中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050405

莫忘初衷－競賽圖中的環形多邊形之個數探討

學校名稱：國立宜蘭高級中學

作者：	指導老師：
高二 林雍勳 高二 洪睿佑 高二 林耘平	楊明雯

關鍵詞：圖論、環形多邊形、非環形組合

摘要

「莫忘初衷－競賽圖中的環形多邊形之個數探討」是一件在圖論領域中嶄新的作品。研究過程中，首先使用了不等式求出極值所在；再利用組合學作為研究工具；更自行定義了名詞，讓推導過程更順暢；最後也成功得出了許多結論和公式。研究中使用了許多高中生便能理解的方法，解開了一道看似複雜的題目。為再次驗證研究的正確性，更親手使用 C 語言，設計、撰寫了一套程式，用深度優先搜索(Depth First Search)求出任意競賽圖中環形多邊形的個數，而經過無數次重複驗證後，更再次證明研究最後得出的結論和公式的無誤。

壹、　研究動機

在課餘時間，數學老師會提供給一些有關數學研究的期刊給同學們閱讀，其中有一個主題我們都覺得十分有趣：在一個凸多邊形中，兩兩用單向的箭頭連起來，這樣的一張圖中，竟包含了許多環形的路徑。這不禁讓我們聯想到生活中，在旅遊、運輸時，人們總是會希望各個目的地之間能順路，甚至是能成為一個迴路，最後能回到原點。

在搜集一番資料後，我們更發現，原來這種我們俗稱為多邊形的圖，竟然在 1953 年被同是數學家、生物學家的 H. G. Landau 發表在 Bulletin of Mathematical Biophysics，而他稱其為 Tournament（競賽圖），這數十年來，競賽圖廣泛地被各種領域使用著，例如計算機科學、生物演化以及各種社會科學領域。而我們則希望能夠利用在學校所學的知識作為基礎，系統性地研究一套方法求出在任意 n 邊形中，存在大小為 m 的環形多邊形數量之最大值，希望能把競賽圖的應用繼續延伸推廣。

貳、　研究目的

在給定的任意正整數 n 與 m 的條件下(其中$n \geq m$)，求出凸 n 邊形內環形 m 邊形的最大值。

參、　研究過程及方法

一、

假設平面上有一個任意凸 n 多邊形，連結其各頂點後，並用箭頭標示其線段的方向。如果任選一頂點，可沿著配置的箭頭繞一個三角形回到原出發點，我們就稱此繞行路徑的三角形為環形三角形。

現在我們要探討的是任意凸 n 多邊形中環形三角形個數的最大值，之後我們還要再延伸到最多有幾個環形凸 4 邊形、凸 5 邊形……凸 m 邊形(其中$n \geq m$)。

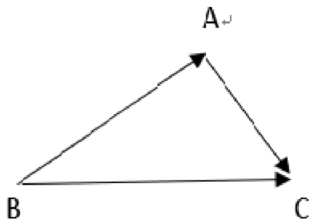
二、

首先，在討論之前我們先定義一個名詞。

「非環形組合」：當有兩個箭頭由同一個頂點發出或有兩個箭頭同時射入同一個點時，我們稱這類的情況為一個非環形組合。

經由觀察發現，非環形三角形中會有 2 個非環形組合，只要得知非環形組合的個數就能推得非環形三角形的個數。

以下我們舉一個例子說明 ：



圖(一)

此三角形(圖一)是我們所稱的非環形三角形，有一個點(B 點)同時發出兩個箭頭，又有一個點(C 點)同時接收兩個箭頭，那此三角形就有兩個非環形組合，可以由此推論，兩個非環形組合可以決定一個非環形三角形。

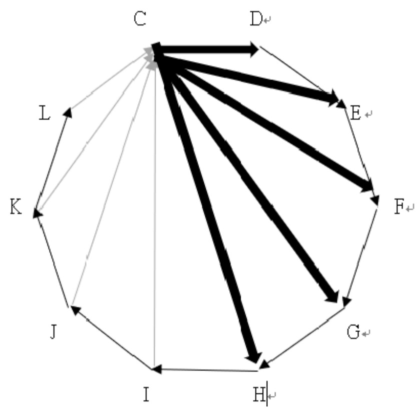
其中，我們用「邊」來代替箭頭。所以，圖一中由 B 點發出且指向 A 點的箭頭可以改成「B 點指向 A 點的邊」，即$\overrightarrow{BA}$。

我們就以非環形組合的個數來探討環形三角形的個數，因為任意凸 n 多邊形的頂點連接出的三角形個數為C_3^n個，只要由全部三角形個數減掉非環形組合產生的非環形三角形個數即是我們所要求環形三角形個數。

三、

凸 n 邊形中，設 P 點為任意一頂點，以 P 為端點的線段有 n-1 條。設 P 點發出 k 個邊分別指向其餘 n-1 個頂點，收到 n-1-k 個指向 P 的邊；自 P 點發出的 k 個邊中，每 2 個邊會形成一個非環形組合，所以自 P 點發出的 k 個邊組成C_2^k個非環形組合；P 點收到的 n-1-k 個邊中，同樣的每 2 個邊會形成一個非環形組合，所以 P 點收到的 n-1-k 個邊組成C_2^{n-1-k}個非環形組合。

以下我們舉一個例子。



圖(二)

圖(二)為一個凸十邊形，其中 C 點發出 5 個邊，即 k=5。在 C 點發出的 5 個邊中，每 2 個邊會形成一個非環形組合，共C_2^5=10 個(ΔCDE、ΔCDF、ΔCDG、ΔCDH、ΔCEF、ΔCEG、ΔCEH、ΔCFG、ΔCFH、ΔCGH)；C 點收到的 10-1-5=4 個邊中，同樣的每 2 個邊會形成一個非環形組合，所以共有C_2^4=6 個(ΔCIJ、ΔCIK、ΔCIL、ΔCJK、ΔCJL、ΔCKL)。

因此關於 P 點的非環形組合個數有 S 個，則：

S=$C_2^{n-1-k}+C_2^k$

$=\frac{(n-1-k)(n-1-k-1)}{2}+\frac{(k)(k-1)}{2}$

$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-1+n-2)(k)}{2}+\frac{k^2}{2}+\frac{(k^2-k)}{2}$

$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+k^2+k-nk$

$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-$k(n-1-k)

為了求 S 的最小值，即要求 M=k(n-1-k)的最大值。我們以下討論分為 n 為奇數和 n 為偶數討論。

(一) n 為奇數時：

因為 k 及 n-1-k 均為正數，所以用算幾不等式$\frac{(k)+(n-1-k)}{2}\geq\sqrt{(k)(n-1-k)}$，所求 M 的最大值出現在 k=n-1-k，經移項可求得

k=$\frac{(n-1)}{2}$時，M 有最大值為$\frac{n-1}{2}$ ‧ [n-1$-\frac{n-1}{2}$]=$\frac{(n-1)(n-1)(1-\frac{1}{2})}{2}$=

$\frac{(n-1)(n-1)}{4}$，此時 S 的最小值為 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-1)(n-1)}{4}$ = $\frac{(n-1)(n-3)}{4}$。

(二) n 為偶數時：

因為 k 和(n-1-k)均為正數，可用算幾不等式進行運算 $\frac{k+(n-1-k)}{2} \geq \sqrt{k \cdot (n-1-k)}$，當 k=(n-1-k)時，右式有最大值。但因為 n 為偶數，則 k=$\frac{(n-1)}{2}$不為整數，所以 M 的最大值出現在離 k=$\frac{n-1}{2}$最近的整數，也就是當$\mathrm{k}=\frac{n}{2}$及$\mathrm{k}=\frac{n}{2}-1$時。以$\mathrm{k}=\frac{n}{2}$代入時，$\mathrm{M}=\frac{n}{2}\cdot\left(n-1-\frac{n}{2}\right)=\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{(n)(n-2)}{4}$；以$\mathrm{k}=\frac{n}{2}-1$時代入，$\mathrm{M}=\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\left(n-1-\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{(n)(n-2)}{4}$， 則$\frac{(n)(n-2)}{4}$為 M 在 n 為偶數時的最大值。若 M 有最大值為$\frac{(n)(n-2)}{4}$，此時 S 的最小值為 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n)(n-2)}{4}=\frac{(n)(n-2)}{4}$。

四、

因為經過計算知道如何求一個點的非環形三角形的個數之最小值，那麼讓上述的式子計算 n 遍就可以算出這個多邊形的非環形三角形個數，由於一個非環形三角形恰有兩個非環形組合，所以一個非環形三角形都被算過兩遍，故一個凸多邊形的非環形三角形個數有$\frac{nS}{2}$個。以下我們一樣分成 n 為奇數和 n 為偶數討論。

(一)n 為奇數時 ： $\frac{(n-1)(n-3)}{4}\cdot\frac{n}{2}$為此凸多邊形的非環形三角形個數。由凸多邊形的所有三角形個數(C_3^n)扣掉它的非環形三角形個數即是它所有的環形三角形個數。

若以式子來表示此凸多邊形的環形三角形個數，則

$$C_3^n-\frac{(n-1)(n-3)}{4}\cdot\frac{n}{2}$$

$$=\frac{(n)(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{(n-1)(n-3)}{4}\cdot\frac{n}{2}$$

$$=\frac{(n)(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n(n-1)(n-3)}{8}$$

$=\frac{n(n^2-1)}{24}$ 。-----式(1)

(二)n 為偶數時 ： $\frac{(n-2)^2}{4}\cdot\frac{n}{2}$ 為此凸多邊形的非環形三角形個數。由凸多邊形的所有三角形個數(C_3^n)扣掉它的非環形三角形個數即是它所有的環形三角形個數。

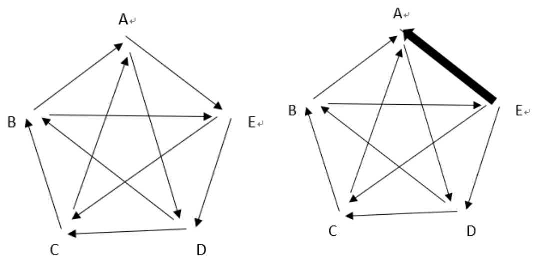
若以式子來表示此凸多邊形的環形三角形個數，則

$$C_3^n-\frac{(n-2)^2}{4}\cdot\frac{n}{2}$$

$$=\frac{(n)(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{(n-2)^2}{4}\cdot\frac{n}{2}$$

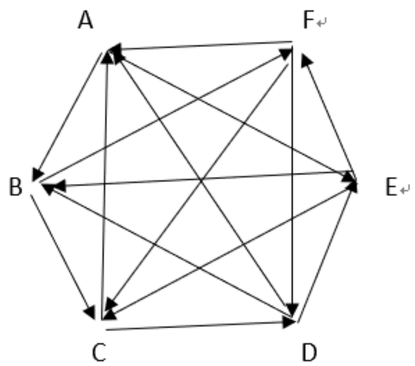
$$=\frac{(n)(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n(n-2)^2}{8}$$

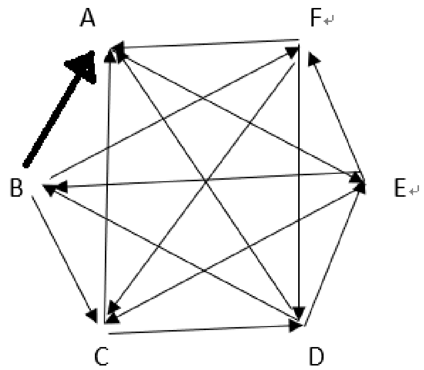
$=\frac{n(n^2-4)}{24}$ 。-----式(2)



若在一奇數 n 邊形中任意顛倒一條箭頭，將$\overrightarrow{AE}$顛倒為$\overrightarrow{EA}$ (如上圖)，在 A 點所產生的非環形組合原本是 $C_2^{\frac{n-1}{2}}+C_2^{\frac{n-1}{2}}=\frac{(\frac{n-1}{2})(\frac{n-3}{2})}{2}\cdot 2=\frac{n^2-4n+3}{4}$ 個，顛倒後為 $C_2^{\frac{n-1}{2}+1}+C_2^{\frac{n-1}{2}-1}=\frac{(\frac{n-1}{2}+1)(\frac{n-1}{2})}{2}+\frac{(\frac{n-1}{2}-1)(\frac{n-1}{2}-2)}{2}=\frac{n^2-4n+7}{4}$ 個，相減之後為 1，同理，在 E 點所產生的非環形組合也會比原本的增加 1 個。證明在射出和射入的邊數一樣多的情況下，任意顛倒一條箭頭會增加非環形組合的個數，進

而減少環形多邊形的個數，跟之前算幾不等式的結論(射入箭頭數等於射出箭頭數)不謀而合。



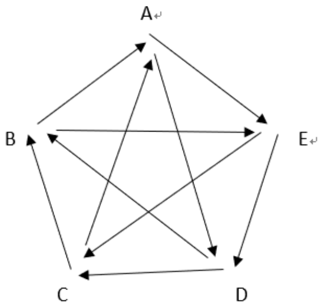


若在一偶數 n 邊形中任意顛倒一條箭頭，將$\overrightarrow{AB}$顛倒為$\overrightarrow{BA}$ (如上圖)，在 A 點所產生的非環形組合原本是$C_2^{\frac{n}{2}}+C_2^{\frac{n}{2}-1}=\dfrac{(\frac{n}{2})(\frac{n}{2}-1)}{2}+\dfrac{(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)}{2}=\dfrac{n^2-4n+4}{4}$個，

顛倒後為$C_2^{\frac{n}{2}+1}+C_2^{\frac{n}{2}-2}=\dfrac{(\frac{n}{2}+1)(\frac{n}{2})}{2}+\dfrac{(\frac{n}{2}-2)(\frac{n}{2}-3)}{2}=\dfrac{n^2-4n+12}{4}$個，相減之後為 2。證明在射出和射入的邊數一樣多的情況下，任意顛倒一條箭頭也會增加非環形組合的個數，進而減少環形多邊形的個數，跟之前算幾不等式的結論(射入箭頭數和射出箭頭數差 1)不謀而合。

為了證明式(一)和式(二)是正確的，我們將 n=5 和 n=6 分別帶入式(一)和式(二)。

當 n=5 帶入式(一)，任意凸五邊形內的環形三角形個數 S=$\dfrac{5(5^2-1)}{24}$=5 個。

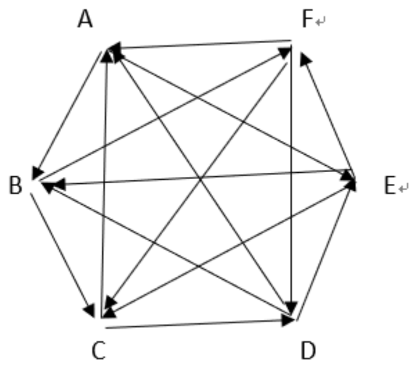


圖(三)

經由作圖(圖三)得知，此凸五邊形內的環形三角形分別為∆ADC、∆ECB、∆DBA、∆CAE、∆BED，且任意更動其中一條箭頭的方向，環形三角形的個數會少於 5 個，故推論任意凸五邊形內的環形三角形個數的最大值為 5 個，與式(一)

相符，證明此式子為正確的。

當 n=6 帶入式(二)時，任意凸六邊形內的環形三角形個數 S=$\frac{6(6^2-4)}{24}$=8 個。



圖(四)

經由作圖(圖四)得知，此凸六邊形內的環形三角形分別為ΔABC、ΔBCD、ΔCDE、ΔDEF、ΔEFA、ΔFAB、ΔAEC、ΔBFD，且任意更動其中一條箭頭的方向，環形三角形的個數仍維持是 8 個或是少於 8 個，故推論任意凸六邊形內的環形三角形個數的最大值為 8 個，與式(二)相符，證明式(二)為正確的。所以式(一)和式(二)可以計算出凸 n 邊形內的環形三角形個數。

五、

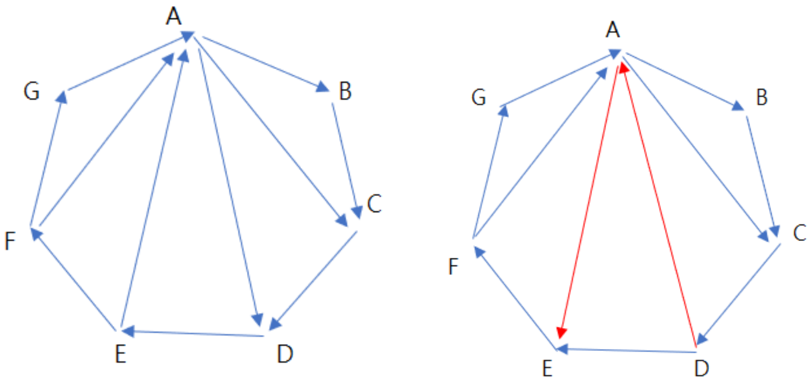
在討論完 n 邊形內環形三角形的個數後，我們要討論奇數 n 邊形內環形四邊形的個數。根據計算環形三角形的結論，只要非環形組合愈少，則環形多邊形的個數愈多。

設 A 點發出 k 個邊分別指向其餘 n-1 個頂點，收到 n-1-k 個指向 A 的邊，因為 k 及 n-1-k 均為正數，所以用算幾不等式 $\frac{(k)+(n-1-k)}{2} \geq \sqrt{(k)(n-1-k)}$，所求的最大值出現在 k=n-1-k，經移項可求得 k=$\frac{(n-1)}{2}$時，得知非環形組合的最小值出現在射出箭頭數等於接收箭頭數的時候。

不同的配置方法會產生出的環形多邊形數量並不同，而在一番嘗試後，我們發現把箭頭按照逆時鐘或順時鐘擺放比其他方法得到了更多環形多邊形。

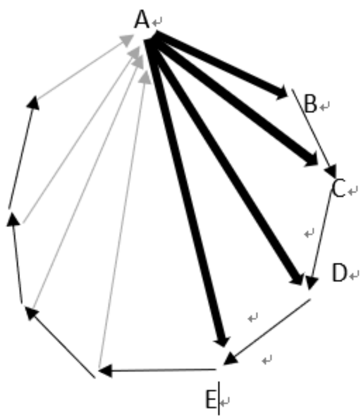
以下為我們的說明 :

我們先假設這樣擺放會有最多環形多邊形。然後我們更動其部分的配置來證明其他方法不會更好；為了減少變因，我們把 n 邊形中的 n-1 個點之間的邊固定，只更動和其中一個點(令其為點 A)所射出或射入的邊，又我們知道箭頭數射出射入相同時，會有最大值，於是我們就只更動其擺放的順序。



更動順序之後(右上圖)， 我們針對 A 點最前與最後的射出(和射入)箭頭計算非環形多邊形的個數。對於由 A 點發出的箭頭而言，最前與最後的箭頭分別為$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AE}$，比起原來的情況多了 1 個箭頭供非環形組合計算；對於指向 A 點的箭頭而言，最前與最後的箭頭分別為$\overrightarrow{GA}$和$\overrightarrow{DA}$，比起原來的情況多了 1 個箭頭供非環形組合計算。顛倒前 A 點的非環形組合數量為$C_2^3+C_2^3$=6 個，顛倒後 A 點的非環形組合數量為$C_2^4+C_2^4$=12 個，有更多的非環形組合，即代表著更多的非環形多邊形。而所有的 m 邊形是由環形 m 邊形和非環形 m 邊形所組成，只要非環形 m 邊形愈多，環形 m 邊形愈少，由此得知只要該點以順時針或逆時針配置會產生最多的環形 m 邊形。只要每一個點都以順時針或逆時針配置，總共的環形多邊形個數就會最多。

現將所有的邊以順時針或逆時針指向另一個頂點，我們可以確定這樣的配置射出箭頭數等於接收箭頭數，而且產生的非環形組合最少。現將每個點的射出箭頭和射入的箭頭以順時針或逆時針擺放，如圖(五)所示。



圖(五)

以圖(五)的九邊形為例子，由 A 點所發出的邊(深色粗箭頭)都在 A 點的右方，A 點收到的邊(淺色箭頭)都在 A 點的左方。我們令 A 點所發出的邊數量和 A 點所收到的邊數量相等，均為$\frac{9-1}{2}$=4 個；所以推廣到 n 多邊形之後，某一點所發出

的邊數量和接收的邊數量也均為頂點個數-1 之後除以 2，即 $\frac{n-1}{2}$ 個。

(一)設 P 點為 n 邊形頂點的任意一點，令由 P 點所發出的邊為集合 F(P)。在 P 點所發出的 $\frac{n-1}{2}$ 個邊中我們取兩個邊，當作四邊形相鄰的兩個邊，因為此四邊形在 P 點產生非環形組合，所以確定此四邊形為非環形四邊形。

1. 若此兩個邊中間沒有其他由 P 點發出的邊(如圖五中的 AB 邊和 AC 邊)，則兩邊所形成的圖形為三角形而非四邊形(如圖五中的 ΔABC)，不予以討論；
2. 若此兩個邊(圖五中的 AB 邊和 AD 邊)中間有 1 個由 P 點發出的邊，因為已經選擇的邊會確定四邊形的 3 個頂點(如圖五中的 A 點、B 點和 D 點)，所以要形成四邊形的話，最後一個頂點只有 1 個點可以選擇(如圖五中的 C 點) ，則可以形成 1 個非環形四邊形；
3. 若此兩個邊(如圖五中的 AB 邊和 AE 邊)中間有 2 個由 P 點發出的邊，同理，因為已經選擇的邊會確定四邊形的 3 個頂點(如圖五中的 A 點、B 點和 E 點)，所以要形成四邊形的話，最後一個頂點只有 2 個點可以選擇(如圖五中的 C 點和 D 點) ，則可以形成 2 個非環形四邊形；
4. 最後，若此兩個邊為 F(P)中最前與最後的兩個邊(如圖五中的 AB 邊和 AE 邊)，同理，因為已經選擇的邊會確定四邊形的 3 個頂點(如圖五中的 A 點、B 點和 E 點)，所以要形成四邊形的話，最後一個頂點只有 $\frac{n-1}{2}-2$ 個點可以選擇，則可以形成 $\frac{n-1}{2}-2$ 個非環形四邊形。

(二)每一個點都可以進行這樣的討論，所以計算 n 遍後即可算出此 n 邊形內非環形四邊形的個數。設 K 為此 n 邊形內非環形四邊形的個數，則

$$K= n\cdot\{(\frac{n-1}{2}-2)\cdot 1+(\frac{n-1}{2}-3)\cdot 2+(\frac{n-1}{2}-4)\cdot 3+\cdots+[\frac{n-1}{2}-(\frac{n-1}{2}-1)]\cdot(\frac{n-1}{2}-2)\}$$

設 S 為 K 為此 n 邊形內環形四邊形的個數，則

$$S=C_4^n-K$$

$$=C_4^n- n\cdot\{(\frac{n-1}{2}-2)\cdot 1+(\frac{n-1}{2}-3)\cdot 2+(\frac{n-1}{2}-4)\cdot 3+\cdots+[\frac{n-1}{2}-(\frac{n-1}{2}-1)]\cdot(\frac{n-1}{2}-2)\}$$

$$=C_4^n - \mathrm{n}\cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-2}[(\frac{n-1}{2})-(\mathrm{i}+1)]\cdot i$$

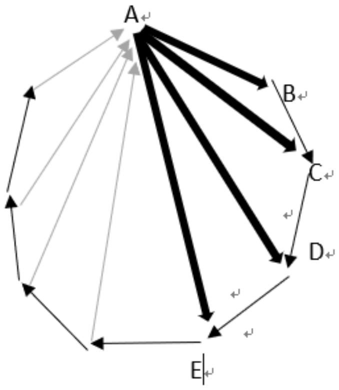
$$=C_4^n - \mathrm{n}\cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-2}[(\frac{n-1}{2}-1)\cdot \mathrm{i}-\mathrm{i}^2]$$

$$=C_4^n - \mathrm{n}\cdot [(\frac{n-1}{2}-1)\cdot \frac{(\frac{n-1}{2}-2)(\frac{n-1}{2}-1)}{2}-\frac{(\frac{n-1}{2}-2)(\frac{n-1}{2}-1)(n-4)}{6}]$$

$$=C_4^n - \mathrm{n}\cdot [\frac{(\mathrm{n}-3)^2(\mathrm{n}-5)}{16}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{24}]$$

$$=C_4^n - [\frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48}]$$ 。-----式(三)

將式(三)經過化簡後，我們得到$C_4^n - \mathrm{n}\cdot C_3^{\frac{n-1}{2}}$，我們分析它的幾何意義得到了以下的作法：



圖(六)

我們一樣對 A 點討論非環形四邊形的個數。要和 A 形成非環形四邊形的話必須要從 B、C、D、E 這 4 個點之中再選 3 個當成四邊形的頂點，而且不論選擇的狀況如何，均會在 A 點形成非環形組合，所以對 A 點而言，從由 A 點指出的頂點中再隨機選出 3 個頂點就是 F(A)中的非環形四邊形的個數，也就是$C_3^{\frac{n-1}{2}}$個。

每一個點都能進行以上的討論，所以所有的非環形四邊形的個數為 $\mathrm{n}\cdot C_3^{\frac{n-1}{2}}$個，最後用所有的四邊形個數扣除非環形四邊形的個數即為我們的結果：$C_4^n - \mathrm{n}\cdot C_3^{\frac{n-1}{2}}$。

(三)為了快速且精準地得到數據，我們撰寫了一套程式，以遞迴(Recursion)和深度優先搜索(Depth First Search/DFS)求出在 n 邊形中的環形 m 邊形數量。

計算方法如下：
先以二維陣列建好整張圖(g)，以 1~n 作為頂點的編號，若 g(a,b)=1 代表存在一個由 a 指向 b 的邊，若 g(a,b)=0 則是存在一個由 b 指向 a 的邊。
以下以 7 邊形為例 ：

b a	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0
3	0	0	0	1	1	1	0
4	0	0	0	0	1	1	1
5	1	0	0	0	0	1	1
6	1	1	0	0	0	0	1
7	1	1	1	0	0	0	0

接著以編號 1 的頂點至編號為 n-m+1 的頂點輪流作為環形 m 邊形的第一個頂點，假設選取的第一個頂點編號為 i，則這時候只需要對編號為 i+1 至 n-(m-1)+1 的頂點搜索，設第二個此時選取的頂點為 j，若(i, j)=1，則繼續以 j 為出發點，對編號 j+1 至 n-(m-2)+1 的頂點搜索。這時只要持續遞迴直到找到第 m 個頂點且 g(m,i)=1，就會得到其中一組環形 m 邊形的解。而窮舉完以編號 1 至編號為 n-m+1 的頂點輪流作為環形 m 邊形的第一個頂點，並遞迴下去，即可求出每一組可能，並得到 n 邊形裡的環形 m 邊形總數。
若以數學表示這個遞迴式：

$$\begin{cases} \mathrm{f(n,m)} = \sum_{i=1}^{n-m+1}\left\{\sum_{j=i+1}^{n-(m-1)+1} dfs(i,j,1)\right\} \\ \mathrm{dfs(i,j,d)} = \sum_{j=i+1}^{n-(m-d)+1} dfs(i,j,d+1) \\ \mathrm{dfs(i,j,m)} = \begin{cases} if((g(i,j)=1 \; and \; j = first\ node) \rightarrow \mathrm{dfs(i,j,m)} = 1 \\ else \rightarrow \mathrm{dfs(i,j,m)} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

其中，f(n,m)為 n 邊形中的環形 m 邊形數量，i 表示出發的頂點，j 表示指向的頂點，d 表示目前是第幾個頂點。
當我們輸入(11,4)時，輸出結果為 220。將 n=11 代入式(三)，得到

$$C_4^n - \left[\frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48}\right]$$

$$=C_4^{11} - \left[\frac{11(11-1)(11-3)(11-5)}{48}\right]$$

$$=330-110$$

$$=220$$

當我們輸入(13,4)時，輸出結果為 455。將 n=13 代入式(三)，得到

$$C_4^n - [\frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48}]$$

$$= C_4^{13} - [\frac{13(13-1)(13-3)(13-5)}{48}]$$

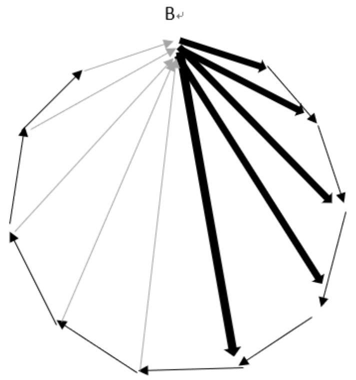
$$=715-260$$

$$=455$$

經由式(三)所算出來的答案與程式輸出的答案相同，證明式(三)是正確的。所以我們可以用式(三)來計算奇數 n 邊形內的環形四邊形個數。

六、

在討論完 n 邊形內環形四邊形的個數後，我們要討論奇數 n 邊形內環形 m 邊形的個數。與環形四邊形的討論方法一樣，我們將每個點的射出箭頭和射入的箭頭以順時針或逆時針擺放，如圖(七)所示。



圖(七)

以圖(七)的 B 點為例子，上圖為一個十一邊形，由 B 點所發出的邊(深色粗箭頭)都在 B 點的右方，B 點所收到的邊(淺色箭頭)都在 B 點的左方。我們發現 B 點所發出的邊數量和 B 點所收到的邊數量相等，均為 $\frac{11-1}{2}$ =5 個；所以推廣到 n 多邊形之後，某一點所發出的邊數量和接收的邊數量也均為頂點個數-1 之後除以 2，即 $\frac{n-1}{2}$ 個。

(一)設 Q 點為 n 邊形頂點的任意一點，令由 Q 點所發出的邊為集合 F(Q)。在 Q 點所發出的 $\frac{n-1}{2}$ 個邊中我們取兩個邊，當作 m 邊形相鄰的兩個邊，因為此四邊形在 Q 點產生非環形組合，所以確定此 m 邊形為非環形 m 邊形；

1. 若此兩個邊中間有少於 m-3 個由 Q 點發出的邊，則形成的圖形不為 m 邊形，因為已經選擇的邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點不夠剩餘 m 邊形的頂點配置，所以不予以討論；
2. 當此兩個邊中間有 m-3 個由 Q 點發出的邊，因為已經選擇的邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點剛好夠剩餘 m 邊形的

頂點分別填入，所以可以形成C_{m-3}^{m-3}個非環形 m 邊形；

3. 當此兩個邊中間有 m-2 個由 Q 點發出的邊，因為已經選擇的兩個邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點有 m-2 個，足夠填入剩餘 m 邊形的頂點；有 m-2 個點供 m-3 個點連接，所以可以形成C_{m-3}^{m-2}個非環形 m 邊形；
4. 當此兩個邊中間有於 m-1 個由 Q 點發出的邊，因為已經選擇的邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩邊中間所夾的 n 邊形頂點有 m-1 個，足夠填入剩餘 m 邊形的頂點；有 m-1 個點供 m-3 個點連接，所以可以形成C_{m-3}^{m-1}個非環形 m 邊形；
5. 最後，若此兩個邊為 F(Q)最外與最內的兩個邊，所以中間有$\frac{n-1}{2}$-2 個由 Q 點發出的邊，因為已經選擇的邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點有$\frac{n-1}{2}-2$個，足夠填入剩餘 m 邊形的頂點；有$\frac{n-1}{2}-2$個點供 m-3 個點連接，所以可以形成$C_{m-3}^{\frac{n-1}{2}-2}$個非環形 m 邊形。

每一個點都可以進行這樣的討論，所以將上述式子計算 n 遍後即可算出此 n 邊形內非環形 m 邊形的個數。

設 K 為此 n 邊形內非環形 m 邊形的個數，則

$$K=n\cdot\{[\frac{n-1}{2}-(m-2)]\cdot C_{m-3}^{m-3}+[\frac{n-1}{2}-(m-1)]\cdot C_{m-3}^{m-2}+[\frac{n-1}{2}-(m)]\cdot C_{m-3}^{m-1}+\ldots+[\frac{n-1}{2}-(\frac{n-1}{2}-1)]\cdot C_{m-3}^{\frac{n-1}{2}-2}\}$$

設 S 為此 n 邊形內環形 m 邊形的個數，則

$$S=C_m^n-K$$

$$=C_m^n-n\cdot\{[\frac{n-1}{2}-(m-2)]\cdot C_{m-3}^{m-3}+[\frac{n-1}{2}-(m-1)]\cdot C_{m-3}^{m-2}+[\frac{n-1}{2}-(m)]\cdot C_{m-3}^{m-1}+\ldots+[\frac{n-1}{2}-(\frac{n-1}{2}-1)]\cdot C_{m-3}^{\frac{n-1}{2}-2}\}$$

$$=C_m^n-n\{[\frac{n-1}{2}-m+2]\cdot C_{m-3}^{m-3}+[\frac{n-1}{2}-m+1]\cdot C_{m-3}^{m-2}+[\frac{n-1}{2}-m]\cdot C_{m-3}^{m-1}+\ldots+[1]\cdot C_{m-3}^{\frac{n-1}{2}-2}\}$$

$$=C_m^n - \text{n}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-m+2} i\cdot C_{m-3}^{\frac{n-1}{2}-1-i} \text{ -----式(四)}$$

兩個邊中間的n邊形頂點個數必須至少要多於m-3個才能形成m邊形，所以式(四)成立條件為$\frac{n-1}{2}-2 \geq$ m- 3。

因此，當我們在計算奇數 n 邊形中環形 m 邊形的個數時可以分成以下 2 種情況分析 ：

1. 當$\frac{n-1}{2} \geq$m-1 時，環形 m 邊形的個數為$C_m^n - \text{n}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-m+2} i\cdot C_{m-3}^{\frac{n-1}{2}-1-i}$ ；
2. 當$\frac{n-1}{2}$<m-1 時，因為無法產生非環形的 m 邊形，所以環形 m 邊形的個數為C_m^n 。

(二)當我們輸入(11,5)時，輸出結果為 407。將 n=11、m=5 代入式(四)，得到

$$C_5^{11} - 11\cdot \sum_{i=1}^{\frac{11-1}{2}-5+2} i\cdot C_{5-3}^{\frac{11-1}{2}-1-i}$$

$$=C_5^{11} - 11\cdot \sum_{i=1}^{2} i\cdot C_2^{4-i}$$

$$=462-11(1\cdot C_2^3+2\cdot C_2^2)$$

$$=407$$

當我們輸入(13,6)時，輸出結果為 1638。將 n=13、m=6 代入式(四)，得到

$$C_6^{13} - 13\cdot \sum_{i=1}^{\frac{13-1}{2}-6+2} i\cdot C_{6-3}^{\frac{13-1}{2}-1-i}$$

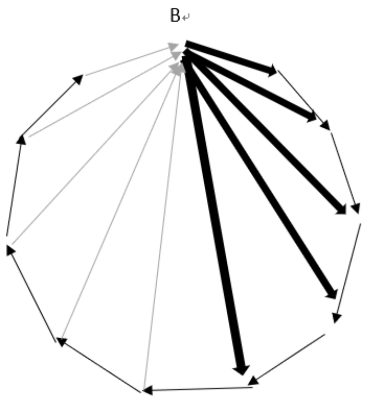
$$=C_6^{13} - 13\cdot \sum_{i=1}^{2} i\cdot C_3^{5-i}$$

$$=1716-13(1\cdot C_3^4+2\cdot C_3^3)$$

$$=1638$$

經由式(四)所算出來的答案與程式輸出的答案相同，證明式(四)是正確的。所以我們可以用式(四)來計算奇數 n 邊形內的環形 m 邊形的個數。

(三)將式(四)經過化簡後，我們得到$C_m^n - \text{n}\cdot C_{m-1}^{\frac{n-1}{2}}$，我們分析它的幾何意義得到了以下的作法 ：



我們一樣對 B 點討論非環形 m 邊形的個數。要和 A 形成非環形 m 邊形的話必須要從這 $\frac{n-1}{2}$ 個點之中再選 $m-1$ 個點當成 m 邊形的頂點，而且不論選擇的狀況如何，均會在 B 點形成非環形組合，所以對 B 點而言，從由 B 點指出的頂點中再隨機選出 $m-1$ 個頂點就是 F(B)中的非環形四邊形的個數，也就是 $C_{m-1}^{\frac{n-1}{2}}$ 個。

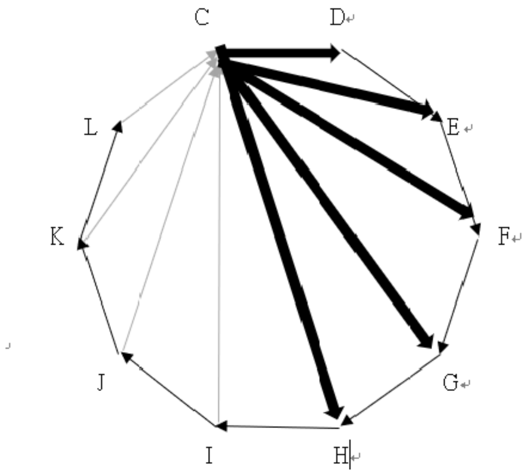
每一個點都能進行以上的討論，所以所有的非環形 m 邊形的個數為 n・$C_{m-1}^{\frac{n-1}{2}}$ 個，最後用所有的 m 邊形個數扣除非環形 m 邊形的個數即為我們的結果：$C_m^n -$ n・$C_{m-1}^{\frac{n-1}{2}}$，而使用的限制為 $\frac{n-1}{2} \geq$ m-1。

七.

在討論完奇數 n 邊形內環形 m 邊形的個數後，我們要討論偶數 n 邊形內環形四邊形的個數。根據計算環形三角形的結論，只要非環形組合愈少，則環形多邊形的個數愈多。

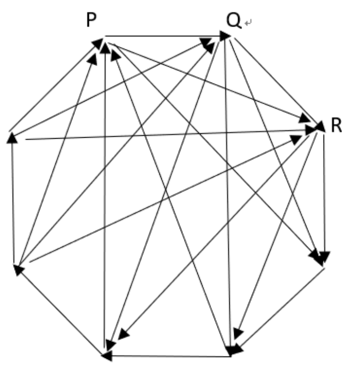
設 C 點發出 k 個邊分別指向其餘 n-1 個頂點，收到 n-1-k 個指向 C 的邊，因為 k 及 n-1-k 均為正數，所以用算幾不等式 $\frac{(k)+(n-1-k)}{2} \geq \sqrt{(k)(n-1-k)}$，所求的最大值出現在 k=n-1-k，經移項可求得 k=$\frac{(n-1)}{2}$時；但是 n 為偶數，k=$\frac{(n-1)}{2}$ 不為整數，所以最大值出現在射入箭頭數和射出箭頭數為 $\frac{n}{2}$ 和 $\frac{n}{2}-1$ 的時候。

同奇數的討論方式，我們可以確定順時針或逆時針的配置會使射出箭頭數和接收箭頭數符合最大值的結論，而且產生的非環形組合最少。現將所有的邊以順時針或逆時針指向另一個頂點，如圖(八)所示。



圖(八)

以圖(八)的 C 點為例子，圖(八)為一個十邊形，由 C 點所發出的邊(深色粗箭頭)都在 C 點的右方，C 點所收到的邊(淺色箭頭)都在 C 點的左方。由 C 點所發出的邊數量為 $\frac{10}{2}$=5 個，C 點所收到的邊數量為 $\frac{10}{2}-1$=4 個；所以推廣到 n 多邊形之後，某一點所發出的邊數量為 $\frac{n}{2}$ 個，接收的邊數量為 $\frac{n}{2}-1$ 個。以歸納法畫出圖形，我們發現若一頂點發出 $\frac{n}{2}$ 個邊，接收的邊數量為 $\frac{n}{2}-1$ 個，則與該點相鄰的 2 個頂點會發出 $\frac{n}{2}-1$ 個邊，接收的邊數量為 $\frac{n}{2}$ 個。



圖(九)

以圖(九)中的 Q 點為例，Q 點發出 $\frac{8}{2}$=4 個邊，收到 $\frac{8}{2}-1$=3 個邊，則與 Q 相鄰的兩頂點 P 和 R 會發出 $\frac{8}{2}-1$=3 個邊，收到 $\frac{8}{2}$=4 個邊。

(一)設 R 點為 n 邊形頂點的任意一點，令由 R 點所發出的邊為集合 F(R)，R 點所接收的邊為集合 f(R)。在 R 點所發出的 $\frac{n}{2}$ 個邊中我們取兩個邊，當作四邊形相鄰的兩個邊，因為此四邊形在 R 點產生非環形組合，所以確定此四邊形為非環形四

邊形；在 R 點所接收的 $\frac{n}{2}-1$ 個邊中我們取兩個邊，當作四邊形相鄰的兩個邊，因為此四邊形在 R 點也產生非環形組合，所以確定此四邊形為非環形四邊形；

1. 若在 F(R)中選取兩個邊(如圖八中的 CD 邊和 CE 邊)，且此兩個邊中間沒有其他由 R 點發出的邊，則兩邊所形成的圖形為三角形而非四邊形(如圖八中的ΔCDE)，不予以討論；
若在 f(R)中選取兩個邊(如圖八中的 LC 邊和 KC 邊)，且此兩個邊中間沒有其他 R 點所接收的邊，則兩邊所形成的圖形為三角形而非四邊形(如圖八中的ΔKLC)，也不予以討論；
2. 若在 F(R)中選取兩個邊(如圖八中的 CD 邊和 CF 邊)，且此兩個邊中間有 1 條由 R 點發出的邊，因為已經選擇的邊會確定四邊形的 3 個頂點(如圖八中的 C 點、D 點和 F 點)，所以要形成四邊形的話，最後一個頂點只有 1 個點可以選擇(如圖八中的 E 點) ，則可以形成 1 個非環形四邊形；
若在 f(R)中選取兩個邊(如圖八中的 LC 邊和 JC 邊)，且此兩個邊中間有 1 條 R 點所接收的邊，因為已經選擇的邊會確定四邊形的 3 個頂點(如圖八中的 C 點、L 點和 J 點)，所以要形成四邊形的話，最後一個頂點只有 1 個點可以選擇(如圖八中的 K 點) ，則可以形成 1 個非環形四邊形；在這樣的選取下形成的非環形四邊形個數為 1+1=2 個。
3. 若在 F(R)中選取兩個邊(如圖八中的 CD 邊和 CG 邊)，且此兩個邊中間有 2 條由 R 點發出的邊，因為已經選擇的邊會確定四邊形的 3 個頂點(如圖八中的 C 點、D 點和 G 點)，所以要形成四邊形的話，最後一個頂點只有 2 個點可以選擇(如圖八中的 E 和 F 點) ，則可以形成 2 個非環形四邊形；
若在 f(R)中選取兩個邊(如圖八中的 LC 邊和 IC 邊)，且此兩個邊中間有 2 條 R 點所接收的邊，因為已經選擇的邊會確定四邊形的 3 個頂點(如圖八中的 C 點、L 點和 I 點)，所以要形成四邊形的話，最後一個頂點只有 1 個點可以選擇(如圖八中的 K 和 J 點) ，則可以形成 2 個非環形四邊形；
在這樣的選取下形成的非環形四邊形個數為 2+2=4 個。
4. 最後，若此兩個邊為 F(P)中最前與最後的兩個邊(如圖八中的 CD 邊和 CH 邊)，同理，因為已經選擇的邊會確定四邊形的 3 個頂點(如圖八中的 C 點、D 點和 H 點)，所以要形成四邊形的話，最後一個頂點只有
$\frac{n}{2}-2$ 個點可以選擇，則可以形成 $\frac{n}{2}-2$ 個非環形四邊形。
若此兩個邊為 f(P)中最前與最後的兩個邊(如圖八中的 CL 邊和 CI 邊)，同理，因為已經選擇的邊會確定四邊形的 3 個頂點(如圖八中的 C 點、L 點和 I 點)，所以要形成四邊形的話，最後一個頂點只有 $(\frac{n}{2}-1)-2$ 個點可以選擇，則可以形成 $(\frac{n}{2}-1)-2$ 個非環形四邊形。在這樣的選取下形

成的非環形四邊形個數為 $\frac{n}{2}-2+(\frac{n}{2}-1)-2$ 個。

(二)我們針對每一個點的 F(P)和 f(P)討論，且每一個點都可以進行這樣的討論，但每個非環形四邊形都會因為針對 F(P)和 f(P)討論而多算了一次，所以計算 n 遍再除以 2 之後即可算出此 n 邊形內非環形四邊形的個數。設 K 為此 n 邊形內非環形四邊形的個數，則

$$K=\frac{n}{2}\cdot\{[\frac{n}{2}-(4-2)]C_1^1+[\frac{n}{2}-(4-1)]C_1^2+\ldots+[\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}-1)]C_1^{\frac{n}{2}-1}$$

$$+[\left(\frac{n}{2}-1\right)-(4-2)]C_1^1+[(\frac{n}{2}-1)-(4-1)]C_1^2+\ldots+[(\frac{n}{2}-1)-(\frac{n}{2}-2)]C_1^{\frac{n}{2}-3}\}$$

$$=\frac{n}{2}\cdot\{[\frac{n}{2}-2]\cdot C_1^1+[\frac{n}{2}-3]\cdot C_1^2+\ldots+[1]\cdot C_1^{\frac{n}{2}-2}+[(\frac{n}{2}-1)-2]\cdot C_1^1+[(\frac{n}{2}-1)-3]\cdot$$

$$C_1^2+\ldots+[1]\cdot C_1^{\frac{n}{2}-3}\}$$

$$=\frac{n}{2}\cdot\{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2}[\frac{n}{2}-(i+1)]C_1^i+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-3}\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)-(i+1)\right]C_1^i\}$$

設 S 為此 n 邊形內環形 m 邊形的個數，則

$$S=C_4^n-K$$

$$=C_4^n-\frac{n}{2}\cdot\{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2}[\frac{n}{2}-(i+1)]C_1^i+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-3}\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)-(i+1)\right]C_1^i\}\text{-----式(五)}$$

(三)當我們輸入(10,4)時，輸出結果為 140。將 n=10 代入式(五)，得到

$$C_4^{10}-5\cdot\{\sum_{i=1}^{\frac{10}{2}-2}[\frac{10}{2}-(i+1)]C_1^i+\sum_{i=1}^{\frac{10}{2}-3}[(\frac{10}{2}-1)-(i+1)]C_1^i\}$$

$$=C_4^{10}-5\cdot\{\sum_{i=1}^{3}[4-i]C_1^i+\sum_{i=1}^{2}[3-i]C_1^i\}$$

$$=210-5\cdot(3\cdot C_1^1+2\cdot C_1^2+1\cdot C_1^3+2\cdot C_1^1+1\cdot C_1^2)$$

$$=140$$

當我們輸入(12,4)時，輸出結果為 315。將 n=12 代入式(五)，得到

$$C_4^{12}-6\cdot\{\sum_{i=1}^{\frac{12}{2}-2}[\frac{12}{2}-(i+1)]C_1^i+\sum_{i=1}^{\frac{12}{2}-3}[(\frac{12}{2}-1)-(i+1)]C_1^i\}$$

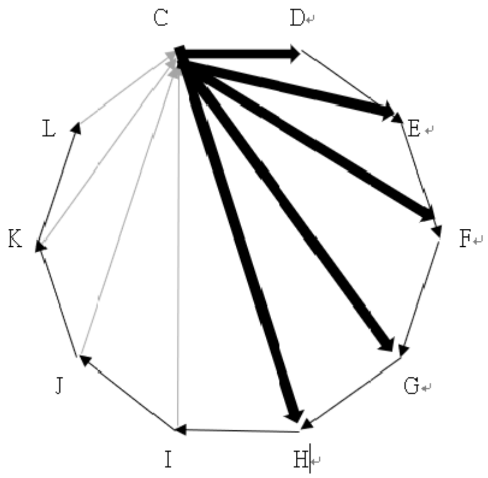
$$=C_4^{12}-6\cdot\{\sum_{i=1}^{4}[5-i]C_1^i+\sum_{i=1}^{3}[4-i]C_1^i\}$$

$$=495-6\cdot(4\cdot C_1^1+3\cdot C_1^2+2\cdot C_1^3+1\cdot C_1^4+3\cdot C_1^1+2\cdot C_1^2+1\cdot C_1^1)$$

$$=315$$

經由式(五)所算出來的答案與程式輸出的答案相同，證明式(五)是正確的。所以我們可以用式(五)來計算偶數 n 邊形內的環形四邊形的個數。

(四)將式(五)經過化簡後，我們得到$C_4^n - \frac{1}{2}$(n · $C_3^{\frac{n}{2}}$ +n · $C_3^{\frac{n}{2}-1}$)，我們分析它的幾何意義得到了以下的作法：



我們一樣對 C 點討論非環形四邊形的個數。要和 C 形成非環形四邊形的話必須要從 D、E、F、G、H 這 5 個點之中再選 3 個當成四邊形的頂點，而且不論選擇的狀況如何，均會在 C 點形成非環形組合，所以對 C 點而言，從由 C 點指出的頂點中再隨機選出 3 個頂點就是 F(C)中的非環形四邊形的個數，也就是$C_3^{\frac{n}{2}}$個。

要和 C 形成非環形四邊形的話還有另一種選擇，就是從 I、J、K、L 這 4 個點之中再選 3 個當成四邊形的頂點，而且不論選擇的狀況如何，均會在 C 點形成非環形組合，所以對 C 點而言，從指向 C 點的的頂點中再隨機選出 3 個頂點就是 f(C)中的非環形四邊形的個數，也就是$C_3^{\frac{n}{2}-1}$個。

每一個點都能進行以上的討論，所以針對 F(C)和 f(C)所算出來的非環形四邊形的個數為 n · $C_3^{\frac{n}{2}}$+n · $C_3^{\frac{n}{2}-1}$個，但是每一個非環形四邊形都被重複算了一次，所以再除以 2 就是所有的非環形四邊形的個數。最後用所有的四邊形個數扣除非環形四邊形的個數即為我們的結果：$C_m^n - \frac{1}{2}$(n · $C_3^{\frac{n}{2}}$ +n · $C_3^{\frac{n}{2}-1}$)。

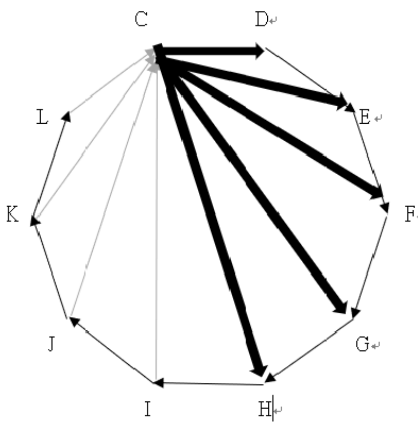
八.

在討論完偶數 n 邊形內環形四邊形的個數後，我們要討論偶數 n 邊形內環形 m 邊形的個數。根據計算環形三角形的結論，只要非環形組合愈少，則環形多邊形的個數愈多。

設 C 點發出 k 個邊分別指向其餘 n-1 個頂點，收到 n-1-k 個指向 C 的邊，因

為 k 及 n-1-k 均為正數，所以用算幾不等式 $\frac{(k)+(n-1-k)}{2} \geq \sqrt{(k)(n-1-k)}$，所求的最大值出現在 k=n-1-k，經移項可求得 k=$\frac{(n-1)}{2}$時；但是 n 為偶數，k=$\frac{(n-1)}{2}$不為整數，所以最大值出現在射入箭頭數和射出箭頭數為$\frac{n}{2}$和$\frac{n}{2}-1$的時候。

同奇數的討論方式，我們可以確定順時針或逆時針的配置會使射出箭頭數和接收箭頭數符合最大值的結論，而且產生的非環形組合最少。現將所有的邊以順時針或逆時針指向另一個頂點，如圖(十)所示。



圖(十)

以圖(十)的 C 點為例子，圖(十)為一個十邊形，由 C 點所發出的邊(深色粗箭頭)都在 C 點的右方，C 點所收到的邊(淺色箭頭)都在 C 點的左方。由 C 點所發出的邊數量為$\frac{10}{2}$=5 個，C 點所收到的邊數量為$\frac{10}{2}-1$=4 個；所以推廣到 n 多邊形之後，某一點所發出的邊數量為$\frac{n}{2}$個，接收的邊數量為$\frac{n}{2}-1$個。以歸納法畫出圖形，我們發現若一頂點發出$\frac{n}{2}$個邊，接收的邊數量為$\frac{n}{2}-1$個，則與該點相鄰的 2 個頂點會發出$\frac{n}{2}-1$個邊，接收的邊數量為$\frac{n}{2}$個。

(一)設 S 點為 n 邊形頂點的任意一點，令由 S 點所發出的邊為集合 F(S)，S 點所接收的邊為集合 f(S)。在 S 點所發出的$\frac{n}{2}$個邊中我們取兩個邊，當作 m 邊形相鄰的兩個邊，因為此 m 邊形在 S 點產生非環形組合，所以確定此 m 邊形為非環形 m 邊形；在 S 點所接收的$\frac{n}{2}-1$個邊中我們取兩個邊，當作 m 邊形相鄰的兩個邊，因為此 m 邊形在 S 點也產生非環形組合，所以確定此 m 邊形為非環形 m 邊形；

1. 若在 F(S)中選取兩個邊，若此兩個邊中間有少於 m-3 個由 S 點發出的邊，

則形成的圖形不為 m 邊形，因為已經選擇的邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點不夠剩餘 m 邊形的頂點配置，所以不予以討論；

若在 f(S)中選取兩個邊，若此兩個邊中間有少於 m-3 個由 S 點發出的邊，則形成的圖形不為 m 邊形，因為已經選擇的邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點不夠剩餘 m 邊形的頂點配置，也不予以討論。

2. 若在 F(S)中選取兩個邊，當此兩個邊中間有 m-3 個由 S 點發出的邊，因為已經選擇的邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點剛好夠剩餘 m 邊形的頂點分別填入，所以可以形成 C_{m-3}^{m-3} 個非環形 m 邊形；

若在 f(S)中選取兩個邊，且當此兩個邊中間有 m-3 個由 Q 點發出的邊，因為已經選擇的邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點剛好夠剩餘 m 邊形的頂點分別填入，所以可以形成 C_{m-3}^{m-3} 個非環形 m 邊形；

3. 若在 F(S)中選取兩個邊，當此兩個邊中間有 m-2 個由 S 點發出的邊，因為已經選擇的兩個邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點有 m-2 個，足夠填入剩餘 m 邊形的頂點；有 m-2 個點供 m-3 個點連接，所以可以形成 C_{m-3}^{m-2} 個非環形 m 邊形；

若在 f(S)中選取兩個邊，當此兩個邊中間有 m-2 個由 S 點發出的邊，因為已經選擇的兩個邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點有 m-2 個，足夠填入剩餘 m 邊形的頂點；有 m-2 個點供 m-3 個點連接，所以可以形成 C_{m-3}^{m-2} 個非環形 m 邊形；

4. 最後，若此兩個邊為 F(S)中最前與最後的兩個邊，同理，所以中間有 $\frac{n}{2}-2$ 個由 S 點發出的邊，因為已經選擇的邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點有 $\frac{n}{2}-2$ 個，足夠填入剩餘 m 邊形的頂點；有 $\frac{n}{2}-2$ 個點供 m-3 個點連接，所以可以形成 $C_{m-3}^{\frac{n}{2}-2}$ 個非環形 m 邊形。

若此兩個邊為 f(S)中最前與最後的兩個邊，同理，所以中間有 $(\frac{n}{2}-1)$ -2 個由 S 點發出的邊，因為已經選擇的邊會確定 m 邊形的 3 個頂點，而兩個邊中間所夾的 n 邊形頂點有 $(\frac{n}{2}-1)-2$ 個，足夠填入剩餘 m 邊形的頂點；有 $(\frac{n}{2}-1)-2$ 個點供 m-3 個點連接，所以可以形成 $C_{m-3}^{(\frac{n}{2}-1)-2}$ 個非環形 m 邊形。

(二)我們針對每一個點的 F(S)和 f(S)討論，且每一個點都可以進行這樣的討論，但每個非環形 m 邊形都會因為針對 F(S)和 f(S)討論而多算了一次，所以計算 n 遍再除以 2 之後即可算出此 n 邊形內非環形 m 邊形的個數。

對 F(S)而言，n 邊形內非環形 m 邊形的個數為 K_1 ，則

$$K_1 = n\{[\frac{n}{2}-(m-2)] \cdot C_{m-3}^{m-3} + [\frac{n}{2}-(m-1)] \cdot C_{m-3}^{m-2}$$

$$+[\frac{n}{2}-(m)] \cdot C_{m-3}^{m-1} + \ldots + [\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}-1)] \cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-2}\}$$

對 f(S)而言，n 邊形內非環形 m 邊形的個數為 K_2 ，則

$$K_2 = n\{[(\frac{n}{2}-1)-(m-2)] \cdot C_{m-3}^{m-3} + [(\frac{n}{2}-1)-(m-1)] \cdot C_{m-3}^{m-2}$$

$$+[(\frac{n}{2}-1)-(m)] \cdot C_{m-3}^{m-1} + \ldots + [(\frac{n}{2}-1)-(\frac{n}{2}-1-1)] \cdot C_{m-3}^{(\frac{n}{2}-1)-2}\}$$

設 K 為此 n 邊形內非環形 m 邊形的個數，則

$$K = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

$$= \frac{n}{2}\{[\frac{n}{2}-(m-2)] \cdot C_{m-3}^{m-3} + [\frac{n}{2}-(m-1)] \cdot C_{m-3}^{m-2}$$

$$+[\frac{n}{2}-(m)] \cdot C_{m-3}^{m-1} + \ldots + [\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}-1)] \cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-2}\} +$$

$$\frac{n}{2}\{[(\frac{n}{2}-1)-(m-2)] \cdot C_{m-3}^{m-3} + [(\frac{n}{2}-1)-(m-1)] \cdot C_{m-3}^{m-2}$$

$$+[(\frac{n}{2}-1)-(m)] \cdot C_{m-3}^{m-1} + \ldots + [(\frac{n}{2}-1)-(\frac{n}{2}-1-1)] \cdot C_{m-3}^{(\frac{n}{2}-1)-2}\}$$

設 S 為此 n 邊形內環形 m 邊形的個數，則

$$S = C_m^n - K$$

$$= C_m^n - \frac{n}{2}\{[\frac{n}{2}-(m-2)] \cdot C_{m-3}^{m-3} + [\frac{n}{2}-(m-1)] \cdot C_{m-3}^{m-2}$$

$$+[\frac{n}{2}-(m)] \cdot C_{m-3}^{m-1} + \ldots + [\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}-1)] \cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-2}\}$$

$$-\frac{n}{2}\{[(\frac{n}{2}-1)-(m-2)] \cdot C_{m-3}^{m-3} + [(\frac{n}{2}-1)-(m-1)] \cdot C_{m-3}^{m-2}$$

$$+[(\frac{n}{2}-1)-(m)] \cdot C_{m-3}^{m-1} + \ldots + [(\frac{n}{2}-1)-(\frac{n}{2}-1-1)] \cdot C_{m-3}^{(\frac{n}{2}-1)-2}\}$$

$$=C_m^n-\frac{n}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-m+2} i\cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-1-i}-\frac{n}{2}\cdot\sum_{i=1}^{(\frac{n}{2}-1)-m+2} i\cdot C_{m-3}^{(\frac{n}{2}-1)-1-i}$$

$$=C_m^n-\frac{n}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-m+2} i\cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-1-i}-\frac{n}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}+1-m} i\cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-2-i} \text{ -----式(六)}$$

(三)對於 F(S)和 f(S)的討論而言，選取的兩個邊中間的 n 邊形頂點個數必須至少要多於 m-3 個才能形成 m 邊形，所以式(六)成立條件為 $\frac{n}{2}-2\geq m-3$ 且 $(\frac{n}{2}-1)-2\geq m-3$，因為只要 $(\frac{n}{2}-1)-2\geq m-3$ 成立，則 $\frac{n}{2}-2\geq m-3$ 必然成立，所以式(六)的成立條件可簡化為 $(\frac{n}{2}-1)-2\geq m-3$。

若 $\frac{n}{2}-2\geq m-3$ 成立，但是 $(\frac{n}{2}-1)-2\geq m-3$ 不成立的話，則每一點針對 f(S)和 F(S)所討論出的非環形多邊形，其中有一組都不會是非環形 m 邊形。若我們針對每一點選擇了 F(S)進行計算，則 f(S)不討論，所以非環形 m 邊形的總數要除以 2。所以非環形 m 邊形的總數 K=$\frac{1}{2}K_1$+0=$\frac{1}{2}K_1$。設 S 為此 n 邊形內環形 m 邊形的個數，則

$$S=C_m^n-\frac{1}{2}K_1$$

$$=C_m^n-\frac{n}{2}\cdot\{[\frac{n}{2}-(m-2)]\cdot C_{m-3}^{m-3}+[\frac{n}{2}-(m-1)]\cdot C_{m-3}^{m-2}$$

$$+[\frac{n}{2}-(m)]\cdot C_{m-3}^{m-1}+\ldots+[\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}-1)]\cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-2}\}$$

$$=C_m^n-\frac{n}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-m+2} i\cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-1-i} \text{ -----式(七)}$$

若 $\frac{n}{2}-2\geq m-3$ 不成立，則針對 F(S)和 f(S)所討論出的非環形多邊形都不是非環形 m 邊形，所以非環形 m 邊形的總數 K=0+0=0。設 S 為此 n 邊形內環形 m 邊形的個數，則

$$S=C_m^n-K$$

$$=C_m^n \text{ -----式(八)}$$

因此，當我們在計算偶數 n 邊形中環形 m 邊形的個數時可以分成以下 3 種情況

分析：

1.當 $\frac{n}{2}-2\geq$ m−3 成立且 $(\frac{n}{2}-1)-2\geq$ m−3 成立時，偶數 n 邊形中環形 m 邊形的個數為 $C_m^n-\frac{n}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-m+2} i\cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-1-i}-\frac{n}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-m+1} i\cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-2-i}$。

2.當 $\frac{n}{2}-2\geq$ m−3 成立但 $(\frac{n}{2}-1)-2\geq$ m−3 不成立時，偶數 n 邊形中環形 m 邊形的個數為 $C_m^n-\frac{n}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-m+2} i\cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-1-i}$。

3.當 $\frac{n}{2}-2\geq$ m−3 不成立時，偶數 n 邊形中環形 m 邊形的個數 C_m^n。

(四)當我們輸入(12,6)時，輸出結果為 882。將 n=12、m=6 代入式(六)， 得到

$$C_6^{12}-\frac{12}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{12}{2}-6+2} i\cdot C_{6-3}^{\frac{12}{2}-1-i}-\frac{12}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{12}{2}-6+1} i\cdot C_{6-3}^{\frac{12}{2}-2-i}$$

$$=924-6\cdot\sum_{i=1}^{2} i\cdot C_3^{5-i}-6\cdot\sum_{i=1}^{1} i\cdot C_3^{4-i}$$

$$=924-6\cdot(1\cdot C_3^4+2\cdot C_3^3)-6\cdot(1\cdot C_3^3)$$

$$=924-6\cdot(4+2+1)$$

$$=882$$

當我們輸入(14,6)時，輸出結果為 2814。將 n=14、m=6 代入式(六)， 得到

$$C_6^{14}-\frac{14}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{14}{2}-6+2} i\cdot C_{6-3}^{\frac{14}{2}-1-i}-\frac{14}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{14}{2}-6+1} i\cdot C_{6-3}^{\frac{14}{2}-2-i}$$

$$=C_6^{14}-7\cdot\sum_{i=1}^{3} i\cdot C_3^{6-i}-7\cdot\sum_{i=1}^{2} i\cdot C_3^{5-i}$$

$$=3003-7\cdot(1\cdot C_3^5+2\cdot C_3^4+3\cdot C_3^3)-7\cdot(1\cdot C_3^4+2\cdot C_3^3)$$

$$=3003-7\cdot(10+8+3+4+2)$$

$$=2814$$

經由式(六)所算出來的答案與程式輸出的答案相同，證明式(六)是正確的。所以我們可以用式(六)來計算偶數 n 邊形內的環形 m 邊形的個數。其中 $\frac{n}{2}-2\geq$ m−3 成立且 $(\frac{n}{2}-1)-2\geq$ m−3 成立。

當我們輸入(10,6)時，輸出結果為 205。將 n=10、m=6 代入式(七)， 得到

$$C_6^{10}-\frac{10}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{10}{2}-6+2} i\cdot C_{6-3}^{\frac{10}{2}-1-i}$$

$$=C_6^{10}-5\cdot\sum_{i=1}^{\frac{10}{2}-6+2} i\cdot C_{6-3}^{\frac{10}{2}-1-i}$$

$=210-5\cdot 1$

$=205$

當我們輸入(12,7)時，輸出結果為 786。將 n=12、m=7 代入式(七)， 得到

$$C_7^{12}-\frac{12}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{12}{2}-7+2} i\cdot C_{7-3}^{\frac{12}{2}-1-i}$$

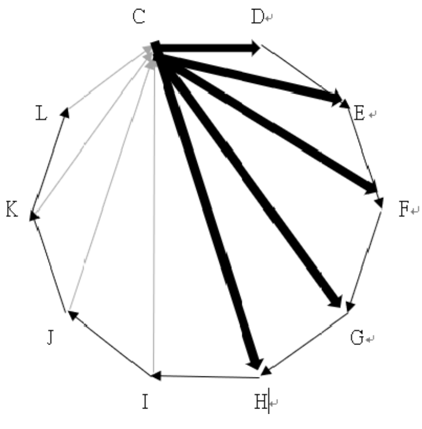
$$=C_7^{12}-6\cdot\sum_{i=1}^{1} i\cdot C_4^{5-i}$$

$=792-6\cdot 1$

$=786$

經由式(七)所算出來的答案與程式輸出的答案相同，證明式(七)是正確的。所以我們可以用式(七)來計算偶數 n 邊形內的環形 m 邊形的個數。其中 $\frac{n}{2}-2\geq$ m -3 成立但 $(\frac{n}{2}-1)-2\geq$ m-3 不成立。

(五)將式(六)經過化簡後，我們得到 $C_m^n-\frac{1}{2}(\mathrm{n}\cdot C_{m-1}^{\frac{n}{2}}+\mathrm{n}\cdot C_{m-1}^{\frac{n}{2}-1})$，我們分析它的幾何意義得到了以下的作法：



我們一樣對 C 點討論非環形 m 邊形的個數。要和 C 形成非環形 m 邊形的話必須要從 D、E、F、G、H 這 5 個點之中再選 m-1 個當成 m 邊形的頂點，而且不論選擇的狀況如何，均會在 C 點形成非環形組合，所以對 C 點而言，從由 C 點指出的頂點中再隨機選出 m-1 個頂點就是 F(C)中的非環形 m 邊形的個數，也就

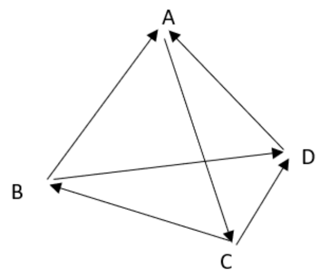
是$C_{m-1}^{\frac{n}{2}}$個。

要和 C 形成非環形 m 邊形的話還有另一種選擇，就是從 I、J、K、L 這 4 個點之中再選 m-1 個當成 m 邊形的頂點，而且不論選擇的狀況如何，均會在 C 點形成非環形組合，所以對 C 點而言，從指向 C 點的的頂點中再隨機選出 m-1 個頂點就是 f(C)中的非環形 m 邊形的個數，也就是$C_{m-1}^{\frac{n}{2}-1}$個。

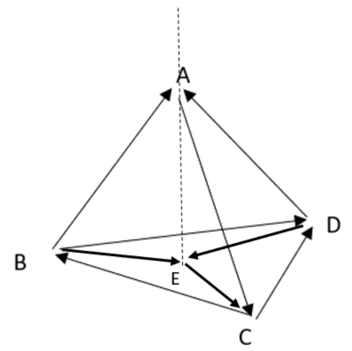
每一個點都能進行以上的討論，所以針對 F(C)和 f(C)所算出來的非環形 m 邊形的個數為 n · $C_{m-1}^{\frac{n}{2}}$+n · $C_{m-1}^{\frac{n}{2}-1}$個，但是每一個非環形 m 邊形都被重複算了一次，所以再除以 2 就是所有的非環形 m 邊形的個數。最後用所有的 m 邊形個數扣除非環形 m 邊形的個數即為我們的結果 ： $C_m^n - \frac{1}{2}$(n · $C_{m-1}^{\frac{n}{2}}$ +n · $C_{m-1}^{\frac{n}{2}-1}$)，而使用的限制為$\frac{n}{2}-1 \geq$m-1。

九.

由於我們討論完了平面的環形多邊形的最大數目，於是我們希望繼續延伸到立體。首先，我們先決定在立體時環形多邊形的定義，當可以從出發點沿著邊回到出發點，形成一個迴路，我們便稱之為立體中的一個環形多邊形，而經過的邊數稱為這個此環形多邊形的大小。我們也推論其數量應該跟非環形組合有關，先舉四面體為例。

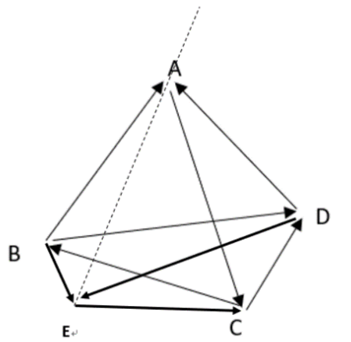


圖(十一)



圖(十二)

現在有一四面體 A-BCD，其中兩兩以箭頭連接，如圖(十一)所示。
今將 A 點投影在 BCD 所在的平面上得到 E 點，其中 E 點在∆BCD 中，如圖(十二)所示。其中投影後的箭頭方向並沒有改變。四面體 A-BCD 投影後變成平面上的四邊形 EBCD，其箭頭的配置並沒有改變，非環形組合的個數也沒有改變，討論的方法和平面時的相同，所以可以得知四面體中環形多邊形的個數和四邊形中環形多邊形的個數一樣。



圖(十三)

今將 A 點投影在 BCD 所在的平面上得到 E 點，其中 E 點在 ΔBCD 外，如圖(十三)所示。其中投影後的箭頭方向並沒有改變。四面體 A-BCD 投影後變成平面上的四邊形 EBCD，其箭頭的配置並沒有改變，非環形組合的個數也沒有改變，討論的方法和平面時的相同，所以可以得知四面體中環形多邊形的個數和四邊形中環形多邊形的個數一樣。

同理，在空間中的立體圖形只要經過投影後，其環形多邊形的個數並沒有改變。

肆、　結論與討論

一.

當我們要算出 n 邊形內的環形三角形個數

(一).如果 n 為奇數，則該 n 邊形內的環形三角形個數為 $\frac{n(n^2-1)}{24}$ 。

(二).如果 n 為偶數，則該 n 邊形內的環形三角形個數為 $\frac{n(n^2-4)}{24}$ 。

二.

當我們要算出 n 邊形內的環形四邊形個數

(一). 如果 n 為奇數，則該 n 邊形內的環形四邊形個數為

$$C_4^n-[\frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48}]=C_4^n-\mathrm{n}\cdot C_3^{\frac{n-1}{2}} \text{。}$$

(二). 如果 n 為偶數，則該 n 邊形內的環形四邊形個數為

$$\mathrm{C}_4^n-\frac{n}{2}\cdot\{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2}[\frac{n}{2}-(i+1)]C_1^i+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-3}[(\frac{n}{2}-1)-(i+1)]C_1^i\}$$

$$=C_4^n-\frac{1}{2}(\mathrm{n}\cdot C_3^{\frac{n}{2}}+\mathrm{n}\cdot C_3^{\frac{n}{2}-1}) \text{。}$$

三.

當我們要算出 n 邊形內的環形 m 邊形個數

(一). 如果 n 為奇數，

1. 當 $\frac{n-1}{2} \geq$m-1 時，則該 n 邊形內的環形 m 邊形個數為

$$C_m^n - \mathrm{n} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-m+2} i \cdot C_{m-3}^{\frac{n-1}{2}-1-i} = C_m^n - \mathrm{n} \cdot C_{m-1}^{\frac{n-1}{2}} 。$$

2. 當 $\frac{n-1}{2} <$m-1 時，則該 n 邊形內的環形 m 邊形個數為 C_m^n 。

(二). 如果 n 為偶數，

1. 當 $\frac{n}{2}-2 \geq \mathrm{m}-3$ 成立且 $(\frac{n}{2}-1)-2 \geq \mathrm{m}-3$ 成立時，則該 n 邊形內的環形 m 邊形個數為 $C_m^n - \frac{n}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-m+2} i \cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-1-i} - \frac{n}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-m+1} i \cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-2-i}$

$$= C_m^n - \frac{1}{2}(\mathrm{n} \cdot C_{m-1}^{\frac{n}{2}} + \mathrm{n} \cdot C_{m-1}^{\frac{n}{2}-1}) 。$$

2. 當 $\frac{n}{2}-2 \geq \mathrm{m}-3$ 成立但 $(\frac{n}{2}-1)-2 \geq \mathrm{m}-3$ 不成立時，則該 n 邊形內的環形 m 邊形個數為 $C_m^n - \frac{n}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-m+2} i \cdot C_{m-3}^{\frac{n}{2}-1-i}$ 。

3. 當 $\frac{n}{2}-2 \geq \mathrm{m}-3$ 不成立且 $(\frac{n}{2}-1)-2 \geq \mathrm{m}-3$ 也不成立時，則該 n 邊形內的環形 m 邊形個數為 C_m^n 。

四.

當我們要算出空間中 n 邊形內的環形 m 邊形個數，則個數和平面中的 n 邊形內的環形 m 邊形個數相同。

伍、 未來展望及應用

點和邊是一種很容易模擬現實世界問題的模型，因此圖論問題往往可以應用在許多領域上。數學家歐拉在 1736 提出的一筆畫問題是啟發後代研究圖論的開端，像是 20 世紀以來的「最短路徑問題」、「最大流量問題」則對交通領域有許多的幫助，而在網路蓬勃發展之後，圖論便應用在資訊傳遞、網路流量等領域，因此得到更大的發展空間，各式的研究也如雨後春筍般迸出。

而《競賽圖中環形多邊形的數量》便和以上前人的研究有異曲同工之妙，

例如我們可以把點看成景點，邊看成路徑，而在遊客過多時，我們的研究便能給出許多不同的替代路線。

在我們一系列的討論後，我們也想辦法將其與現實生活中進行連結。我們看到一個報導，單向道的行駛速率與效率比雙向還要高，以中國東北的大連為例，在都市更新後的路線規劃有許多單向道，而官方行政單位在測量後發現行車流暢度有明顯提升，所以我們以這個方向進行實際應用，若政府在開發土地開拓計畫的時候，其道路的設計就可以使用我們先前推導出的結論，進而創造新城市中最大的交通效率。因此我們期許這份研究在未來，若有機會繼續發展，能夠更拓展交通或網路流量領域。

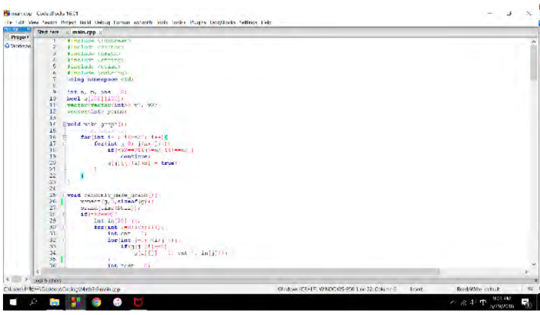
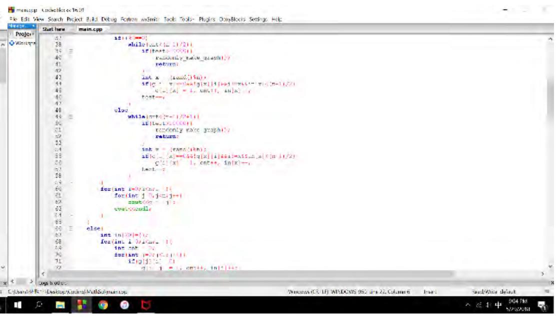
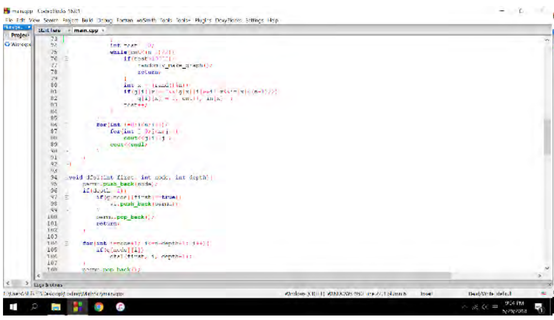
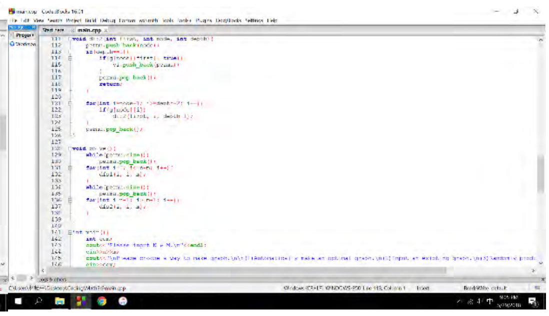
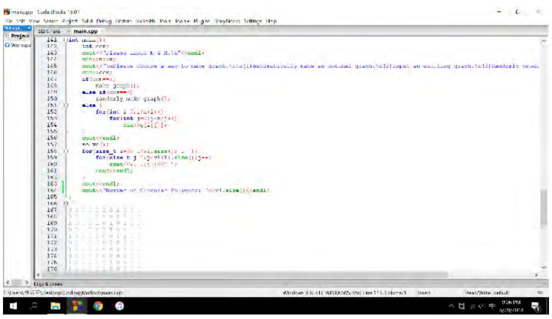
陸、　參考資料及其他

一. 中等數學 2013 年第 2 期

二. 維基百科 ：https://en.m.wikipedia.org/wiki/Tournament_(graph_theory)

柒、　附件

以下為上述程式的程式碼。

【評語】050405

本文主要在計算 n-競賽圖中 m-有向圈最多可能的個數，給出了一般的答案，只是其中有些公式尚未化簡。整體來說，討論方法從反面切入，有其創意；作品論述尚屬完整清晰，討論也算詳盡，是很一篇認真論述的作品。

值得再思考的的地方含：

(一)有些論述可以再簡單一點，例如 m=3 的情況，只需要計算由一點連出去的邊所成的對就可以，並不需要算連進來的邊所成的對，這樣會簡單很多。而且同時計算連出和連進來的邊所成的對時，還要煩惱兩種有沒有對應起來，這一點本作品並未論述，有點小瑕疵。

(二)從環形三角形、四邊形，推廣到環形 m 邊形，是否存在遞迴關係式？

(三)若將本研究以賦值方式處理，是否能有不同的效果？

作品海報

壹、研究動機

在課餘時間，數學老師會提供給一些有關數學研究的期刊給有興趣的同學們閱讀，其中有一個主題我們都覺得十分有趣：在一個凸多邊形中，兩兩用單向的箭頭連起來，這樣的一張圖中，竟包含了許多環形的路徑。這不禁讓我們聯想到生活中，在旅遊、運輸時，人們總是會希望各個目的地之間能順路，甚至是能成為一個迴路，最後能回到原點。

在搜集一番資料後，我們更發現，原來這種我們俗稱為多邊形的圖，竟然在1953年被同是數學家、生物學家的H. G. Landau發表在Bulletin of Mathematical Biophysics，而他稱其為Tournament（競賽圖），這數十年來，競賽圖廣泛地被各種領域使用著，例如計算機科學、生物演化以及各種社會科學領域。而我們則希望能夠利用在學校所學的知識作為基礎，系統性地研究一套方法求出在任意n邊形中，存在大小為m的環形多邊形數量之最大值，希望能把競賽圖的應用繼續延伸推廣。

貳、研究過程及方法

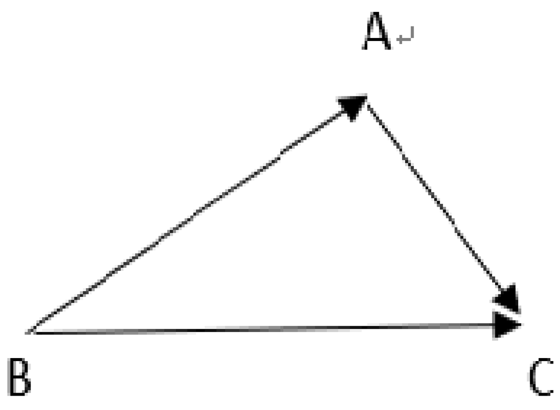
一、

假設平面上有一個任意凸n多邊形，連結其各頂點後，並用箭頭標示其線段的方向。如果任選一頂點，可沿著配置的箭頭繞一個三角形回到原出發點，我們就稱此繞行路徑的三角形為環形三角形。現在我們要探討的是任意凸n多邊形中環形三角形個數的最大值，之後我們還要再延伸到最多有幾個環形凸4邊形、凸5邊形……凸m邊形(其中m<n)。

二、

首先，在討論之前我們先定義一個名詞「非環形組合」。

「非環形組合」：當有兩個箭頭由同一個頂點發出或有兩個箭頭同時射入同一個點時，我們稱這類的情況為一個非環形組合。經由觀察發現，非環形三角形中會有2個非環形組合，只要得知非環形組合的個數就能推得非環形三角形的個數。



圖(一)

我們就以非環形組合的個數來探討環形三角形的個數，因為任意凸n多邊形的頂點連接出的三角形個數為C_3^n個，只要由全部三角形個數減掉非環形組合產生的非環形三角形個數即是我們所要求環形三角形個數。

凸n邊形中，設P點為任意一頂點，以P為端點的線段有n-1條。設P點發出k個邊分別指向其餘n-1個頂點，收到n-1-k個指向P的邊。自P點發出的k個邊中，每2個邊會形成一個非環形組合。

因此，關於P點的非環形組合個數有S個，則

$$S=C_2^{n-1-k}+C_2^{k}$$

$$=\frac{(n-1-k)(n-1-k-1)}{2}+\frac{(k)(k-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-k(n-1-k)$$

為了求S的最小值，即要求M=k(n-1-k)的最大值。我們以下討論分為n為奇數和n為偶數討論。

如果n為奇數，因為k及n-1-k均為正數，所以用算幾不等式$\frac{(k)+(n-1-k)}{2}\geq\sqrt{(k)(n-1-k)}$，所求M的最大值出現在k=n-1-k，經移項可求得k=$\frac{(n-1)}{2}$時，M有最大值為$\frac{n-1}{2}\cdot(n-1-\frac{n-1}{2})$=$\frac{(n-1)(n-1)}{4}$，此時S的最小值為$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-1)(n-1)}{4}$=$\frac{(n-1)(n-3)}{4}$。

但如果n為偶數，則k=$\frac{(n-1)}{2}$不為整數，所以M的最大值出現在離k=$\frac{(n-1)}{2}$最近的整數也就是當k=$\frac{(n)}{2}$及k=$\frac{n}{2}-1$時。以k=$\frac{(n)}{2}$及k=$\frac{n}{2}-1$代入，M均等於$\frac{(n)(n-2)}{4}$，此時S的最小值為$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n)(n-2)}{4}$=$\frac{(n-2)^2}{4}$。

經過計算知道如何求一個點的非環形三角形的個數之最小值，那麼讓上述的式子計算n遍就可以算出這個多邊形的非環形三角形個數，由於一個非環形三角形恰有兩個非環形組合，所以一個非環形三角形都被算過兩遍，故一個凸多邊形的非環形三角形個數有$\frac{nS}{2}$個。

若n為奇數，則該凸多邊形的環形三角形個數為 $C_3^n-\frac{(n-1)(n-3)}{4}\cdot\frac{n}{2}=\frac{\qquad}{24}$

若n為偶數，則該凸多邊形的環形三角形個數為 $C_3^n-\frac{\qquad}{4}\cdot\frac{n}{2}=\frac{\qquad}{24}$

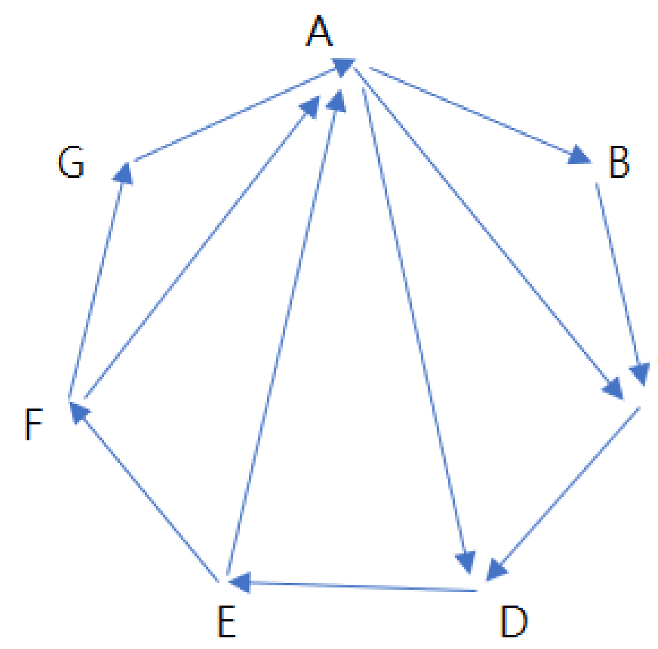
三、

在討論完n邊形內環形三角形的個數後，我們要討論奇數n邊形內環形四邊形的個數。根據計算環形三角形的結論，只要非環形組合愈少，則環形多邊形的個數愈多。

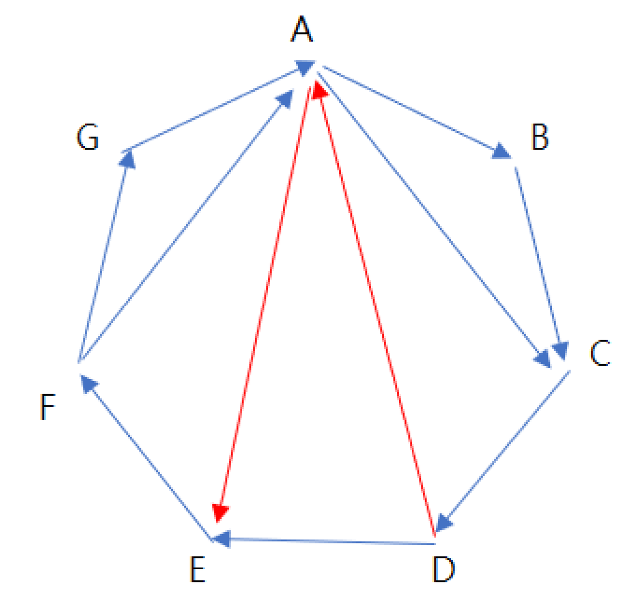
設一點發出k個邊分別指向其餘n-1個頂點，收到n-1-k個指向A的邊，因為k及n-1-k均為正數，所以用算幾不等式$\frac{(k)+(n-1-k)}{2}\geq\sqrt{(k)(n-1-k)}$，所求的最大值出現在k=n-1-k，經移項可求得k=$\frac{n-1}{2}$時，得知非環形組合的最小值出現在射出箭頭數等於接收箭頭數的時候。不同的配置方法會產生出的環形多邊形數量並不同，而在一番嘗試後，我們發現把箭頭按照逆時鐘或順時鐘擺放比其他方法得到更多環形多邊形。

以下為我們的說明：

我們先假設這樣擺放會有最多環形多邊形。然後我們更動其部分的配置來證明其他方法不會更好；為了減少變因，我們把n邊形中的n-1個點之間的邊固定，只更動和其中一個點(令其為點A)所射出或射入的邊，又我們知道箭頭數射出射入相同時，會有最大值，於是我們就只更動其擺放的順序。



圖(二)



圖(三)

更動順序之後(如上圖)， 我們針對A點最前與最後的射出(和射入)箭頭計算非環形多邊形的個數。對於由A點發出的箭頭而言，最前與最後的箭頭分別為$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AE}$ ，比起原來的情況多了1個箭頭供非環形組合計算；對於指向A點的箭頭而言，最前與最後的箭頭分別為$\overrightarrow{GA}$和$\overrightarrow{DA}$ ，比起原來的情況多了1個箭頭供非環形組合計算。顛倒前A點的非環形組合數量為$C_2^3+C_2^3$ =6個，顛倒後A點的非環形組合數量為$C_2^4+C_2^4$ =12個，有更多的非環形組合，即代表著更多的非環形多邊形。而所有的m邊形是由環形m邊形和非環形m邊形所組成，只要非環形m邊形愈多，環形m邊形愈少，由此得知只要該點以順時針或逆時針配置會產生最多的環形m邊形。只要每一個點都以順時針或逆時針配置，總共的環形多邊形個數就會最多。

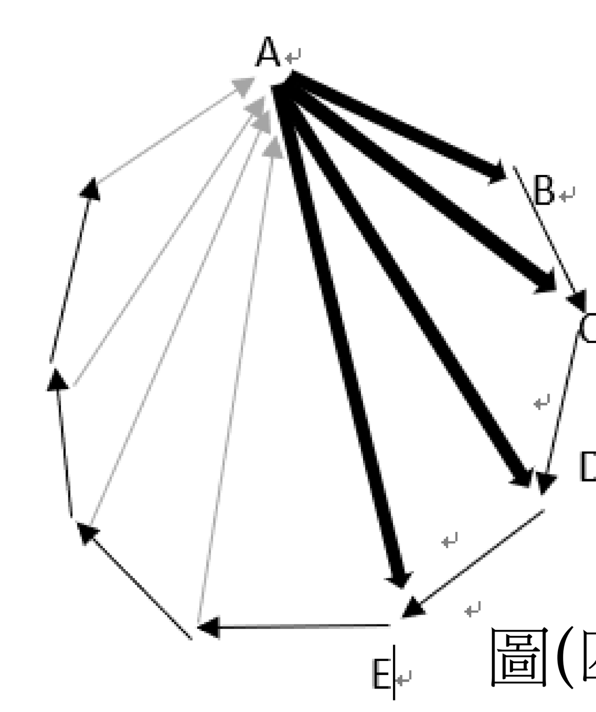
(一)設P點為n邊形頂點的任意一點，令由P點所發出的邊為集合F(P)。在P點所發出的$\frac{n-1}{2}$個邊中我們取兩個邊，當作四邊形相鄰的兩個邊，因為此四邊形在P點產生非環形組合，所以確定此四邊形為非環形四邊形。
(二)每一個點都可以進行這樣的討論，所以計算n遍後即可算出此n邊形內非環形四邊形的個數。設K為此n邊形內非環形四邊形的個數，則

$$K= n\cdot\ \{(\frac{n-1}{2}-2)\cdot 1+(\frac{n-1}{2}-3)\cdot 2+(\frac{n-1}{2}-4)\cdot 3+\cdots+[\frac{n-1}{2}-(\frac{n-1}{2}-1)]\cdot(\frac{n-1}{2}-2)\}$$

設S為K為此n邊形內環形四邊形的個數，則

$$S= C_4^n-K$$

$$=C_4^n-[\frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48}]。\quad \text{-----式(一)}$$



圖(四)

(三)將式(一)經過化簡後，我們得到$C_4^n-n\cdot C_3^{\frac{n-1}{2}}$ ，我們分析它的幾何意義得到了以下的作法：
我們一樣對A點討論非環形四邊形的個數(如右圖)。要和A形成非環形四邊形的話必須要從B、C、D、E這4個點之中再選3個當成四邊形的頂點，而且不論選擇的狀況如何，均會在A點形成非環形組合，所以對A點而言，從由A點指出的頂點中再隨機選出3個頂點就是F(A)中的非環形四邊形的個數，也就是$C_3^{\frac{n-1}{2}}$ 個。每一個點都能進行以上的討論，所以所有的非環形四邊形的個數為$n\cdot C_3^{\frac{n-1}{2}}$ 個，最後用所有的四邊形個數扣除非環形四邊形的個數即為我們的結果：$C_4^n-n\cdot C_3^{\frac{n-1}{2}}$ 。

四、
在討論完n邊形內環形四邊形的個數後，我們要討論奇數n邊形內環形m邊形的個數。與環形四邊形的討論方法一樣，我們將每個點的射出箭頭和射入的箭頭以順時針或逆時針擺放。
(一)設Q點為n邊形頂點的任意一點，令由Q點所發出的邊為集合F(Q)。在Q點所發出的$\frac{n-1}{2}$個邊中我們取兩個邊，當作m邊形相鄰的兩個邊，因為此m邊形在Q點產生非環形組合，所以確定此m邊形為非環形m邊形；
(二)每一個點都可以進行這樣的討論，所以計算n遍後即可算出此n邊形內非環形m邊形的個數。設K為此n邊形內非環形m邊形的個數，則

$$K= n\cdot\{[\frac{n-1}{2}-(m-2)]\cdot C_{m-3}^{m-3}+[\frac{n-1}{2}-(m-1)]\cdot C_{m-3}^{m-2}+[\frac{n-1}{2}-(m)]\cdot C_{m-3}^{m-1}+\ldots+[\frac{n-1}{2}-(\frac{n-1}{2}-1)]\cdot C_{m-3}^{2}\}$$

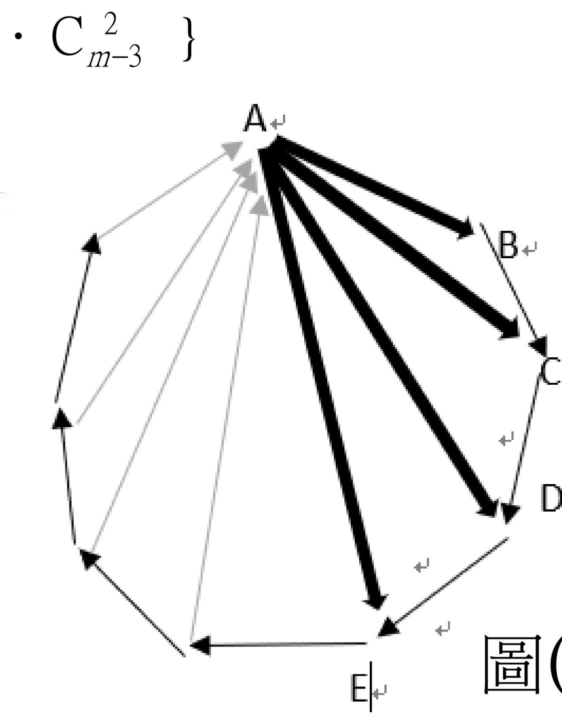
設S為此n邊形內環形m邊形的個數，則

$$S= C_m^n-K$$

$$=C_m^n-\ n\cdot\{[\frac{n-1}{2}-(m-2)]\cdot C_{m-3}^{m-3}+[\frac{n-1}{2}-(m-1)]\cdot C_{m-3}^{m-2}+[\frac{n-1}{2}-(m)]\cdot C_{m-3}^{m-1}+\ldots+[\frac{n-1}{2}-(\frac{n-1}{2}-1)]\cdot C_{m-3}^{2}\}$$

$$=C_m^n-n\{[\frac{n-1}{2}-m+2]\cdot C_{m-3}^{m-3}+[\frac{n-1}{2}-m+1]\cdot C_{m-3}^{m-2}+[\frac{n-1}{2}-m]\cdot C_{m-3}^{m-1}+\ldots+[1]\cdot C_{m-3}^{2}\}$$

$$=C_m^n-n\sum_{i=1} i\cdot C_{m-3}^{2} \quad \text{-----式(二)}$$



圖(五)

(三) 將式(二)經過化簡後，我們得到$C_m^n-n\cdot C_{m-1}^{\frac{n-1}{2}}$ ，我們分析它的幾何意義得到了以下的作法：
我們一樣對A點討論非環形m邊形的個數。要和A形成非環形m邊形的話必須要從這$\frac{n-1}{2}$個點之中再選m-1個點當成m邊形的頂點，而且不論選擇的狀況如何，均會在A點形成非環形組合，所以對A點而言，從由A點指出的頂點中再隨機選出m-1 個頂點就是F(A)中的非環形m邊形的個數，也就是$C_{m-1}^{\frac{n-1}{2}}$個。
每一個點都能進行以上的討論，所以所有的非環形m邊形的個數為$n\cdot C_{m-1}^{\frac{n-1}{2}}$個，最後用所有的m邊形個數扣除非環形m邊形的個數即為我們的結果：$C_m^n-n\cdot C_{m-1}^{\frac{n-1}{2}}$。

五、
在討論完奇數n邊形內環形m邊形的個數後，我們要討論偶數n邊形內環形m邊形的個數。
設A點發出k個邊分別指向其餘n-1個頂點，收到n-1-k個指向A的邊，因為k及n-1-k均為正數，所以用算幾不等式$\frac{(k)+(n-1-k)}{2} \geq \sqrt{(k)(n-1-k)}$，所求的最大值出現在k=n-1-k，經移項可求得k=$\frac{(n-1)}{2}$時，但是n為偶數，k= $\frac{(n-1)}{2}$不為整數，所以最大值出現在射入箭頭數和射出箭頭數為$\frac{n}{2}$和$\frac{n}{2}-1$時。

同上奇數的討論，令由R點所發出的邊為集合F(R)，R點所接收的邊為集合f(R)。我們針對F(R)和f(R)都進行了計算，所以每一個非環形m邊形都被算了2次，所以最後除以2即是所求。

(一)

$$C_m^n - \frac{n}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1-1} i \cdot C_{m-3}^{2} - \frac{n}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2-1} i \cdot C_{m-3}^{2}$$

當 $\frac{n}{2}-2 \geq m-3$ 且 $\left(\frac{n}{2}-1\right)-2 \geq m-3$ (式三)

(二)

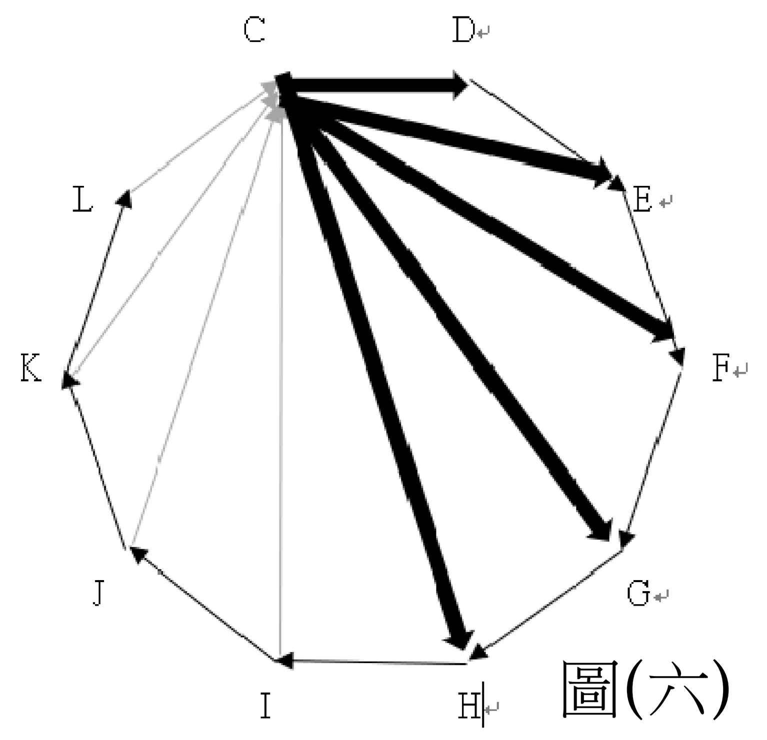
$$C_m^n - \frac{n}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1-1} i \cdot C_{m-3}^{2}$$

當 $\frac{n}{2}-2 \geq m-3$ 但 $\left(\frac{n}{2}-1\right)-2 < m$

(三)

$$C_m^n$$

當 $\frac{n}{2}-2 < m-3$



圖(六)

因為偶數的射入，射出的箭頭數不一樣多，故須討論三種，以上式子差別建立在幾何意義成立與否。

(四)將式(三)經過化簡後，我們得到 $C_m^n - \frac{1}{2}\left(n \cdot C_{m-1}^{\frac{n}{2}} + n \cdot C_{m-1}^{\frac{n}{2}-1}\right)$，我們分析它的幾何意義得到以下的作法

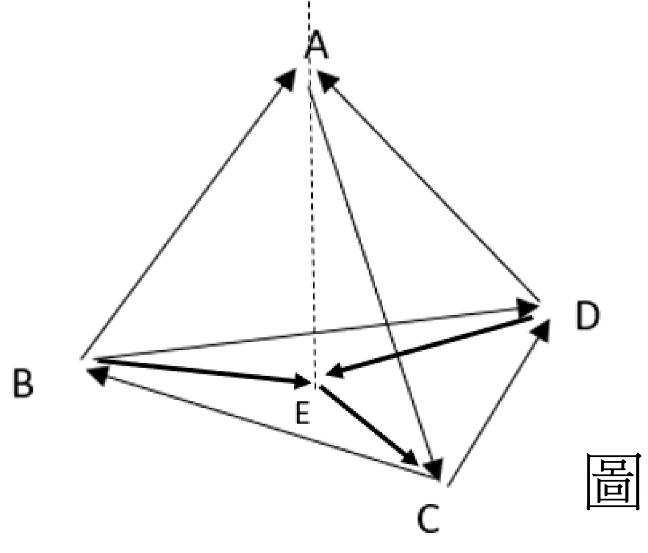
我們一樣對C點討論非環形m邊形的個數。要和C形成非環形m邊形的話必須要從D、E、F、G、H這5個點之中再選m-1個當成m邊形的頂點，而且不論選擇的狀況如何，均會在C點形成非環形組合，所以對C點而言，從由C點指出的頂點中再隨機選出m-1個頂點就是F(C)中的非環形m邊形的個數，也就是$C_{m-1}^{\frac{n}{2}}$個。
要和C形成非環形m邊形的話還有另一種選擇，就是從I、J、K、L這4個點之中再選m-1個當成m邊形的頂點，而且不論選擇的狀況如何，均會在C點形成非環形組合，所以對C點而言，從指向C點的的頂點中再隨機選出m-1個頂點就是f(C)中的非環形m邊形的個數，也就是$C_{m-1}^{\frac{n}{2}-1}$個。

每一個點都能進行以上的討論，所以針對F(C)和f(C)所算出來的非環形m邊形的個數為$n \cdot C_{m-1}^{\frac{n}{2}} + n \cdot C_{m-1}^{\frac{n}{2}-1}$個，但是每一個非環形m邊形都被重複算了一次，所以再除以2就是所有的非環形m邊形的個數。最後用所有的m邊形個數扣除非環形m邊形的個數即為我們的結果：$C_m^n - \frac{1}{2}\left(n \cdot C_{m-1}^{\frac{n}{2}} + n \cdot C_{m-1}^{\frac{n}{2}-1}\right)$ ，而使用的限制為$\frac{n}{2}-1 \geq m-1$。

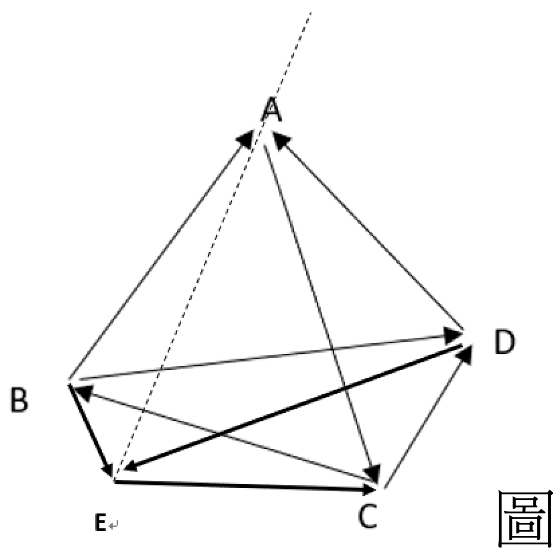
六.
由於我們討論完了平面的環形多邊形的最大數目，於是我們希望繼續延伸到立體。首先，我們先決定在立體時環形多邊形的定義，當可以從出發點沿著邊回到出發點，形成一個迴路，我們便稱之為立體中的一個環形多邊形，而經過的邊數稱為這個此環形多邊形的大小。我們也推論其數量應該跟非環形組合有關，先舉四面體為例。

現在有一四面體A-BCD，其中兩兩以箭頭連接，今將A點投影在BCD所在的平面上得到E點，其中E點在ΔBCD中，如圖(五)所示。四面體A-BCD投影後變成平面上的四邊形EBCD，其箭頭的配置並沒有改變，非環形組合的個數也沒有改變，討論的方法和平面時的相同，所以可以得知四面體中環形多邊形的個數和邊形中環形多邊形的個數一樣。

今將A點投影在BCD所在的平面上得到E點，其中E點在ΔBCD外，如圖(六)所示。其中投影後的箭頭方向並沒有改變。四面體A-BCD投影後變成平面上的四邊形EBCD，其箭頭的配置並沒有改變，非環形組合的個數也沒有改變，討論的方法和平面時的相同，所以可以得知四面體中環形多邊形的個數和四邊形中環形多邊形的個數一樣。
同理，在空間中的立體圖形只要經過投影後，其環形多邊形的個數並沒有改變。



圖(七)



圖(八)

參、未來展望及應用

點和邊是一種很容易模擬現實世界問題的模型，因此圖論問題往往可以應用在許多領域上。數學家歐拉在1736提出的一筆畫問題是啟發後代研究圖論的開端，像是20世紀以來的「最短路徑問題」、「最大流量問題」則對交通領域有許多的幫助，而在網路蓬勃發展之後，圖論便應用在資訊傳遞、網路流量等領域，因此得到更大的發展空間，各式的研究也如雨後春筍般迸出。
而《競賽圖中環形多邊形的數量》便和以上前人的研究有異曲同工之妙，例如我們可以把點看成景點，邊看成路徑，而在遊客過多時，我們的研究便能給出許多不同的替代路線。因此我們期許這份研究在未來，若有機會繼續發展，能夠更拓展交通或網路流量領域。