中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050407

潛在線-單色 N 邊形之連線比賽

學校名稱：國立彰化女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 許芸臻 高二 柯怡瑄	林于秀

關鍵詞：潛在線、封閉線、最優勢畫法

摘要

當學到在圓上畫弦時，試著玩一個遊戲：甲乙兩人分別以藍筆、紅筆，先後在圓上固定點連線段，看誰能最先連出單色三角形為勝。如果改畫四邊形、五邊形，結果又如何?

一、在單位圓上 10 個點藍紅兩色連線比賽，探討以下各種情形：

(一) 甲先連出一個藍色三角形，或乙先連出一個紅色三角形

(二) 甲先連出一個藍色四邊形，或乙先連出一個紅色四邊形

(三) 甲先連出三個藍色三角形，或乙先連出兩個紅色四邊形

(四) 甲先連出三個藍色四邊形，或乙先連出四個紅色三角形

(五) 甲先連出四個藍色三角形，或乙先連出三個紅色四邊形

(六) 甲先連出一個藍色五邊形，或乙先連出一個紅色五邊形

二、探討畫 n 條線段能產生最多的單色 N 邊形之潛在線數的規律性。

壹、動機

當學到在圓上畫弦時，試著玩一個遊戲：甲乙兩人分別以藍筆、紅筆，先後在圓上固定點連線段，看誰能最先連出單色三角形為勝。我們想了解要以何種畫法能讓先畫者處於最優勢的狀態?又該訂定幾個固定點，才能讓遊戲進行到有輸贏?如果改畫四邊形、五邊形，結果又如何?諸多疑問促使我們開始底下的研究之旅。

貳、 研究目的

一、在單位圓上 10 個點藍紅兩色連線比賽，探討以下各種比賽甲或乙獲勝之情形：

(一) 甲先連出一個藍色三角形，或乙先連出一個紅色三角形

(二) 甲先連出一個藍色四邊形，或乙先連出一個紅色四邊形

(三) 甲先連出三個藍色三角形，或乙先連出兩個紅色四邊形

(四) 甲先連出三個藍色四邊形，或乙先連出四個紅色三角形

(五) 甲先連出四個藍色三角形，或乙先連出三個紅色四邊形

(六) 甲先連出一個藍色五邊形，或乙先連出一個紅色五邊形

二、探討畫 n 條線段能產生最多的單色 N 邊形之潛在線數的規律性。

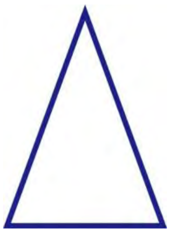
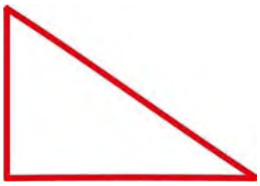
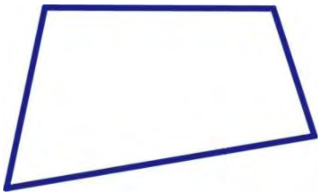
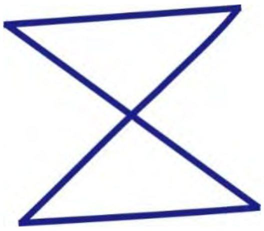
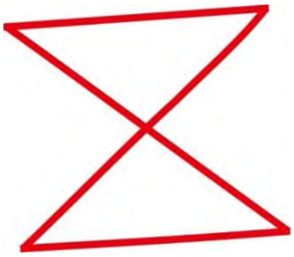
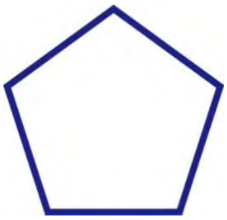
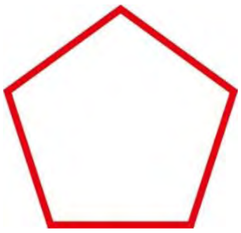
三、歸納出必勝的策略

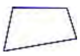
參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、繪圖軟體

肆、 解釋名詞

一、圖形解釋

單色三角形如		
	藍色三角形	紅色三角形
單色四邊形如		
	藍色四邊形	紅色四邊形
		
	藍色四邊形	紅色四邊形
單色五邊形如		
	藍色五邊形	紅色五邊形

註：1：四邊形  或四邊形  統一以符號□表之。

2：所連成的三角形是以原來的三頂點所連成，例 

並不是兩個三角形，因交點 P 並不是原來的頂點所連成。所連成的四邊形須以原來的四頂點所連成，由交點連成的就不算。

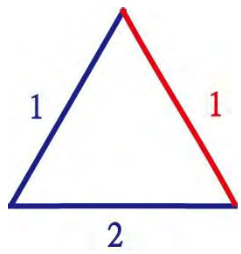
二、遊戲規則:

甲拿藍色筆，乙拿紅色筆，甲先乙後輪流在凸 n 邊形上的頂點，每兩點之間用線段連接，任何三點不共線，如比賽單色三角形，先連出單色三角形者為勝。同理，如比賽單色四邊形、五邊形，先連出單色四邊形、五邊形者為勝。

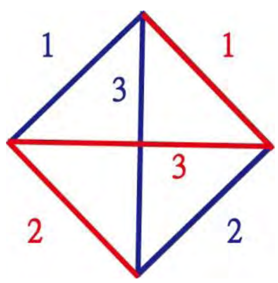
(一)定理甲:

在凸 N 邊形的 N 個頂點上，甲乙比賽有一方能先連出單色三角形之最小值 N 為 6

1. 平面上，若 N 多邊形 N=3，則從 3 個頂點無法連出單色三角形如下圖:

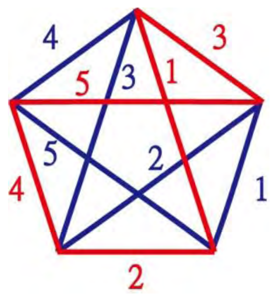
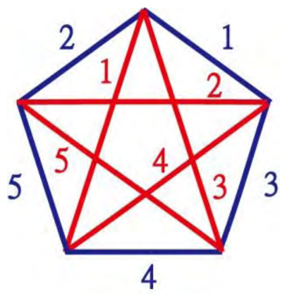
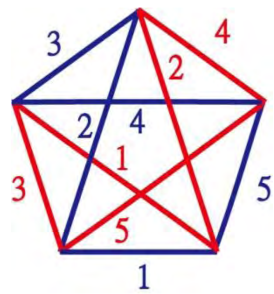


2. 平面上，若 N 多邊形 N=4，則從 4 個頂點無法連出單色三角形如下圖:



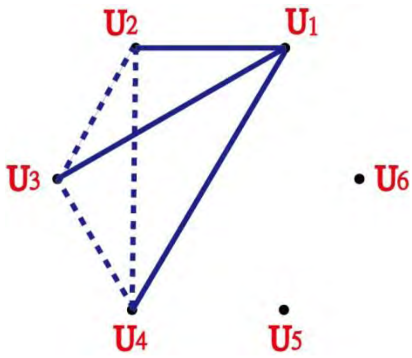
3. 平面上，若 N 多邊形 N=5，若未採最優勢畫法 (註:附錄 A 有說明)，

   則從這 5 個頂點無法連出單色三角形的例子如下:

4. 平面上，從凸 N 多邊形上 N 個頂點先連出一個單色三角形為勝，若欲使有一方必能連出一個單色三角形，求出 N 之最小值為 6。

證明:若只連藍紅兩種顏色的線段在凸 6 邊形上



圖(一)

考慮圖(一)

(1) 不失一般性，固定頂點 U_1，可連 $\overline{U_1U_2}$、$\overline{U_1U_3}$、$\overline{U_1U_4}$、$\overline{U_1U_5}$、$\overline{U_1U_6}$共 5 條線段，由鴿籠原理指出，至少有三條線段為同一顏色。

(2) 設有$\overline{U_1U_2}$、$\overline{U_1U_3}$、$\overline{U_1U_4}$同為藍色。

(3) 在 $\triangle U_2U_3U_4$的三邊為$\overline{U_2U_3}$、$\overline{U_2U_4}$、$\overline{U_3U_4}$。

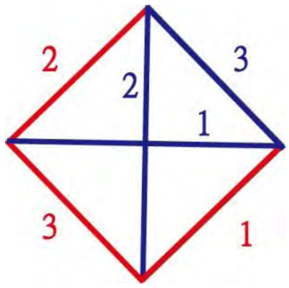
(4) 若$\overline{U_2U_3}$、$\overline{U_2U_4}$、$\overline{U_3U_4}$皆為紅色，則形成單一紅色三角形 $U_2U_3U_4$，定理得證。

(5) 若$\overline{U_2U_3}$、$\overline{U_2U_4}$、$\overline{U_3U_4}$不全為紅色，則其中至少有一個為藍色，假設$\overline{U_2U_3}$為藍色，則 $\triangle U_1U_2U_3$ 為單一藍色三角形，其他情形亦得證。

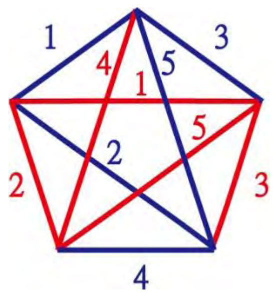
(二)定理乙：

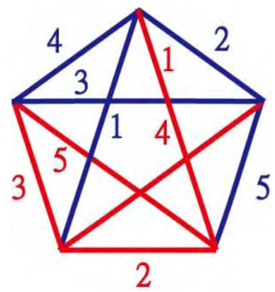
在凸 N 邊形的 N 個頂點上，甲乙比賽有一方能先連出單色四邊形之最小值 N 為 6。

1. 平面上，若 N 多邊形 N=4，則從 4 個頂點無法連出單色四邊形的例子如下：



2. 平面上，若 N 多邊形 N=5，若未採最優勢畫法，則從這 5 個頂點無法連出單色四邊形的例子如下：





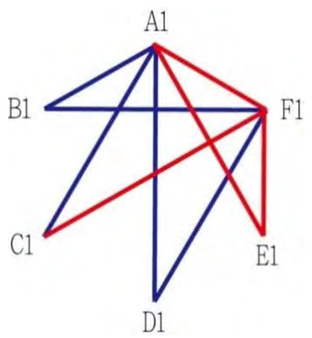
3. 平面上，從凸 N 多邊形 N 個頂點先連出一個單色四邊形為勝，若欲使有一方必能連出一個單色四邊形，求出 N 之最小值為 6。

證明:若只連藍紅兩種顏色的線段在凸六邊形的六個頂點上。

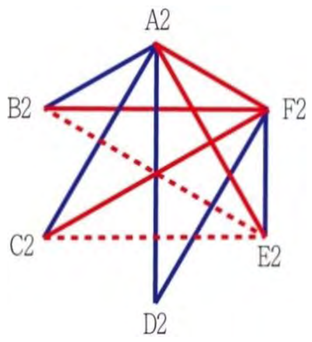
(1) 不失一般性，固定定點 A，可連$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{AF}$共 5 條線段，鴿籠原理指出，至少有 3 條線段為同一顏色。

(2) 設$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$同為藍色。

(3) 如圖(二):



(圖α_1)



(圖β_2)

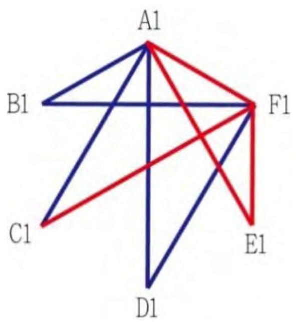
圖(二)

(①)固定 F 點，可連$\overline{FE}$、$\overline{FD}$、$\overline{FC}$、$\overline{FB}$、$\overline{FA}$共 5 條線段，鴿籠原理指出，至少有 3 條線段為同一顏色。

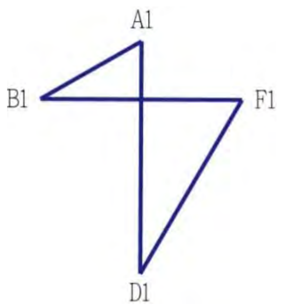
(②)設有 3 條同為紅色。

(③)如圖(α_2)，假設以 F_1點為中心畫出的三條紅色線段分別為$\overline{F_1A_1}$、$\overline{F_1C_1}$、$\overline{F_1E_1}$，另 2 條$\overline{F_1B_1}$、$\overline{F_1D_1}$為藍色，即可與原先假設的$\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_1D_1}$連成藍色□$A_1B_1F_1D_1$

如(圖α_1之Ⅰ)

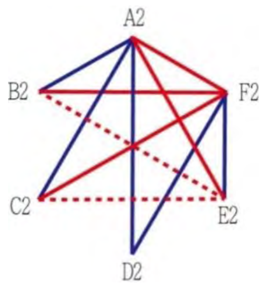


(圖α_1)

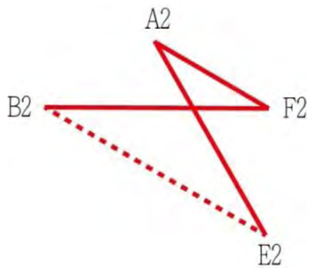


(圖α_1之Ⅰ)

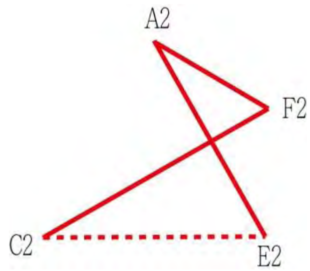
(④)如圖(β_2)，假設以 F_2點為中心畫出的三條紅色線段分別為$\overline{F_2A_2}$、$\overline{F_2B_2}$、$\overline{F_2C_2}$，另 2 條$\overline{F_2D_2}$、$\overline{F_2E_2}$為藍色，出現 2 條紅色□的潛在線段為$\overline{E_2B_2}$、$\overline{E_2C_2}$，必能連出紅色□如$A_2F_2B_2E_2$或$A_2F_2C_2E_2$。如(圖β_2之Ⅰ、Ⅱ)



(圖β_2)

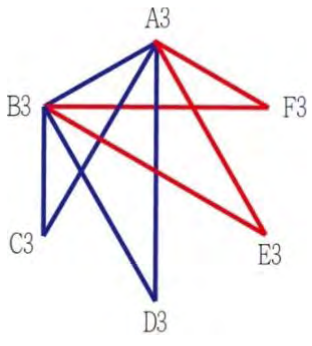


(圖β_2之Ⅰ)

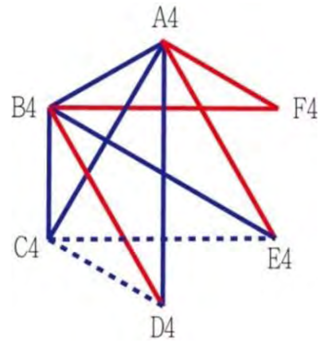


(圖β_2之Ⅱ)

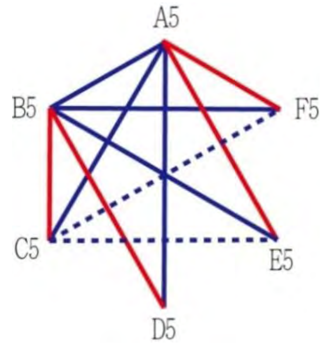
iv.又如圖(三)



圖(α_3)



圖(β_3)



圖(γ_3)

圖(三)

(①)固定B點，可連$\overline{BA}$、$\overline{BC}$ 、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{BF}$共 5 五條線段，鴿籠原理指出，至少有 3 條線段為同一顏色。

(②)設有三條同為藍色。

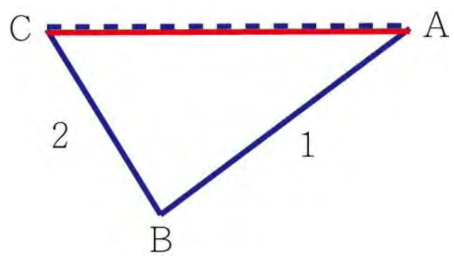
(③)如圖(α_3)，由 B_3 連出的藍色線段$\overline{B_3A_3}$、$\overline{B_3C_3}$ 、$\overline{B_3D_3}$與自 A_3 連出的藍色線段相連接，由 B_3 連出的紅色線段$\overline{B_3E_3}$ 、$\overline{B_3F_3}$與自 A_3 連出的紅色線段相連接，紅藍各形成一個□，$A_3B_3E_3F_3$及 $A_3B_3C_3D_3$ 定理得證。

(④)如圖(β_3)，由 B_4 連出的藍色線段$\overline{B_4A_4}$ 、$\overline{B_4C_4}$ 、$\overline{B_4E_4}$與自 A_4 連出的藍色線段產生 2 條藍色□的潛在線，必能連出藍色□，分別為 $A_4B_4C_4D_4$ 及 $A_4B_4C_4E_4$ 定理得證。

(⑤)如圖(γ_3)，當由 B_5 連出的藍色線段$\overline{B_5A_5}$ 、$\overline{B_5E_5}$ 、$\overline{B_5F_5}$與自 A_5 連出的藍色線段產生 2 條藍色□的潛在線，必能連出藍色□，分別為 $A_5B_5E_5C_5$、$A_5B_5F_5C_5$，定理得證。綜合上述討論，定理(乙)得證

三、潛在線，封閉線

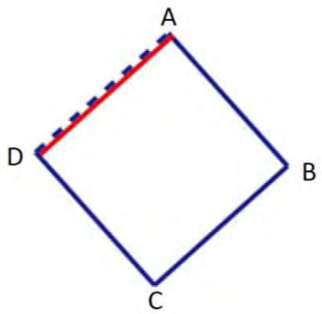
(一) 三角形的潛在線、封閉線:



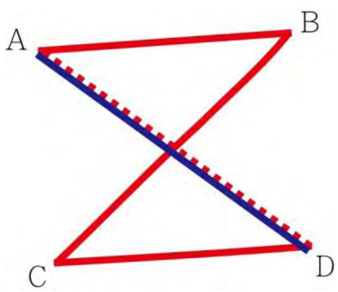
圖(四)

如圖(四)，甲方已經連出兩條藍色線段$\overline{AB}$、$\overline{BC}$，只差在虛線處連出一條藍色線段即可形成一個藍色三角形，我們定義這條虛線$\overline{AC}$為藍色三角形的潛在線，而紅色為避免藍色形成藍色三角形，搶先以實線畫$\overline{AC}$，我們定義紅色$\overline{AC}$為封閉線。紅色三角形的潛在線、封閉線形成方式亦同。

(二) 四邊形的潛在線、封閉線:



圖(五)



圖(六)

如圖(五)，甲方已連出三條藍色線段$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$，只差在虛線處連出一條藍色線段即可形成一個藍色四邊形 ABCD，故我們定義這條虛線$\overline{AD}$為藍色四邊形的潛在線，而紅色為避免藍色形成四邊形，搶先畫實線$\overline{AD}$，我們定義紅色$\overline{AD}$為封閉線。紅色四邊形的潛在線、封閉線形成方式亦同，如圖(六)，虛線$\overline{AD}$為紅色四邊形的潛在線，藍色$\overline{AD}$為封閉線。

(三) 五邊形、六邊形……N 邊形之潛在線封閉線之形成亦同

伍、研究方法與過程

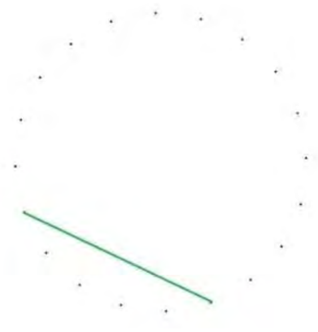
(三)定理丙：

探討畫 n 條線段能產生最多的單色三角形之潛在線數的規律性:

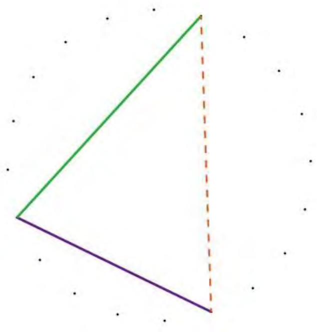
令 A(n)表畫 n 條線段能產生最多的單色三角形之潛在線數

我們發現 $A(n)=C_2^n=\frac{n(n-1)}{2} \quad n\in N$

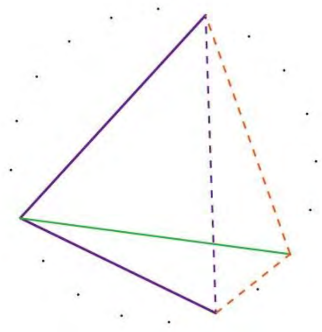
證明：



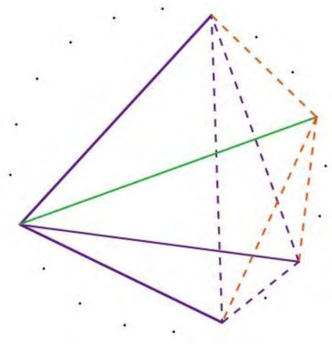
A(1)=0



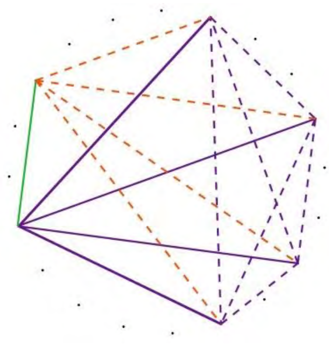
$A(2)=1=C_2^2$



$A(3)=3=C_2^3$



$A(4)=6=C_2^4$



$A(5)=10=C_2^5$

備註：綠色表該圖新增之線段

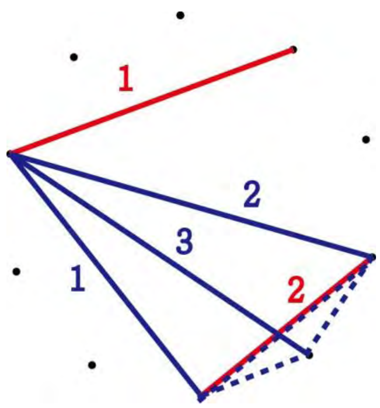
橘色表每條新增線段所產生的單色三角形之潛在線，

而新增線段(綠色)所產生的潛在線數，即：$A(n)-A(n-1)=n-1$ ，

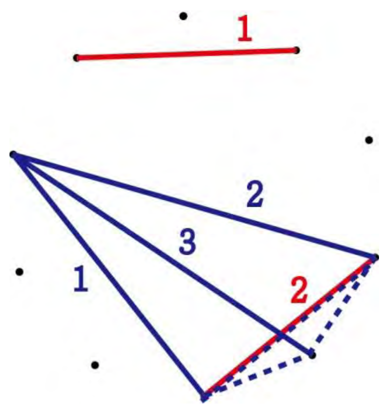
若所有線段都由同一固定點畫出，只要任選 2 條線段再加上一條潛在線即可形成一個三角形，所以，$A(n)=C_2^n=\frac{n(n-1)}{2}$

一、討論：甲先連出一個藍色三角形或乙先連出一個紅色三角形，誰勝？

方法(一)如圖(七)甲 1 與乙 1 相連，而方法(二)如圖(八)甲 1 與乙 1 不相連。接著甲以最優勢畫法連出第 2 步，乙 2 勢必要封閉藍色△的潛在線。甲 3 與甲 1、甲 2 形成三叉圖，無論是方法(一)或方法(二)的情況，由定理(丙)知：$A(n)=C_2^n$，甲產生的藍色△潛在線數$=A(3)-1(乙\ 2)=C_2^3-1=2$，而乙的潛在線數$=A(2)=0$ 因為$2>0$，故乙無法同時封閉這兩條藍色△的潛在線，所以甲必先勝出。



圖(七)



圖(八)

(四)定理丁：探討畫 n 條線段能產生最多的單色四邊形之潛在線數的規律性:

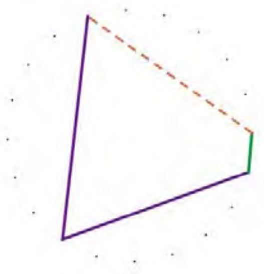
令 B(n)表畫 n 條線段能產生最多的單色四邊形之潛在線數

$$B(n)：\begin{cases} B(3k)=3k^2-3，n=3k \quad k>1 \quad k\in N \\ B(3k+1)=3k^2+2k-3，n=3k+1 \quad k\in N \\ B(3k+2)=3k^2+4k-2，n=3k+2 \quad k\in N \end{cases}$$

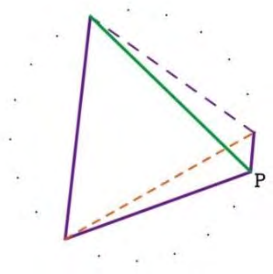
證明：

圖(ㄅ):B(1)=0

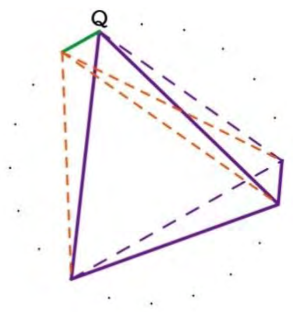
圖(ㄆ):B(2)=0



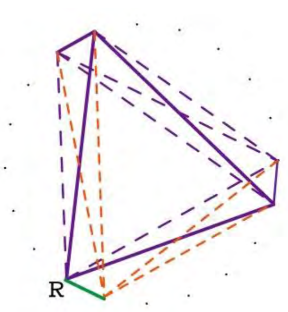
圖(ㄇ):B(3)=1



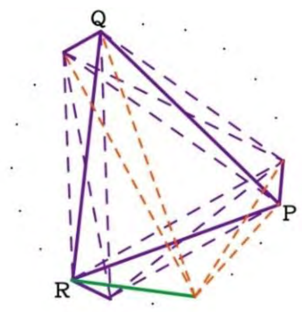
圖(ㄈ):B(4)=2



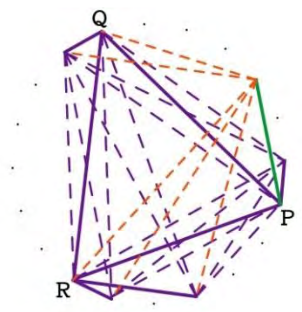
圖(ㄉ):B(5)=5



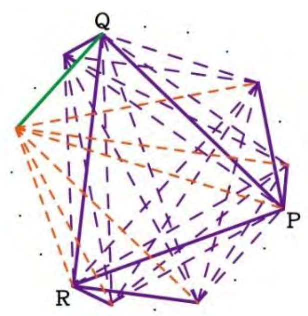
圖(ㄊ):B(6)=9



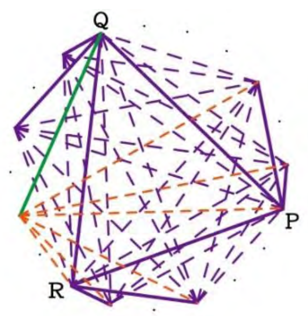
圖(ㄋ):B(7)=13



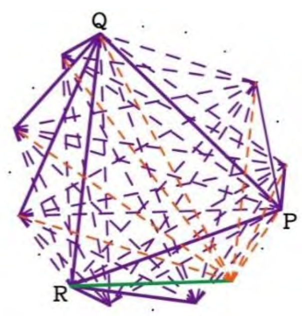
圖(ㄌ):B(8)=18



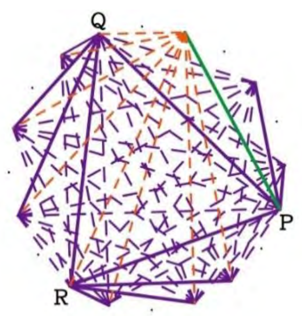
圖(ㄍ):B(9)=24



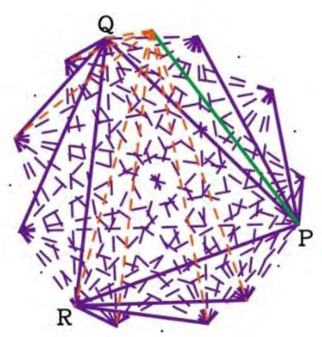
圖(ㄎ):B(10)=30



圖(ㄏ):B(11)=37



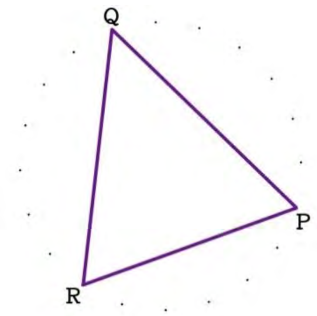
圖(ㄐ):B(12)=45



圖(ㄑ):B(13)=53

備註：綠色表該圖新增之線段

橘色表每條新增線段所產生的單色四邊形之潛在線

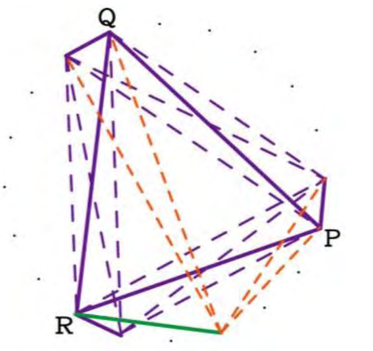


我們觀察到圖(ㄈ): $B(4)=2$ 時，三條線圍成一個△PQR，而以此三角形的3個頂點輪流連線，依PQR RPQ QRP PQR...的順序連出如圖(ㄈ)、圖(ㄉ)、圖(ㄊ)、......、圖(ㄎ)的圖形，可產生最多的潛在線數。

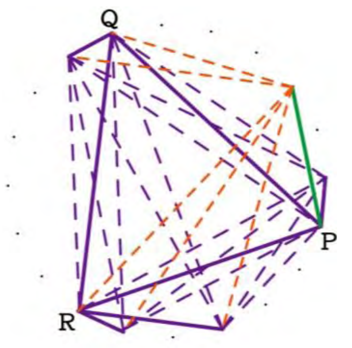
令 $F(n)=B(n)-B(n-1)$為新增的潛在線數。

以圖(ㄋ)： $B(7)=13$及圖(ㄌ): $B(8)=18$為例，圖(ㄌ)的8個頂點被△PQR的三邊分割，被分割到$\overline{PQ}$邊的有3個點，如圖(α)的P、M、N點，所以由新增點N所射出的新增潛在線數有

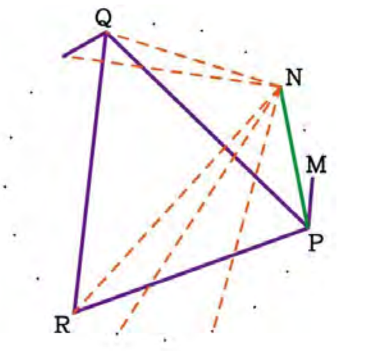
$8-3$(P、M、N點) $=5$條，$F(8)=8-\left(\left[\frac{8}{3}\right]+1\right)=5$，即 $F(8)=B(8)-B(7)=18-13=5$



圖(ㄋ):B(7)=13



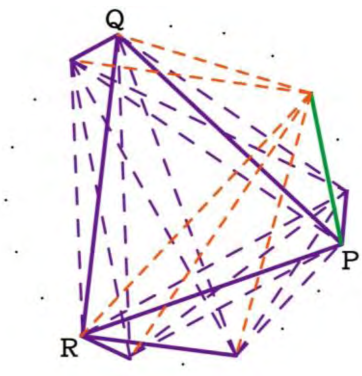
圖(ㄌ):B(8)=18



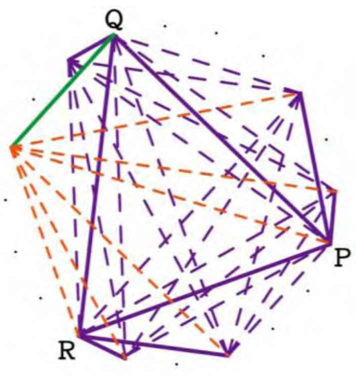
圖(α)：圖(ㄌ)去除圖(ㄋ)後所新增潛在線數

再以圖(ㄌ):B(8)=18及圖(ㄍ):B(9)=24為例，圖(ㄍ)的9個頂點同樣被△PQR的三邊分割，而被分割到$\overline{QR}$邊的有3個點，即為圖(β)的Q、S、T點，所以由新增點T所射出的新增潛在線數

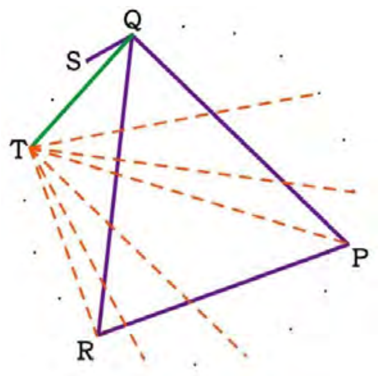
有$9-3$(Q、S、T點) $=6$條，即$F(9)=9-\left[\frac{9}{3}\right]=6$，即$F(9)=B(9)-B(8)=24-18=6$



圖(ㄌ):B(8)=18



圖(ㄍ):B(9)=24



圖(β)：圖(ㄍ)去除圖(ㄌ)後所新增潛在線數

我們發現結果如下

$F(n)=B(n)-B(n-1)$:當量出第 n 條線段時所新增的四邊形之潛在線數

$B(1)=0 \quad B(2)=0 \quad B(3)=1$

$F(7)=7-\left(\left[\frac{7}{3}\right]+1\right)=4 \quad F(8)=8-\left(\left[\frac{8}{3}\right]+1\right)=5$

$F(9)=9-\left(\left[\frac{9}{3}\right]\right)=6 \quad F(3k)=3k-\left(\left[\frac{3k}{3}\right]\right)=2k$

$F(3K+1)=3k+1-\left(\left[\frac{3k+1}{3}\right]+1\right)=3k+1-k-1=2k$，$k>1 \quad k\in N$

$F(3k+2)=3k+2-\left(\left[\frac{3k+2}{3}\right]+1\right)=3k+2-k-1=2k+1$ ，$k\in N$

$$
\begin{aligned}
&F(4)=B(4)-B(3)\\
&F(5)=B(5)-B(4)\\
&\ \ .\\
&\ \ .\\
&F(3k-2)=B(3k-2)-B(3k-3)\\
&F(3k-1)=B(3k-1)-B(3k-2)\\
+)\ &F(3k)=B(3k)-B(3k-1)\\
\hline
&F(4)+F(5)+\cdots+F(3k-2)+F(3k-1)+F(3k)=B(3k)-B(3)
\end{aligned}
$$

得 $B(3K)=B(3)+F(4)+F(5)+F(6)+\cdots+F(3k-2)+F(3k-1)+F(3k)$

$=[1+(1+3+4)]+\cdots+[2(k-2)+2(k-2)+1+2(k-1)]$

$+[2(k-1)+2(k-1)+1+2k]$

$$=9+\cdots+6k-9+6k-3=\sum_{n=2}^{k}(6n-3)$$

$$=6\sum_{n=2}^{k}n-\sum_{n=2}^{k}3=6\frac{(2+k)(k-1)}{2}-3(k-1)$$

$$=3(k^2+k-2)-3k+3=3k^2-3$$

又 $B(3k+1)=B(3k)+F(3k+1)$

$=3k^2-3+2k$

$B(3k+2)=B(3k+1)+F(3k+2)$

$=3k^2+2k-3+2k+1=3k^2+4k-2$

$$
\text{得}\quad B(n)：\begin{cases} B(3k)=3k^2-3，n=3k \quad k>1 \quad k\in N\\ B(3k+1)=3k^2+2k-3，n=3k+1 \quad k\in N\\ B(3k+2)=3k^2+4k-2，n=3k+2 \quad k\in N\end{cases}
$$

二、討論：甲先連出一個藍色四邊形或乙先連出一個紅色四邊形，誰勝？

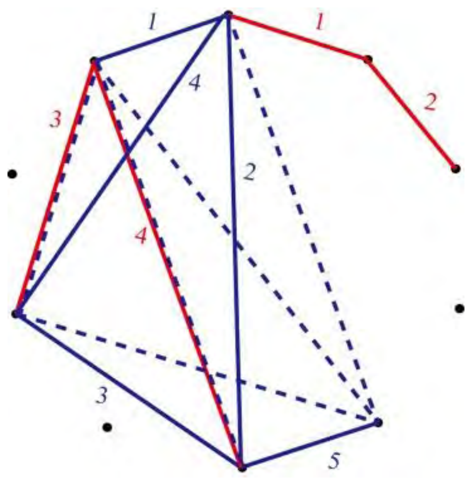
(一)甲 1 與乙 1 相連

甲 3、甲 4 產生一條潛在線，乙 3、乙 4 皆封閉，由定理(丁) $B(3k+2)=3k+2$ 知：甲 5 的潛在線數$=B(5)-2(乙3、乙4)=5-2=3$

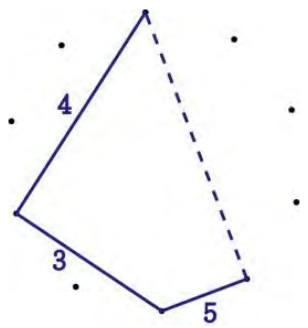
而乙所產生的潛在線$=B(4-2)=B(2)=0$ (其中$B(4-2)$的 2 是指乙 3、乙 4)，

$3>0$，因為甲產生了 3 條潛在線，乙來不及封閉，所以甲必勝。

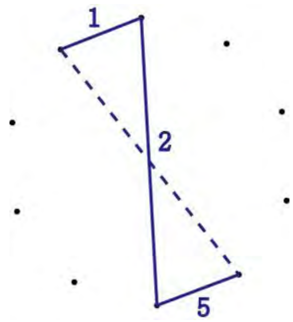
如圖(九)、圖(α)、圖(β)、圖(γ)。



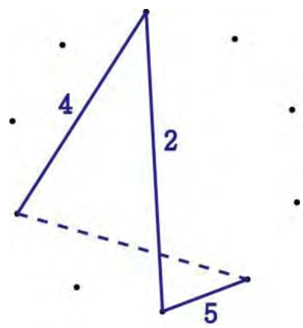
圖(九)



圖(α)



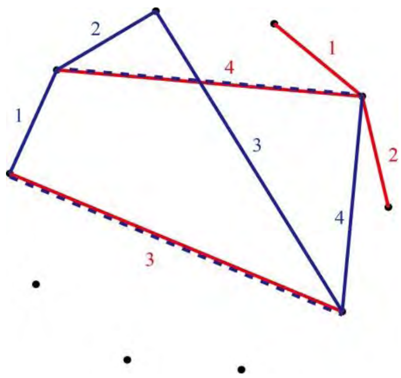
圖(β)



圖(γ)

(二)甲 1 與乙 1 不相連

1. 甲 3、甲 4 各產生一條藍色□潛在線，而乙 3、乙 4 勢必要緊跟著封閉藍色潛在線。如圖(十)



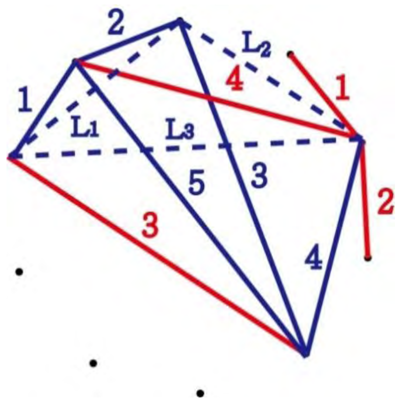
圖(十)

2. 甲再以最優勢的畫法連出第 5 步，由定理(丁) $B(3k+2)=3k^2+4k-2$ 知

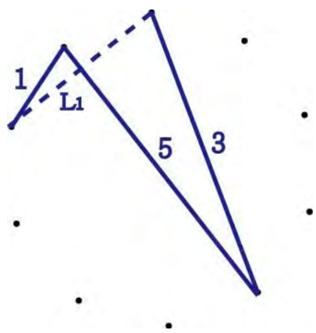
   甲 5 產生的藍色□潛在線數= $B(5)-1$(乙 3)-1(乙 4)$=5-2=3$

   而乙所產生的潛在= $B(4-2)=B(2)=0$ (其中$B(4-2)$的 2 是指乙 3、乙 4)，

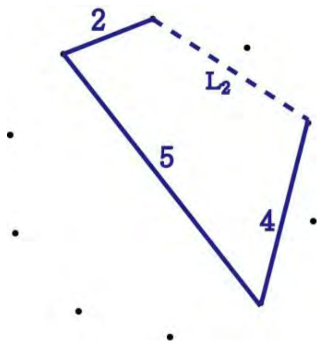
   $3>0$，因為甲產生了三條藍色□的潛在線，此時乙 5 無法同時封閉這三條藍色□潛在線，所以甲 6 必勝出。如圖(十一)、圖(α)、圖(β)、圖(γ)



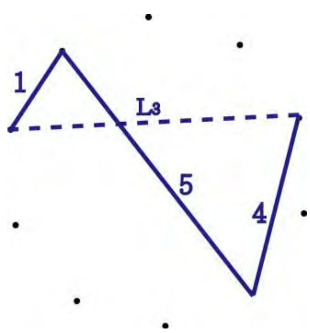
圖(十一)



圖(α)



圖(β)

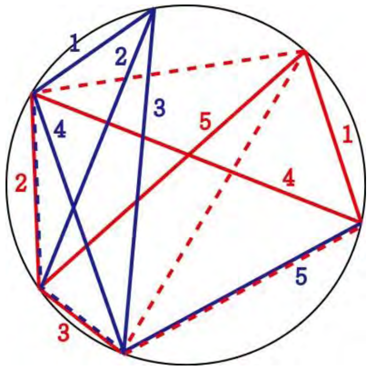


圖(γ)

三、討論：甲先連出三個藍色三角形或乙先連出兩個紅色四邊形，誰勝？

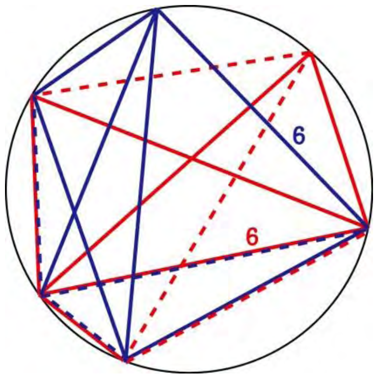
在甲 1 乙 1 不相連的情況下(乙可選擇不相連，相連的情況請見附錄 B)

1. 如圖(十二)，甲 1~甲 3 共產生 3 條潛在線 A(3)=3，乙 2、乙 3 皆封閉甲的潛在線。甲 4 形成第一個藍色△，乙 4 產生 2 條紅色□潛在線 B(4)=2，甲 5 封閉一條紅色□潛在線，而乙 5 先形成第一個紅色□。



圖(十二)

2. 如圖(十三)，甲 6 才形成第二個藍色△，此時的乙可以先產生潛在線。由定理(丁)知乙 6 時有：$B(6-1)-1(\text{乙 }5)-1(\text{甲 }4)-1(\text{甲 }5)=5-3=2$ 條紅色潛在線(其中$B(6-1)$的 1 是指乙 5)，故乙必勝。



圖(十三)

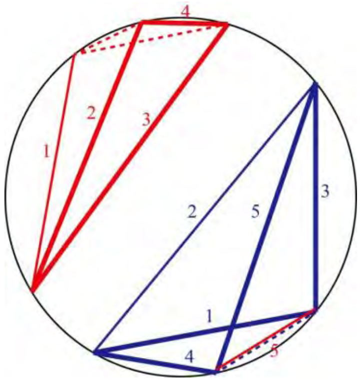
表(一)：比賽過程

數量 \ n	甲形成△	乙形成□	甲封閉乙的潛在線數	乙封閉甲的潛在線數	甲總共的潛在線數	乙總共的潛在線數	甲剩下的潛在線數	乙剩下的潛在線數
2	0	0	0	1	$A(2)=1$	0	$1-1=0$	0
3	0	0	0	2	$A(3)=3$	0	$3-2=1$	0
4	1	0	0	2	3	$B(4)=2$	$3-2-1=0$	2
5	1	1	1	2	4	2	$4-2-1=1$	$2-1-1=0$
6	2	1	2	3	4	$B(6-1)=5$	$4-2-2=0$	$4-1-1=2$

註：n 表第 n 劃

四、討論：甲先連出三個藍色四邊形或乙先連出四個紅色三角形，誰勝？

1. 甲 4 時產生 2 條藍色□潛在線 B(4) = 2，甲 5 連成一個藍色□；乙 3 時產生三條紅色△潛在線 A(3) = 3，而乙 4 連起一個紅色△，乙 5 時封閉一條藍色□潛在線



圖(十四)

2. 由定理(丁)知甲 6 時有

$B(6-1)-1$(甲 5) -1(乙 5) $=5-2=3$條

藍色□潛在線(其中$B(6-1)$的 1 是指甲 5)，

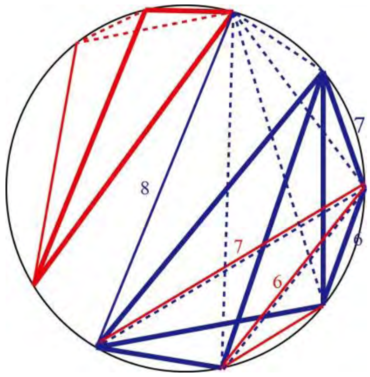
甲 7 時連成第 2 個藍色□；而乙 6、乙 7 則各封閉 1 條藍色□潛在線。

再甲 8 時有

$B(8-2)-2$(甲 5、7) -3(乙 5、6、7) $=9-5=4$

條藍色□潛在線

(其中$B(8-2)$的 2 是指甲 5、甲 7)，乙來不及封閉，故甲勝



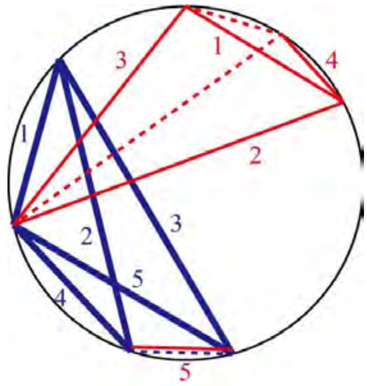
圖(十五)

表(二)：比賽過程

數量 \ n	甲連成□	乙封閉甲的潛在線數	甲總共的潛在線數	乙總共的潛在線數	甲剩下的潛在線數	乙剩下的潛在線數
3	0	0	0	A(3) = 3	0	3
4	0	0	B(4) = 2	3	2	$3-1=2$
5	1	1	2	3	$2-1-1=0$	2
6	1	2	B(5) = 5	3	$5-1-2=2$	2
7	2	3	5	3	$5-2-3=0$	2
8	2		B(6) = 9	3	$9-2-3=4$	2

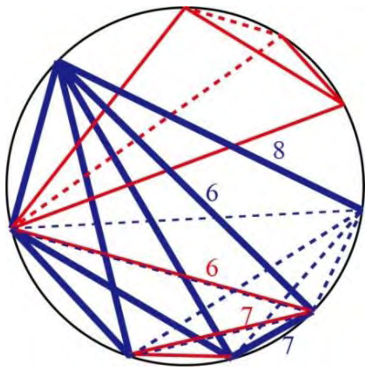
五、討論：甲先連出四個藍色三角形或乙先連出三個紅色四邊形，誰勝？

1.甲 3 已有 3 條藍色△潛在線$A(3)=3$，而甲 4、甲 5 各連成一個藍色△；乙 4 時形成 2 條紅色□潛在線 $B(4)=2$，乙 5 去封閉甲的一條藍色潛在線



圖(十六)

2. 由定理(丙)$A(4)=C_2^4=6$知甲 6 時有 3 條藍色△潛在線$A(6-2)-2($甲 4、5$)-1($乙 5$)$ $=6-3=3$ (其中$A(6-2)$的 2 是指甲 4、5)，甲 7 連成第 3 個藍色△，乙 6、乙 7 仍各封閉一條藍色△潛在線　由定理(丙) $A(5)=C_2^5=10$知：甲 8 時新增 4 條藍色△潛在線



圖(十七)

$A(8-3)-3($甲 4、5、7$)-3($乙 5、6、7$)=10-6=4$
(其中$A(8-3)$的 3 是指甲 4、甲 5、甲 7)。因乙來不及封閉，故甲勝

表(三)：比賽過程

數量 \ n	甲連成△	乙封閉甲的潛在線數	甲總共的潛在線數	乙總共的潛在線數	甲剩下的潛在線數	乙剩下的潛在線數
3	0	0	$A(3)=3$	0	3	0
4	1	0	3	$B(4)=2$	$3-1=2$	2
5	2	1	3	2	$3-2-1=0$	2
6	2	2	$A(4)=6$	2	$6-2-2=2$	2
7	3	3	6	2	$6-3-3=0$	2
8	3		$A(6)=10$	2	$10-3-3=4$	2

(五)定理戊：

探討畫 n 條線段能產生最多的單色五邊形之潛在線數的規律性：

令 C(n)表畫 n 條線段能產生最多的單色五邊形之潛在線數

五邊形 N= 5，當 n< $N-1$ 時$C(n)=0$

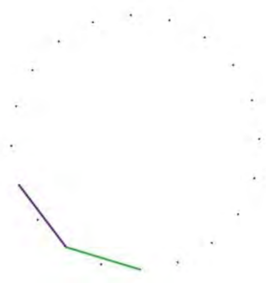
當$n \geq N-1$時

$$C(n):\begin{cases} n=N+2k-1 \text{ 為偶數，} C(n)=C(N+2k-1)=C(2k+4)=k^2+2k+1 \\ n=N+2k \text{ 為奇數，} C(n)=C(N+2k)=C(2k+5)=k^2+3k+2 \end{cases}$$

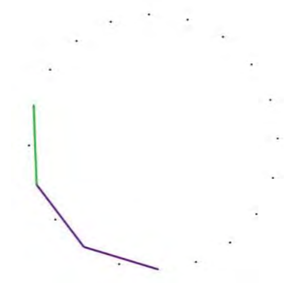
k 為 0 或正整數

證明：

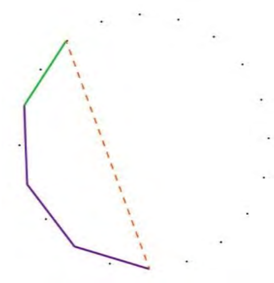
C(1)=0



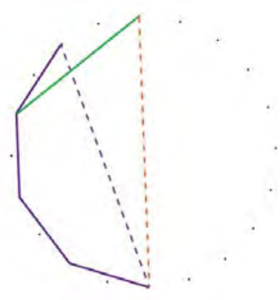
C(2)=0



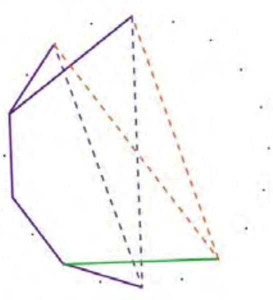
C(3)=0



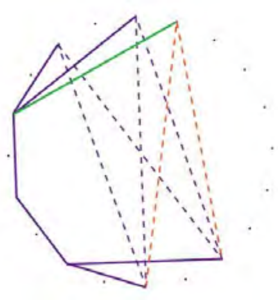
C(4)=1



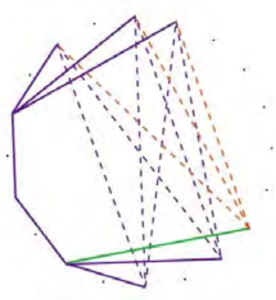
C(5)=2



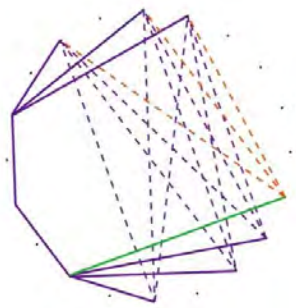
C(6)=4



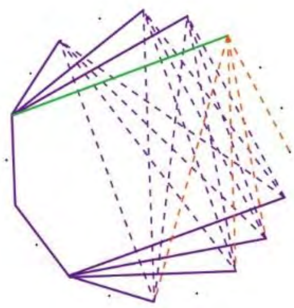
C(7)=6



C(8)=9



C(9)=12



C(10)=16

備註：綠色表該圖新增之線段

橘色表因新增線段所產生的單色(紫色)五邊形之潛在線數

令 $N=5$，推得 C(n)之公式如下：

當 $n< N-1 \quad C(n)=0$

$n \ge N-1$

1. n 為偶數時

$$
\begin{aligned}
&C(4)-C(2)=1 \rightarrow 2\times 0+1\\
&C(6)-C(4)=3 \rightarrow 2\times 1+1\\
&C(8)-C(6)=5 \rightarrow 2\times 2+1\\
&C(10)-C(8)=7 \rightarrow 2\times 3+1\\
&\quad\vdots\\
+)&C(2k+4)-C(2k+2)=2k+1
\end{aligned}
$$

$$C(2k+5-1)-C(2)=2(1+2+3+\cdots+k)+k+1 \ =k^2+2k+1$$

$C(N+2k-1)=k^2+2k+1$ k 為 0 或正整數

2. n 為奇數時

$$
\begin{aligned}
&C(5)-C(3)=2 \rightarrow 2\times 0+2\\
&C(7)-C(5)=4 \rightarrow 2\times 1+2\\
&C(9)-C(7)=6 \rightarrow 2\times 2+2\\
&C(11)-C(9)=8 \rightarrow 2\times 3+2\\
&\quad\vdots\\
+)&C(2k+5)-C(2k+3)=2k+2
\end{aligned}
$$

$$C(\underset{\substack{\downarrow\\ N}}{2k+5})-C(3)=2+4+\cdots+2k+2$$

得 $C(N+2k)=2(1+2+3+\cdots+k+1)=2\times\frac{(k+2)(k+1)}{2}$

$C(N+2k) \ =k^2+3k+2$ k 為 0 或正整數

得：五邊形 N= 5，當 n< $N-1$ 時 $C(n)=0$

當 $n \ge N-1$時

$$C(n):\begin{cases} n=N+2k-1 \text{ 為偶數，} C(n)=C(N+2k-1)=C(2k+4)=k^2+2k+1 \\ n=N+2k \text{ 為奇數，} C(n)=C(N+2k)=C(2k+5)=k^2+3k+2 \end{cases}$$

k 為 0 或正整數

六、討論：甲先連出一個藍色五邊形或乙先連出一個紅色五邊形，誰勝？

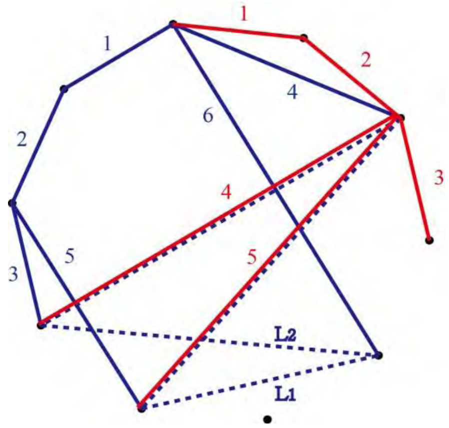
甲 4 時刻意連線切割乙的線段，使乙無法藉由封閉甲的線段產生紅色潛在線。

甲 4、甲 5 各產生一條藍色潛在線，乙 4、乙 5 也緊跟著封閉，

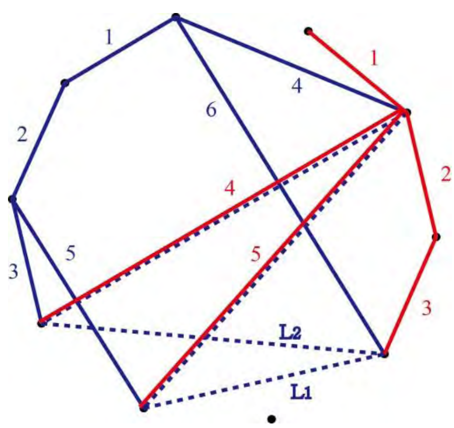
但由定理(己)：$C(2k+4)=k^2+2k+1$ $C(6)=4$知，

甲 6 有$C(6)-2$(乙 4、乙 5)$=4-2=2$條藍色潛在線 L1、L2，乙來不及封閉，故甲勝。

如圖(十八：甲 1、乙 1 相連)或圖(十九：甲 1、乙 1 不相連)其結果一樣都是甲勝。



圖(十八)



圖(十九)

(六)定理己：

探討畫 n 條線段能產生最多的單色六邊形之潛在線數的規律性：

令 D(n)表畫 n 條線段能產生最多的單色六邊形之潛在線數

六邊形 N=6，當 n<N−1 時 $D(n)=0$

當 n≥N−1 時

$$D(n)：\begin{cases} n=N+2k\ \text{為偶數，}\ D(n)=D(N+2k)=D(2k+6)=k^2+3k+2 \\ n=N+2k-1\ \text{為奇數，}\ D(n)=D(N+2k-1)=D(2k+5)=k^2+2k+1 \end{cases}$$

k 為 0 或正整數

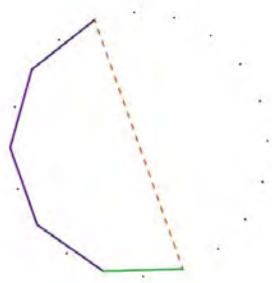
證明：

D(1)=0

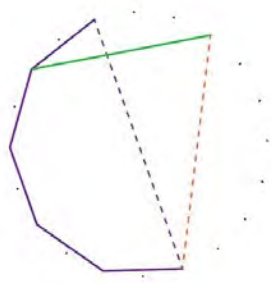
D(2)=0

D(3)=0

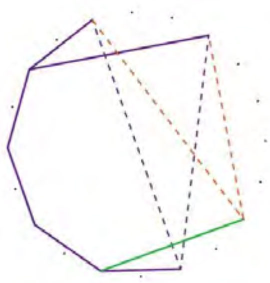
D(4)=0



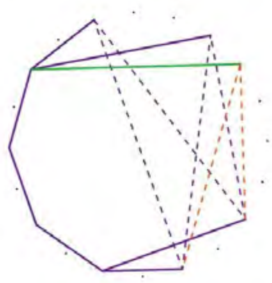
D(5)=1



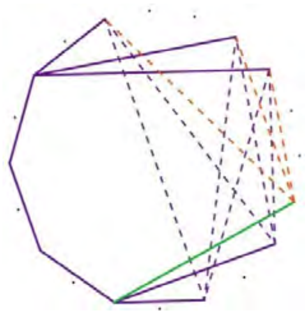
D(6)=2



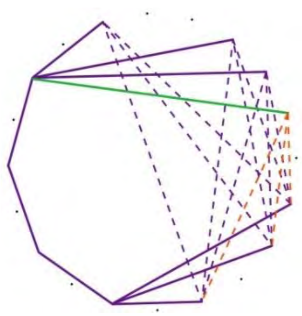
D(7)=4



D(8)=6



D(9)=9



D(10)=12

備註：綠色表該圖新增之線段

橘色表因新增線段所產生的單色(紫色)六邊形之潛在線數

令　$N=6$，推得 D(n)之公式如下：

當 $n<N-1$　$D(n)=0$

$n \geq N-1$

1. n 為偶數時

$$D(6)-D(4)=2 \rightarrow 2\times 0+2$$
$$D(8)-D(6)=4 \rightarrow 2\times 1+2$$
$$D(10)-D(8)=6 \rightarrow 2\times 2+2$$
$$\vdots$$
$$+)D(2k+6)-C(2k+4)=2k+2$$

$$D(2k+6)-D(4)=2+4+\cdots+2k+2$$

$\downarrow$

N

$$D(2k+N)=2(1+2+3+\cdots+k+1)=2\times\frac{(k+2)(k+1)}{2}=k^2+3k+2$$　　k 為 0 或正整數

2. n 為奇數時

$$D(5)-D(3)=1 \rightarrow 2\times 0+1$$
$$D(7)-D(5)=3 \rightarrow 2\times 1+1$$
$$D(9)-D(7)=5 \rightarrow 2\times 2+1$$
$$\vdots$$
$$+)D(2k+5)-D(2k+3)=2k+1$$

$$D(2k+6-1)-D(3)=1+3+\cdots+2k+1$$

$\downarrow$

N

$$D(2k+N-1)=\frac{(2k+2)(k+1)}{2}=(k+1)^2=k^2+2k+1$$

得：六邊形 N=6，當 n<N−1 時 $D(n)=0$

當 n≥N−1 時

$$D(n): \begin{cases} n=N+2k \text{ 為偶數}，D(n)=D(N+2k)=D(2k+6)=k^2+3k+2 \\ n=N+2k-1 \text{ 為奇數}，D(n)=D(N+2k-1)=D(2k+5)=k^2+2k+1 \end{cases}$$

k 為 0 或正整數

陸、結論

一、　被指定不同圖形的雙方皆使用最優勢畫法且互相封閉，得以下結果：

討論	甲被指定的圖形	乙被指定的圖形	勝者	以潛在線數的多寡來做說明
一	一個藍色三角形	一個紅色三角形	甲	$A(3)-1=2$ $A(1)=0$ $2>0$
二	一個藍色四邊形	一個紅色四邊形	甲	$B(5)-2=3$ $B(2)=0$ $3>0$
三	三個藍色三角形	兩個紅色四邊形	乙	$A(4)-6=0$ $B(5)-3=2$ $0<2$
四	三個藍色四邊形	四個紅色三角形	甲	$B(6)-5=4$ $A(4)=2$ $4>2$
五	四個藍色三角形	三個紅色四邊形	甲	$A(5)-6=4$ $B(4)=2$ $4>2$
六	一個藍色五邊形	一個紅色五邊形	甲	$C(6)-2=2$ $C(3)=0$ $2>0$

二、畫 n 條線段能產生最多的單色 N 邊形之前在線數的規律性：

(一) $N=3$邊形之畫 n 條線段能產生最多的單色三角形之潛在線數公式為：

$$A(n)=C_2^n=\frac{n(n-1)}{2}$$

(二) $N=4$邊形之畫 n 條線段能產生最多的單色四邊形之潛在線數公式為：

$n=3k$，$3k+1$，$3k+2$ 時

$$\begin{cases} B(3k)=3k^2-3 & k>1 \\ B(3k+1)=3k^2+2k-3 & k>0 \\ B(3k+2)=3k^2+4k-2 & k>0 \end{cases} \qquad k\in N$$

(三) $N\geq 5$邊形之畫 n 條線段能產生最多的潛在線數公式為：

1. $n<N-1$，$C(n)=0$
2. $n\geq N-1$

$$\begin{cases} C(n)=C(N+2k-1)=k^2+2k+1 \\ C(n)=C(N+2k)=k^2+3k+2 \end{cases} \qquad k \text{ 為 } 0 \text{ 或正整數}$$

三、當甲畫單色 N 邊形，乙畫單色 N 邊形，雙方皆使用最優勢畫法，因甲先畫所以具有主控性，能較不拘束的產生自己的潛在線，故甲必勝，但當雙方畫不同 N 邊形或較為複雜的狀況時，乙也有機會獲勝。

四、當凸 N 邊形的點數達一定的程度後，甲乙雙方皆使用最優勢畫法時，是否從同一出發點連線，結果不受影響。

五、最優勢畫法為：

(一) 使同色線段相連接於同一點。(限三角形)

(二) 把對方線段阻隔在不同的地方。

(三) 盡量讓自己的線段集中，較具有優勢。

柒、 展望

一、未來我們將探討甲畫 a 個藍色 N 邊形，乙畫 b 個紅色 N’ 邊形之輸贏，其中 a、b、N、N’ 的關係為何？

二、若再加入一位玩家，則會更有挑戰性，也有較多變化性，所以也希望能再朝多色連線去研究。

三、我們也希望能將此種比賽模式轉為 APP 遊戲供人下載，提供一種新穎的益智休閒娛樂。

捌、 參考文獻

一、江世真等(2011)。國中數學課本第二冊，翰林版。

二、李明芳等(2011)。國中數學課本第四冊，翰林版。

三、繆友勇等(2011)。高中數學課本第二冊，翰林版。

四、張鎮華(2004)。幸福結局問題---鴿籠原理與拉姆西定理。數學傳播期刊。

【評語】050407

本作品，主要是研究以兩種顏色（紅色與藍色）來連接點與點之間的邊之兩人遊戲；誰先連成指定的條件，例如甲為兩個同為紅色的三角形，乙是三個同色的藍色三角形，誰就贏。研究的內容，主要是提供一個如何能夠致勝的策略，是有相當具體的成果。然而這一類型的問題，比較核心的探討，是在考量什麼時候會形成同色的三角形或者同色多邊形；對應於遊戲來看，討論誰先獲得同色三角形或同色多邊形為輸家，可能比較接近核心的問題。作者可以參考 Ramsey Graph Theory 以獲得更多相關的知識，以及研究的課題。

作品海報

壹、研究動機

當學到在圓上畫弦時，試著玩一個遊戲：甲乙兩人分別以藍、紅筆，先後在圓上固定點連線段，看誰能先連出單色三角形為勝。如果改畫四邊形、五邊形，結果又如何?

貳、研究目的

一、 在圓上 10 個點以藍紅兩色連線比賽，探討各種比賽甲或乙獲勝之情形：

(一) 甲先連出一個藍色三角形，或乙先連出一個紅色三角形

(二) 甲先連出一個藍色四邊形，或乙先連出一個紅色四邊形

(三) 甲先連出三個藍色三角形，或乙先連出兩個紅色四邊形

(四) 甲先連出三個藍色四邊形，或乙先連出四個紅色三角形

(五) 甲先連出四個藍色三角形，或乙先連出三個紅色四邊形

(六) 甲先連出一個藍色五邊形，或乙先連出一個紅色五邊形

二、 探討畫 n 條線段能產生最多的單色 N 邊形之潛在線數的規律性

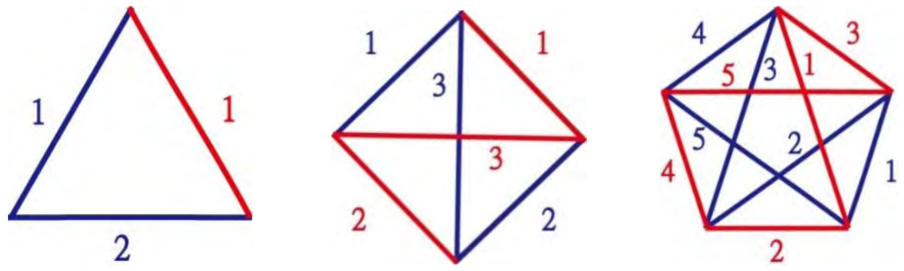
三、 歸納出必勝的策略

參、遊戲規則

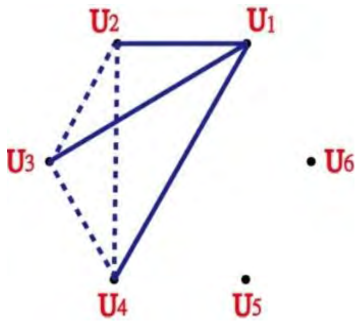
甲拿藍色筆，乙拿紅色筆，甲先乙後輪流在凸 N 邊形上的頂點，每兩點之間用線段連接，任何三點不共線，如比賽單色三角形，先連出單色三角形者為勝。同理，如比賽單色四邊形、五邊形，先連出單色四、五邊形者為勝。

定理甲：凸 N 邊形 N 個頂點上，甲乙比賽先連出單色三角形之最小值 N 為 6

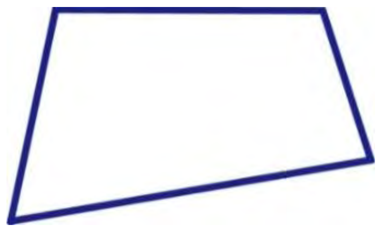
1. 平面上，若 N 多邊形 N=3 或 N=4 或 N=5，則無法連出單色三角形如下：



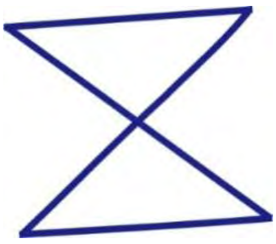
2. 平面上，從凸 N 多邊形上 N 個頂點先連出一個單色三角形為勝，若欲使有一方必能連出一個單色三角形，求出 N 之最小值為 6。



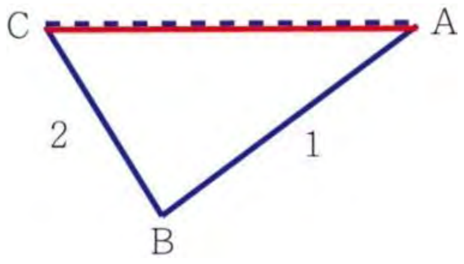
肆、名詞解釋



圖(一) 四邊形



圖(二) 四邊形



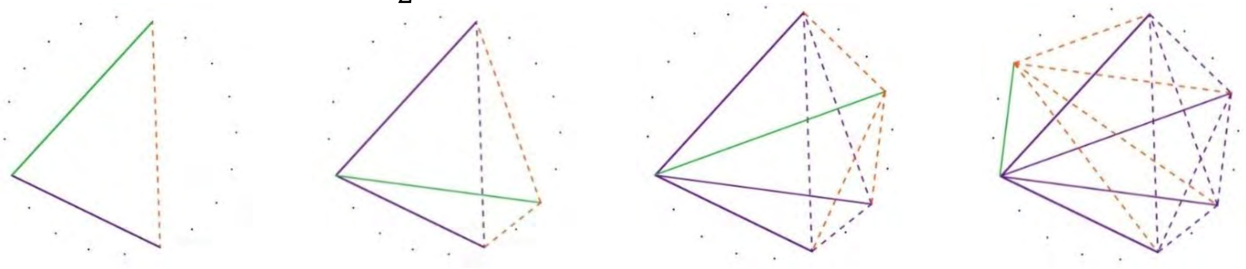
圖(三) 三角形的潛在線、封閉線

伍、研究過程、方法與結果

定理丙：探討畫 n 條線段能產生最多的單色三角形之潛在線數的規律性:

令 A(n)表畫 n 條線段能產生最多單色三角形之潛在線數，

得 $A(n)=C_2^n=\frac{n(n-1)}{2}\quad n\in N$

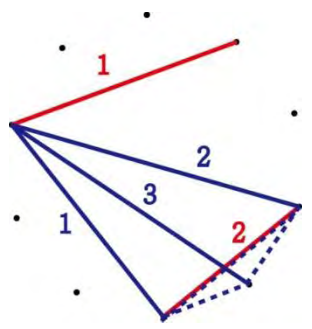


$A(2)=1=C_2^2$　　$A(3)=3=C_2^3$　　$A(4)=6=C_2^4$　　$A(5)=10=C_2^5$

備註：綠色表新增線段，橘色表新增線段所產生的單色三角形之潛在線，而新增線段(綠色)所產生的潛在線數，即：$A(n)-A(n-1)=n-1$

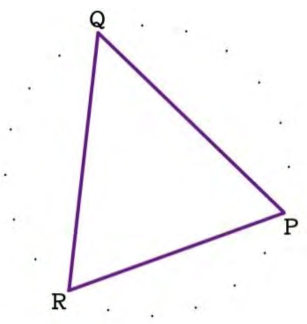
討論一：甲先連出一個藍色三角形或乙先連出一個紅色三角形，誰勝？

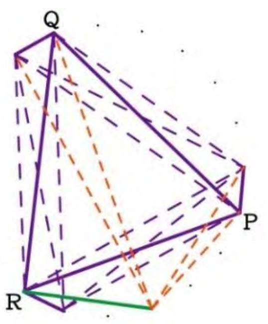
如圖(四)甲 1 與乙 1 相連，甲以最優勢畫法連出第 2 步，乙 2 勢必要封閉藍色△潛在線。由定理丙知：$A(n) = C_2^n$，甲 1~甲 3 產生的藍色△潛在線數=$A(3) - 1(乙\ 2) = C_2^3 - 1 = 2$，而乙的潛在線數=A(2)=0，因為$2 > 0$，故乙無法同時封閉這兩條藍色△的潛在線，所以甲必勝出。

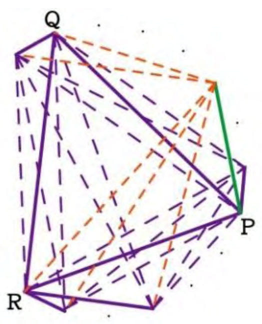

圖(四)

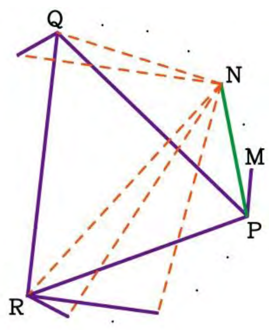
定理丁：探討畫 n 條線段能產生最多的單色四邊形之潛在線數的規律性：

$$得B(n)：\begin{cases} B(3k) = 3k^2 - 3，n = 3k \quad k > 1 \quad k \in N \\ B(3k+1) = 3k^2 + 2k - 3，n = 3k+1 \quad k \in N \\ B(3k+2) = 3k^2 + 4k - 2，n = 3k+2 \quad k \in N \end{cases}$$


圖(五)


圖(六):B(7)=13


圖(七):B(8)=18


圖(α)：圖(七)去除圖(六)後所新增潛在線數

以此三角形的 3 個頂點輪流連線，依 PQR RPQ QRP PQR. . . 的順序連出的圖形，可產生最多的四邊形潛在

$F(8) = 8 - \left(\left[\frac{8}{3}\right] + 1\right) = 5$

我們發現結果如下

$F(n) = B(n) - B(n-1)$:當連出第 n 條線段時所新增的四邊形之潛在線數

$F(7) = 7 - \left(\left[\frac{7}{3}\right] + 1\right) = 4 \quad F(8) = 8 - \left(\left[\frac{8}{3}\right] + 1\right) = 5 \quad F(9) = 9 - \left(\left[\frac{9}{3}\right]\right) = 6$

$F(3k) = 3k - \left(\left[\frac{3k}{3}\right]\right) = 2k$

$F(3K+1) = 3k + 1 - \left(\left[\frac{3k+1}{3}\right] + 1\right) = 3k + 1 - k - 1 = 2k，k > 1 \quad k \in N$

$F(3k+2) = 3k + 2 - \left(\left[\frac{3k+2}{3}\right] + 1\right) = 3k + 2 - k - 1 = 2k + 1 \quad，k > 1 \quad k \in N$

$$\begin{aligned} &F(4) = B(4) - B(3) \\ &F(5) = B(5) - B(4) \\ &\ldots\ldots \\ &F(3k-2) = B(3k-2) - B(3k-3) \\ &F(3k-1) = B(3k-1) - B(3k-2) \\ +)\ &F(3k) = B(3k) - B(3k-1) \\ \hline &F(4) + F(5) + \cdots + F(3k-2) + F(3k-1) + F(3k) = B(3k) - B(3) \end{aligned}$$

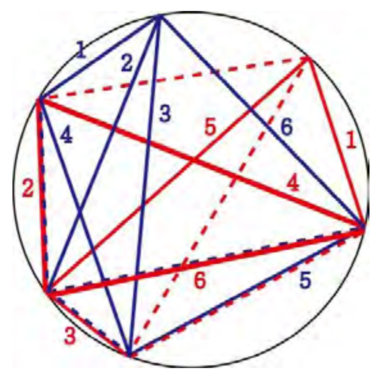
得$B(3K) = B(3) + F(4) + F(5) + \cdots + F(3k-2) + F(3k-1) + F(3k) = [1 + (1 + 3 + 4)] + \cdots + [2(k-2) + 2(k-2) + 1 + 2(k-1)] + [2(k-1) + 2(k-1) + 1 + 2k] = \sum_{n=2}^{k}(6n-3) = 3k^2 - 3$

又 $B(3k+1) = B(3k) + F(3k+1) = 3k^2 - 3 + 2k$

$B(3k+2) = B(3k+1) + F(3k+2) = 3k^2 + 2k - 3 + 2k + 1 = 3k^2 + 4k - 2$

討論三：甲先連出三個藍色三角形或乙先連出兩個紅色四邊形，誰勝？

如圖(八)，在甲 1 乙 1 不相連的情況下，乙 5 先形成第一個紅色□，甲 6 才形成第二個藍色△，此時的乙可以先產生潛在線。由定理丁知乙 6 時有：$B(6-1) - 1(乙\ 5) - 1(甲\ 4) - 1(甲\ 5) = 2$ 條紅色潛在線(其中$B(6-1)$的 1 是指乙 5)，故乙勝。

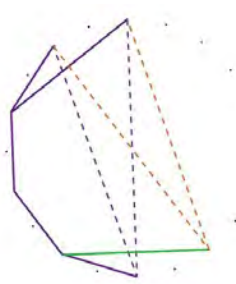

圖(八)

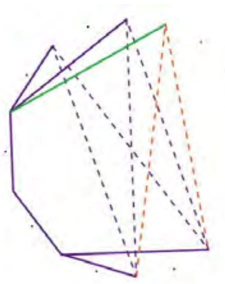
定理戊：探討畫 n 條線段能產生最多的單色五邊形之潛在線數的規律性：

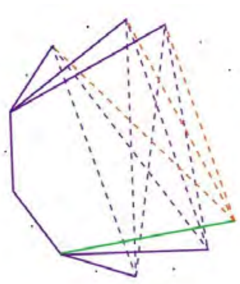
五邊形 N= 5，當 n< $N-1$ 時$C(n) = 0$， 當$n \geq N-1$時

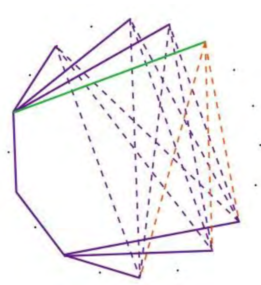
$$得C(n)：\begin{cases} n = N + 2k - 1\ 為偶數，C(n) = C(N + 2k - 1) = C(2k + 4) = k^2 + 2k + 1 \\ n = N + 2k\ 為奇數，C(n) = C(N + 2k) = C(2k + 5) = k^2 + 3k + 2 \end{cases}$$

k 為 0 或正整數


C(6)=4


C(7)=6


C(8)=9

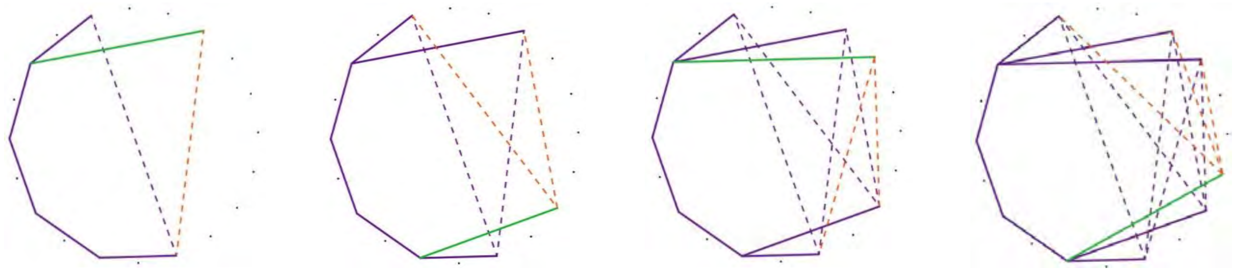

C(9)=12

定理己：探討畫 n 條線段能產生最多的單色六邊形之潛在線數的規律性：

六邊形 N=6，當 n<N−1 時 $D(n)=0$，當$n \ge N-1$ 時

$$D(n):\begin{cases} n = N+2k\text{為偶數，}D(n)=D(N+2k)=D(2k+6)=k^2+3k+2 \\ n=N+2k-1\text{ 為奇數，}D(n)=D(N+2k-1)=D(2k+5)=k^2+2k+1 \end{cases}$$

k 為 0 或正整數



D(6)=2　　D(7)=4　　D(8)=6　　D(9)=9

陸、結論

一、 被指定不同圖形的雙方皆使用最優勢畫法且互相封閉，得以下結果：

甲被指定的圖形	乙被指定的圖形	勝者	以潛在線數的多寡來做說明
一個藍色三角形	一個紅色三角形	甲	$A(3)-1=2$ $A(1)=0$　　$2>0$
一個藍色四邊形	一個紅色四邊形	甲	$B(5)-2=3$ $B(2)=0$　　$3>0$
三個藍色三角形	兩個紅色四邊形	乙	$A(4)-5=0$ $B(5)-3=2$　　$0<2$
三個藍色四邊形	四個紅色三角形	甲	$B(6)-5=4$ $A(3)-1=2$　　$4>2$
四個藍色三角形	三個紅色四邊形	甲	$A(5)-6=4$ $B(4)=2$　　$4>2$
一個藍色五邊形	一個紅色五邊形	甲	$C(6)-2=2$ $C(3)=0$　　$2>0$

二、畫 n 條線段能產生最多的單色 N 邊形之潛在線數的規律性：

(一) $N=3$邊形畫 n 條線段能產生最多單色三角形之潛在線數公式為：

$$A(n)=C_2^n=\frac{n(n-1)}{2}\qquad n\in N$$

(二)$N=4$邊形畫 n 條線段能產生最多單色四邊形之潛在線數公式為：

$$n=3k\text{，}3k+1\text{，}3k+2\text{ 時}\begin{cases} B(3k)=3k^2-3 & k>1 \\ B(3k+1)=3k^2+2k-3 & k>0 \\ B(3k+2)=3k^2+4k-2 & k>0 \end{cases}\qquad k\in N$$

(三)$N\ge 5$邊形畫 n 條線段能產生最多的潛在線數公式為：

1.$n<N-1$，$C(n)=0$

2.$n\ge N-1$，$\begin{cases} C(n)=C(N+2k-1)=k^2+2k+1 \\ C(n)=C(N+2k)=k^2+3k+2 \end{cases}$　　k 為 0 或正整數

三、當甲畫單色 N 邊形，乙畫單色 N 邊形，雙方皆使用最優勢畫法，因甲先畫所以具有主控性，能較不拘束的產生自己的潛在線，故甲必勝，但當雙方畫不同 N 邊形或較為複雜的狀況時，乙也有機會獲勝。

四、最優勢畫法為：

(一)　使同色線段相連接於同一點。(限三角形)

(二)　把對方線段阻隔在不同的地方。

(三)　盡量讓自己的線段集中，較具有優勢。

柒、未來展望

一、未來將探討甲畫 a 個藍色 N 邊形，乙畫 b 個紅色 N’邊形之輸贏，其中 a、b、N、N’的關係為何？

二、若再加入一位玩家，會更有挑戰性及變化性，所以希望能朝多色連線研究。

三、希望能將此種比賽模式轉為 APP 供人下載。