times\ \theta$

又$\overline{OP''}=\overline{OP}$

$\overline{OP}=\ |z_0|\times\sec\omega$

因此可知道點 P''在 x-y 平面上的極座標$[|z_0| \times \cos\omega, \sin\omega \times \theta]$

也就是說

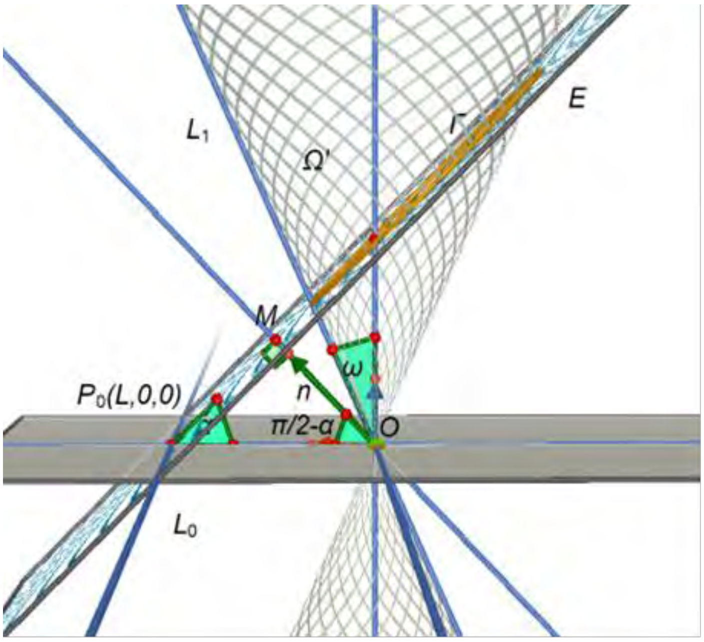
| |
|---|
| 在圓錐面上一點$(\cos\theta \times \tan\omega \times |z_0|, \sin\theta \times \tan\omega \times |z_0|, z_0)$在圓錐面打開後所對應到的極座標為$[|z_0| \times \sec\omega, \sin\omega \times \theta]$ |

(四) 展開截平面 E 與圓錐面 Ω'的交線

直接令圓錐 Ω'的參數式：

$$\Omega' = \begin{cases} z = t \\ x = |t| \times \tan\omega \times \cos\theta \\ y = |t| \times \tan\omega \times \sin\theta \end{cases} (0 \le \theta \le 2\pi)$$

再來我們寫出截平面 E 之參數式



圖(十九)

在圖(十九)中向量$\vec{n}$為截平面 E 的其中一條單位法向量，並將其平移至原點

延伸向量$\vec{n}$交於截平面 E 可得點 M

此時$\angle MOP_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha$

→向量$\vec{n}$座標表示為$\vec{n}(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), 0, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right))$

整理可得

$\rightarrow \vec{n}(\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$

又

∵截平面 E 過 $P_0(L,0,0)$

∴截平面 E 方程式為$x \times \sin\alpha + z \times \cos\alpha = L \times \sin\alpha$

聯立兩方程式即可的相交曲線的參數式

$$\begin{cases} \Omega' \\ x \times \sin\alpha + z \times \cos\alpha = L \times \sin\alpha \ldots ④ \end{cases}$$

$$\Omega': \begin{cases} z = t \ldots ① \\ x = |t| \times \tan\omega \times \cos\theta \ldots ② \\ y = |t| \times \tan\omega \times \sin\theta \ldots ③ \end{cases}$$

$\because \sin\alpha \neq 0$

∴可將④同除$\sin(\alpha)$得：

$$x + \frac{z}{\tan\alpha} = L \ldots ⑤$$

將①②帶入⑤

$$\rightarrow |t| \times \tan\omega \times \cos\theta + \frac{t}{\tan\alpha} = L$$

$$\rightarrow t\left(\frac{1}{\tan\alpha} \pm \tan\omega \times \cos\theta\right) = L$$

$$\rightarrow t\left(\frac{1 \pm \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}{\tan\alpha}\right) = L$$

$$\rightarrow t = L\left(\frac{\tan\alpha}{1 \pm \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right)$$

此時再將 t 值帶入式 2 及式 3 得：

$$x = L\left(\frac{\tan\omega \times \tan\alpha \times \cos\theta}{1 \pm \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right)$$

$$y = L\left(\frac{\tan\omega \times \tan\alpha \times \sin\theta}{1 \pm \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right)$$

由此可得截平面 E 與圓錐 Ω’上葉的交線Γ參數式為

$$\Gamma:\begin{cases} x = L\left(\dfrac{\tan\omega \times \tan\alpha \times \cos\theta}{1+\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right) \\ y = L\left(\dfrac{\tan\omega \times \tan\alpha \times \sin\theta}{1+\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right) \\ z = L\left(\dfrac{\tan\alpha}{1+\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right) \end{cases}$$

截平面 E 與圓錐 Ω'下葉的交線Γ參數式：

$$\Gamma:\begin{cases} x = L\left(\dfrac{\tan\omega \times \tan\alpha \times \cos\theta}{1-\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right) \\ y = L\left(\dfrac{\tan\omega \times \tan\alpha \times \sin\theta}{1-\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right) \\ z = L\left(\dfrac{\tan\alpha}{1-\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right) \end{cases}$$

帶入先前的點轉換公式可得展開後的極座標參數式

$$\left[L\left(\frac{\tan\alpha \ \times \sec\omega}{1+\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right), \sin\omega \times \theta\right](\text{上葉})$$

$$\left[L\left(\frac{\tan\alpha \ \times \sec\omega}{1-\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right), \sin\omega \times \theta\right](\text{下葉})$$

我們發現若將極座標式進行角度等比例的擴張成完整的平面，新平面上的圖形表現亦為圓錐曲線，且當圓錐上的圓錐曲線為橢圓時，新圖形為橢圓；圓錐上為拋物線時，新圖形為拋物線；當圓錐上為雙曲線時，新圖形為雙曲線。

這裡因為橢圓及拋物線僅存在圓錐 Ω'上葉，故我們直接討論上葉

將 $\left[L\left(\frac{\tan\alpha \ \times \sec\omega}{1+\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right), \sin\omega \times \theta\right]$ 將有角同乘 $\sin\omega$

$\rightarrow \left[L\left(\frac{\tan\alpha \ \times \sec\omega}{1+\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right), \theta\right]$ 如此便將原扇形擴展為一完整平面

此時我們將此極座標函數轉換為直角坐標

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = L\left(\dfrac{\tan\alpha \ \times \sec\omega}{1+\tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right) \\ \dfrac{x}{y} = \tan\theta \end{cases}$$

令 $\tan\omega \times \tan\alpha$ 為 A

$$\rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = L\left(\frac{\frac{A}{\sin\omega}}{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}A}\right)$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + xA = \frac{LA}{\sin\omega}$$

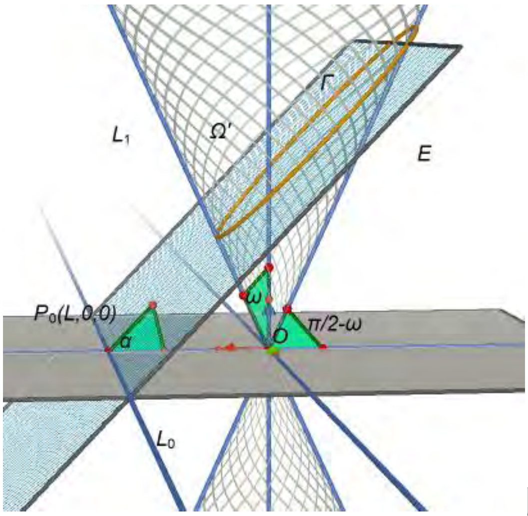
$$\rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = A(\frac{L}{\sin\omega} - x)$$

$$\rightarrow x^2+y^2 = A^2\left(\frac{L^2}{\sin^2\omega} - 2\frac{Lx}{\sin\omega} + x^2\right)$$

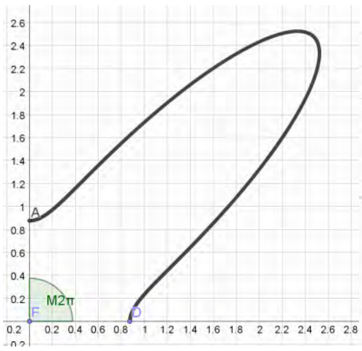
$$\rightarrow \frac{A^2L^2}{\sin^2\omega} = (1-A^2)x^2 + \frac{2A^2L}{\sin\omega}x + y^2$$

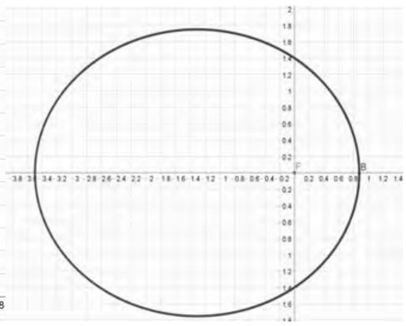
再來我們針對Γ的表現做討論

1. 當交線Γ為橢圓時，$0 < \alpha < \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) < \frac{\pi}{2}$，如圖(二十)




圖(二十)





圖(二十一) 圖(二十二)

圖(二十一)圓錐面上橢圓展開在扇形上的圖形

圖(二十二)扇形經過角度變化後圖形

$\because \left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) > \alpha . \therefore \tan\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) > \tan\alpha$

$\rightarrow \dfrac{1}{\tan\omega} > \tan\alpha$

$\rightarrow 1 > \tan\alpha \times \tan\omega = A$

此時我們可將式子繼續整理

$$\rightarrow \frac{A^2L^2}{\sin^2\omega} = (1-A^2)\left(x^2+\frac{2A^2L}{\sin\omega\,(1-A^2)}x\right)+y^2$$

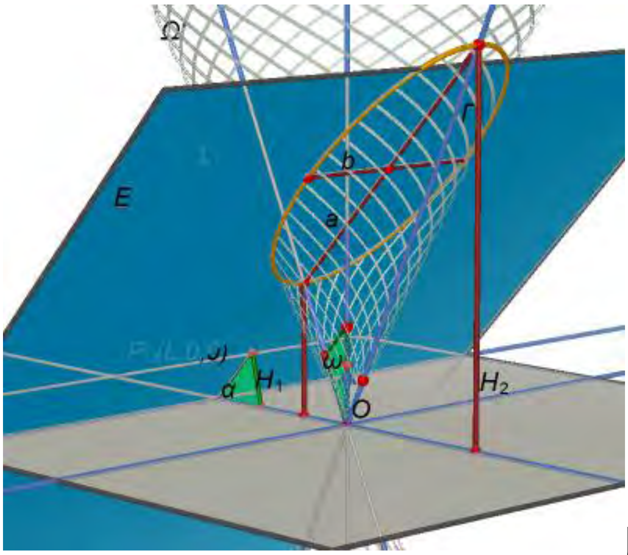
$$\rightarrow \frac{A^2L^2}{\sin^2\omega}+\frac{A^4L^2}{\sin^2\omega(1-A^2)} = (1-A^2)(x+\frac{A^2L}{\sin\omega\,(1-A^2)})^2+y^2$$

$$\rightarrow \frac{A^2L^2}{\sin^2\omega(1-A^2)} = (1-A^2)\left(x+\frac{A^2L}{\sin\omega\,(1-A^2)}\right)^2+y^2$$

$$\rightarrow 1 = \frac{\left(x+\frac{A^2L}{\sin\omega\,(1-A^2)}\right)^2}{\frac{A^2L^2}{\sin^2\omega(1-A^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{A^2L^2}{\sin^2\omega(1-A^2)}}$$

此為橢圓之標準式，由此可知產生的新橢圓中心為$(-\frac{A^2L}{\sin\omega(1-A^2)},0)$，

長軸為$\frac{AL}{\sin\omega(1-A^2)}$，短軸為$\frac{AL}{\sin\omega\sqrt{(1-A^2)}}$




圖(二十三)

再來我們求出Γ的長短軸做對應

如圖(二十三)$H_1$、$H_2$為圓錐上橢圓最低點及最高點到$x-y$平面的

距離，圓錐的長軸為a，短軸為b。

$$2a=\frac{H_2-H_1}{\sin\alpha}$$

透過Γ參數式可求出$H_1$、$H_2$

$$\rightarrow 2a=L\times\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{1-\tan\omega\times\tan\alpha}-\frac{1}{1+\tan\omega\times\tan\alpha}\right)$$

一樣令$\tan\omega\times\tan\alpha=A$

$$\rightarrow 2a=L\times\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{2A}{1-A^2}\right)$$

$$\rightarrow a=\frac{AL}{\cos\alpha\,(1-A^2)}$$

又當 $z=\frac{H_1+H_2}{2}$時，其|y|即為 b 長度

$$即\ z=L\times\tan\alpha\times\frac{\frac{1}{1-A}+\frac{1}{1+A}}{2}=\frac{L\times\tan\alpha}{1-A^2}$$

此時$\cos\theta=-A$、 $\sin\theta=\pm\sqrt{1-A^2}$

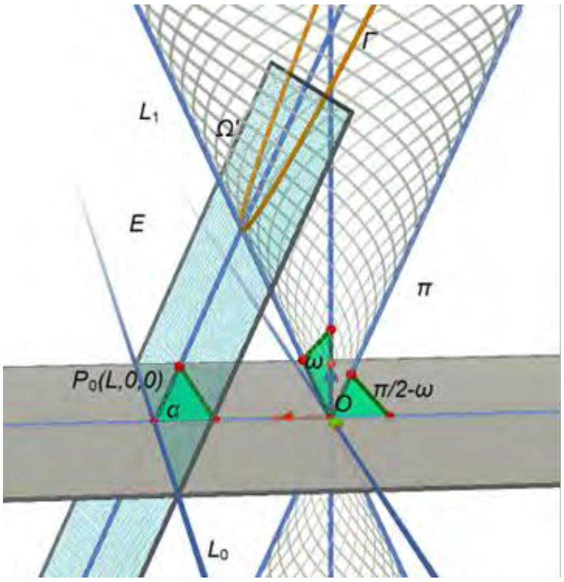
$$\rightarrow y=\pm LA\frac{\sqrt{1-A^2}}{1-A^2}=\pm\frac{LA}{\sqrt{1-A^2}}$$

$$\rightarrow b=|y|=\frac{LA}{\sqrt{1-A^2}}$$

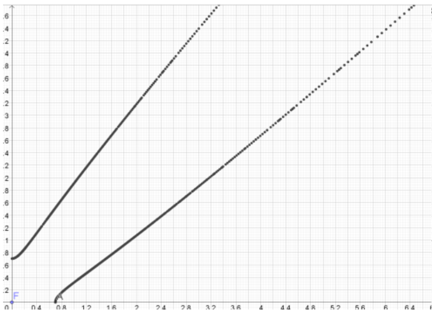
對比平面橢圓的長軸$\frac{AL}{\sin\omega(1-A^2)}$，短軸$\frac{AL}{\sin\omega\sqrt{(1-A^2)}}$ 得伸縮矩陣

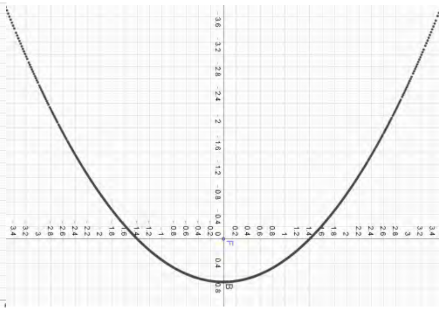
$\begin{bmatrix}\frac{\cos\alpha}{\sin\omega} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sin\omega}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}$，其中a、b為Γ的半長、短軸，$a_1$、$b_1$為圓錐面展開進行角度變換後的半長、短軸。另外任意平面上橢圓在極式角度統一縮小一定比例並且捲成一頂角為ω的扇形後，亦可形成一橢圓，並且有伸縮矩陣$\begin{bmatrix}\frac{\sin\omega}{\cos\alpha} & 0\\ 0 & \sin\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$其中$a_1$、$b_1$為平面橢圓的半長、短軸，a、b為空間中心橢圓之半長短軸

2. 當交線Γ為拋物線時，$0<\alpha=\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)<\frac{\pi}{2}$，如圖(二十四)




圖(二十四)





圖(二十五) 圖(二十六)

圖(二十五)圓錐面上拋物線展開在扇形上的圖形

圖(二十六)扇形經過角度變化後圖形(右轉九十度)

$\because\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\alpha \therefore \tan\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\tan\alpha$

$\rightarrow \frac{1}{\tan\omega}=\tan\alpha$

$\rightarrow 1=\tan\alpha\times\tan\omega=A$

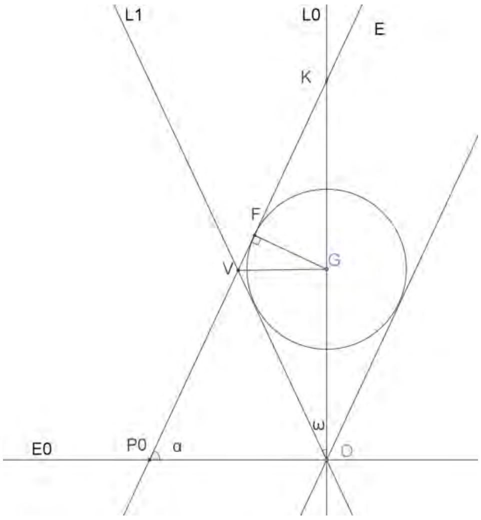
將式子整理為

$$\frac{L^2}{\sin^2\omega}=\frac{2L}{\sin\omega}x+y^2$$

此為一平面拋物線標準式，且其焦距為 $\frac{L}{2\sin\omega}$

圖()

再來我們解出Γ之焦距



圖(二十七)

如圖(二十七)，從側面觀察Γ，圓錐面與截平面的內切球與截平面切於點F，點F即為拋物線的焦點，又點F至拋物線最低點點V的距離即為焦距。點 K 為截平面交圓錐中軸的點

$\because \overline{VG}$平行$E_0 \therefore \angle FVG = \alpha$

$\rightarrow \angle FGV = \omega$

又$\triangle KVG \cong \triangle OVG(ASA)$

$\therefore \overline{KG} = \overline{GO}$

$$\rightarrow \overline{VG} = \frac{L}{2}$$

$$\rightarrow \overline{FV} = \frac{L}{2}\sin\omega$$

因此我們得到轉換式

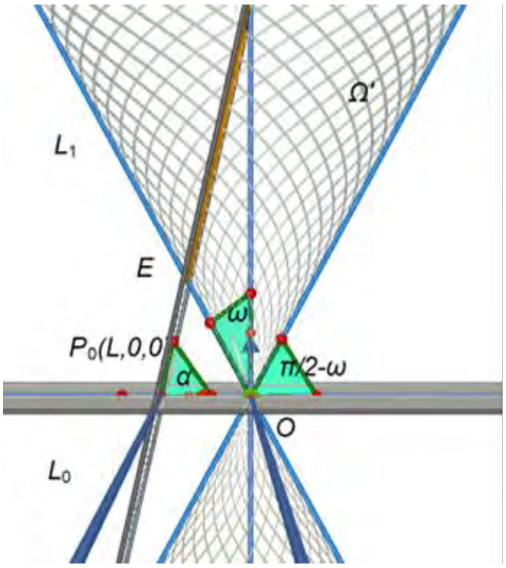
$$c \times \frac{1}{\sin^2\omega} = c_1$$

c 為 Γ 之焦距，$c_1$為圓錐面展開後新拋物線之焦距

另外任意平面上拋物線在極式角度統一縮小一定比例並且捲成一頂角為ω的扇形後，亦可形成一拋物線，並且有轉換式

$c = c_0 \times \sin^2\omega$($c_0$為平面拋物線之焦距，c為空間拋物線之焦距)

3. 當交線Γ為雙曲線時，$0 < \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) < \alpha < \frac{\pi}{2}$



圖(二十八)

如圖(二十八)

$\because \left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)<\alpha \therefore \tan\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)<\tan\alpha$

$\rightarrow \frac{1}{\tan\omega}<\tan\alpha$

$\rightarrow 1<\tan\alpha\times\tan\omega=A$

我們將原式繼續整理

$$\rightarrow -\frac{A^2L^2}{\sin^2\omega}=(A^2-1)\left(x^2-\frac{2A^2L}{\sin\omega\,(A^2-1)}x\right)-y^2$$

$$\rightarrow -\frac{A^2L^2}{\sin^2\omega}+\frac{A^4L^2}{\sin^2\omega(A^2-1)}=(A^2-1)(x+\frac{A^2L}{\sin\omega\,(A^2-1)})^2-y^2$$

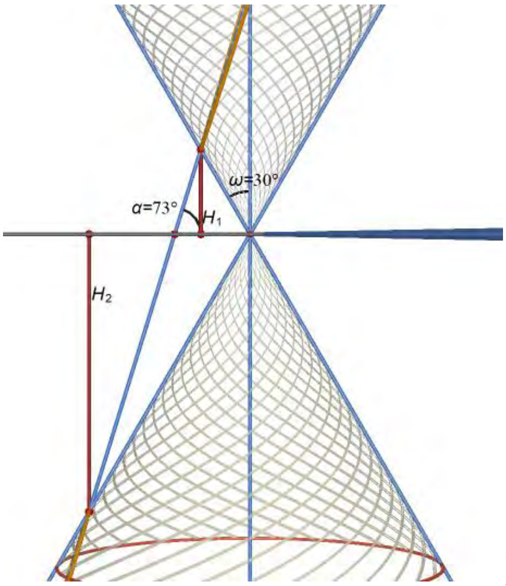
$$\rightarrow \frac{A^2L^2}{\sin^2\omega(A^2-1)}=(A^2-1)\left(x+\frac{A^2L}{\sin\omega\,(A^2-1)}\right)^2-y^2$$

$$\rightarrow 1=\frac{\left(x+\frac{A^2L}{\sin\omega\,(A^2-1)}\right)^2}{\frac{A^2L^2}{\sin^2\omega(A^2-1)^2}}-\frac{y^2}{\frac{A^2L^2}{\sin^2\omega(A^2-1)}}$$

此為雙曲線之標準式，由此可知產生的新雙曲線中心為

$(-\frac{A^2L}{\sin\omega(A^2-1)},0)$，貫軸長為$\frac{AL}{\sin\omega(A^2-1)}$，共軛軸長為$\frac{AL}{\sin\omega\sqrt{(A^2-1)}}$

再來我們解出空間中Γ得貫軸及公軛軸長作為對照



圖(二十九)

如圖(三十)，Γ的貫軸長為2a，Γ上半部最低點的z座標值為$H_1$、Γ下半部最高點的z座標值為$H_2$，由圖可知$2a=\frac{H_1-H_2}{\sin\alpha}$，再由Γ參數式可求出$H_1$、$H_2$

$$\frac{H_1-H_2}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\left(L\times\frac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha\times\tan\omega}-L\times\frac{\tan\alpha}{1-\tan\alpha\times\tan\omega}\right)$$

令$\tan\alpha\times\tan\omega=A$

$$\rightarrow 2a=\frac{L}{\cos\alpha}\left(\frac{-2A}{1-A^2}\right)=\frac{2LA}{(A^2-1)\cos\alpha}$$

$$\rightarrow a=\frac{LA}{(A^2-1)\cos\alpha}$$

這裡因為使用側面觀點解出雙曲線焦距太過於繁瑣，我們直接使用離心率來證明

參考高中數學實驗教材第四冊 P146 到 P148

離心率 $e=\frac{\sin\alpha}{\cos\omega}$

再來根據雙曲線離心率性質$\frac{c}{a}=e$(其中 c 為半焦距，a 為半貫軸長)

帶入先前推導Γ半貫軸長可得

$$c=\frac{\mathrm{LA}\sin\alpha}{(\mathrm{A}^2-1)\cos\alpha\cos\omega}=\frac{L\mathrm{A}^2}{(\mathrm{A}^2-1)\sin\omega}$$

再利用a、c 作出 b(b 為 Γ 半共軛軸長)

$$b^2$$

$$=c^2-a^2=\left(\frac{L\mathrm{A}^2}{(\mathrm{A}^2-1)\sin\omega}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{LA}}{(\mathrm{A}^2-1)\cos\alpha}\right)^2$$

$$=\left(\frac{L\mathrm{A}}{(\mathrm{A}^2-1)}\right)^2\left(\frac{A^2}{\sin^2\omega}-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$$

$$=\left(\frac{L\mathrm{A}}{(\mathrm{A}^2-1)}\right)^2\left(\frac{\sin^2\alpha\tan^2\omega-\sin^2\omega}{\sin^2\omega\cos^2\alpha}\right)$$

$$=\left(\frac{L\mathrm{A}}{(\mathrm{A}^2-1)}\right)^2\left(\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\omega}-1}{\cos^2\alpha}\right)$$

$$=\left(\frac{L\mathrm{A}}{(\mathrm{A}^2-1)}\right)^2\left(\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\omega}{\cos^2\alpha\cos^2\omega}\right)$$

$$=\left(\frac{L\mathrm{A}}{(\mathrm{A}^2-1)}\right)^2\left(\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\omega+\cos^2\alpha\cos^2\omega}{\cos^2\alpha\cos^2\omega}-1\right)$$

$$=\left(\frac{L\mathrm{A}}{(\mathrm{A}^2-1)}\right)^2\left(\frac{\sin^2\alpha-(1-\sin^2\omega)+(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\omega)}{\cos^2\alpha\cos^2\omega}-1\right)$$

$$=\left(\frac{L\mathrm{A}}{(\mathrm{A}^2-1)}\right)^2(\tan^2\alpha\tan^2\omega-1)=\frac{L^2\mathrm{A}^2}{(\mathrm{A}^2-1)}$$

$$\rightarrow b=\frac{L\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2-1}}$$

對比平面雙曲線的半貫軸$\frac{\mathrm{AL}}{\sin\omega(1-\mathrm{A}^2)}$，半共軛軸$\frac{\mathrm{AL}}{\sin\omega\sqrt{(1-\mathrm{A}^2)}}$ 得伸縮矩陣$\begin{bmatrix}\frac{\cos\alpha}{\sin\omega} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sin\omega}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{a}\\ \mathrm{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{a}_1\\ \mathrm{b}_1\end{bmatrix}$，其中a、b為Γ的半長、短軸，$\mathrm{a}_1$、$\mathrm{b}_1$為圓錐面展開進行角度變換後的半貫軸長、共軛軸長。另外任意平面上橢圓在極式角度統一縮小一定比例並且捲成一頂角為ω的扇形後，亦可形成一橢圓，並且有伸縮矩陣$\begin{bmatrix}\frac{\sin\omega}{\cos\alpha} & 0\\ 0 & \sin\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{a}_1\\ \mathrm{b}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{a}\\ \mathrm{b}\end{bmatrix}$其中$\mathrm{a}_1$、$\mathrm{b}_1$為平面雙曲線的半貫軸長、共軛軸長，a、b為空間中心橢半貫軸長、共軛軸長。

4. 我們發現圓錐面上橢圓及雙曲線，在經過展開及擴張操作後兩焦點

間距離不會改變。證明如下

這裡我們使用離心率解出空間橢圓的$\overline{\mathrm{F_1F_2}}$

$$\frac{\overline{\mathrm{F_1F_2}}}{2}=\frac{2\mathrm{ae}}{2}=\frac{\mathrm{AL}}{\cos\alpha\,(1-\mathrm{A}^2)}\times\frac{\sin\alpha}{\cos\omega}=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}}{\sin\omega\,(1-\mathrm{A}^2)}$$

再來透過平面橢圓方程式解出平面橢圓的$\overline{\mathrm{F'_1F'_2}}$

$$\left(\frac{\overline{\mathrm{F'_1F'_2}}}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}^2}{\sin^2\omega(1-\mathrm{A}^2)^2}-\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}^2}{\sin^2\omega(1-\mathrm{A}^2)}$$

$$=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}^2}{\sin^2\omega(1-\mathrm{A}^2)}\left(\frac{1}{1-\mathrm{A}^2}-1\right)=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}^2}{\sin^2\omega(1-\mathrm{A}^2)}\times\frac{\mathrm{A}^2}{1-\mathrm{A}^2}$$

所以$\frac{\overline{\mathrm{F'_1F'_2}}}{2}=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}}{\sin\omega\,(1-\mathrm{A}^2)}=\frac{\overline{\mathrm{F_1F_2}}}{2}$

一樣使用離心率解出空間雙曲線的$\overline{\mathrm{F_1F_2}}$

$$\frac{\overline{\mathrm{F_1F_2}}}{2}=\frac{2\mathrm{ae}}{2}=\frac{\mathrm{AL}}{(\mathrm{A}^2-1)\cos\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{\cos\omega}=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}}{\sin\omega\,(\mathrm{A}^2-1)}$$

再來透過平面雙曲線方程式解出平面雙曲線$\overline{\mathrm{F'_1F'_2}}$

$$\left(\frac{\overline{\mathrm{F'_1F'_2}}}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}^2}{\sin^2\omega(\mathrm{A}^2-1)^2}+\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}^2}{\sin^2\omega(\mathrm{A}^2-1)}$$

$$=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}^2}{\sin^2\omega(\mathrm{A}^2-1)}\left(\frac{1}{\mathrm{A}^2-1}+1\right)=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}^2}{\sin^2\omega(\mathrm{A}^2-1)}\left(\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{A}^2-1}\right)$$

所以$\frac{\overline{\mathrm{F'_1F'_2}}}{2}=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{L}}{\sin\omega\,(\mathrm{A}^2-1)}=\frac{\overline{\mathrm{F_1F_2}}}{2}$

# 陸、　討論

本文透過參數化加上三角幾何的手法將空間中圓錐曲線展開至平面上，多處證明算式相當繁複，尤其是空間中的圓錐曲線表現的探討原先我們使用側面觀察加上三角幾何，算式不僅繁複且冗長，但我們發現若引入圓錐曲線離心率的定義，可以大幅度減少計算量。另外我們也發現對於圓錐面上的橢圓及雙曲線而言，展開後角度擴張並不會改變他的焦距，對此我們尚未了解其原因，因此我們接來想要更深入探討為何會有此現象。

# 柒、 結論

一、圓柱上橢圓在圓柱面展開後的平面直角座標函數可表示為

$y = r \times tan\,\alpha\,(1 - cos\frac{x}{r})$

二、對於一條$f(x) = m \times cos\frac{x}{n}$的函數(其中$m$、$n$為正實數)，取

$x$軸長度為 $2n\pi$的區間捲成圓柱面可得一橢圓，此橢圓的長軸 a=$\frac{\sqrt{4n^2+\mathrm{m}^2}}{2}$；

短軸$\mathrm{b} = \mathrm{n}$；兩焦點距離一半$\mathrm{c} = \frac{\mathrm{m}}{2}$

三、任意平面函數$\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$在平面取$\mathrm{x} = \mathrm{n}$ 到 $\mathrm{x} = \mathrm{m}$的區間捲成圓柱面後其圖

形在空間中參數式可標示為為$\begin{cases} \mathrm{x} = \frac{\mathrm{m-n}}{2\pi} \times \cos\theta \\ \mathrm{y} = \frac{\mathrm{m-n}}{2\pi} \times \sin\theta \\ \mathrm{z} = \mathrm{f}(\frac{\mathrm{m-n}}{2\pi}\theta + \mathrm{n}) \end{cases}$

四、將圓錐面展開為扇形，並進行角度擴張成一平面，則原本在圓錐面上的圓錐曲線Γ會形成平面上的新曲線Γ′，且當Γ為橢圓時Γ′為橢圓；當Γ為拋物線時Γ′為拋物線；當Γ為雙曲線時Γ′為雙曲線。

五、當Γ為橢圓及雙曲線時有$\begin{bmatrix} \frac{\cos\alpha}{\sin\omega} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{b}_1 \end{bmatrix}$，其中a、b為Γ的半長、短軸或半貫軸長、共軛軸長，$\mathrm{a}_1$、$\mathrm{b}_1$為Γ′的半長、短軸或半貫軸長、共軛軸長。當Γ為拋物線時有$\mathrm{c} \times \frac{1}{\sin^2\omega} = \mathrm{c}_1$，c為Γ之焦距，$\mathrm{c}_1$為Γ′之焦距。

反之對於一平面圓錐曲線Γ′將其以極座標表示並角度縮減，使其成為一扇形，將此扇形捲成圓錐面後將得到一圓錐曲線Γ，當Γ′為橢圓時Γ為橢圓；當Γ′為拋物線時Γ為拋物線。當Γ’ 為雙曲線時Γ為雙曲線時有矩陣

$\begin{bmatrix} \frac{\sin\omega}{\cos\alpha} & 0 \\ 0 & \sin\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix}$其中$\mathrm{a}_1$、$\mathrm{b}_1$為Γ’ 半長、短軸或半貫軸長、共軛軸長，a、b為Γ半長、短軸或半貫軸長、共軛軸長。當Γ為拋物線時有$\mathrm{c} = \sin^2\omega\,\mathrm{c}_1$，$\mathrm{c}_1$為Γ’ 之焦距，c為Γ之焦距。

六、當Γ為橢圓及雙曲線，將圓錐面展開並角度擴張後，Γ與平面新圓錐曲線Γ′的兩焦點間距離包持不變。

# 捌、　參考資料及其他


1.高中數學實驗教材實驗教材編輯小組 (1982) 高中數學實驗教材 第四冊 自然組 修訂 P146-P148

2.陳一理 (2007) 新觀念數學叢書 8 空間向量 台北市：建興文化

3.陳一理 (2007) 新觀念數學叢書 11 圓錐曲線 台北市：建興文化

4.陳一理(2007 ) 新觀念數學叢書 6 三角函數 台北市：建興文化

5.陳一理(2007) 新觀念數學叢書 16 微分台北市：建興文化

6. Mike Bertrand Dandelin. (2015). Spheres and the Conic Sections. http://nonagon.org/ExLibris/dandelin-spheres-conic-sections (11.24.2017)

7.FunLearnseniormath.( 2012,6,11).[圓錐曲線資優課程上][5/62][橢圓和拋物線的離心率定義討論][08 分 07 秒] [影片].Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=GJWgkT8Hb-I

8. FunLearnseniormath.( 2012,6,11). [圓錐曲線資優課程上][6/62][雙曲線的離心率定義討論][02 分 26 秒] [影片].Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=rjFoZvhRMfg

9. FunLearnseniormath.( 2012,6,11). [圓錐曲線資優課程上][7/62][圓錐曲線的極座標方程式][03 分 10 秒] [影片].Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=LdcKLyI3vsc

## 【評語】050408

本作品對對圓錐截痕以平面展開的方式進行分析，論述清楚。主要將丹德林球體原本是透過圓錐面及兩顆不相交的圓錐內切球即可簡潔的證明出橢圓的公式，作者將這樣的證明方法應用在圓柱上。並使用 cabri 3d 繪製出圓柱版本的圖形，且探討圓柱面攤開成平面時，其上的橢圓圖形變化情形，頗具創意。但是，這些工作應該已經有類似探討，建議須多做文獻探討。此外，在作品說明圓錐面與圓柱或平面做映射時，可以考慮使用射影幾何的手法，並講清楚其相對關係。

## 作品海報

# 摘要

本研究以丹德林球體為發想基礎，將空間中平面與圓柱、圓錐面截痕所產生的圓錐曲線展開至平面並觀察其表現。發現圓柱面上的橢圓在圓柱面展開為平面後將形成餘弦函數圖形，此外我們也將此想法推廣至平面的任意函數，推導任意直角坐標函數取一定範圍捲成圓柱面後的表現。而圓錐面上的橢圓、拋物線、雙曲線在圓錐面展開為扇形，並將扇形的角度擴充為完整平面後，將形成平面上的新圓錐曲線，並且平面上圓錐曲線的類型和圓錐面上圓錐曲線類型相同。


# 壹、研究動機

在高中課程接觸橢圓時，受到丹德林球體啟發，思考如果把圓柱面攤開成平面的話，那原本在圓柱上的圖形會變成如何？是否可歸納出方程式？進而推廣到圓錐面上，將圓錐面展開後，圓錐上曲線在平面將如何表現？

# 貳、研究目的

一、圓柱上橢圓展開後的函數式，若給定一型如此函數式，其對應的橢圓的表現

二、任意平面函數取一定範圍捲成圓柱的轉換方式

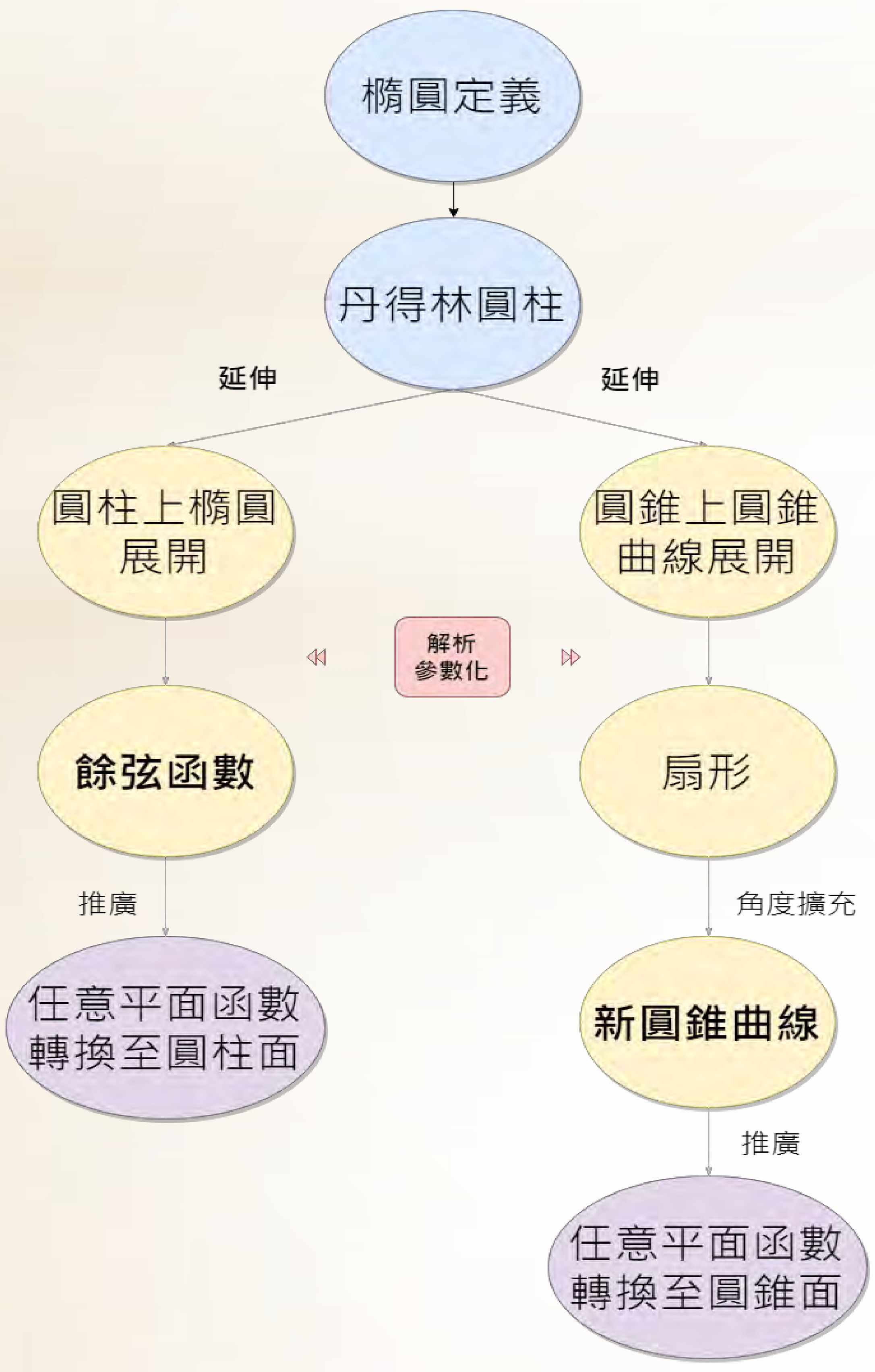
三、圓錐面上的圓錐曲線展開為扇形並進行角度擴充後的表現

# 參、研究設備及器材

電腦、紙、Cabri 3D、Geogebra

# 肆、研究方法及過程

一、研究流程




二、先前文獻─丹德林球體

使用與圓錐面內切但不相交兩球體證明橢圓的定義

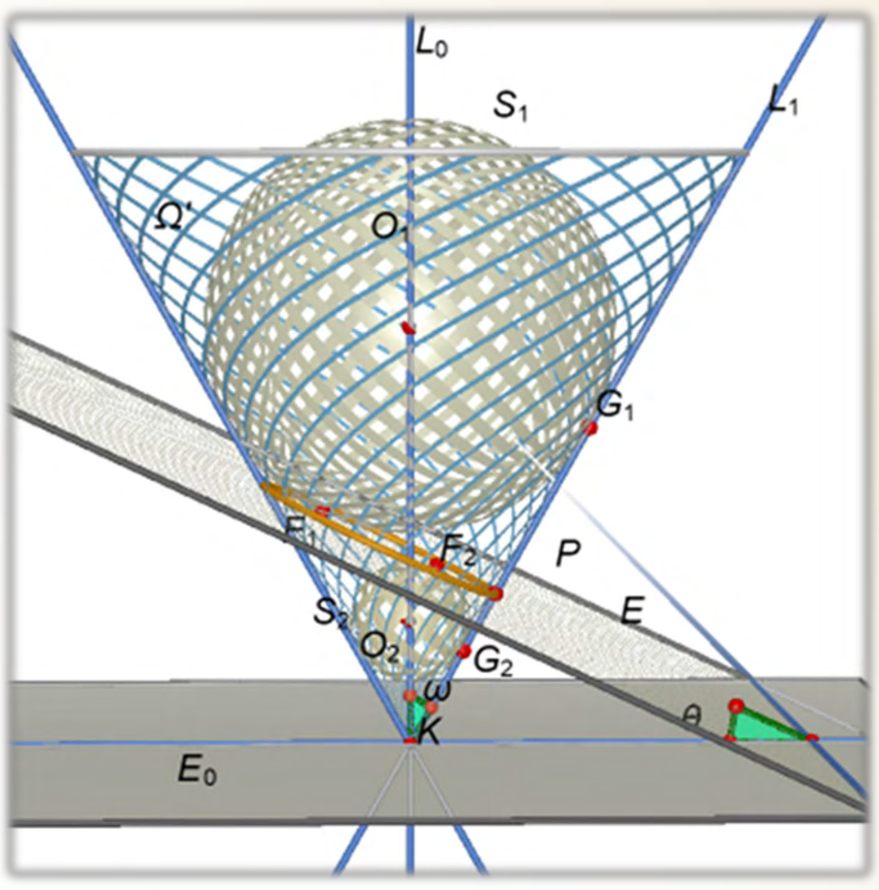


圖1

# 伍、研究結果與討論

## 一、圓柱面上橢圓展開至平面上的轉換公式

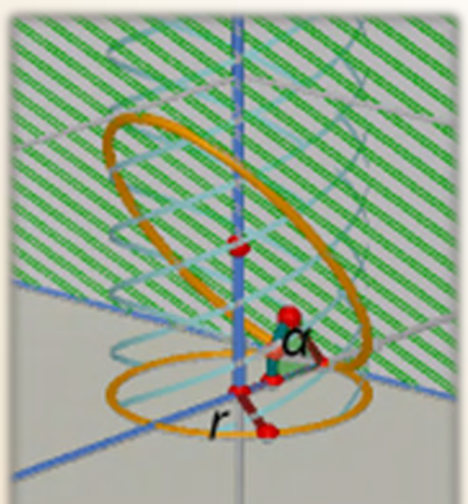


圖2-1

以半徑為r之圓柱、揚角為α之截平面E規範出空間中的橢圓。此橢圓半長軸長、半短軸長、半焦點距離分別為

$\frac{r}{\cos\alpha}$、r、$r\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}$

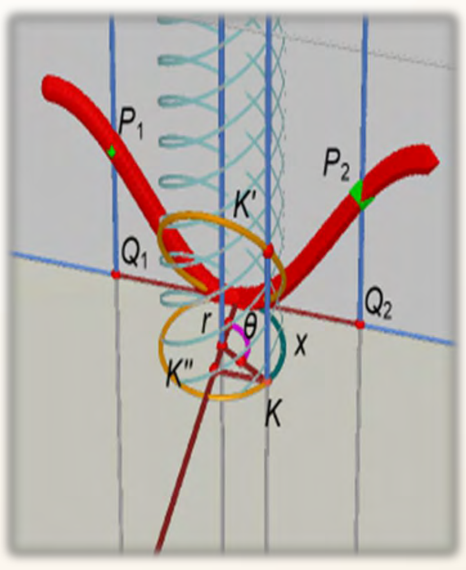


圖2-2

以參數加三角函數求出展開後函數式

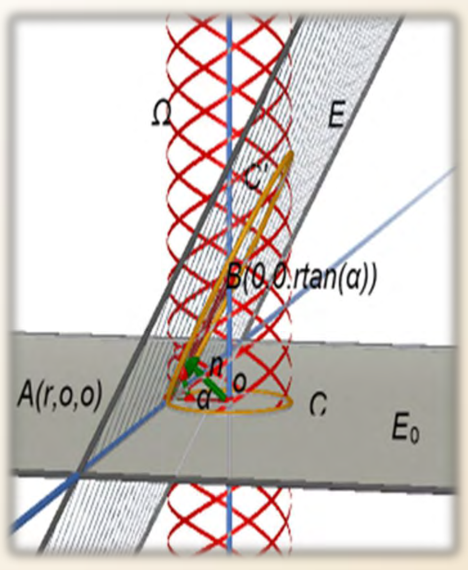


圖2-3

以參數加解析幾何求出展開後函數式

展開在平面上的函數式為

$$f(x) = r \times \tan\alpha\ \left(1-\cos\left(\frac{x}{r}\right)\right)$$

## 二、平面函數在平面捲起後的表現

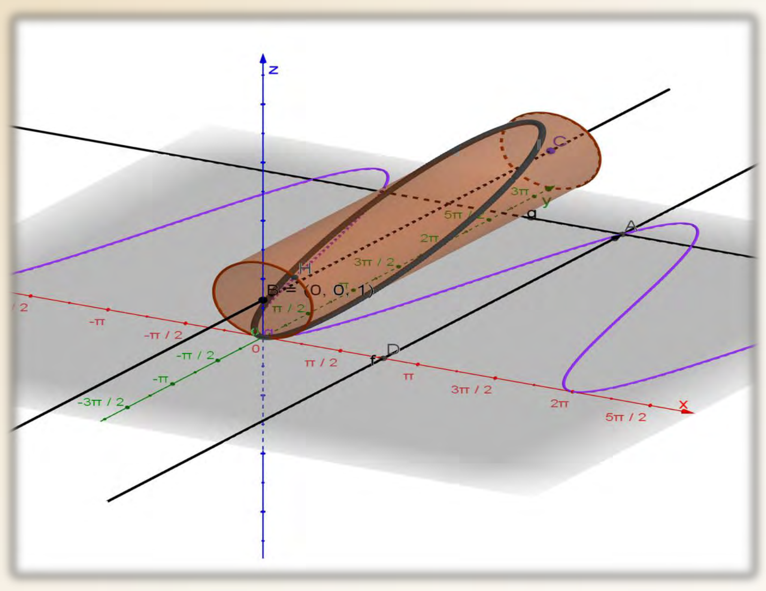


圖3-1

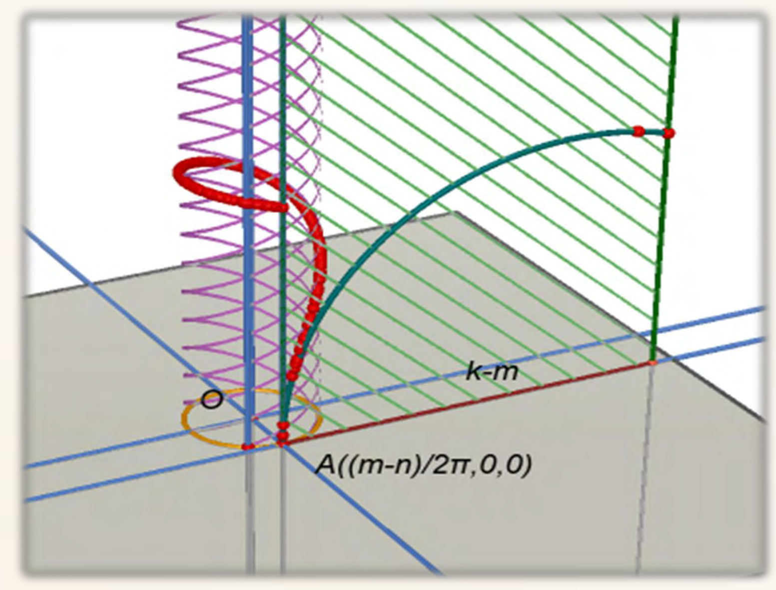



圖3-2

(一)在平面捲起後形成橢圓的函數

對於一形如$f(x) = m \times \cos(\frac{x}{n})$ 的函數，(n、m為實數)取一個週期2πn的範圍捲成圓柱面，原函數將形成一橢圓且此橢圓相當於一平面以揚角$\alpha_0$ ($\tan \alpha_0 = \frac{m}{2n}$)，截過一半徑為n的圓柱所形成之橢圓，此橢圓半長軸長、半短軸長、半焦點距離長分別為$\frac{\sqrt{4n^2+m^2}}{2}$、n、$\frac{m}{2}$。

(二)任意平面函數圖形在平面捲起後表現

對於任意平面函數$y = f(x)$，取$n \le x \le m$(n、 m為實數且$n \ne m$)的區段，並以此長度為周長將平面捲成一圓柱面並使其中軸為z軸，此時函數在空間中的表現為：

$$\begin{cases} x = \dfrac{m-n}{2\pi} \times \cos\theta \\ y = \dfrac{m-n}{2\pi} \times \sin\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi) \\ z = f\left(\dfrac{m-n}{2\pi}\theta + n\right) \end{cases}$$

## 三、圓錐面上的圓錐曲線展開後圖形

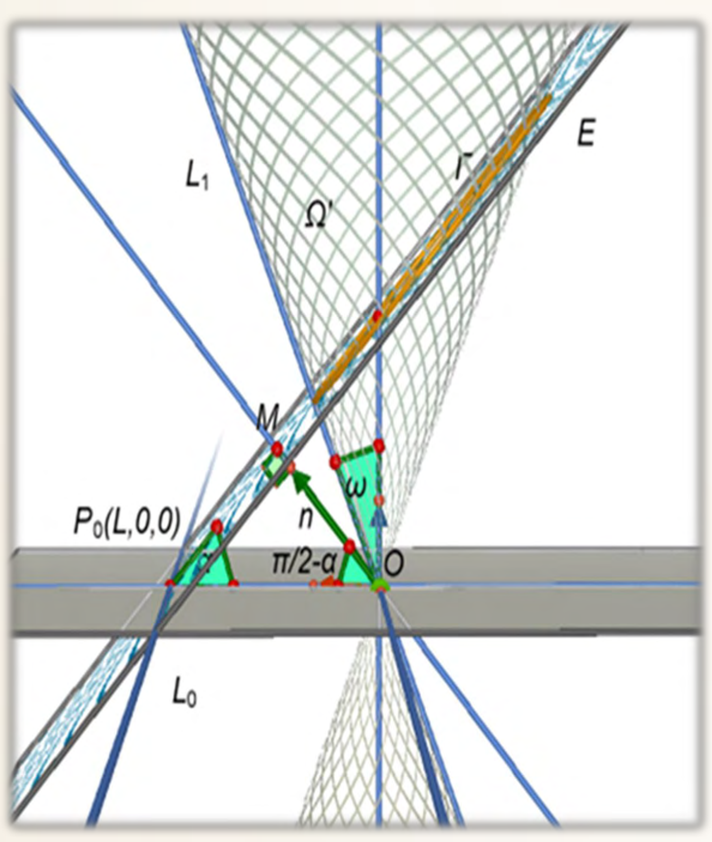



圖4-1

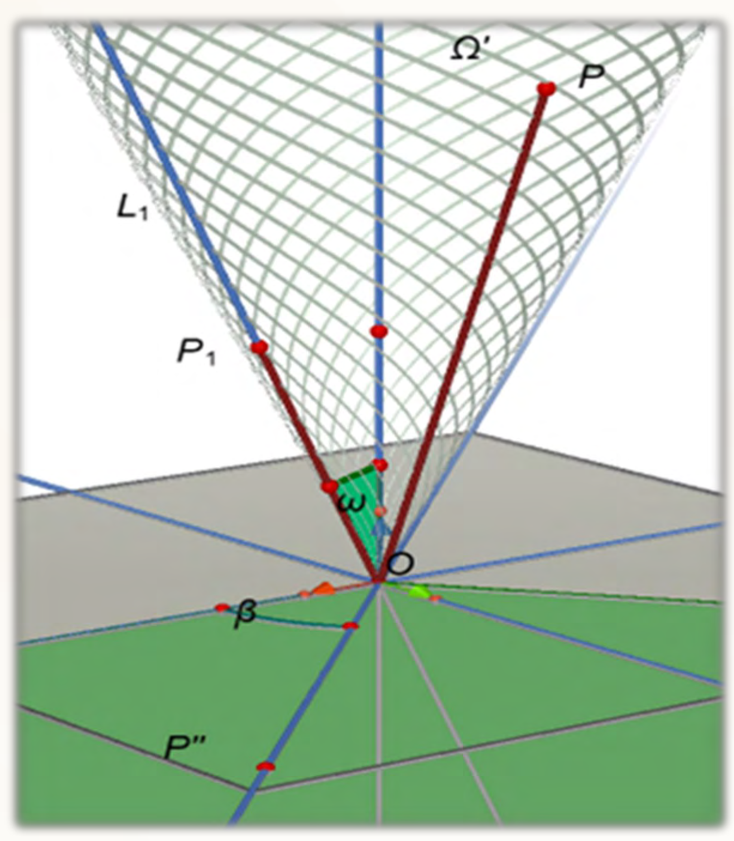



圖4-2

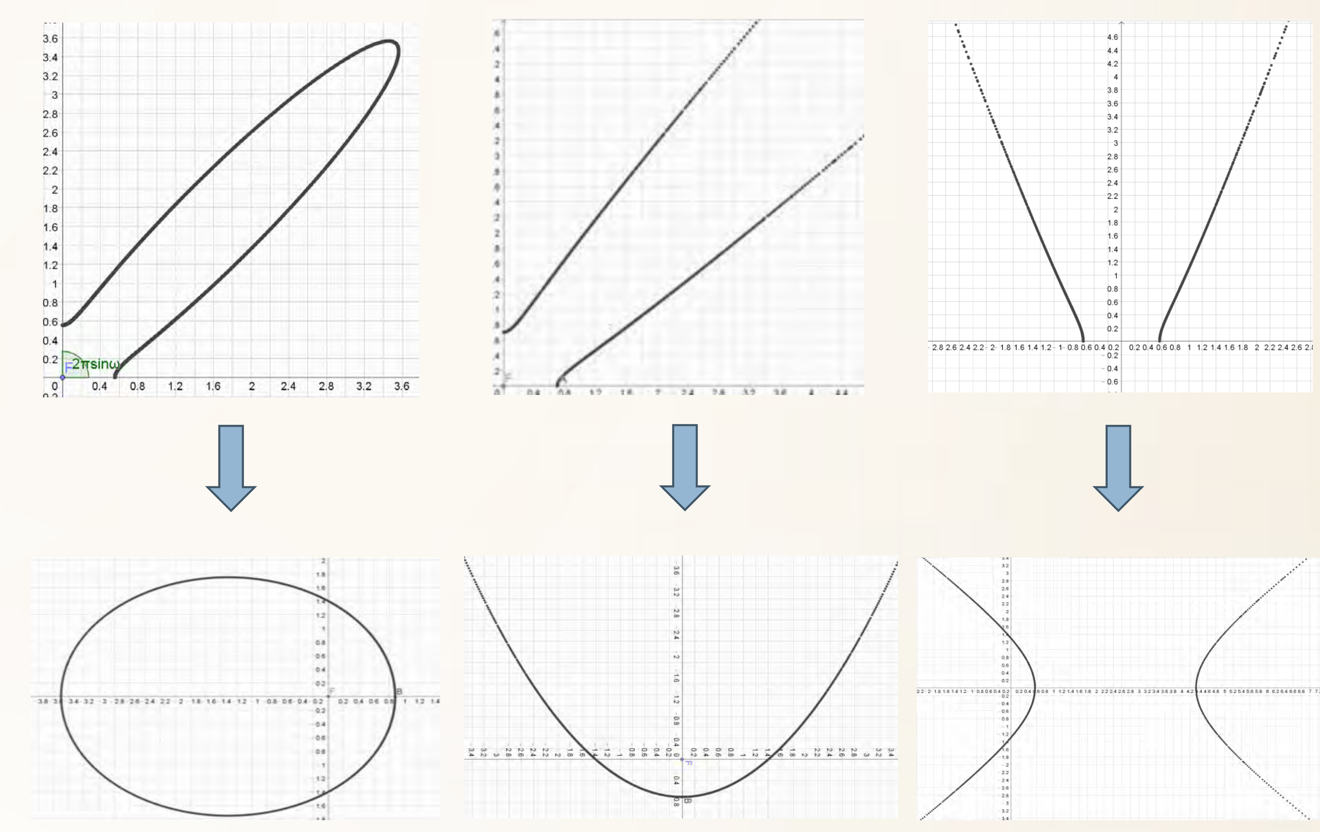


圖4-3

(一)圓錐曲線Γ在空間中的參數式為

$$\Gamma: \begin{cases} x = L\left(\dfrac{\tan\omega \times \tan\alpha \times \cos\theta}{1 \pm \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right) \\ y = L\left(\dfrac{\tan\omega \times \tan\alpha \times \sin\theta}{1 \pm \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right) \\ z = L\left(\dfrac{\tan\alpha}{1 \pm \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right) \end{cases}$$

$(0 \le \theta \le 2\pi)$

$(0 < 1 + \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha)$

(ω為圓錐頂角、 α為截平面揚角、L為截平面與垂直平分面交線$L_0$到圓錐面頂點的距離)

(二)圓錐面展開後的點對應關係

在圓錐面上一點

$(\cos\theta \times \tan\omega \times |z_0|, \sin\theta \times \tan\omega \times |z_0|, z_0)$

在圓錐面打開後所對應到的極座標為

$[|z_0| \times \sec\omega, \sin\omega \times \theta]$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$

→ Γ在圓錐面展開到平面極座標參數式為

$$\left[L\left(\frac{\tan\alpha \times \sec\omega}{1 \pm \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right), \sin\omega \times \theta\right]$$

(三)將圓錐面展開之扇形進行角度擴充

$$\left[L\left(\frac{\tan\alpha \times \sec\omega}{1 + \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right), \sin\omega \times \theta\right]$$

將極座標有向角同乘$\frac{1}{\sin\omega}$得到

$$\rightarrow \left[L\left(\frac{\tan\alpha \times \sec\omega}{1 + \tan\omega \times \cos\theta \times \tan\alpha}\right), \theta\right]$$

極座標轉換為直角座標系得到

$$\frac{A^2L^2}{\sin^2\omega} = (1-A^2)x^2 + \frac{2A^2L}{\sin\omega}x + y^2$$

(其中$A = \tan\omega \times \tan\alpha$，以下的所有A亦同)

→圖形變為二次平面曲線

(四)以Γ圖形種類討論平面的二次平面曲線表現，以及與圓錐上圓錐曲線的對比

1.Γ為橢圓，$0 < \alpha < \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) < \frac{\pi}{2}$

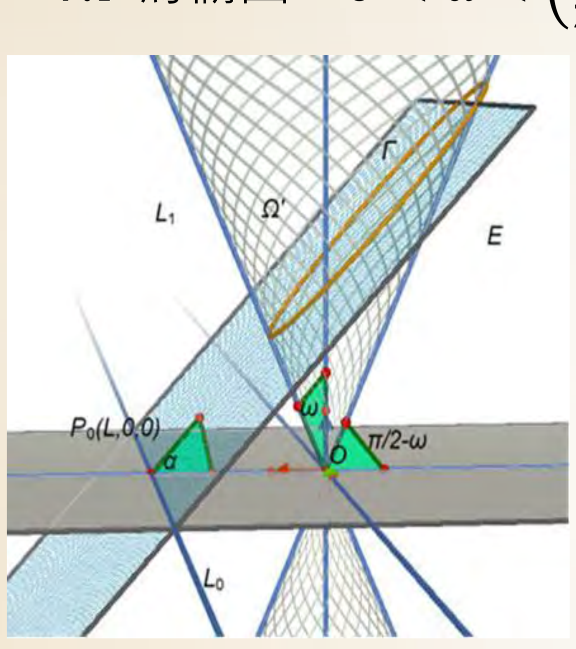


圖4-5

(1)平面橢圓的表現

可得$1 > \tan\alpha \times \tan\omega = A$，並且將圓錐曲線展開後式子整理為：

$$1 = \frac{\left(x + \dfrac{A^2L}{\sin\omega(1-A^2)}\right)^2}{\dfrac{A^2L^2}{\sin^2\omega(1-A^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{A^2L^2}{\sin^2\omega(1-A^2)}}$$

新平面橢圓半長軸長為$\frac{AL}{\sin\omega(1-A^2)}$，半短軸長為$\frac{AL}{\sin\omega\sqrt{(1-A^2)}}$、半焦點距離長為$\frac{A^2L}{\sin\omega(1-A^2)}$

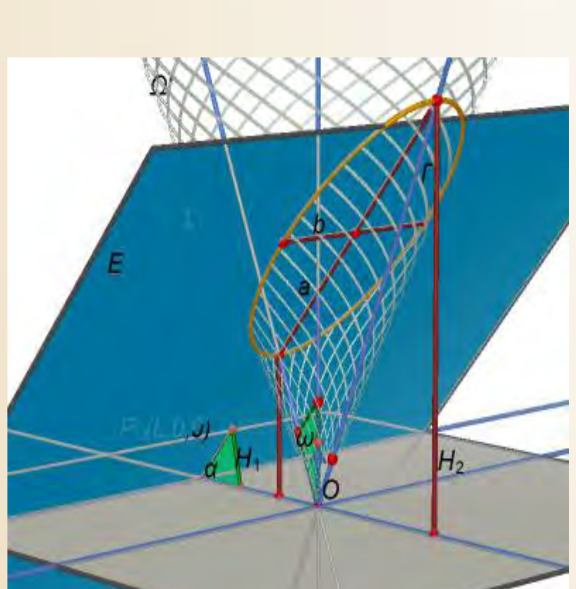


圖4-6

(2)圓錐上橢圓表現

透過Γ參數式可得到橢圓最高點及最低點的高度差，進而得到Γ的長軸。在來使用離心率便可將Γ的焦點距離長及短軸長求出。 Γ的半長軸長、半短軸長、半焦點距離長分別為

$\frac{AL}{\cos\alpha(1-A^2)}$、$\frac{AL}{\sqrt{1-A^2}}$、$\frac{A^2L}{\sin\omega(1-A^2)}$。

由此得到兩個結論

1.$\begin{bmatrix} \frac{\cos\alpha}{\sin\omega} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$，其中a、b為Γ的半長軸長、半短軸長，$a_1$、$b_1$為平面橢圓的半長軸長、半短軸長。

2.橢圓Γ與平面橢圓的焦點距離長是一樣的。

2. Γ為拋物線，$0 < \alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) < \frac{\pi}{2}$

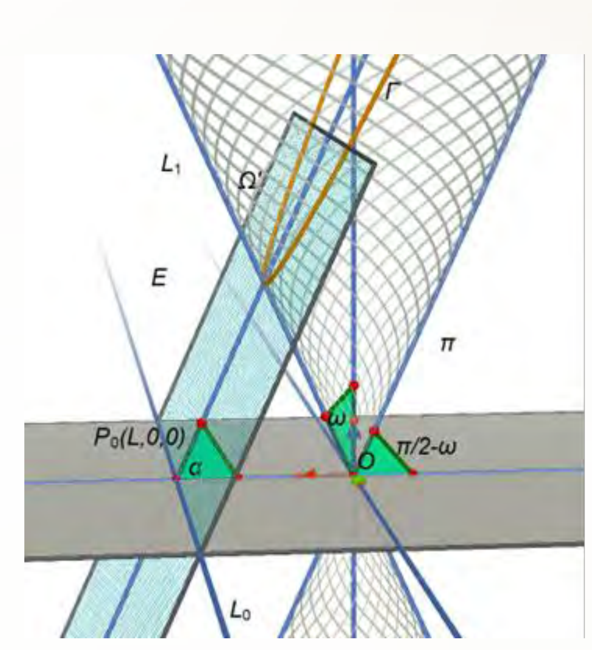


圖4-7

(1)平面拋物線的表現

可得$1 = \tan\alpha \times \tan\omega = A$，並且將圓錐曲線展開後式子整理為：

$$\frac{L^2}{\sin^2\omega} = \frac{2L}{\sin\omega}x + y^2$$

新平面拋物線的頂點到焦點距離長為$\frac{L}{2\sin\omega}$

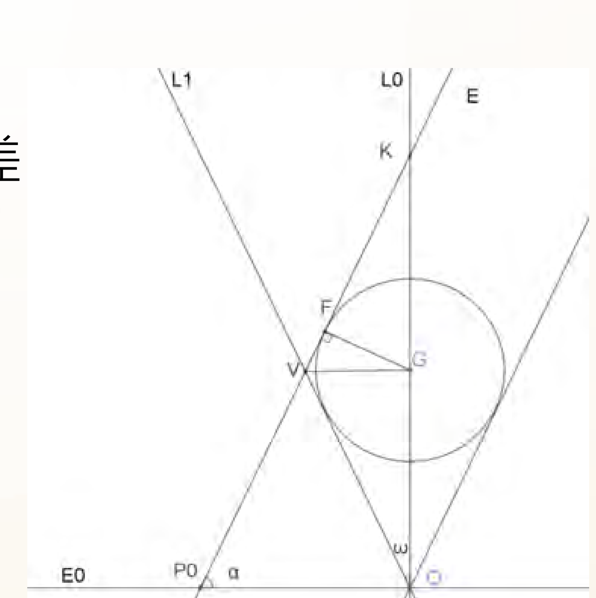


圖4-8

(2)圓錐上拋物線表現

從側邊觀察Γ並解出頂點到焦點的距離長$\overline{VG} = \frac{L}{2}\sin\omega$

由此得到結論

1. $c \times \frac{1}{\sin^2\omega} = c_1$

c為Γ之頂點到焦點距離長，$c_1$為平面拋物線頂點到焦點距離長。

3.Γ為雙曲線時，$0 < \left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) < \alpha < \frac{\pi}{2}$

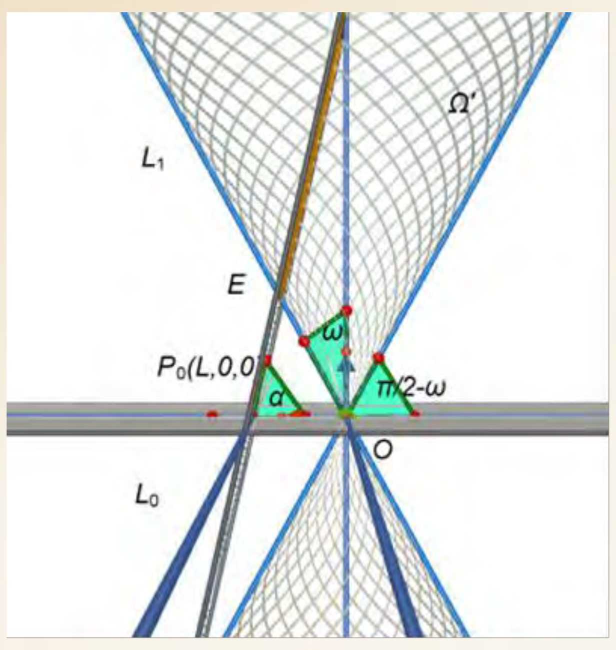


圖4-9

(1)平面雙曲線的表現

可得$1 < \tan\alpha \times \tan\omega = A$，並且將圓錐曲線展開後式子整理為：

$$1 = \frac{\left(x + \frac{A^2L}{\sin\omega\,(A^2-1)}\right)^2}{\frac{A^2L^2}{\sin^2\omega(A^2-1)^2}} - \frac{y^2}{\frac{A^2L^2}{\sin^2\omega(A^2-1)}}$$

新平面雙曲線半貫軸長為$\frac{AL}{\sin\omega(1-A^2)}$，半共軛軸長為$\frac{AL}{\sin\omega\sqrt{(1-A^2)}}$、半焦點距離長為$\frac{A^2L}{\sin\omega(1-A^2)}$

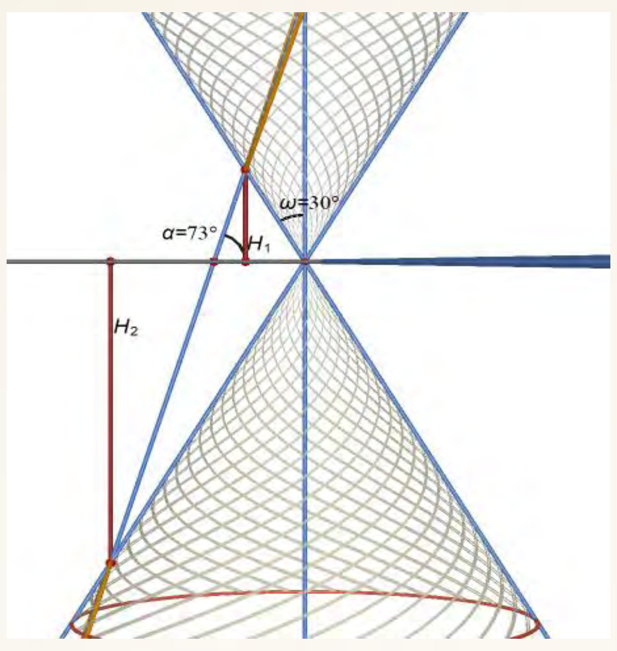


圖4-10

(2)圓錐上雙曲線表現

透過Γ參數式可得到雙曲線最高點及最低點的高度差，進而得到Γ的半貫軸長。再來使用離心率將Γ的焦點距離及半共軛軸長求出。 Γ的半貫軸長、半共軛軸長、半焦點距離長分別為$\frac{AL}{\cos\alpha(1-A^2)}$、$\frac{AL}{\sqrt{1-A^2}}$、$\frac{A^2L}{\sin\omega(1-A^2)}$。

由此得到兩個結論

1.$\begin{bmatrix}\frac{\cos\alpha}{\sin\omega} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sin\omega}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$，其中a、b為Γ的半貫軸長、半共軛軸長，$a_1$、$b_1$為平面雙曲線的半貫軸長、半共軛軸長。

2.雙曲線Γ與平面雙曲線的焦點距離長是一樣的。

# 陸、研究結論

一、圓柱上橢圓在圓柱面展開後的平面直角座標函數可表示為$y = r \times \tan\alpha\left(1-\cos\frac{x}{r}\right)$

二、對於一條$f(x) = m \times \cos\frac{x}{n}$的函數(其中m、n為正實數)，取x軸長度為$2n\pi$的區間捲成圓柱面可得一橢圓，此橢圓的半長軸$a=\frac{\sqrt{4n^2+m^2}}{2}$；半短軸$b = n$；半焦點距離長$c = \frac{m}{2}$

三、任意平面函數$y = f(x)$在平面取$n \le x \le m$的區間捲成圓柱面後其圖形在空間中參數式可標示為為

$$\begin{cases} x = \frac{m-n}{2\pi} \times \cos\theta \\ y = \frac{m-n}{2\pi} \times \sin\theta \\ z = f\left(\frac{m-n}{2\pi}\theta + n\right) \end{cases}$$

四、將圓錐面展開為扇形，並進行角度擴充成一平面，則原本在圓錐面上的圓錐曲線Γ會形成平面上的新曲線Γ’，且當Γ為橢圓時Γ’為橢圓；當Γ為拋物線時Γ’為拋物線；當Γ為雙曲線時Γ’為雙曲線。

五、當Γ為橢圓或雙曲線時有$\begin{bmatrix}\frac{\cos\alpha}{\sin\omega} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sin\omega}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$，其中a、b為Γ的半長軸長、半短軸長或半貫軸長、半共軛軸長，$a_1$、$b_1$為Γ’的半長軸長、半短軸長或半貫軸長、半共軛軸長。當Γ為拋物線時，有$c \times \frac{1}{\sin^2\omega} = c_1$，其中c為Γ之焦距，$c_1$為Γ’之焦距。反之對於一平面圓錐曲線Γ’將其以極座標表示並角度縮減，使其成為一扇形，將此扇形捲成圓錐面後將得到一圓錐曲線Γ，當Γ’為橢圓時Γ為橢圓、當Γ’為拋物線時Γ為拋物線、當Γ’為雙曲線時Γ為雙曲線。而當Γ’ 為橢圓或雙曲線時，有$\begin{bmatrix}\frac{\sin\omega}{\cos\alpha} & 0\\ 0 & \sin\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$其中$a_1$、$b_1$為Γ’半長軸長、半短軸長或半貫軸長、半共軛軸長，a、b為Γ半長軸長、半短軸長或半貫軸長、半共軛軸長。當Γ為拋物線時，有$c = \sin^2\omega\, c_1$，$c_1$為Γ’之焦距，c為Γ之焦距。

六、當Γ為橢圓及雙曲線，將圓錐面展開並角度擴充後，Γ與平面新圓錐曲線Γ’的兩焦點距離保持不變。

# 柒、未來展望

本文透過參數化加上三角幾何的手法將空間中圓錐曲線展開至平面上，多處證明算式相當繁複，尤其是空間中的圓錐曲線表現的探討原先我們使用側面觀察加上三角幾何，算式不僅繁複且冗長，但我們發現若引入圓錐曲線離心率的定義，可以大幅度減少計算量。另外我們也發現對於圓錐面上的橢圓及雙曲線而言，展開後角度擴充並不會改變他的焦距，對此我們尚未了解其原因，因此我們接來想要更深入探討為何會有此現象。

# 捌、參考資料


1.高中數學實驗教材實驗教材編輯小組 (1982) 高中數學實驗教材 第四冊 自然組 修訂本

2.陳一理 (2007) 新觀念數學叢書 8 空間向量 台北市：建興文化

3.陳一理 (2007) 新觀念數學叢書11 圓錐曲線 台北市：建興文化

4.陳一理(2007 ) 新觀念數學叢書 6 三角函數 台北市：建興文化

5.陳一理(2007) 新觀念數學叢書 16 微分台北市：建興文化

6. Mike Bertrand Dandelin. (2015). Spheres and the Conic Sections. http://nonagon.org/ExLibris/dandelin-spheres-conic-sections (11.24.2017)

7.FunLearnseniormath.( 2012,6,11).[圓錐曲線資優課程上][5/62][橢圓和拋物線的離心率定義討論][08分07秒][影片].Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=GJWgkT8Hb-I

8. FunLearnseniormath.( 2012,6,11). [圓錐曲線資優課程上][6/62][雙曲線的離心率定義討論][02分26秒] [影片].Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=rjFoZvhRMfg

9. FunLearnseniormath.( 2012,6,11). [圓錐曲線資優課程上][7/62][圓錐曲線的極座標方程式][03分10秒] [影片].Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=LdcKLyl3vsc