中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

團隊合作獎

050404

繁星似海－圓上圖形最大值探討

學校名稱：桃園市私立復旦高級中學

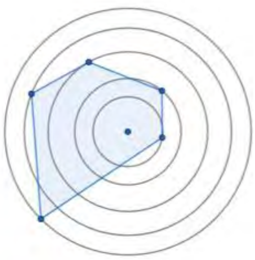
作者：	指導老師：
高三 徐鼎翔	劉育榮
高三 孫偉馨	朱泰吉
高三 沈家緯	

關鍵詞：最大值、周長、面積

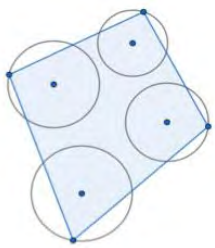
摘要

我們在此次的主題「繁星似海－圓上圖形最大值探討」中，要探討在不同的圓上各取一點，並在這些有如繁星的點中，依照特定順序（順／逆時針）所連成的多邊形（以下圖為例）。這些多邊形有無限種情況，但周長及面積的最大值只有一個，因此我們的主軸圍繞在多邊形於周長與面積最大值時具有的性質。探討的主題主要分為四種情形：

1. 同心圓情形，凸多邊形最大周長時具有之性質
2. 不同心圓情形，凸多邊形最大周長時具有之性質
3. 同心圓情形，最大面積時具有之性質
4. 不同心圓情形，最大面積時具有之性質



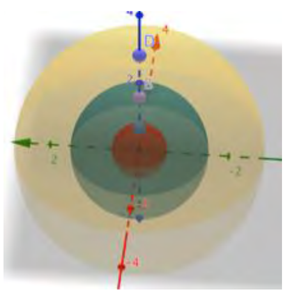
五個同心圓情形



四個不同心圓情形

壹、研究動機

當初我們看到第34屆的科展作品：由連威翔、莊武諺所著的「空間中任三直線上各取一點所連成三角形的最小周長」時，獲得了靈感，想做有關圖形極值的探討，又剛好上化學課時，教到了波耳提出的原子模型，各個球殼層都有所屬的電子。於是我們想：電子間的連線可圍成圖形，這個圖形隨著電子的變化會有完全不同的新面貌，並且似乎有某種關係存在於其中。我們打算來探討這個議題，不過立體空間難以討論，研究方向遂往平面的方向邁進（即將波耳模型做一個剖面），在經過逐步修改後，成為了現在討論的題目，即探討各不同的圓，上頭的點所圍成多邊形有最大周長與面積時的相關性質。



（波耳模型示意圖）

貳、研究目的

在不同的圓上（半徑不一定要相同且圓不一定要共心）各取一點，再依照順序（順／逆時針）連接便可繪出一個多邊形，此多邊形會因各點取的位置不同，而有千變萬化的情況。我們此次的研究目的便是要探討：**在畫出的眾多情形裡，有最大周長或最大面積時，此多邊形會有何性質。**

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra

肆、研究過程或方法

我們先把基本的架構圖繪製如下：

<table>
<tr><td rowspan="4">最大周長</td><td rowspan="2">同心圓情形</td><td>取三個點</td><td>1. 周長最大值圖形【定理1.1～1.2】
2. 半徑與周長最大值時邊長的關係【定理1.3】</td></tr>
<tr><td>取 n 個點</td><td>1. 周長最大值圖形【定理2.1.1～2.1.2】
2. 存在唯一性【定理2.2】
3. 順序對周長最大值的影響【定理2.3】</td></tr>
<tr><td rowspan="2">非同心圓情形</td><td>取三個點</td><td rowspan="2">周長最大值時情形【定理3.1】</td></tr>
<tr><td>取 n 個點</td></tr>
<tr><td rowspan="4">最大面積</td><td rowspan="2">同心圓情形</td><td>取三個點</td><td>1. 面積最大值圖形【定理4.1.1～4.1.2】
2. 存在唯一性【定理4.1.3】</td></tr>
<tr><td>取 n 個點</td><td>1. 面積最大值圖形【定理5.1.1～5.1.2】
2. 存在唯一性【定理5.2】
3. 順序對面積最大值影響</td></tr>
<tr><td>非同心圓情形</td><td>取 n 個點</td><td>面積最大值時情形【定理6.1】</td></tr>
<tr><td>橢圓情形
（特例）</td><td>取 n 個點</td><td>面積最大值圖形 【定理7.1】</td></tr>
</table>

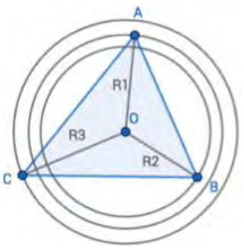
一、 最大周長

（一） 同心圓的情況

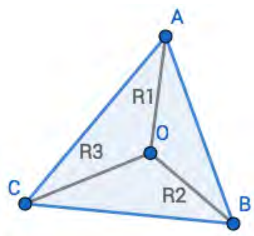
1. 取三個點

(1) 周長最大值圖形

首先我們討論同心圓，並從較為基礎的三角形討論起。由於圓是由座標上與圓心O同距離的所有點所組成，所以我們可以將圖形（原始圖）簡化成圖一，各個線段R_1、R_2、R_3是不同圓的半徑，而線段的末端就是圓上的點。將各線段末端依順／逆時針的順序（順／逆不影響）連起來，即可得所求圖形。

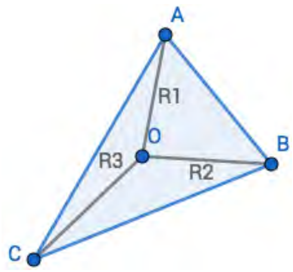


原始圖

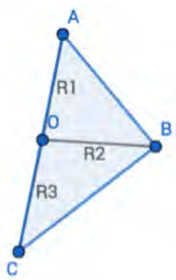


圖一

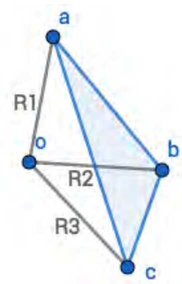
此圖有三種可能情形，分別是圓心在所成圖形的內部（圖二）、邊上（圖三）與外部（圖四）。（為方便下文討論，我們將圖四的圓心與頂點特別用小寫區分）



圖二

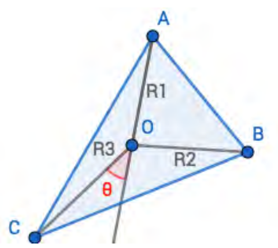


圖三

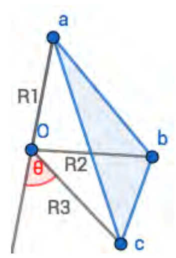


圖四

為求最大周長存在於何種圖形，我們先比較圖二與圖四。首先我們取一組R_1、R_2、R_3，並使R_1、R_2的位置固定，且R_3與R_1延伸直線的夾角皆為 θ（如圖五、圖六），用此組圖形來做對應與比較 。



圖五



圖六

因為R_1、R_2位置固定，所以$\overline{AB}$=$\overline{ab}$，欲討論周長何者較大，只需探討$\overline{AC}$+$\overline{BC}$與$\overline{ac}$+$\overline{bc}$的值即可，兩者的大小關係證明如下：

$$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{\mathrm{R_1}^2 + \mathrm{R_3}^2 - 2\mathrm{R_1} \times \mathrm{R_3}\cos(\pi - \theta)} = \overline{ac}$$

$$\because \angle BOC > \angle boc \text{且} \overline{OB} = \overline{ob}, \overline{OC} = \overline{oc}$$

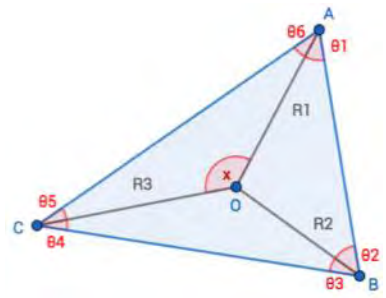
$$\therefore \text{依據大角對大邊，} \overline{BC} > \overline{bc}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} + \overline{BC} > \overline{ac} + \overline{bc}$$

我們由此可知圓心在圖形外部時，都可找到一圓心在內部的圖形與之對應且周長更大，因此圓心於圖形外部時，並不會有最大周長。而圖三可視為圖二的$\angle OCA = \angle OAC = 0$的情況，因此可視作圖二來討論。由此我們得出第一個定理：

【定理1.1】： 三同心圓，在其上各取一點，依照順／逆時針連成之三角形出現最大周長時，其同心圓圓心會位於所成圖形內（含邊界）。

已知出現最大周長值時，圓心會位於圖形內（含邊界），故我們可將圖形畫成圖七，以進一步探討最大周長值出現時，會有何性質。



圖七

為了後續的證明，我們令θ_k為各半徑與邊之夾角，且$0 \le \theta_k \le \frac{\pi}{2}(k = 1,2, \dots \dots ,6)$，則$\Delta ABC$周長$L$可表示如下：

$$L = R_1 cos\theta_1 + R_2(cos\theta_2 + cos\theta_3) + R_3 cos\theta_4 + \sqrt{{R_3}^2 + {R_1}^2 - 2R_3R_1 cosx} \text{，其中} x = \angle AOC$$

之後，我們將R_2、R_3的位置固定，變動R_1的位置（以 O 點為軸心，轉動 A 點），並且在此我們先不改變R_1、R_2、R_3依順時針排列的順序，之後會證明順序不會影響周長的最大值。此時周長L會與θ_1成函數關係，推導過程如下：

在ΔAOB中，利用正弦定理將θ_2轉成θ_1的形式：

$$\frac{sin\theta_2}{R_1} = \frac{sin\theta_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = sin^{-1}(\frac{R_1}{R_2} sin\theta_1)$$

因反三角函數需界定定義域與值域才有意義，因此在此界定$-\frac{\pi}{2} \le \theta_2 \le \frac{\pi}{2}$，即以下證明僅在$-\frac{\pi}{2} \le \theta_2 \le \frac{\pi}{2}$時成立，此亦為$0 \le \theta_k \le \frac{\pi}{2}$條件設置的原因（因為圖形內$\theta_k$不可能為負值，故負值情形不討論）。此外，由於上式是藉由正弦定理推得，故可保證$\frac{R_1}{R_2}sin\theta_1$在反三角函數的定義域內。

之後便可將周長 L 表示如下：

$$L = R_1cos\theta_1 + R_2\left\{cos\left[sin^{-1}(\frac{R_1}{R_2}sin\theta_1)\right] + cos\theta_3\right\} + R_3cos\theta_4 + \sqrt{{R_3}^2 + {R_1}^2 - 2R_3R_1cosx}$$

其中$x = \theta_1 + sin^{-1}(\frac{R_1}{R_2}sin\theta_1) + \theta_3 + \theta_4$

再來我們將L對θ_1做偏微，由於θ_3、θ_4固定住了，不會受到θ_1變動的影響：

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}L = -R_1\sin\theta_1 - \frac{R_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1}{R_2\sqrt{1-\frac{R_1^2\sin^2\theta_1}{R_2^2}}} + \frac{R_1R_3sinx}{\sqrt{{R_3}^2 + {R_1}^2 - 2R_3R_1cosx}}\left(1 + \frac{R_1\cos\theta_1}{R_2\sqrt{1-\frac{R_1^2\sin^2\theta_1}{R_2^2}}}\right)$$

$$= -R_1\sin\theta_1 - \frac{R_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2 - R_1^2\sin^2\theta_1}} + \frac{R_1R_3\sin x}{\sqrt{{R_3}^2 + {R_1}^2 - 2R_3R_1cosx}}(1 + \frac{R_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2 - R_1^2\sin^2\theta_1}})$$

在ΔAOC中，由正弦定理，我們可得：

$$\frac{sinx}{\sqrt{{R_3}^2 + {R_1}^2 - 2R_3R_1cosx}} = \frac{sin\theta_6}{R_3}$$

可以將偏微分的結果化為：

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} = -R_1\sin\theta_1 - \frac{R_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2 - R_1^2\sin^2\theta_1}} + \frac{\sin\theta_6R_1R_3}{R_3}\left(1 + \frac{R_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2 - R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)$$

$$= \left(R_1 + \frac{{R_1}^2\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2 - R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)(\sin\theta_6 - \sin\theta_1)$$

由於$0 \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$，所以前項必為正數，代表$\sin\theta_6 - \sin\theta_1 = 0$時周長可能會有極值，又$0 \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$，$0 \le \theta_6 \le \frac{\pi}{2}$，可得在$\theta_6 = \theta_1$時，周長可能會有極值。

在$0 \le \theta_k \le \frac{\pi}{2}$的條件下，當 θ_1變大時，因$\theta_2 = sin^{-1}(\frac{R_1}{R_2}sin\theta_1)$，$\theta_2$亦會變大，而$\angle AOB = \pi - (\theta_1 + \theta_2)$會因此變小，又$x = 2\pi - \angle AOB - \angle COB$，其中$\angle COB$為一定值，故$\angle AOB$變小時$x$會增大，而$\theta_5 + \theta_6 = \pi - x$會因此而變小，又在$\Delta AOC$中，根據正弦定理

$\frac{sin\theta_6}{R_3}=\frac{sin\theta_5}{R_1}$，$\theta_5$、$\theta_6$會同時增或減，故當$\theta_5+\theta_6$變小時，二者皆變小，得$\theta_1$變大時，$\theta_6$ 會變小，所以θ_1由小變大時，會有以下情形：

$$若\ \theta_1<\theta_6\quad,\qquad 則\frac{\partial L}{\partial\theta_1}>0$$

$$若\ \theta_1=\theta_6\quad,\qquad 則\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=0$$

$$若\ \theta_1>\theta_6\quad,\qquad 則\frac{\partial L}{\partial\theta_1}<0$$

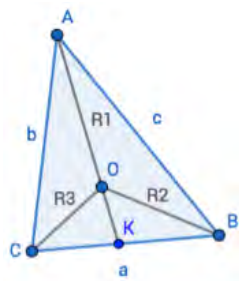
由斜率的變化可知當$\theta_1=\theta_6$ 時周長有極大值，且由偏微分的結果可知只有此時斜率為零，代表在定義域內除$\theta_1=\theta_6$ 的情形外，不會再有極值點。故除此情形外，不論θ_1是增加或減少，L 值只會減少，在定義域端點時的周長值亦不會大於它，得$\theta_1=\theta_6$時，周長為最大值。

同理可應用於其他各半徑，由此我們可以得到一個結果：只要形成之三角形，有任何一個角沒有被對應的半徑平分，就不會得到最大周長（只要固定另外兩個半徑的位置，並將該角調成被對應的半徑平分，就可得到更大的周長），故可推得唯有當每個角都被半徑平分時，才可能有周長最大值，此時 O 點正好是所成三角形的內心（其存在唯一性將在後面與多邊形一起論證），由此我們得出我們的第二個結論：

【定理1.2】：三同心圓，在其上各取一點，依照順／逆時針連成之三角形，在圓心於圖形內，且$0\le\theta_k\le\frac{\pi}{2}(k=1,2,\dots\dots,6)$（定義同上面證明）的條件下，圓心重合三角形內心時會出現最大周長值。

（2）半徑與周長最大值時邊長間的關係

三角形，依據前面證的結果，在最大周長時，圓心會成為此三角形的內心，繪成圖形（圖八）如下。我們再令此三角形的內切圓半徑為 r，**並定義$a\Delta ABC$為ΔABC的面積（其他三角形面積亦用此方法表示），往後證明亦用此定義**。



圖八

根據角平分線性質：

$$\overline{BK}:\overline{KC}=c:b$$

$$\overline{AO}:\overline{KO}=a\Delta\mathrm{AOB}:a\Delta\mathrm{KOB}=\frac{cr}{2}:\frac{r}{2}\mathrm{a}\left(\frac{c}{c+b}\right)=1:\frac{\mathrm{a}}{b+c}$$

$$\overline{AK}=\overline{KO}+\overline{AO}=\frac{\mathrm{a}}{b+c}\overline{AO}+\overline{AO}=\frac{\mathrm{a}+b+c}{b+c}\overline{AO}=\frac{\mathrm{a}+b+c}{b+c}R_1$$

令周長$\mathrm{a}+b+c=L$，根據角平分線長公式：

$$\overline{AK}=\frac{1}{b+c}\sqrt{(\mathrm{a}+b+c)(b+c-\mathrm{a})bc}=\frac{\mathrm{a}+b+c}{b+c}R_1$$

$$\Rightarrow\sqrt{(\mathrm{a}+b+c)(b+c-\mathrm{a})bc}=(\mathrm{a}+b+c)R_1$$

將$\mathrm{a}+b+c=L$帶入，並且將兩邊都平方：

$$\Rightarrow L(b+c-\mathrm{a})bc=L^2{R_1}^2$$

$$\Rightarrow\frac{{R_1}^2}{bc}=\frac{(b+c-\mathrm{a})}{L}$$

同理可得：

$$\frac{{R_2}^2}{\mathrm{a}c}=\frac{(\mathrm{a}+c-b)}{L}$$

$$\frac{{R_3}^2}{\mathrm{a}b}=\frac{(\mathrm{a}+b-c)}{L}$$

將三式相加並計算後可得到結論：

$$\frac{{R_1}^2}{bc}+\frac{{R_2}^2}{\mathrm{a}c}+\frac{{R_3}^2}{\mathrm{a}b}=\frac{(b+c-\mathrm{a})}{L}+\frac{(\mathrm{a}+c-b)}{L}+\frac{(\mathrm{a}+b-c)}{L}$$

$$=\frac{1}{L}(b+c-\mathrm{a}+\mathrm{a}+c-b+\mathrm{a}+b-c)=\frac{1}{L}(\mathrm{a}+b+c)=1$$

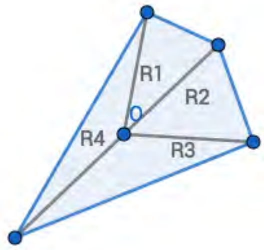
$$\Rightarrow\frac{{R_1}^2}{bc}+\frac{{R_2}^2}{\mathrm{a}c}+\frac{{R_3}^2}{\mathrm{a}b}=1$$

【定理1.3】:【定理1.2】所求周長最大值圖形中，$\frac{{R_1}^2}{bc}+\frac{{R_2}^2}{ac}+\frac{{R_3}^2}{ab}=\mathbf{1}$（定義同上面證明）。

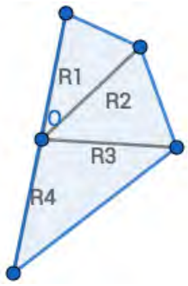
2. 取任意 n 個點（$\mathbf{n\geq 3,n\in N}$）

(1) 周長最大值圖形

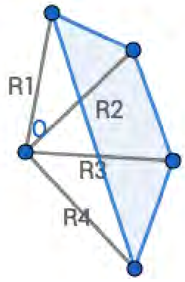
當在 n 個同心圓（$\mathrm{n}\geq 3,\mathrm{n}\in\mathrm{N}$），取 n 個點，依照順／逆時針連接，繪成一 n 邊形時，跟三角形類似，可能有三種圖形，分別是圓心在所成圖形的內部（圖九）、邊上（圖十）與外部（圖十一）。以下以四邊形為代表，不過任意 n 邊形都可適用。（示意圖在下頁）



圖九



圖十

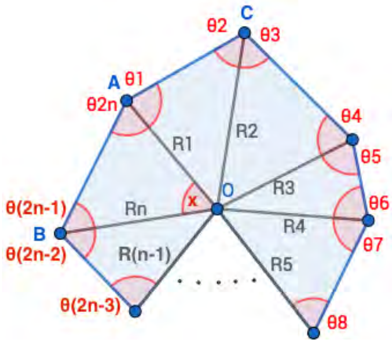


圖十一

同三角形證明，我們可得到最大周長值會出現於圖九或圖十中。由此可得結論：

【定理2.1.1】： n 個同心圓（$n \geq 3, n \in N$），在其上各取一點， 依照順／逆時針連成之 n 邊形出現最大周長值時，圓心會位於所成圖形內（含邊界）。

已知最大周長值存在於圓心在圖形內（含邊界）的情形中，我們可將圖形畫成圖十二，並以此探討任意 n 邊形在最大周長時的相關性質。我們令θ_k為各半徑與邊之夾角，且 $0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2}(k = 1,2, \dots \dots, 2n)$，即我們以下證明只適用於探討此範圍內的凸多邊形之最大周長情形，並且我們再加一個條件，即$R_i(i = 1,2, \dots \dots, n)$會依照順時針的順序排列（即照 1,2,⋯⋯,n 順序），稍後我們會證明此順序不會影響結果。



圖十二

為方便後續計算，我們先定義角度x如下：

$$x = \angle AOB = \pi - \theta_{2n} - \theta_{(2n-1)} = 2\pi - (\pi(n-1) - \sum_{i=1}^{2n-2} \theta_i) = \pi(3-n) + \sum_{i=1}^{2n-2} \theta_i$$

而後我們可得圖形的周長值 L 如下，為方便後續計算我們定義出$\overline{AB} = \sqrt{l}$：

$$L = R_1 \cos\theta_1 + R_2(\cos\theta_2 + \cos\theta_3) + R_3(\cos\theta_4 + \cos\theta_5) + \dots$$

$$+ R_{n-1}(\cos\theta_{2n-4} + \cos\theta_{2n-3}) + R_n \cos\theta_{2n-2} + \sqrt{R_1^2 + R_n^2 - 2R_1R_n\cos x}$$

$$\sqrt{l} = \overline{AB} = \sqrt{R_1^2 + R_n^2 - 2R_1R_n\cos x}$$

有了定義，我們將此問題分兩種情形討論，第一種：n 為奇數，第二種：n 為偶數。

Case1 $n=2k+1, k\in N$：

$$\cos x=\cos\left(\pi(3-n)+\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i\right)=\cos(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)$$

在ΔAOC中，由正弦定理可將θ_2透過反三角函數替換為θ_1的形式：

$$\frac{R_1}{\sin\theta_2}=\frac{R_2}{\sin\theta_1}$$

$$\sin\theta_2=\frac{R_1}{R_2}\sin\theta_1$$

$$\theta_2=\sin^{-1}(\frac{R_1}{R_2}\sin\theta_1)$$

跟三角形時的證明同理，因反三角函數需界定定義域與值域才有意義，因此在此界定$-\frac{\pi}{2}\leq\theta_2\leq\frac{\pi}{2}$，即以下證明僅在$-\frac{\pi}{2}\leq\theta_2\leq\frac{\pi}{2}$時成立，此亦為$0\leq\theta_k\leq\frac{\pi}{2}$條件設置的原因（因為圖形內$\theta_k$不可能為負值，故負值情形不討論），也因此證明結果並不適用於凹多邊形。

而後可把此二者用於周長公式內，並將周長作偏微分，在此我們先將與θ_1無關的點固定（即除了四邊形 OCAB 外各點先固定，其中各點可以為任意一種情形），討論在此情況下周長的最大值會出現在何種情形。

$$n=2k+1, k\in N$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Bigg[R_1\cos\theta_1+R_2\cos(\sin^{-1}(\frac{R_1}{R_2}\sin\theta_1))+R_2\cos\theta_3+\cdots$$

$$+R_{(n-1)}\left(\cos\theta_{(2n-4)}+\cos\theta_{(2n-3)}\right)+R_n\cos\theta_{(2n-2)}+\sqrt{R_1^2+R_n^2-2R_1R_n\cos(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)}\Bigg]$$

$$=-R_1\sin\theta_1-\frac{R_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1}{R_2\sqrt{1-\frac{R_1^2\sin^2\theta_1}{R_2^2}}}+\frac{R_1R_n\sin(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)}{\sqrt{l}}(1+\frac{R_1\cos\theta_1}{R_2\sqrt{1-\frac{R_1^2\sin^2\theta_1}{R_2^2}}})$$

$$=-R_1\sin\theta_1-\frac{R_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}+\frac{R_1R_n\sin(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)}{\sqrt{l}}(1+\frac{R_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}})$$

我們先討論x如下：

$$x=\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i+\pi(3-n)\qquad(n\in 2k+1，k\in N)$$

$$\sin x=\sin\left[\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i+\pi(3-n)\right]=\sin(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)$$

在ΔOAB中，由正弦定理，我們可得：

$$\frac{\sin(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)}{\sqrt{l}}=\frac{\sin x}{\sqrt{l}}=\frac{\sin\theta_{2n}}{R_n}$$

偏微分結果可化為：

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=-R_1\sin\theta_1-\frac{R_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}+\frac{\sin\theta_{2n}R_1R_n}{R_n}\left(1+\frac{R_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)$$

$$=-R_1\sin\theta_1\left(1+\frac{R_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)+R_1\sin\theta_{2n}\left(1+\frac{R_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)$$

$$=\left(R_1+\frac{{R_1}^2\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)(\sin\theta_{2n}-\sin\theta_1)$$

由於$0\le\theta_1\le\frac{\pi}{2}$，所以前項必為正數，代表$\sin\theta_{2n}-\sin\theta_1=0$時周長可能會有極值，又$0\le\theta_1\le\frac{\pi}{2}$，$0\le\theta_{2n}\le\frac{\pi}{2}$，可得在$\theta_{2n}=\theta_1$時，周長可能會有極值。

Case2 $n=2k+2,k\in N$：

若為偶數情形時，計算上會有些許正負號上的差異，不過原理相同。

我們同樣先將與θ_1無關的點固定（即除了四邊形 OCAB 外各點先固定，其中各點可以為任意一種情形），討論在此情況下周長的最大值出現在何種情形。證明如下：

$$\cos x=\cos\left[\pi(3-n)+\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i\right]=-\cos(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Bigg[R_1\cos\theta_1+R_2\cos(\sin^{-1}\left(\frac{R_1}{R_2}\sin\theta_1\right))+R_2\cos\theta_3+\cdots$$

$$+R_{n-1}(\cos\theta_{2n-4}+\cos\theta_{2n-3})+R_n\cos\theta_{2n-2}+\sqrt{R_1^2+R_n^2+2R_1R_n\cos(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)}\Bigg]$$

$$=-R_1\sin\theta_1-\frac{R_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1}{R_2\sqrt{1-\frac{R_1^2\sin^2\theta_1}{R_2^2}}}-\frac{R_1R_n\sin(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)}{\sqrt{l}}\left(1+\frac{R_1\cos\theta_1}{R_2\sqrt{1-\frac{R_1^2\sin^2\theta_1}{R_2^2}}}\right)$$

$$=-R_1\sin\theta_1-\frac{R_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}-\frac{R_1R_n\sin(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)}{\sqrt{l}}\left(1+\frac{R_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)$$

我們先討論x如下：

$$x=\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i+\pi(3-n)\qquad(n\in 2k+2\text{，}k\in\mathrm{N})$$

$$\sin x=\sin\left[\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i+\pi(3-n)\right]=-\sin(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)$$

在ΔOAB中，由正弦定理，我們可得：

$$\frac{\sin(\sum_{i=1}^{2n-2}\theta_i)}{\sqrt{l}}=-\frac{\sin x}{\sqrt{l}}=-\frac{\sin\theta_{2n}}{R_n}$$

偏微分結果可化成：

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=-R_1\sin\theta_1-\frac{R_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}+\frac{\sin\theta_{2n}R_1R_n}{R_n}\left(1+\frac{R_1\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)$$

$$=\left(R_1+\frac{{R_1}^2\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)(\sin\theta_{2n}-\sin\theta_1)$$

由於$0\le\theta_1\le\frac{\pi}{2}$，所以前項必為正數，代表$\sin\theta_{2n}-\sin\theta_1=0$時周長可能會有極值，又$0\le\theta_1\le\frac{\pi}{2}$，$0\le\theta_{2n}\le\frac{\pi}{2}$，可得在$\theta_{2n}=\theta_1$時，周長可能會有極值。

統一討論奇數邊形與偶數邊形

由 Case1 及 Case2 可知任意 n 邊形，在$\theta_{2n}=\theta_1$的情況，周長可能會有極值。

但此結果是否真為極值及是否為最大值或最小值亦需深入探討，同樣，我們將在與θ_1無關的點皆固定（即除了四邊形 OCAB 外的各點先固定）的情況下討論，證明如下：

已知周長偏微分後，不論是偶數邊形或奇數邊形，其結果皆為：

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=\left(R_1+\frac{{R_1}^2\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)(\sin\theta_{2n}-\sin\theta_1)$$

在$0\le\theta_k\le\frac{\pi}{2}$的條件下，當 θ_1變大時，因$\theta_2=sin^{-1}(\frac{R_1}{R_2}sin\theta_1)$，$\theta_2$亦會變大，而$\angle AOC=\pi-(\theta_1+\theta_2)$會因此而變小，又$x=\angle COB-\angle AOC$，其中$\angle COB$為一定值，故$\angle AOC$變小時$x$會增大，而$\theta_{2n}+\theta_{2n-1}=\pi-x$會因此而變小，又在$\Delta AOB$中，根據正弦定理$\frac{sin\theta_{2n}}{R_n}=\frac{sin\theta_{2n-1}}{R_1}$，$\theta_n$、$\theta_{2n-1}$會同時增或減，故當$\theta_{2n}+\theta_{2n-1}$變小時，二者皆變小，得當 θ_1變大時， θ_{2n} 會變小，所以θ_1由小變大時，會有以下情形：

$$若\ \theta_1<\theta_{2n}\quad,\qquad 則\frac{\partial L}{\partial\theta_1}>0$$

$$若\ \theta_1=\theta_{2n}\quad,\qquad 則\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=0$$

$$若\ \theta_1>\theta_{2n}\quad,\qquad 則\frac{\partial L}{\partial\theta_1}<0$$

由其斜率的變化可知當$\theta_1=\theta_{2n}$ 時周長有極大值，且由偏微分的結果可知只有此時斜率為零，代表在定義域內，除$\theta_1=\theta_{2n}$ 的情形外，不會再有極值點，故除此情形外，不論θ_1是增加或減少，L 值只會減少，定義域端點時的周長值亦不會大於它，得$\theta_1=\theta_{2n}$ 時，周長為最大值。

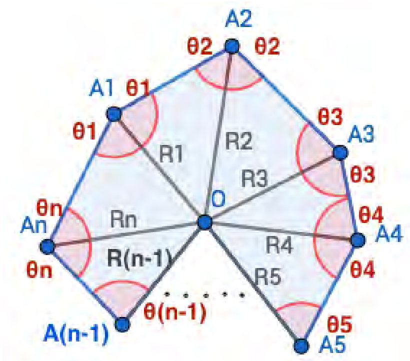
同理可應用於其他各半徑，由此我們可以得到一個結果：只要形成之 n 邊形，有任何一個角沒有被對應的半徑平分，就不會得到最大周長（只要固定其他半徑，並將該角調成被對應的半徑平分就可得到更大的周長），故可推得唯有當每個角都被半徑平分時，才有可能有周長最大值（存在唯一性將於後面證明），其中的邏輯思考和三角形時的證明是類似的。因此我們可得出結論：

【定理2.1.2】：n 個同心圓($n \geq 3$，$n \in N$)，在其上各取一點，依照順／逆時針連結所成之 n 邊形，在圓心於圖形內，且$0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2}$（k=1,2,……,2n）（定義同上面證明）的情況下，各半徑恰好與對應之各角之角平分線重疊時可得到周長最大值圖形。

（2） 存在唯一性

【定理2.1.2】所說周長最大值的圖形，其存在唯一性仍需討論，因此以下我們將來討論此圖形的存在唯一性。

我們取最短的半徑的為R_1，之後依照R_2,R_3 ……，R_n的順序順時針排列。圖形（圖十三）（僅示意圖）先假設符合【定理2.1.2】的情況，且符合$0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2}(k = 1,2, \dots\dots, n)$。



圖十三

存在性：

在ΔA_1OA_2中，由正弦定理，我們可得到：

$$\frac{R_1}{sin\theta_2} = \frac{R_2}{sin\theta_1} \Rightarrow R_1 sin\theta_1 = R_2 sin\theta_2$$

同理在ΔA_2OA_3中，由正弦定理可得：

$$\frac{R_2}{sin\theta_3} = \frac{R_3}{sin\theta_2} \Rightarrow R_2 sin\theta_2 = R_3 sin\theta_3$$

並可推廣得到，在ΔA_kOA_{k+1}中（k =1,2, … … , n，其中我們定義$A_{\mathbf{n+1}}$為A_1，$A_{\mathbf{n+2}}$為A_2）：

$$\frac{R_k}{sin\theta_{k+1}} = \frac{R_{k+1}}{sin\theta_k} \Rightarrow R_k sin\theta_k = R_{k+1} sin\theta_{k+1}$$

將式子整理一下，可得：

$$R_1 sin\theta_1 = R_2 sin\theta_2 = R_3 sin\theta_3 = R_k sin\theta_k$$

$$\Rightarrow \theta_k = sin^{-1}(\frac{R_1}{R_k} sin\theta_1)$$

由於$R_1 \le R_k$，所以$\frac{R_1}{R_k} sin\theta_1 \le 1$，可保證$\theta_k$成立，再由$0 \le \theta_k \le \frac{\pi}{2}$得知：一個$\theta_1$僅對應一個$\theta_k$，可表示成函數如下：

$$\theta_k = f_k(\theta_1) = sin^{-1}(\frac{R_1}{R_k} sin\theta_1)$$

由多邊形的內角和，可得：

$$2\sum_{k=1}^{n} \theta_k = (n-2)\pi \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1) = (n-2)\frac{\pi}{2}$$

因此我們要做的便是確認$\begin{cases} f_k(\theta_1) = sin^{-1}(\frac{R_1}{R_k} sin\theta_1) \\ \sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1) = (n-2)\frac{\pi}{2} \end{cases}$有沒有解。我們先做以下處理：我們先只考慮上式，而不與圖形做結合（亦即以下討論$f_k(\theta_1)$、$\sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1)$僅考慮上式的關係，視為$\theta_1$的函數，為變動數），再來求函數$\sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1)$有沒有可能等於$(n-2)\frac{\pi}{2}$，若有則圖形成立，討論如下：

在$0 \le \theta_k \le \frac{\pi}{2}$的情形下：$\frac{R_1}{R_k} sin\theta_1$為一連續函數，可得$f_k(\theta_1) = sin^{-1}(\frac{R_1}{R_k} sin\theta_1)$在各個$k$的情形下亦分別為一連續函數，故$\sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1)$亦為一連續函數。當$\theta_1 = 0$，則$\sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1) = 0$，若$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$時，$\sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1) \ge (n-2)\frac{\pi}{2}$，則因$\sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1)$為一連續函數，我們可依據中間值定理得知必至少有一個θ_1使得$\sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1) = (n-2)\frac{\pi}{2}$成立，而此情形確有可能存在，此時存在性得以確立。

唯一性：

在此我們仍先只考慮上式。在$0 \le \theta_k \le \frac{\pi}{2}$的情形下，我們可由$f_k(\theta_1) = sin^{-1}(\frac{R_1}{R_k} sin\theta_1)$得知：當$\theta_1$變大時，$f_k(\theta_1)$必變大，可得$\sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1)$為一嚴格遞增函數。在存在性成立時，可得至少有一組解使得$\sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1) = (n-2)\frac{\pi}{2}$，又因$\sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1)$為一嚴格遞增函數，故僅有一組解，唯一性因此成立。

我們可得出結論：

【定理2.2】：當聯立方程式$\begin{cases}\boldsymbol{\theta_k = sin^{-1}(\frac{R_1}{R_k}sin\theta_1)} \\ \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}\theta_k = (n-2)\frac{\pi}{2}}\end{cases}$有解$(\boldsymbol{k = 1, 2, \ldots\ldots, n})$時，【定理2.1.2】所求的最大值圖形存在唯一。由此可知：

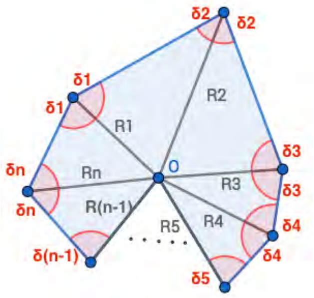
1.在$\boldsymbol{R_1}$過短時，會導致$\boldsymbol{\theta_1}$對應的$\boldsymbol{\theta_k}$過小，使得$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}\theta_k < (n-2)\frac{\pi}{2}}$（僅考慮上式關係）而得不到所求圖形。

2.當 n 值很大時，$\boldsymbol{R_i(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)}$的長短需較為相近才可的得到所求圖形。

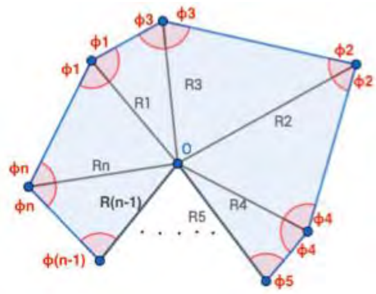
（3） 順序對周長最大值的影響

再來我們討論順序的問題：若$R_k(k = 1,2, \ldots\ldots, n)$之間的順序改變，會對圖形有何影響。

首先我們假設出兩個 n 邊形$(n \geq 3, n \in N)$，第一個是依照R_1,R_2,R_3,⋯⋯,R_n的順序（順時針排序）所得出最大周長的 n 邊形（圖十四），另一個是將R_2, R_3調換，其餘順序不變所得出最大周長的 n 邊形（圖十五）（其中δ_k或ϕ_k為$R_k$$(k = 1,2,3 \ldots\ldots, n)$所平分後的其中一角）。



圖十四



圖十五

依圖十四得：

$$\frac{R_1}{\sin\delta_2} = \frac{R_2}{\sin\delta_1}, \frac{R_2}{sin\delta_3} = \frac{R_3}{\sin\delta_2}, \frac{R_3}{\sin\delta_4} = \frac{R_4}{\sin\delta_3}, \ldots\ldots, \frac{R_n}{\sin\delta_1} = \frac{R_1}{\sin\delta_n}$$
$$R_1 sin\delta_1 = R_2 sin\delta_2 = R_3 sin\delta_3 = R_k sin\delta_k$$
$$\sin\delta_1 = \frac{R_2}{R_1}\sin\delta_2 = \frac{R_3}{R_1}\sin\delta_3 = \frac{R_k}{R_1}\sin\delta_k$$
$$\sum_{k=1}^{n}\delta_k = (n-2)\frac{\pi}{2}$$

將其順序調換後（圖十五）得：

$$\frac{R_1}{\sin\phi_3} = \frac{R_3}{\sin\phi_1}, \frac{R_2}{sin\phi_3} = \frac{R_3}{\sin\phi_2}, \frac{R_2}{\sin\phi_4} = \frac{R_4}{\sin\phi_2}, \ldots\ldots, \frac{R_n}{\sin\phi_1} = \frac{R_1}{\sin\phi_n}$$
$$R_1 sin\phi_1 = R_3 sin\phi_3 = R_2 sin\phi_2 = R_k sin\phi_k$$
$$\sin\phi_1 = \frac{R_2}{R_1}\sin\phi_2 = \frac{R_3}{R_1}\sin\phi_3 = \frac{R_k}{R_1}\sin\phi_k$$
$$\sum_{k=1}^{n}\phi_k = (n-2)\frac{\pi}{2}$$

由上述兩組算式可得，ϕ_k、$\delta_k(k=1,2,\ldots\ldots,n)$皆為聯立方程式

$$\begin{cases}\sin x_1=\frac{R_2}{R_1}\sin x_2=\frac{R_3}{R_1}\sin x_3=\frac{R_k}{R_1}\sin x_k\\ \sum_{k=1}^{n}x_k=(n-2)\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

的解，若此聯立方程式有唯一解，則$\delta_k=\phi_k$，

因我們在上個證明有得出圖形的存在唯一性（即此聯立方程式有唯一解），所以可確定

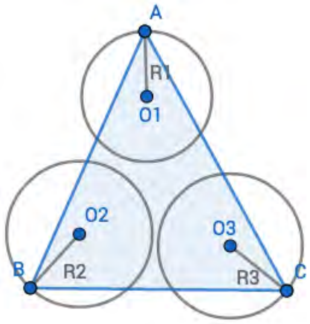
$\delta_k=\phi_k$。以此類推，推論至任何順序時皆有此性質。因此可得出結論：

【定理2.3】:【定理2.1.2】所求圖形，不論半徑（R_k，$k=1,2,\ldots\ldots,n$）排列順序為何，在圖形有最大值時，R_k所平分的角θ_k都不會改變，因此最大周長值亦不會改變。

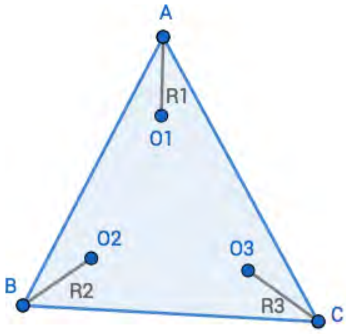
(二) 圓心不共點的情形

1.周長最大值時情形

再來我們將問題延伸入不共心的圓上各點連線圖形之最大周長探討。同之前的證明，我們可以將問題（圖十六）簡化成圖十七。並且我們限定討論的範圍（其中θ_k為半徑與邊長夾的角度，近似於【定理2.1.2】時的定義）： $0\le\theta_k\le\frac{\pi}{2}(k=1,2,\ldots\ldots,2n)$且圓心皆在圖形內。

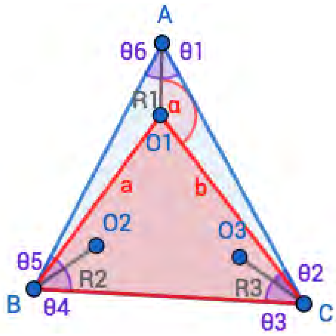


圖十六



圖十七

問題簡化後，我們對不共心圓的討論先從三角形開始。首先，我們固定R_2及R_3的位置，如圖十八，紅色三角形ΔBCO_1的部分被固定住了，再以O_1為軸心轉動R_1，以此探討周長最大值。在此強調我們探討的範圍限於$0\le\theta_k\le\frac{\pi}{2}(k=1,2,\ldots\ldots,6)$，且各圓心皆在圖形內的情形。



圖十八

我們先定義 a、b 與角度：

$$\mathrm{a}=\overline{O_1B}\ ，b=\overline{O_1C}$$

$$2\pi-\angle BO_1C=\phi，\angle AO_1B=\phi-\alpha$$

因為$\angle BO_1C$被固定住了為定值，所以ϕ亦為定值。

因為$\overline{BC}$被固定住了，所以在討論周長最大值時，考慮會變動的$\overline{AB}+\overline{AC}$即可，式子列出如下：

$$\overline{AB}+\overline{AC}=\sqrt{{R_1}^2+\mathrm{a}^2-2\mathrm{a}R_1\cos(\phi-\alpha)}+\sqrt{{R_1}^2+b^2-2R_1\mathrm{b}\cos\alpha}$$

將其作偏微分：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\sqrt{{R_1}^2+\mathrm{a}^2-2\mathrm{a}R_1\cos(\phi-\alpha)}+\sqrt{{R_1}^2+b^2-2bR_1\cos\alpha}\right]$$

$$=\frac{-2\mathrm{a}R_1\sin(\phi-\alpha)}{2\sqrt{{R_1}^2+\mathrm{a}^2-2\mathrm{a}R_1\cos(\phi-\alpha)}}+\frac{2bR_1sin\alpha}{2\sqrt{{R_1}^2+b^2-2bR_1\cos\alpha}}$$

$$=R_1\left[\frac{bsin\alpha}{\sqrt{{R_1}^2+b^2-2bR_1\cos\alpha}}-\frac{\mathrm{a}\sin(\phi-\alpha)}{\sqrt{{R_1}^2+\mathrm{a}^2-2\mathrm{a}R_1\cos(\phi-\alpha)}}\right]$$

在ΔAO_1C與ΔAO_1B中，由正弦定理，我們可得：

$$\frac{sin\alpha}{\sqrt{{R_1}^2+b^2-2bR_1\cos\alpha}}=\frac{sin\alpha}{\overline{AC}}=\frac{sin\theta_1}{b}$$

$$\frac{\sin(\phi-\alpha)}{\sqrt{{R_1}^2+\mathrm{a}^2-2\mathrm{a}R_1\cos(\phi-\alpha)}}=\frac{\sin(\phi-\alpha)}{\overline{AB}}=\frac{sin\theta_6}{\mathrm{a}}$$

因此我們可將偏微分的結果化為：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\sqrt{{R_1}^2+\mathrm{a}^2-2\mathrm{a}R_1\cos(\phi-\alpha)}+\sqrt{{R_1}^2+b^2-2bR_1\cos\alpha}\right]$$

$$=R_1\left(\frac{bsin\theta_1}{b}-\frac{\mathrm{a}sin\theta_6}{\mathrm{a}}\right)=R_1(sin\theta_1-sin\theta_6)$$

因為我們限定$0\leq\theta_1\leq\frac{\pi}{2}$且$0\leq\theta_6\leq\frac{\pi}{2}$，所以當$\theta_6=\theta_1$時，$\overline{AB}+\overline{AC}$可能會有極值，亦即周長可能會有極值。

再來我們討論α與θ_1的關係：

在ΔAO_1C中，由正弦定理可知：

$$\frac{sin\theta_1}{b}=\frac{sin\angle O_1CA}{R_1}\Rightarrow sin\theta_1=\frac{b}{R_1}sin\angle O_1CA$$

$$\theta_1+\angle O_1CA=\pi-\alpha$$

由此可知當α變大時，$\theta_1+\angle O_1CA$會變小。因θ_1、$\angle O_1CA$同時增或減（由上式可得），故θ_1亦會變小。由【定理1.2】的證明過程中，可知θ_1值變小時，θ_6值會變大，因此當α值由小變大時，情形會有如下變化：

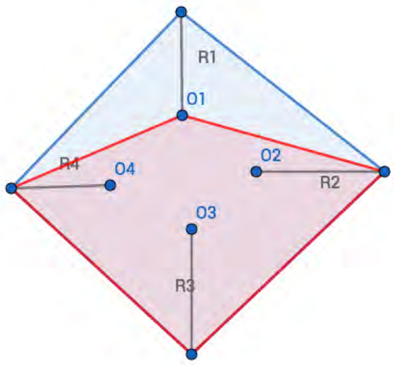
$$\text{若 }\theta_1>\theta_6\text{，則}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\overline{AB}+\overline{AC})>0$$

$$\text{若}\theta_1=\theta_6\text{，則}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\overline{AB}+\overline{AC})=0$$

$$\text{若 }\theta_1<\theta_6\text{，則}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\overline{AB}+\overline{AC})<0$$

由其斜率變化可知當$\theta_1=\theta_6$ 時周長有極大值，且由偏微分的結果可知只有此時斜率為零，代表在定義域內，除$\theta_1=\theta_6$ 的情形外，不會再有極值點，故除此情形外，不論θ_1是增加或減少，周長值只會減少，定義域端點時的周長值亦不會大於它，得$\theta_1=\theta_6$時，周長為最大值。同理可應用於R_2,R_3，推得只要形成之三角形，有任何一角未被對應的半徑平分，則必可找到周長更大的情形，得周長為最大值時，各半徑恰好與對應角之角平分線重疊。

此法也可應用於任意 n 邊形，如圖十九所示：



圖十九

固定R_2,R_3,R_4，使得紅色圖形固定，以O_1為軸心轉動R_1，求最大值，再以此套用到其他各半徑上，證明過程同上證明，只須多做幾次即可。由此可推得結論：

【定理3.1】：n 個不同心圓（$\mathbf{n\geq 3, n\in N}$），在其上各取一點，依照順／逆時針所連成之 n 邊形，當 $\mathbf{0\leq\theta_k\leq\frac{\pi}{2}(k=1,2,\ldots\ldots,2n)}$（定義同上證明）且圓心皆在圖形內的條件下，出現最大周長時，各半徑恰好與對應之各角之角平分線重疊。

二、最大面積

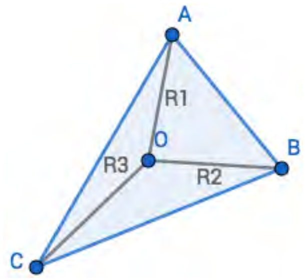
（一）同心圓的情形

1.取三個點

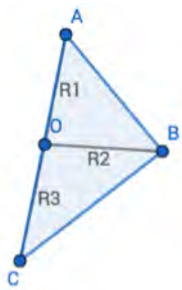
（1）面積最大值圖形

再來，我們討論當圖形面積為最大值時，會有的性質，我們先從較好分析的三角形著手，再來推廣成任意 n 邊形。

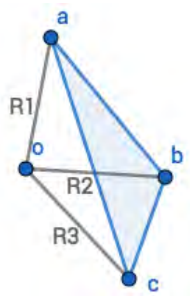
一樣，我們的圖形可有三種情形：圓心在圖形內（圖二十）、圓心在邊上（圖二十一）、圓心在圖形外（圖二十二），其中圖二十一可視為圖二十的一種情形（為方便後續證明，將圖二十二的頂點特用小寫表示）。



圖二十

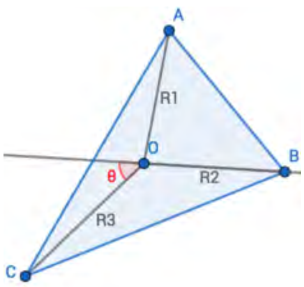


圖二十一

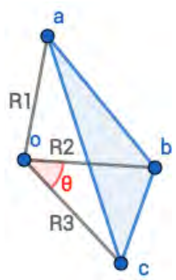


圖二十二

為求最大面積存在於何種圖形，我們先來比較圖二十與圖二十二，首先我們取一組R_1、R_2、R_3，並使R_1、R_2的位置固定，而R_3與R_2或其延伸直線的夾角皆為 θ（如圖二十三、圖二十四），用此組圖形來做對應與比較 。



圖二十三



圖二十四

由於R_1、R_2的位置固定且相同，故$a\Delta AOB = a\Delta \mathrm{aob}$，再利用三角形面積公式可得：

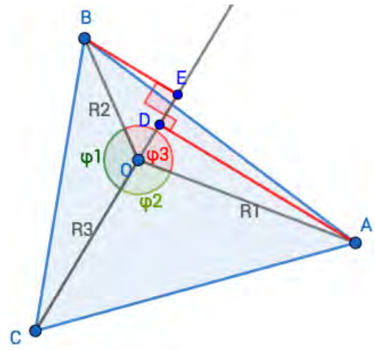
$$a\Delta\mathrm{COB} = \frac{1}{2}R_2R_3\sin(\pi-\theta) = a\Delta cob$$

$$a\Delta ABC = a\Delta AOB + a\Delta\mathrm{COB} + a\Delta\mathrm{AOC} \geq a\Delta\mathrm{aob} + a\Delta\mathrm{cob} - a\Delta\mathrm{aoc} = a\Delta abc$$

其中考慮等於，是為了將圖二十一的情形也考量進來（此時$a\Delta\mathrm{AOC} = a\Delta\mathrm{aoc} = 0$）。由此可知圓心在圖形外部時，皆可找到一圓心在內部的圖形與之對應且面積更大，因此圓心於圖形外部時，並不會有最大面積。可得出結論：

【定理4.1.1】：三同心圓，在其上各取一點，依照順／逆時針連成之三角形出現面積最大值時，圓心會位於所成圖形內（含邊界)。

接著進一步討論最大面積時有的性質，我們先畫出圖二十五，為方便後續證明，我們畫出 A 點與 B 點在射線 CO 上的垂足 D 點與 E 點，其中各半徑間的夾角我們定義為φ_1、φ_2、φ_3，由於最大值出現在圓心於圖形內的情形，我們可得範圍：$0 \le \varphi_1 \le \pi,$ $0 \le \varphi_2 \le \pi, 0 \le \varphi_3 \le \pi$。



圖二十五

由此圖我們可以得ΔABC面積σ為：

$$\sigma = \frac{1}{2}\mathrm{R}_1 R_2 sin\varphi_3 + \frac{1}{2}\mathrm{R}_1 R_3 sin\varphi_2 + \frac{1}{2}\mathrm{R}_2 R_3 sin\varphi_1$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{R}_1 R_2 sin\varphi_3 + \frac{1}{2}\mathrm{R}_1 R_3 sin[2\pi - (\varphi_1 + \varphi_3)] + \frac{1}{2}\mathrm{R}_2 R_3 sin\varphi_1$$

先固定φ_3（意即固定R_1、R_2，以O點為軸心轉動R_3），而後作偏微分

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\sigma = -\frac{1}{2}\mathrm{R}_1 R_3\, cos[2\pi - (\varphi_1 + \varphi_3)] + \frac{1}{2}\mathrm{R}_2 R_3 cos\varphi_1$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{R}_1 R_3 cos\varphi_2 + \frac{1}{2}\mathrm{R}_2 R_3 cos\varphi_1 = \frac{1}{2}R_3(R_2 cos\varphi_1 - R_1 cos\varphi_2)$$

因φ_3為定值，可知當φ_1變大（$\cos\varphi_1$ 變小）時，φ_2就會變小（$\cos\varphi_2$變大)，可知當φ_1由小變大（此時$\cos\varphi_1$ 會由大變小，$cos\varphi_2$會由小變大）時，會有如下情形：

$$\text{若 } R_2 cos\varphi_1 > R_1 cos\varphi_2 \text{，則} \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\sigma > 0$$

$$\text{若 } R_2 cos\varphi_1 = R_1 cos\varphi_2 \text{，則} \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\sigma = 0$$

$$\text{若 } R_2 cos\varphi_1 < R_1 cos\varphi_2 \text{，則} \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\sigma < 0$$

由其斜率的變化可知當$R_2cos\varphi_1 = R_1cos\varphi_2$時面積有極大值，且由偏微分的結果可知只有此時斜率為零，代表在定義域內，除$R_2cos\varphi_1 = R_1cos\varphi_2$的情形外，不會再有極值點，故除此情形外，不論$\varphi_1$是增加或減少，$\sigma$值只會減少，定義域端點時的面積值亦不會大於它，得$R_2cos\varphi_1 = R_1cos\varphi_2$時，面積為最大值。

由圖形可知當$R_2cos\varphi_1 = R_1cos\varphi_2$時，$\overline{OD} = \overline{OE}$，意即$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$。同理可應用於$R_2$及$R_3$，並可推得所形成之三角形，只要其半徑延伸的直線未垂直對應之邊長，必可找到面積更大的情形（因而此時不會有面積最大值），可得當圓心 O 點為三角形垂心時，面積才會有最大值。得到結論：

【定理4.1.2】：三同心圓，在其上各取一點，依順／逆時針連成之三角形，當圓心跟三角形垂心重合時會出現最大面積值圖形。

（2）存在唯一性

【定理4.1.2】所說的面積最大值圖形的存在唯一性尚需證明（因比多邊形的複雜情形單純許多，故獨立列一項討論）

存在性

我們從先前的證明導出一個性質（其中我們取最大半徑為R_1）（仍參照圖二十五）：

$$R_2cos\varphi_1 = R_1cos\varphi_2 \Rightarrow cos\varphi_1 : cos\varphi_2 = R_1 : R_2$$

$$R_3cos\varphi_1 = R_1cos\varphi_3 \Rightarrow cos\varphi_1 : cos\varphi_3 = R_1 : R_3$$

$$R_2cos\varphi_3 = R_3cos\varphi_2 \Rightarrow cos\varphi_3 : cos\varphi_2 = R_3 : R_2$$

$$\Rightarrow cos\varphi_1 : cos\varphi_2 : cos\varphi_3 = R_1 : R_2 : R_3$$

$$\Rightarrow cos\varphi_2 = \frac{R_2}{R_1} cos\,\varphi_1 \text{，} cos\varphi_3 = \frac{R_3}{R_1} cos\,\varphi_1$$

並且由圖形可得：

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$$

因此我們要做的便是確認$\begin{cases} cos\varphi_2 = \frac{R_2}{R_1} cos\,\varphi_1 \text{，} cos\varphi_3 = \frac{R_3}{R_1} cos\varphi_1 \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi \end{cases}$有沒有解。我們先做以下處理：我們先只考慮上式，而不與圖形做結合（亦即以下討論$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$僅考慮上式的關係，視為$\varphi_1$的函數，為變動數），再來求函數$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$有沒有可能等於$2\pi$，若有則圖形成立。討論如下：

因為$R_1 \geq R_2$且$R_1 \geq R_3$，故在$0 \leq \varphi_1 \leq \pi$的條件下，$-1 \leq \frac{R_2}{R_1} cos\varphi_1 \leq 1$，$-1 \leq \frac{R_3}{R_1} cos\varphi_1 \leq 1$，都可對應到一個$\varphi_2$與$\varphi_3$，我們可列式：

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_1 + cos^{-1}(\frac{R_2}{R_1} cos\varphi_1) + cos^{-1}(\frac{R_3}{R_1} cos\varphi_1)$$

並由式子得知其為一連續函數。

當$\varphi_1 = 0$，則$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$，若當$\varphi_1 = \pi$時，$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \geq 2\pi$，則因$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$為一連續函數，我們可依據中間值定理得知必至少有一組解使得$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$成立，而此情形確有可能存在，此時存在性得以確立。

唯一性

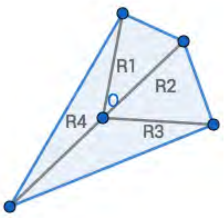
在此我們仍先只考慮上式。在$0 \leq \varphi_1 \leq \pi$的範圍內，我們可由$cos\varphi_2 = \frac{R_2}{R_1} \cos\varphi_1$，$cos\varphi_3 = \frac{R_3}{R_1} cos\varphi_1$得知：且當$\varphi_1$增大時，$\varphi_2$、$\varphi_3$都會增大，可知$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$為一嚴格遞增函數。在存在性成立時，可得至少有一組解使得$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$，又因$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$為一嚴格遞增函數，故僅有一組解，唯一性因此成立。我們得出結論：

【定理4.1.3】：【定理4.1.2】所求最大面積之圖形，會在聯立方程式 $\begin{cases} \boldsymbol{cos\varphi_1 : cos\varphi_2 : cos\varphi_3 = R_1 : R_2 : R_3} \\ \boldsymbol{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi} \end{cases}$ 有解時（定義同上證明），有存在唯一性。

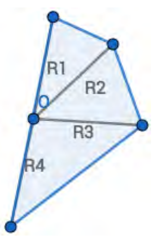
2.取任意 n 個點（$\mathbf{n \geq 3, n \in N}$）

（1）面積最大值圖形

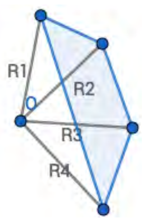
當在 n 個同心圓上($n \geq 3, n \in N$)，取 n 個點，依順／逆時針連接，繪成一 n 邊形時，跟三角形類似，可能有三種情形，分別是圓心在所成圖形的內部（圖二十六）、邊上（圖二十七）與外部（圖二十八），以下以四邊形為代表，任意 n 邊形都可適用。



圖二十六



圖二十七

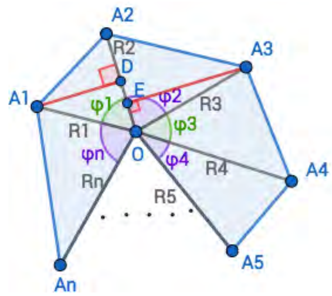


圖二十八

藉由與上面三角形同樣的證明，我們可得到最大面積值會出現於圖二十六及二十七中，其中圖二十七可視作圖二十六的一種情形，理由跟三角形時的證明相同。由此可得結論：

【定理5.1.1】n 個同心圓($n \geq 3, n \in N$)，在其上各取一點，依照順／逆時針連成之 n 邊形出現最大面積值時，圓心會位於所成圖形內（含邊界）。

再來我們推廣至任意 n 邊形，圖形（圖二十九）繪製如下（由於面積最大值的圓心在圖形內，故$0 \le \varphi_k \le \pi$，$k = 1,2,\dots\dots,n$），在此強調，此次探討並未限於凸多邊形，而是探討所有情形（因φ_k的範圍是推得的而非刻意制定，所以並無前提限制）。我們再規定$R_k(k = 1,2,\dots\dots,n)$會依照$k = 1,2,3,\dots\dots,n$順時針排列（即半徑間的相對位置不對調）：



圖二十九

我們可依此列出圖形面積σ：

$$\sigma = \frac{1}{2}R_1R_2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}R_2R_3\sin\varphi_2 + \frac{1}{2}R_3R_4\sin\varphi_3 + \cdots + \frac{1}{2}R_nR_1\sin\varphi_n$$

$$= \tfrac{1}{2}R_1R_2\sin\varphi_1 + \tfrac{1}{2}R_2R_3\sin[2\pi - (\varphi_1 + \textstyle\sum_{k=3}^{n}\varphi_k)] + \tfrac{1}{2}R_3R_4\sin\varphi_3 + \cdots + \tfrac{1}{2}R_nR_1\sin\varphi_n$$

我們先固定$\varphi_i(i = 3,4,\dots\dots,n)$（即固定$R_1$以及$R_i(i = 3,4,\dots\dots,n)$，而以O點為軸心轉動$R_2$），然後作偏微分：

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\sigma = \frac{1}{2}R_1R_2\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}R_2R_3\cos[2\pi - (\varphi_1 + \sum_{k=3}^{n}\varphi_k)]$$

$$= \frac{1}{2}R_1R_2\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}R_2R_3\cos\varphi_2 = \frac{1}{2}R_2(R_1\cos\varphi_1 - R_3\cos\varphi_2)$$

因為$\varphi_1 + \varphi_2$為一定值，所以當φ_1變大（$\cos\varphi_1$變小）時，φ_2會變小（$cos\varphi_2$會變大），故可知當φ_1由小變大時，會有如下的情形：

$$若\ R_1\cos\varphi_1 > R_3\cos\varphi_2\ ，則\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\sigma > 0$$

$$若\ R_1\cos\varphi_1 = R_3\cos\varphi_2\ ，則\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\sigma = 0$$

$$若\ R_1\cos\varphi_1 < R_3\cos\varphi_2\ ，則\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\sigma < 0$$

由其斜率的變化可知當$R_1cos\varphi_1 = R_3cos\varphi_2$時面積有極大值，且由偏微分的結果可知只有此時斜率為零，代表在定義域內，除$R_1cos\varphi_1 = R_3cos\varphi_2$的情形外，不會再有極值點，故除此情形外，不論$\varphi_1$是增加或減少，$\sigma$值只會減少，定義域端點時的面積值亦不會大於它，得$R_2cos\varphi_1 = R_1cos\varphi_2$時，面積為最大值。又參照圖形可知：

$|R_1cos\varphi_1| = \overline{OD}$，$|R_3cos\varphi_2| = \overline{OE}$，代表在$\overline{OD} = \overline{OE}$時，面積會有最大值（此時

$\overleftrightarrow{A_1A_3} \perp \overleftrightarrow{OA_2}$），同理可應用於各半徑，推得只要形成之 n 邊形，不符合$\overline{A_kA_{k+2}} \perp \overleftrightarrow{OA_{k+1}}$ $(\mathrm{k} = 1,2,\ldots\ldots,\mathrm{n}$，其中$A_{\mathrm{n}+1}$為$A_1$，$A_{\mathrm{n}+2}$為$A_2)$，則必可找到面積更大的圖形，代表當 $\overline{A_kA_{k+2}} \perp \overleftrightarrow{OA_{k+1}}$時，才有面積最大值。得到結論：

【定理5.1.2】：當共心的 n 個的圓（$\mathbf{n \geq 3, n \in N}$），上頭各取一點依順／逆時針連成的圖形，半徑依某順序排列，且其半徑相對位置不對調的情況下，會在$\overline{\boldsymbol{A_kA_{k+2}}} \perp \overleftrightarrow{\boldsymbol{OA_{k+1}}}$ $(\boldsymbol{k = 1, 2, \ldots\ldots, n}$，其中$\boldsymbol{A_{n+1}}$為$\boldsymbol{A_1}$，$\boldsymbol{A_{n+2}}$為$\boldsymbol{A_2})$時，有面積的最大值。

（2）存在唯一性

接著，我們來探討【定理5.1.2】所求面積最大圖形的存在唯一性，仍參照圖二十九。

存在性

由上面的證明我們可得：

$$\mathrm{R_1}\cos\varphi_1 = \mathrm{R_3}\cos\varphi_2\text{，}\mathrm{R_2}\cos\varphi_2 = \mathrm{R_4}\cos\varphi_3\text{，}\mathrm{R_3}\cos\varphi_3 = \mathrm{R_5}\cos\varphi_4\text{，}\cdots$$

整理後可得：

$$\cos\varphi_1 = \frac{\mathrm{R_2R_3}}{\mathrm{R_1R_2}}\cos\varphi_2 = \frac{\mathrm{R_3R_4}}{\mathrm{R_1R_2}}\cos\varphi_3 = \frac{\mathrm{R_4R_5}}{\mathrm{R_1R_2}}\cos\varphi_4 = \cdots = \frac{\mathrm{R_nR_1}}{\mathrm{R_1R_2}}\cos\varphi_\mathrm{n}$$

並由圖形可得：

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k = 2\pi$$

因此我們便是要確認$\begin{cases}\cos\varphi_1 = \frac{\mathrm{R_2R_3}}{\mathrm{R_1R_2}}\cos\varphi_2 = \frac{\mathrm{R_3R_4}}{\mathrm{R_1R_2}}\cos\varphi_3 = \frac{\mathrm{R_4R_5}}{\mathrm{R_1R_2}}\cos\varphi_4 = \cdots = \frac{\mathrm{R_nR_1}}{\mathrm{R_1R_2}}\cos\varphi_\mathrm{n} \\ \sum_{k=1}^{n}\varphi_k = 2\pi\end{cases}$

有沒有解。我們先做以下處理：我們先只考慮上式，而不與圖形做結合（亦即以下討論$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$僅考慮上式的關係，視為φ_1的函數，為變動數），再來求函數$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$有沒有可能等於2π，若有則圖形成立，討論如下：

由上式關係可知$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$為一連續函數。當$\varphi_1=0$，則$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k = 0$，若當$\varphi_1$到達可達到的最大值時（因需要考慮$\varphi_2,\varphi_3,\ldots\ldots,\varphi_n$要在定義域內，所以$\varphi_1$會有所限制），$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k \geq 2\pi$，則因$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$為一連續函數，我們可依據中間值定理得知必至少有一組解使得$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k = 2\pi$成立，而此情形確有可能存在，此時存在性得以確立。

唯一性：

在此我們仍先只考慮上式。在$0 \leq \varphi_k \leq \pi(k = 1,2,\ldots\ldots,n)$的範圍內，我們可由上式得知：當$\varphi_1$增加時，$\varphi_2,\varphi_3,\ldots\ldots,\varphi_n$都會增加，可知$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$為一嚴格遞增函數。在存在性成立時，可得至少有一組解使得$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k = 2\pi$，又因$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$為一嚴格遞增函數，故僅有一組解，唯一性因此成立。得到結論：

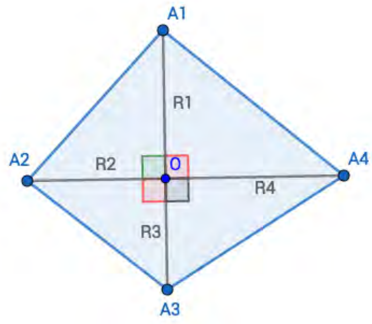
【定理5.2】:【定理5.1.2】所求最大面積之圖形，會在聯立方程式

$$\begin{cases} \cos\varphi_1 = \frac{R_2R_3}{R_1R_2}\cos\varphi_2 = \frac{R_3R_4}{R_1R_2}\cos\varphi_3 = \frac{R_4R_5}{R_1R_2}\cos\varphi_4 = \cdots = \frac{R_nR_1}{R_1R_2}\cos\varphi_n \\ \sum_{k=1}^{n}\varphi_k = 2\pi \end{cases}$$

有解時，有存在唯一性。

（3）順序對面積最大值的影響

至於半徑的順序對調，則會影響到面積的最大值，舉四邊形的例子如下：在四邊形的情形中，有最大面積時（如圖三十），$\overline{A_2A_4} \perp \overline{A_1A_3}$，面積值為$\frac{1}{2}(R_1+R_3)\times(R_2+R_4)$；當$R_1$和$R_2$對調後，面積值會變為$\frac{1}{2}(R_2+R_3)\times(R_1+R_4)$。此二者面積值並不一定相同，可知當順序對調後，最大面積值並不一定相同。



圖三十

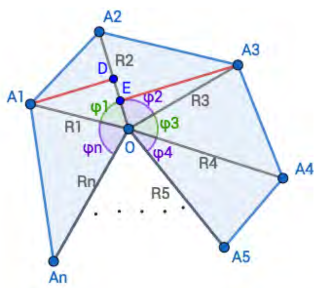
我們也可以從另一個角度來探討，由先前的證明可知，在圖二十九面積有最大值時，

$$\cos\varphi_1 = \frac{R_2R_3}{R_1R_2}\cos\varphi_2 = \frac{R_3R_4}{R_1R_2}\cos\varphi_3 = \frac{R_4R_5}{R_1R_2}\cos\varphi_4 = \cdots = \frac{R_nR_1}{R_1R_2}\cos\varphi_n \text{ ， } \sum_{k=1}^{n}\varphi_k = 2\pi$$

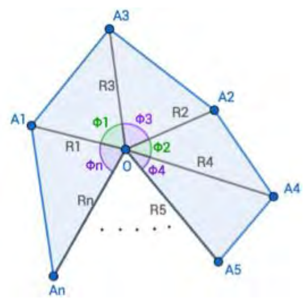
我們將R_2與R_3對調後可得圖三十一，在其面積有最大值時，

$$\cos\phi_1 = \frac{R_3R_2}{R_1R_3}\cos\phi_3 = \frac{R_2R_4}{R_1R_3}\cos\phi_3 = \frac{R_4R_5}{R_1R_3}\cos\phi_4 = \cdots = \frac{R_nR_1}{R_1R_3}\cos\phi_n \text{ ， } \sum_{k=1}^{n}\phi_k = 2\pi$$

兩相對照下，會發現φ_k並不一定會與ϕ_k相同，而兩個圖形亦會相差許多，面積值便不一定相同。(圖形僅示意順序對調)



圖二十九



圖三十一

因此我們可得到結論：

當形成【定理5.1.2】所求最大面積之圖形時，半徑的順序會影響到最大面積值。

（二） 圓心不共點的情形

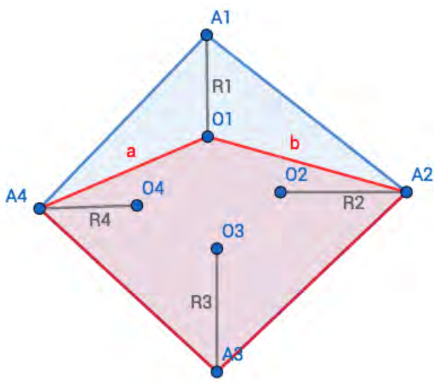
1.面積最大值時情形

接下來，我們繼續來探討不共心的情形下，面積最大值圖形會出現何種性質。

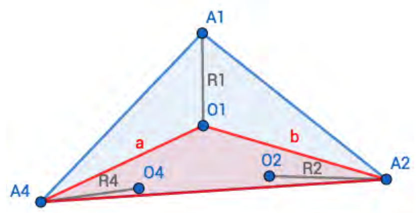
在先前同心圓的討論，主要是探討圓心在圖形內的情況，這在同心圓時並無問題，因為我們證明過其最大值會出現在圓心在圖形內的情況，但在非同心圓的情形則無法確定。因此我們分兩種情形討論，第一為圓心都在圖形內，第二為有圓心在圖形外。

Case1：圓心都在圖形內

我們以四邊形（如圖三十二）的情形來看，可由此推得任意 n 邊形的情形 。（其中$\overline{A_4O_1}=$ a ，$\overline{A_2O_1}=b$）



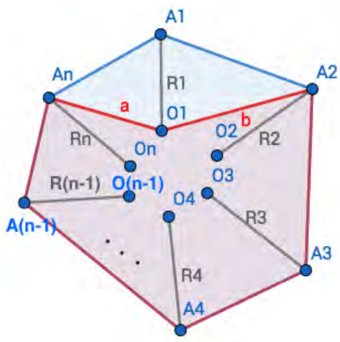
圖三十二



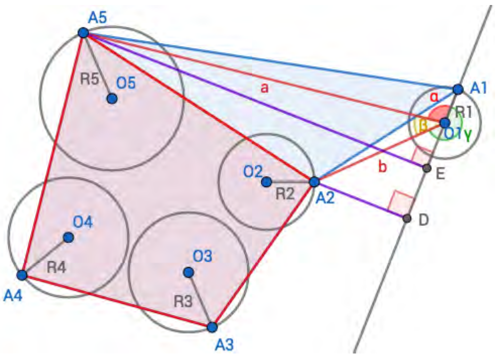
圖三十三

我們先固定住R_2、R_3、R_4（即紅色區塊固定不動，a, b為常數），以O_1點為軸心轉動R_1來探討何時有面積最大值，發現可將問題看作探討圖三十三的情形（因為只需探討藍色部分的變化），而圖三十三可視作共心而半徑分別為R_1、a、b的三角形，由先前的證明可得：當面積有最大值時，$\overleftrightarrow{A_1O_1}\perp\overleftrightarrow{A_2A_4}$。同理可推得其他各半徑。

並且在探討任意 n 邊形（$n\geq 3, n\in N$）（如圖三十四（下頁），其中R_4至R_{n-1}之間的圖形僅為示意）時亦可用此法來解：固定$R_i(i=2,3,\dots\dots,n)$（紅色區塊，此時a、b固定），並以O_1為軸心轉動R_1，此時只需探討$A_1A_2O_1A_n$圖形，可適用前面證明任意 n 邊形面積最大值時使用的證明，得出面積有最大值時，$\overleftrightarrow{A_nA_2}\perp\overleftrightarrow{O_1A_1}$，同理可應用於各半徑。



圖三十四



圖三十五

Case2：有圓心在圖形外

我們先畫一個五邊形（圖三十五）來探討，由此可推得任意 n 邊形。

首先我們先固定R_2、R_3、R_4、R_5的位置（亦即紅色四邊形$A_2A_3A_4A_5$固定不變），只以O_1為軸心轉動R_1來探討，此時$\overline{A_5O_1}$與$\overline{A_2O_1}$固定不變，令其長度分別為a、b，其中夾角β為定值。利用面積公式列出$\Delta A_5A_1A_2$面積σ如下：

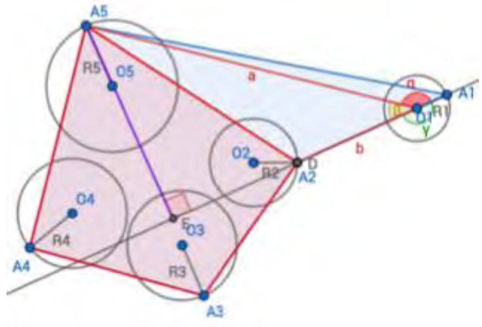
$$\sigma = a\Delta A_5A_1A_2 = \frac{1}{2}aR_1 sin\alpha + \frac{1}{2}absin\beta + \frac{1}{2}bR_1\sin\gamma$$
$$= \frac{1}{2}aR_1 sin\alpha + \frac{1}{2}absin\beta + \frac{1}{2}bR_1\sin(2\pi - \alpha - \beta)$$

其中若有角度的正弦值為負，可當作扣除掉其所形成的面積，依然可適用此公式。

而後作偏微分：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\sigma = \frac{1}{2}aR_1 cos\alpha - \frac{1}{2}bR_1\cos\gamma = \frac{1}{2}R_1(acos\alpha - b\cos\gamma)$$

在此情形下$acos\alpha - b\cos\gamma = 0$並不會只有一組解（因為角度值可大於$\pi$），代表極值點並不一定只有一個，故須探討函數$\sigma$圖形的端點。此函數圖形的端點為$\alpha = 0$與$\alpha = 2\pi - \beta$，在此情形下，兩者所成的三角形皆會在$\Delta A_5O_1A_2$內，故其面積小於$a\Delta A_5O_1A_2$，但由圖形可知，我們必可找到至少一個圖形，使得$\Delta A_5A_1A_2$涵蓋$\Delta A_5O_1A_2$（如在$\alpha$=$\pi - \beta$時，如下頁圖三十六），此時圖形面積大於$\alpha = 0$與$\alpha = 2\pi - \beta$時圖形面積，可知在最大值不在端點，而存在於$\alpha \in (0\,, 2\pi - \beta)$之中的極值點上，又唯有在$acos\alpha = b\cos\gamma$時可能有極值點，雖然$acos\alpha = b\cos\gamma$有多於一組解，但仍可得：在面積最大值時，$acos\alpha = b\cos\gamma$必成立，此時$\overline{O_1E} = |acos\alpha| = |b\cos\gamma| = \overline{O_1D} \Rightarrow \overleftrightarrow{A_5A_2} \perp \overleftrightarrow{A_1O_1}$，同理可應用於任意 n 邊形有此情況者。



圖三十六

綜合討論（不論圓心在圖形外或內）：

綜合 Case1及 Case2的討論，可得只要形成之 n 邊形，在面積有最大值時，$\overleftrightarrow{A_kA_{k+2}} \perp \overleftrightarrow{O_{k+1}A_{k+1}}(k=1,2,\ldots\ldots,n$，其中$A_{n+1}$為$A_1$，$A_{n+2}$為$A_2)$。可得出結論：

【定理6.1】：當不共心的 n 個的圓$(\mathbf{n \geq 3, n \in N})$，上頭各取一點依順／逆時針順序所連成的圖形，在面積有最大值時，$\overleftrightarrow{A_kA_{k+2}} \perp \overleftrightarrow{O_{k+1}A_{k+1}}(k=1,2,\ldots\ldots,n$，且其中$A_{n+1}$為$A_1$，$A_{n+2}$為$A_2)$。

（三）橢圓情形（特例）

1.面積最大值圖形

探討完圓形後，我們欲探究橢圓，目前僅得特例情形：當各橢圓的長軸共線、中心共點且各橢圓的長軸長與短軸長成正比時。（令第 k 個橢圓之長軸長為a_k，短軸長為b_k，$k \in N$）

$$\frac{b_k}{a_k} = s \quad (s\text{ 為大於0的常數})$$

此情形之橢圓可由下述方法所得：首先以各橢圓的半長軸為半徑畫圓(圓心取橢圓中心)，再將這些同心圓用矩陣 A 做線性變換。（為方便討論，我們統一將長軸定在x軸上）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

原先在同心圓時的面積最大圖形，經由線性變換後，仍會是橢圓情形時的面積最大圖形，由此便可得出所求圖形，此時的最大面積值為原先的 s 倍。探討條件與同心圓面積最大圖形時一樣，即橢圓中心與該點連線不可對調。

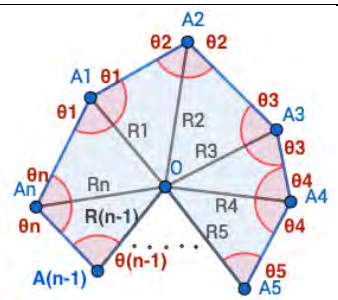
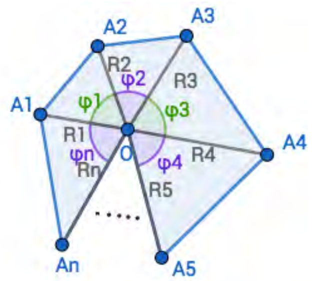
【定理7.1】當各橢圓的長軸共線、中心共點、各橢圓的長軸長與短軸長成正比且橢圓中心與各點連線不對調時，其面積最大值圖形可由對應之同心圓的面積最大圖形經線性變換而得。(詳情見上述證明)

伍、研究成果與結論

雖然在討論的過程中，都以簡化的圖形來呈現，不過我們的主要問題仍是圍繞在圓身上，因為唯有圓是廣泛存在於自然界的現象，波耳模型（雖然後來被電子雲理論所取代，但電子雲模型的 s 軌域仍是圓形）、行星軌道（雖然是橢圓，但圓是其中一種很特殊的橢圓，可當作特殊情形討論），星球的本體（有些星球接近圓）等等，都有圓的影子存在，也因此我們將我們的主題主要定義在圓的領域。

此外，在物理的世界中，許多大師都讚嘆萬物所依循的簡潔原理，並言之為美，在此次的研究中，如繁星般的點，看似毫無規則可循的圖形，竟在最大周長與面積時，有如此漂亮而簡單的性質，實令我們讚嘆不已，以下我們將此次探討的結果陳列成表格如下（其中圖形為示意圖，並未精準調整成最大值的情形）：

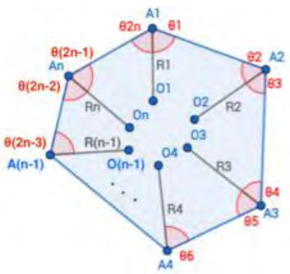
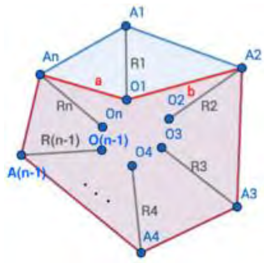
一、同心圓的情形

	最大周長	最大面積
簡化後圖形		
討論範圍	當圓心在圖形內，且$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\theta}_{k} \leq \frac{\pi}{2}$ $(\boldsymbol{k}=\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots \ldots, \boldsymbol{n})$	半徑依某順序排列，其相對位置不對調
何時有最大值	各半徑為對應角之角平分線時	$\overleftrightarrow{A_k A_{k+2}} \perp \overleftrightarrow{O A_{k+1}}(k=1,2,\ldots\ldots,n$，其中$A_{n+1}$為$A_1$，$A_{n+2}$為$A_2)$時

存在唯一性\條件	$\begin{cases}\theta_k = sin^{-1}(\frac{R_1}{R_k}sin\theta_1) \\ \sum_{k=1}^{n}\theta_k = (n-2)\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 有解時有	$\begin{cases}\cos\varphi_1 = \frac{R_2R_3}{R_1R_2}\cos\varphi_2 = \frac{R_3R_4}{R_1R_2}\cos\varphi_3 = \frac{R_4R_5}{R_1R_2}\cos\varphi_4 = \cdots = \frac{R_nR_1}{R_1R_2}\cos\varphi_n \\ \sum_{k=1}^{n}\varphi_k = 2\pi\end{cases}$ 有解時有
順序對調	不會影響最大值	會影響最大值
三角形時性質	1. 圓心O為三角形內心 2. $\frac{R_1{}^2}{bc}+\frac{R_2{}^2}{ac}+\frac{R_3{}^2}{ab}=1$ （a,b,c分別為R_1, R_2, R_3所對三角形之邊長）	圓心O為三角形垂心

＊ 註：「唯一存在性／條件」、「順序對調」、「三角形時性質」是針對「何時周長及面積有最大值」所成圖形的討論。

二、圓心不共點的情形

	最大周長	最大面積
簡化後圖形 (R_4至R_{n-1}之間的圖僅為示意)		
討論範圍	$0 \le \theta_k \le \frac{\pi}{2}$ (k=1, 2, ……, 2n)，且圓心在圖形內	無特定範圍
最大值時性質	各半徑為對應角之角平分線	$\overline{A_kA_{k+2}} \perp \overleftrightarrow{O_{k+1}A_{k+1}}$($k = 1, 2, \dots\dots, n$，其中$A_{n+1}$為$A_1$，$A_{n+2}$為$A_2$)時

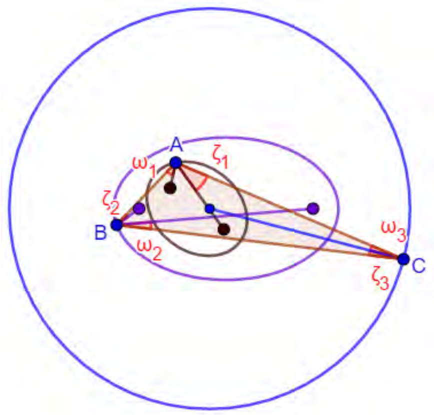
三、橢圓情形(特例)

求最大面積圖形：當各橢圓的長軸共線、中心共點、各橢圓的長軸長與短軸長成正比且橢圓中心與各點連線不對調時，其面積最大值圖形可由對應之同心圓的面積最大圖形經線性變換而得。(詳情見【定理7.1】)

陸、未來展望

此次的討論，仍有一些待解決的問題，如：

1. 在我們討論範圍外之圖形的周長與面積最大值，以及所求圖形不滿足定理內的聯立方程式時 （見存在唯一性證明），其圖形必存在最大值卻不適用我們得出的結論，其情形仍需探討。
2. 對於橢圓及空間中的球體、圓形的推廣，尚未完整確立。
3. 我們在探討橢圓時，利用電腦跑出圖形，求出在不同橢圓取點，所成圖形有最大周長值時，$\zeta_k = \omega_k\ (k \in N)$。（$\zeta_k$、$\omega_k$皆為焦點與橢圓上的點連線和所成圖形的夾角，為了方便說明故分為兩個符號）然證明太過複雜，目前尚未成功，待未來繼續努力。



圖三十七（其中最外圍為圓，可視為橢圓）

應用方面，希望對於都市計畫、區域規劃及科學方面與最大值有關之問題有所助益。如人工衛星的架設，其軌道可視為 n 個同心圓的情形，而人工衛星即為圓上的點，若能得出其連線所成圖形的面積最大值，可望增加其涵蓋的範圍。

柒、參考資料

1. 連威翔、莊武諺 （1994）。空間中任三直線上各取一點所連成三角形的最小周長。 第34屆中小學全國科展作品。

2.張修銘、陳昱辰、翁偉倫（2014）。tri to 唯一（三角形唯一性之探討）。第54屆中小學全國科展作品。

【評語】050404

1. 主題的討論詳盡，使用的數學工具、計算方式很多元。
2. 三角形的極值發生在內心及垂心是不錯的結果，但能否從幾何角度給予解釋？
3. 定理 1.2 中，內心對應到最大周長，目前說法只有驗證了必要性，如果不是內心，就不是最大周長，但對於充分性的探討不能只靠一次導數判別法，且固定兩個，只能推得其必要性。
4. 本作品在探討同心圓所構成三角形的情形中,何以探討 R2、R3 的位置固定，變動 R1 的位置。進而得到最大周長？
5. 探討同心圓所構成三角形的情形要得到最大面積時，何以固定一個夾角？
6. 推廣到多邊形時，主要利用偏微分方程，並未嚴謹討論。

作品海報

摘要

我們在此次的主題「繁星似海—圓上圖形最大值探討」中，便是要探討在不同的圓上，各取一點，在這些有如繁星的點中，依照特定順序（順/逆時針）所連成的多邊形，這些多邊形有無限種情況，但周長及面積最大值只有一個，因此我們的主軸圍繞在多邊形於周長與面積最大值時具有的性質。探討的主題主要分為四種情形：

1. 同心圓情形，凸多邊形最大周長時具有之性質
2. 不同心圓情形，凸多邊形最大周長時具有之性質
3. 同心圓情形，最大面積時具有之性質
4. 不同心圓情形，最大面積時具有之性質

壹、研究動機

當初看到第34屆的科展作品-由連威翔、莊武諺所著的「空間中任三直線上各取一點所連成三角形的最小周長」，獲得了靈感，想做有關圖形極值的探討，剛好上化學課時，教到了波耳提出的原子模型，各個球殼層都有所屬的電子，於是我們想電子間的的連線可圍成圖形，這個圖形隨著電子的變化會有完全不同的新面貌，並且似乎有某種關係存在於其中，所以我們打算來探討這個議題，不過立體空間難以討論，所以研究方向逐漸往平面的方向邁進(即將波耳模型做一個剖面)，在經過逐步修改後，成為了現在討論的問題，即探討各不同的圓，上頭的點所圍成多邊形有最大周長與面積時的相關性質。

貳、研究目的

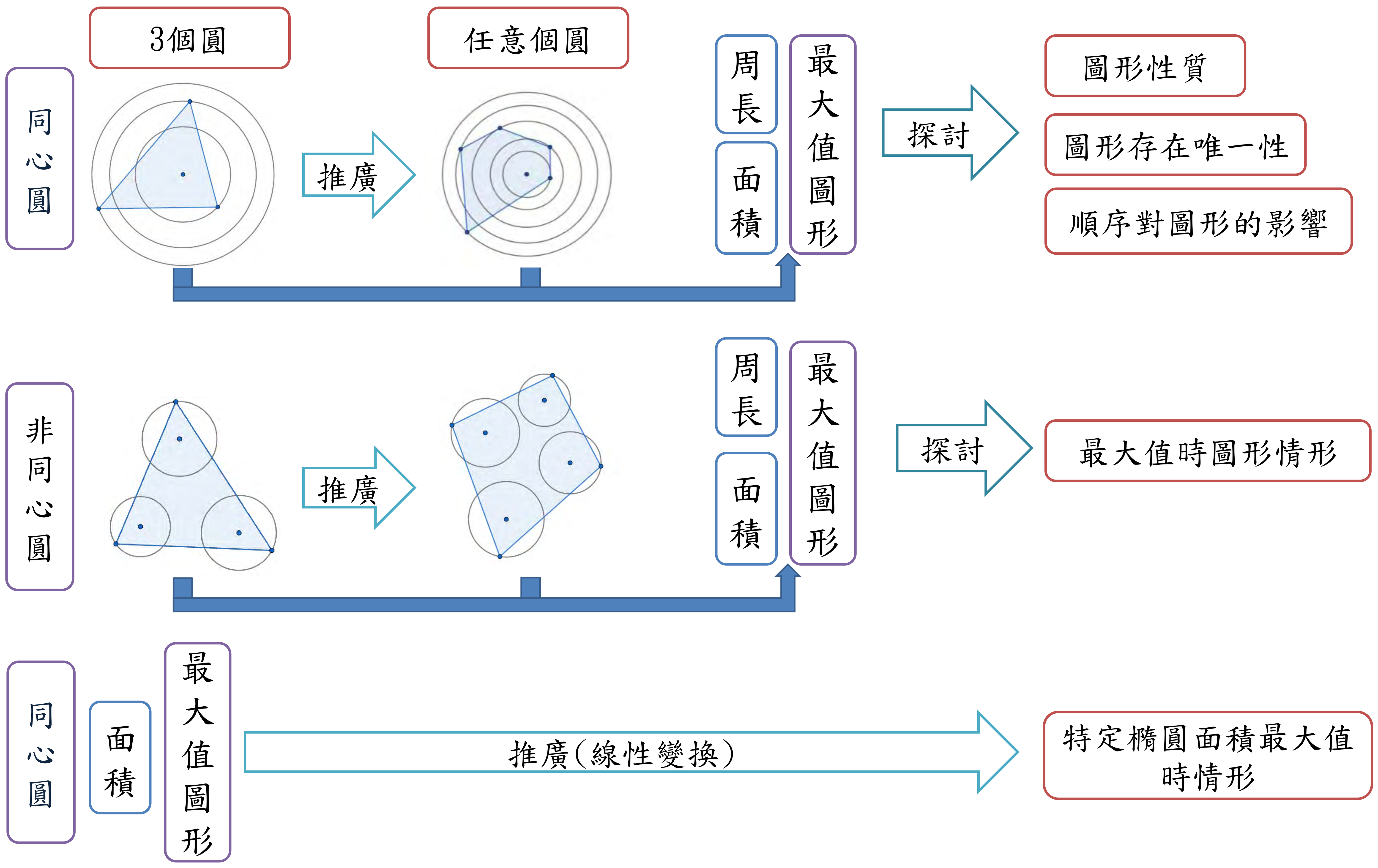
在不同的圓上（半徑不一定要相同且圓不一定要共心）各取一點，再依照順序（順/逆時針）連結便可繪出一個多邊形，此多邊形會因各點取的位置不同，而有千變萬化的情況，我們此次的研究目的便是要探討：在其畫出的眾多情形裡，有最大周長或最大面積時，此多邊形會有何性質。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra

肆、研究過程或方法

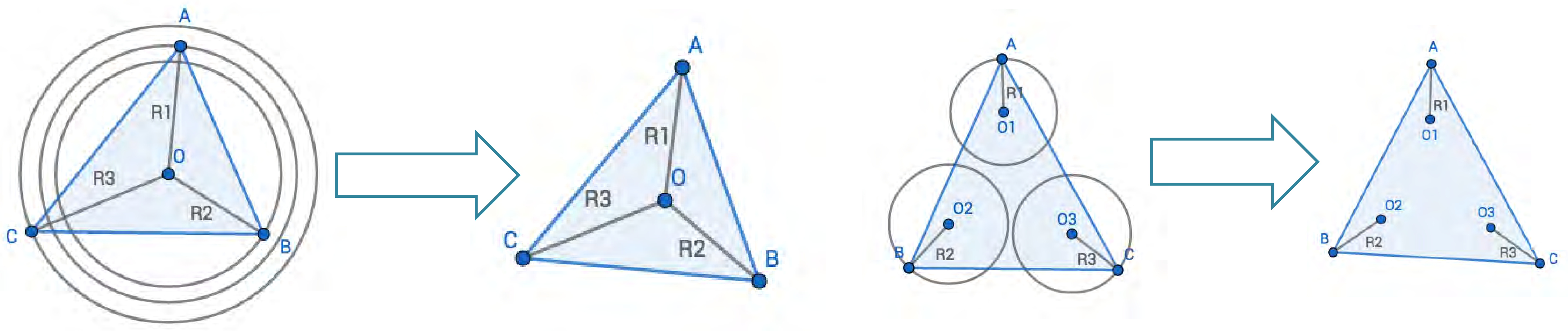
一、架構圖



二、研究過程與定理

問題簡化

由於圓是由座標上與圓心O同距離的所有點所組成，所以我們可以將圖形簡化：各個線段（以下圖範例來說為R1、R2、R3）是不同圓的半徑，而線段的末端就是圓上的點，將各線段末端依順/逆時針的順序（順時針跟逆時針並沒有差）連起來，即可得我們所要的圖形（可類推至任意多邊形，且同心圓情形與非同心圓情形都可適用）。此簡化有利於後續的分析。



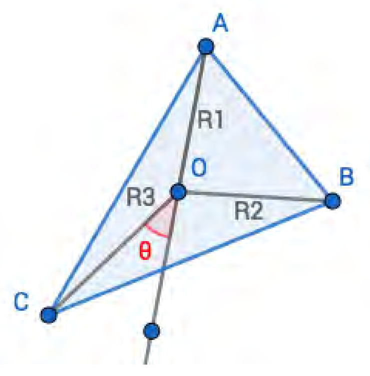
研究重點與定理

周長

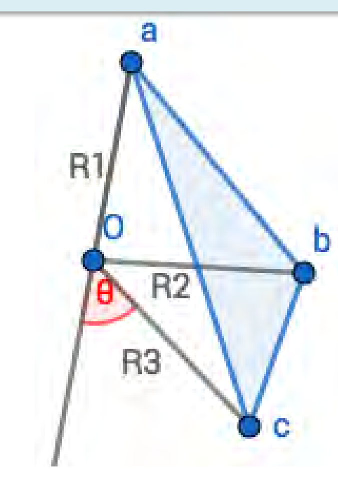
Case1:同心圓三角形

符號定義：
θ_k：上述簡化圖形，其各半徑與所成圖形的邊所形成的夾角。因證明運用到反三角函數，故以下定理只適用於$0 \le \theta_k \le \frac{\pi}{2}$。
$a\Delta ABC$: ΔABC的面積值。

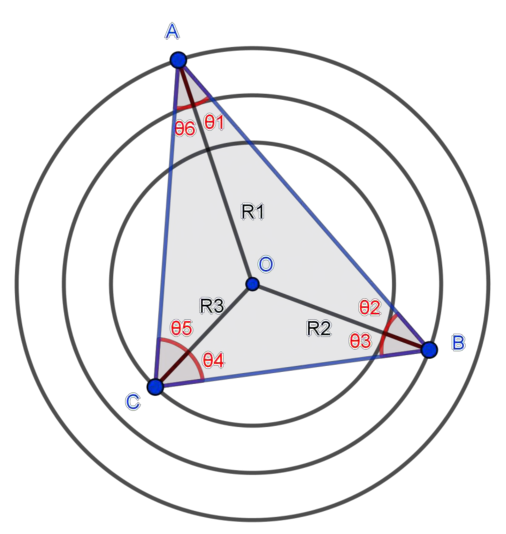
【定理1.1】三同心圓，在其上各取一點，依照順/逆時針連結所成之三角形出現最大周長時，其同心圓圓心會位於所成圖形內（含邊界）。



左右兩圖皆固定住R_1、R_2，且其θ值是相同的，故$\overline{ab}=\overline{AB}$，$\overline{ac}=\overline{AC}$，又根據大角對大邊，可得$\overline{bc}<\overline{BC}$，故左圖圖形周長較大。
（可進一步推得【定理1.1】）



【定理1.2】
條件：三同心圓，在其上各取一點，依照順/逆時針連結所成之三角形，在圓心於圖形內時。
周長最大值：圓心為三角形內心時會出現最大周長值。



令L為三角形之周長：

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1}=\left(R_1+\frac{{R_1}^2\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)(\sin\theta_6-\sin\theta_1)$$

藉由斜率變化可知當$\theta_6=\theta_1$時，周長會有最大值。以此類推可得上述結論。

【定理1.3】參照【定理1.2】的內容，當三角形出現周長最大值時，$\frac{{R_1}^2}{bc}+\frac{{R_2}^2}{ac}+\frac{{R_3}^2}{ab}=1$。

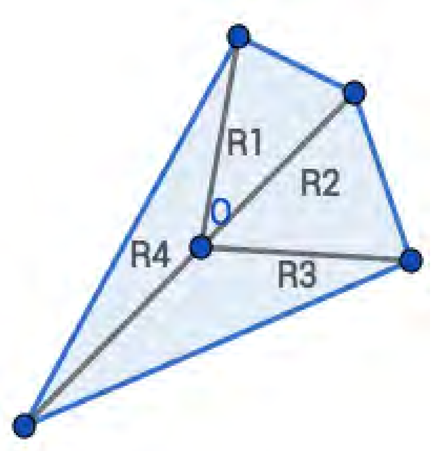
根據角平分線性質可得：

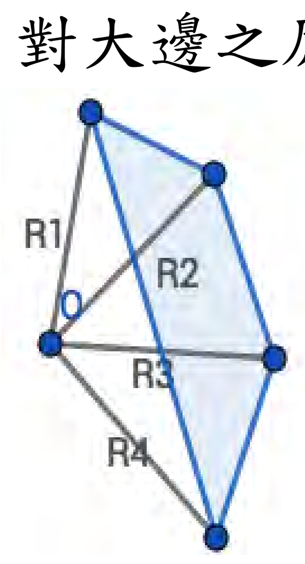
$$\frac{{R_1}^2}{bc}=\frac{(b+c-a)}{L},\quad \frac{{R_2}^2}{ac}=\frac{(a+c-b)}{L},\quad \frac{{R_3}^2}{ab}=\frac{(a+b-c)}{L}\quad \Rightarrow \frac{{R_1}^2}{bc}+\frac{{R_2}^2}{ac}+\frac{{R_3}^2}{ab}=1$$

Case2:同心圓多邊形

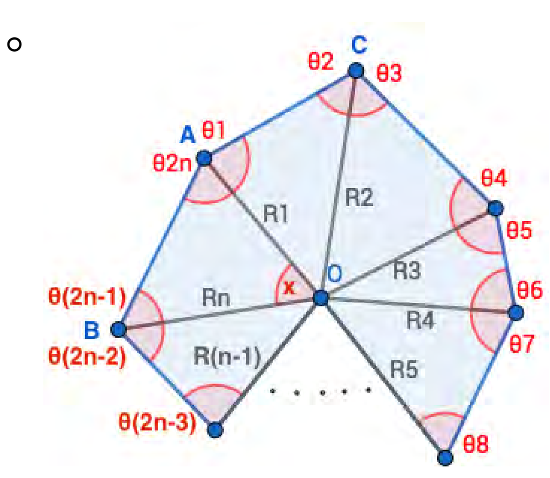
【定理2.1.1】n個同心圓（$n\ge 3, n\in N$），在其上各取一點，依照順/逆時針連結所成之n邊形出現最大周長值時，圓心會位於所成圖形內（含邊界）。

同理於【定理1.1】由角度與大角對大邊之原理得證。





【定理2.1.2】
條件：n個同心圓，在其上各取一點，依照順/逆時針連結所成之凸多邊形，圓心於圖形內時。
周長最大值：半徑與對應各角之角平分線重合時。



令L為多邊形之周長：

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1}=\left(R_1+\frac{{R_1}^2\cos\theta_1}{\sqrt{R_2^2-R_1^2\sin^2\theta_1}}\right)(\sin\theta_{2n}-\sin\theta_1)$$

藉由斜率變化可知當$\theta_{2n}=\theta_1$時，周長會有最大值。以此類推可得上述結論。

【定理2.2】當聯立方程式：

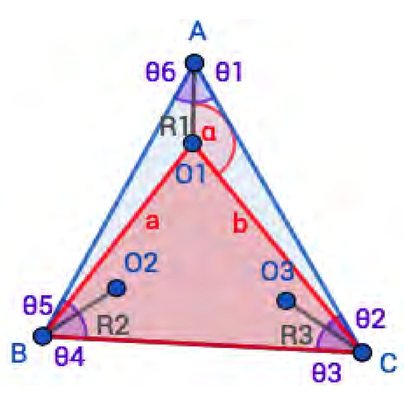
$$\begin{cases}\theta_k=\sin^{-1}\left(\frac{R_1}{R_k}\sin\theta_1\right)\\ \sum_{k=1}^{n}\theta_k=(n-2)\frac{\pi}{2}\end{cases}(k=1,2,\ldots\ldots,n)\text{有解時，}$$

【定理2.1.2】所求的最大值圖形存在唯一。

【定理2.3】在滿足【定理2.1.2】的條件下，不論半徑(R_k，$k=1,2,\ldots\ldots,n$)順序為何，在圖形有最大值時，各半徑所平分角之角度都不會改變，因此最大周長值亦不會改變。

Case3:非同心圓多邊形

【定理3.1】
條件：n個不同心圓($n\ge 3, n\in N$)，在其上各取一點，依照順／逆時針連結所成之凸n邊形，且圓心皆在圖形內。
周長最大值：各半徑恰好與對應之各角之角平分線重疊。



在此，我們以三角形為例（多邊形可同理而證）。令周長為L：

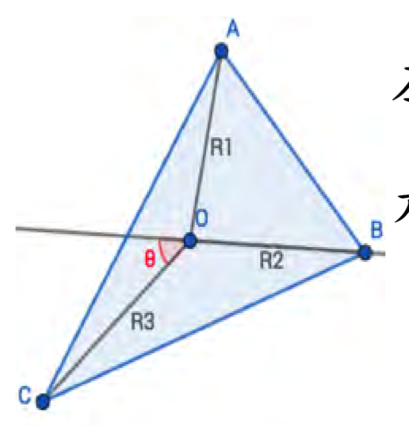
$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}=R_1(\sin\theta_1-\sin\theta_6)$$

藉由斜率變化可知當$\theta_6=\theta_1$時，周長會有最大值。以此類推可得上述結論

面積

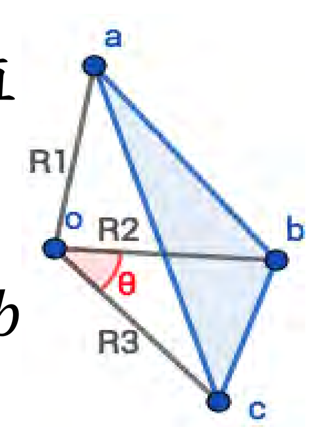
Case1:同心圓三角形

【定理4.1.1】三同心圓，在其上各取一點，依照順/逆時針連結所成之三角形出現面積最大值時，圓心會位於所成圖形內（含邊界）。



左右兩圖皆固定住R_1、R_2，且其θ值是相同的，故

$$a\Delta AOB=a\Delta aob,\quad a\Delta COB=a\Delta cob$$
$$\Rightarrow a\Delta ABC\ge a\Delta abc$$

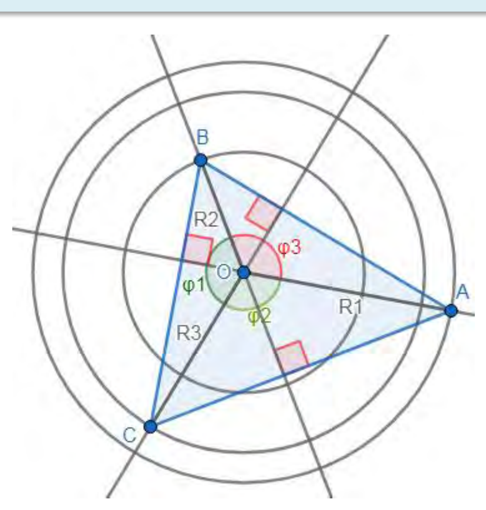


【定理4.1.2】
條件：三同心圓，在其上各取一點，依順/逆時針連結所成之三角形。
面積最大值：當圓心為三角形垂心時出現。

令σ為三角形之面積：

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi_1}=\frac{1}{2}R_3(R_2\cos\varphi_1-R_1\cos\varphi_2)$$

由其斜率的變化可知當$R_2\cos\varphi_1=R_1\cos\varphi_2$時面積有最大值，依此類推。



【定理4.1.3】符合【定理4.1.2】所求最大面積之圖形，會在聯立方程式

$$\begin{cases} \cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : \cos\varphi_3 = R_1 : R_2 : R_3 \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi \end{cases}$$

有解時，有存在唯一性。

Case2:同心圓多邊形

【定理5.1.1】n個同心圓($n \geq 3, n \in N$)，在其上各取一點，依照順/逆時針連結所成之n邊形出現最大面積值時，圓心會位於所成圖形內（含邊界）。

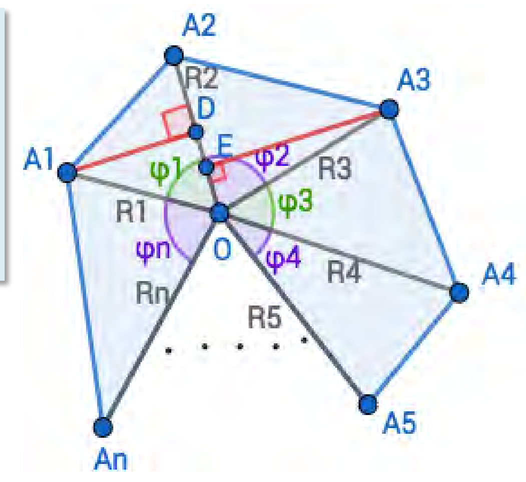
同三角形時證明。

【定理5.1.2】

條件：共心的n個的圓（$n \geq 3, n \in N$），上頭各取一點，依順/逆時針連成的圖形，半徑依某順序排列，其相對位置不對調時

面積最大值：

$\overline{A_k A_{k+2}} \perp \overleftrightarrow{OA_{k+1}}$（$k = 1, 2, \ldots\ldots, n$，其中$A_{n+1}$為$A_1$，$A_{n+2}$為$A_2$）時會出現。



令σ為多邊形之面積：

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi_1} = \frac{1}{2} R_2 (R_1 \cos\varphi_1 - R_3 \cos\varphi_2)$$

由其斜率的變化可知當

$R_1 \cos\varphi_1 = R_3 \cos\varphi_2$時

面積有最大值，依此類推。

【定理5.2】符合【定理5.1.2】所求最大面積之圖形，會在聯立方程式

$$\begin{cases} \cos\varphi_1 = \frac{R_2R_3}{R_1R_2}\cos\varphi_2 = \frac{R_3R_4}{R_1R_2}\cos\varphi_3 = \frac{R_4R_5}{R_1R_2}\cos\varphi_4 = \cdots = \frac{R_nR_1}{R_1R_2}\cos\varphi_n \\ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k = 2\pi \end{cases}$$

有解時，有存在唯一性。

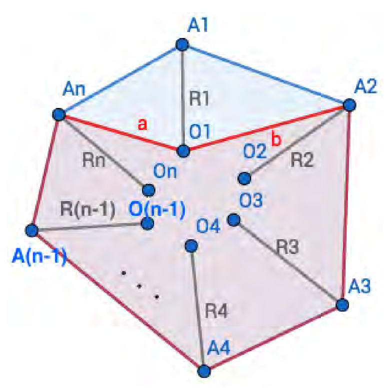
＊當形成【定理5.1.2】所求最大面積之圖形時，半徑的順序會影響到最大面積值。

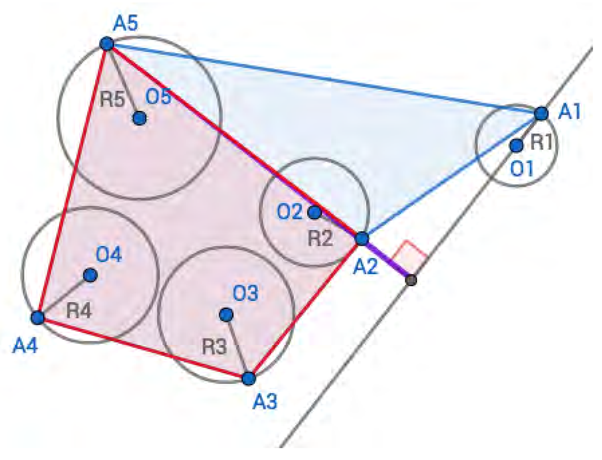
Case3:非同心圓多邊形

【定理6.1】

條件：不共心的n個的圓（$n \geq 3, n \in N$），上頭各取一點依順/逆時針順序所連成的圖形。

面積最大值：$\overline{A_k A_{k+2}} \perp \overleftrightarrow{O_{k+1} A_{k+1}}$（$k = 1, 2, \ldots\ldots, n$，且其中$A_{n+1}$為$A_1$，$A_{n+2}$為$A_2$）時

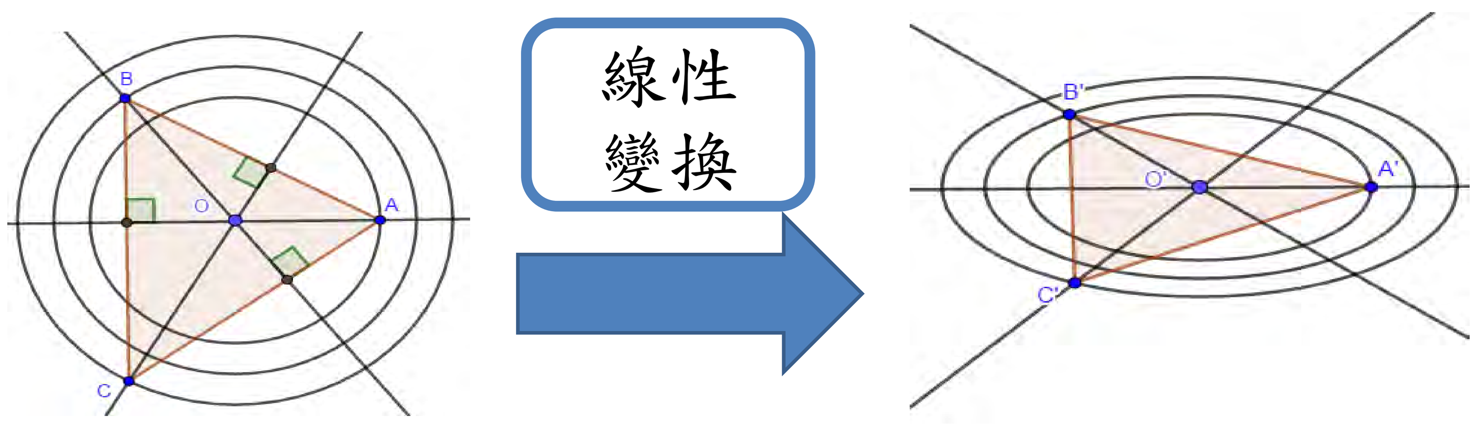




不論圓心在圖形的內外，【定理6.1】皆成立。

Case4:橢圓情形(特例)

【定理7.1】當各橢圓的長軸共線、中心皆為原點、各橢圓的長軸長與短軸長成正比且橢圓中心與各點連線不對調時，其面積最大值圖形可由對應之同心圓的面積最大圖形經線性變換而得。



伍、研究成果與結論

雖然在討論過程中，都以簡化的圖形來呈現，不過我們的問題仍是圍繞在圓身上，因為唯有圓才是廣泛存在於自然界的現象，波耳模型、行星軌道，星球的本體等等，都或多或少有圓的影子存在，也因此我們將我們的主題定義在圓的領域。

在此次的研究中，如繁星般的點，看似毫無規則可循的圖形，竟在最大周長與面積時，有如此漂亮而簡單的性質，另我們讚嘆不已，以下將我們此次探討的結果簡列如下：

同心圓的情況下：

1. 在凸多邊形中，各半徑與其對應之角平分線重合⇔周長有最大值。
2. 在不變動半徑相對位置的情況下，各半徑與其左右兩頂點之連線垂直⇔面積有最大值。

非同心圓的情況下：

1. 周長有最大值⇒各半徑與對應的角平分線重合（條件：凸多邊形）
2. 面積有最大值⇒各半徑與其左右兩頂點之連線垂直（條件：不變動半徑相對位置）

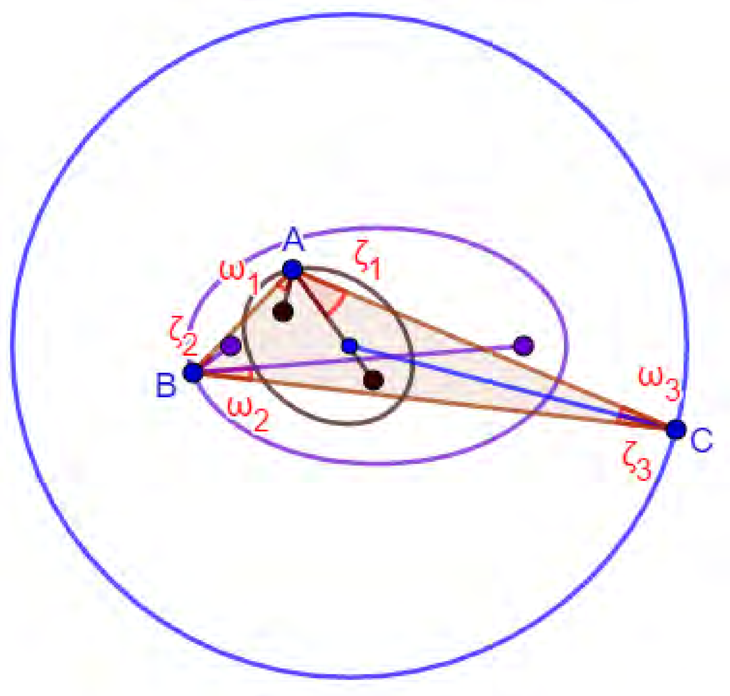
橢圓情形(特例):

特定情形下，其面積最大值圖形可由對應之同心圓的面積最大圖形經線性變換而得。（詳情見【定理7.1】）

陸、未來展望

此次的討論，仍有一些待解決的問題，如：

1. 在我們討論範圍外之圖形的周長與面積最大值，以及所求圖形不滿足定理內的聯立方程式時（見存在唯一性證明），其圖形必存在最大值卻不適用我們得出的結論，其情形仍需探討。
2. 對於橢圓及空間中的球體、圓形的推廣，尚未確立。
3. 在探討橢圓時，利用電腦，求出在不同橢圓取點，所成圖形有最大周長值時，$\zeta_k = \omega_k (k \in N)$。（$\zeta_k$、$\omega_k$皆為焦點與橢圓上的點連線和所成圖形的夾角，為了方便說明故分為兩個符號）然證明太過複雜，目前尚未成功，待未來繼續努力。



應用方面，希望對於都市計畫、區域規劃及科學方面與最大值有關之問題有所助益。如人造衛星的架設，其軌道可視為n個同心圓的情形，而人造衛星即為圓上的點，若能得出其連線所成圖形的面積最大值，可望增加其涵蓋的範圍。

柒、參考資料

1. 連威翔、莊武諺（1994）。空間中任三直線上各取一點所連成三角形的最小周長。 第34屆中小學全國科展作品。
2. 張修銘、陳昱辰、翁偉倫（2014）。tri to 唯一（三角形唯一性之探討）。第54屆中小學全國科展作品。