中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

(鄉土)教材獎

050403

「隔」格不入—阻隔集最小值之性質研究

學校名稱：高雄市立高雄女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 梁晏慈	李奇穎
高二 饒庭竹	黃仁杰

關鍵詞：阻隔集、最小值、圖論

摘要

本篇研究中考慮在 $m\times n$ 棋盤中放置若干阻隔點，使得給定的圖形 A 經任意旋轉翻轉並放入棋盤中，皆會碰到阻隔點，這些阻隔點所形成的集合稱之為「**阻隔集**」。我們的目標是先有根據地推測阻隔點的排列方式，再證明我們的推測是正確的，以求出阻隔集的**最小值**。

相關參考資料大多利用窮舉法猜測答案，故此份研究報告首先釐清原題並補充參考資料的不足，即考慮以下三種二維平面圖形 A： S_r（表 $r\times r$ 的正方形）、P_r（表 $1\times r$ 的長方形）和 L_r（表 P_r 末端旁接上一個方格的圖形），求出 $b(m,n,A)$ 之值並證明。最後將原題的平面概念延伸至三維空間（$m\times n\times \ell$ 長方體），研究圖形 S'_r（表 $r\times r\times r$ 的正方體）、P'_r（表兩邊為1、一邊為 r 的長方體）和 L'_r（表 P'_r 末端旁接上一個方塊的圖形），求出 $b(m,n,\ell,A)$ 之值並證明。

壹、研究動機

練習 TRML 考古題的過程中，2009 年關於**阻隔集**的思考賽題目深深吸引我們:

在 $m\times n$ 棋盤中放置若干**阻隔點**，使得給定的圖形 A 經任意旋轉翻轉並放入棋盤中，皆會碰到至少一個阻隔點，這些阻隔點所形成的集合稱之為「**阻隔集**」。而目標是找出最少須放置幾個阻隔點，即求出阻隔集的**最小值**，題目中以 $b(m,n,A)$ 表 $m\times n$ 棋盤中對圖形 A 之阻隔集的最小值。對於特定的圖形 A，題組內共出現了三種方格圖形，分別為 S_r（表 $r\times r$ 的正方形）、P_r（表 $1\times r$ 的長方形）和 L_r（表由 P_r 末端旁接上一個方格的圖形）。

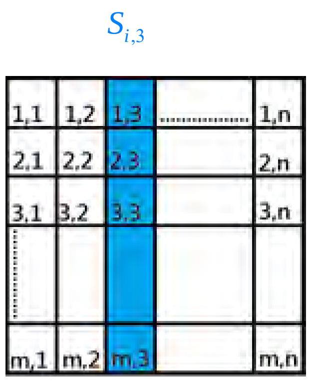
詳解和歷年相關作品，對於阻隔集的排列方式，多採窮舉法或直接定義，然而我們認為，最初定義的阻隔點排列方式越接近最小值的排法，便能縮小上下界的範圍，最後證明時越有效率。因此，研究重點為**如何有根據地找出阻隔點排列方式**，並釐清詳解中所有沒解釋的細節，進而**補充原先詳解不清楚之處**，**希望能按此脈絡將原題延伸至三維空間**，以解決各種生活中的工程問題，例如:使用最低成本設置消防栓保障居民安全。

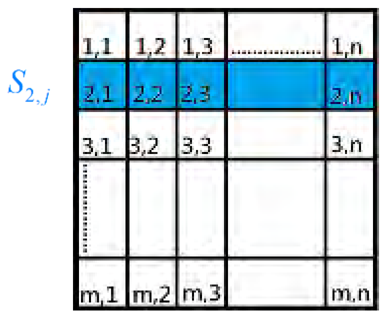
貳、名詞定義與解釋

一、二維方格位置

有 m 列 n 行的 $m\times n$ 棋盤中，以 (i,j) 表第 i 列第 j 行的方格，定義 $S_{i,j_0}=\{(i,j_0)|1\le i\le m\}$ 為第 j_0 行，$S_{i_0,j}=\{(i_0,j)|1\le j\le n\}$ 為第 i_0 列。

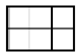
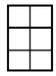
例如:





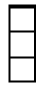
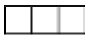
二、三維方塊位置

將 $m\times n\times \ell$ 長方體視為由 ℓ 層有 m 列 n 行的 $m\times n$ 棋盤堆疊成，以 (i,j,k) 表由上至下第 k 層、對應棋盤第 i 列第 j 行的方塊，定義 $S_{i_0,j,k}=\{\,(i_0,j,k)\mid 1\le j\le n,1\le k\le \ell\,\}$ 為第 i_0 列之面、$S_{i,j_0,k}=\{\,(i,j_0,k)\mid 1\le i\le m,1\le k\le \ell\,\}$ 為第 j_0 行之面，$S_{i,j,k_0}=\{\,(i,j,k_0)\mid 1\le i\le m,1\le j\le n\,\}$ 為第 k_0 層之面。

註:此文中皆以 $m\times n$ 及 $m\times n\times \ell$ 敘述圖形的邊長。例如:2×3 表圖形 ，3×2 表圖形 。

三、圖形定義

(一)同構圖形

定義在方格圖形中，經數次旋轉、翻轉而得之圖形稱為同構圖形，例: 3×1 長方形  與 1×3 長方形  為同構圖形。

(1)**平面情況**

S_r :表 $r\times r$ 的正方形。

P_r :表一邊為1、一邊為 r 的長方形之所有同構圖形。

L_r :表 P_r 末端旁接上一個方格的圖形之同構圖形，共有 8 種。

(2)**立體情況**

S'_r :表 $r\times r\times r$ 的正方體。

P'_r :表兩邊為1、一邊為 r 的長方體之所有同構圖形。

L'_r :表 P'_r 末端旁接上一個方塊的圖形之同構圖形，共有 16 種。

四、阻隔集與 $b(m,n,A)$:

定義 $b(m,n,A)$ 為最小的非負整數 k，使得在棋盤中可找出 k 個格子組成的集合 B，滿足棋盤中任一與 A 同構的圖形都與 B 至少有一共同的格子，這樣的集合 B 即稱為 A 的阻隔集。

參、研究目的

研究目的一: 補充詳解中 $b(m,n,S_r)$ 及 $b(m,n,P_r)$ 證明之不足。

研究目的二: 求出 $b(m,n,L_r)$ 之值。

研究目的三: 求出 $m\times n\times \ell$ 三維空間中 $b(m,n,\ell,S'_r)$、$b(m,n,\ell,P'_r)$ 及 $b(m,n,\ell,L'_r)$ 之值。

肆、研究設備與器材

紙、筆、電腦、小畫家繪圖軟體、Microsoft Office Word、Mathtype.

伍、研究過程

本研究採用的手法為:先分析討論阻隔集最小值可能的排列方式(非以窮舉法或主觀想法)，再列出相對應的一般式，最後沿用詳解中的證明手法，以分割方法得出下界，進而證明上下界重合，求出最小值。

一、平面情況

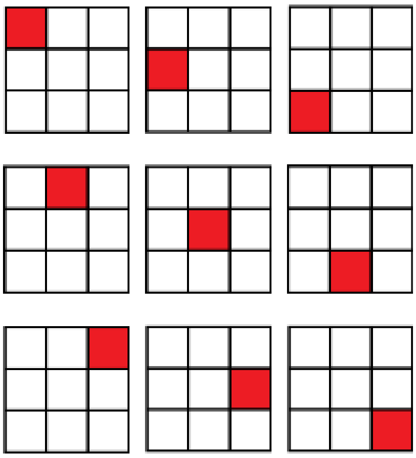
(一) $b(m,n,S_r)$

進入正文前，先以 S_3 圖形為例，敘述首次接觸到題目時的想法:

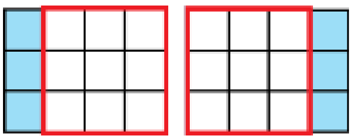
首先，我們想知道 m 、n 各自對阻隔點放置的影響，故分為 $m=3,n\geq 3$ 及 $m\geq 3,n=3$ 兩種情況討論。

1. $m=3,n\geq 3$.(只需考慮橫向分布的正方形)

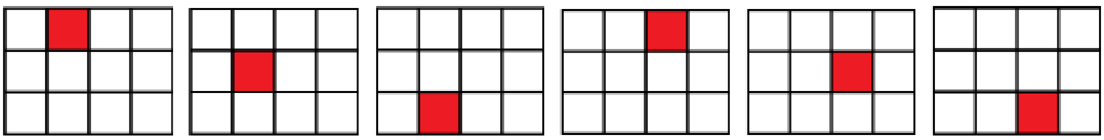
如下圖，$m=3,n=3$ 時，因為只有一個 S_3 圖形，所以可放置阻隔點於棋盤中任一格。



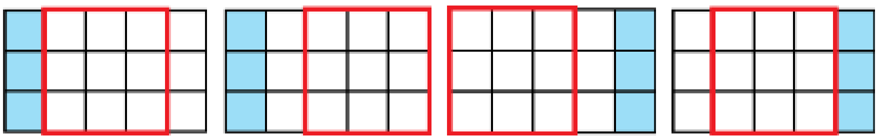
如下圖，$m=3,n=4$ 時，棋盤中有兩個 S_3 圖形，若放置阻隔點於 $S_{i,1}$ 或 $S_{i,4}$，分別會造成棋盤最右方和最左方的 S_3 圖形碰不到阻隔點。

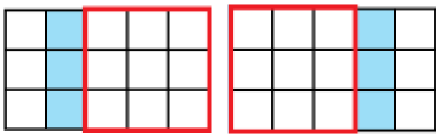


所以會放置阻隔點於 $S_{i,2}$ 或 $S_{i,3}$ 中**任一方格**，所有可能的放置位置如下。

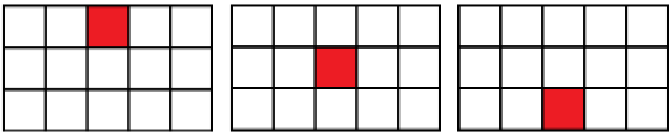


如下圖，$m=3,n=5$ 時，棋盤中有三個 S_3 圖形，放置阻隔點於 $S_{i,3}$ 才能碰到所有 S_3 圖形。



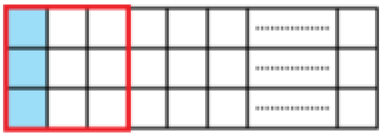


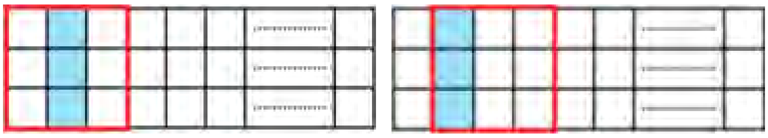
所以會放置阻隔點於$S_{i,3}$中**任一方格**，所有可能的放置位置如下。

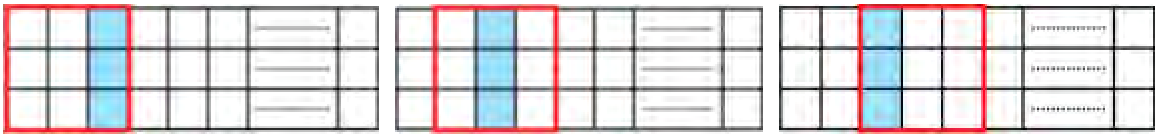


雖然阻隔集的放置方式有許多種，但並不影響阻隔點的個數，而綜上所述，放置阻隔點於$S_{i,3}$中任一方格，能符合$m=3, 3\leq n\leq 5$所有情況，因此以下將**不再考慮其他可能的放置位置**。

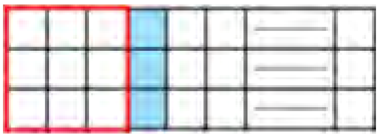
如下圖，$m=3, n\geq 6$時，可得$S_{i,3}$相較於$S_{i,1}$、$S_{i,2}$碰到的S_3圖形最多。



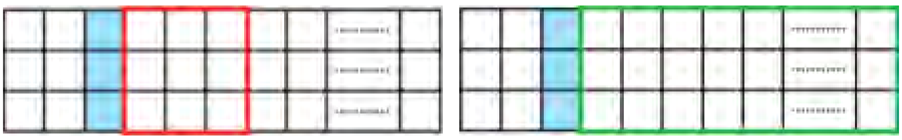




如下圖，雖然$S_{i,4}$碰到的S_3圖形與$S_{i,3}$一樣多，但若放置阻隔點於其中，會造成棋盤最左方的S_3圖形碰不到阻隔點。



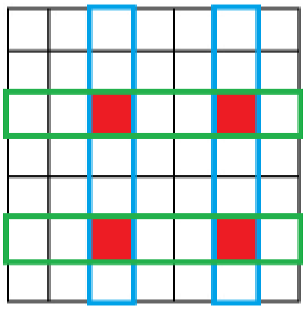
所以會放置**第一個阻隔點**於$S_{i,3}$中**任一格**。接著，如下圖，將未碰到此阻隔點的S_3圖形(紅色部分)延伸**視為新棋盤**(綠色部分)，重複上述分析方式，放置第二個阻隔點於$S_{i,6}$中任一格。

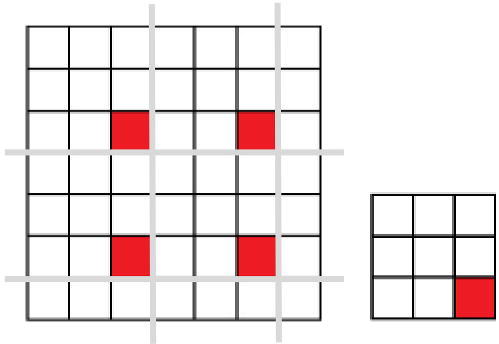


以此類推，放置其他阻隔點於$S_{i,3t}$中**任一格**。因此，正方形**橫向分布**時，阻隔點會位於**行數為3的倍數**的格子中。

2. $m\geq 3, n=3$.(只需考慮縱向分布的正方形)

與 $m=3,\ n\geq 3$ 時的分析手法相同，$n=3$ 時會先放置阻隔點於 $S_{3,j}$ 中任一格，再放置第二個阻隔點於 $S_{6,j}$ 中任一格。以此類推，放置其他阻隔點於 $S_{3t,j}$ **中任一格**。因此，正方形**縱向分布**時，阻隔點會位於**列數為3的倍數**的格子中。合併以上兩個結論，推測 $B=\{(i,j):1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n, i$ 和 j 均為 3 的倍數$\}$ 是一個 S_3 的阻隔集，如圖 1。為方便討論，將其分割為單位正方形，如圖 2。


（圖 1）


（圖 2）

以未知數 r 代入上述想法中，得 $B=\{(i,j):1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n, i$ 和 j 均為 r 的倍數$\}$ 是一個 S_r 的阻隔集，且 $|B|=\left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor.$

接著要證明此一般式確可求出 $b(m,n,S_r)$：

結論 1

$$b(m,n,S_r)=\left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor.$$

【證明】

$\because B=\{(i,j):1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n, i$ 和 j 均為 r 的倍數$\}$ 是一個 S_r 的阻隔集，但不知阻隔集個數能否更少

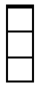
$\therefore b(m,n,S_r)\leq |B|=\left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor.$ …上界

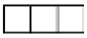
$\because m\times n$ 棋盤可以分割出 $\left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor$ 個 S_r 圖形，而任一個 S_r 圖形中至少要有一阻隔點

$\therefore b(m,n,S_r)\geq \left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor.$ …下界

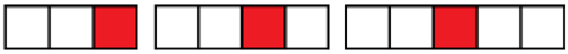
故可得 $b(m,n,S_r)=\left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor.$

(二) $b(m,n,P_r)$

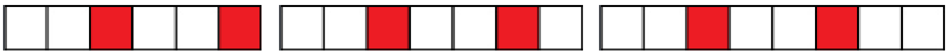
P_r 圖形有兩種同構圖形，以 P_3 圖形為例，即為 1×3 長方形  與 3×1 長方形 ，因此就不同圖形分為 $m=1,n\geq3$ 及 $m\geq3,n=1$ 兩種情況討論。

1×3 長方形  ：$m=1,n\geq3.$

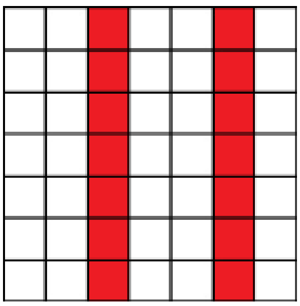
如下圖，$m=1,3\leq n\leq5$ 時，可放置阻隔點於 $(1,3)$。

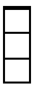


如下圖，$m=1,6\leq n\leq8$ 時，可放置阻隔點於 $(1,3)$、$(1,6)$。

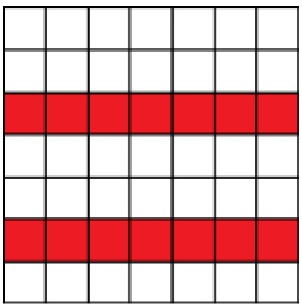


所以 $m=1$ 時，阻隔點位於 $(1,3t)$。故可知 $m\geq1$ 時，阻隔點分布情形如下:

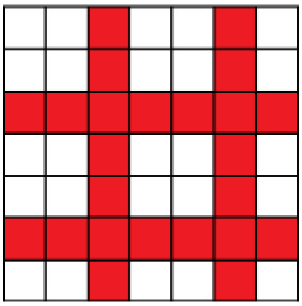


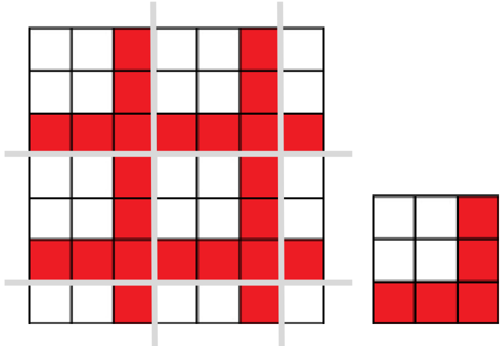
3×1 長方形  ：$m\geq3,n=1.$

與前述分析手法相同，得 $n=1$ 時，阻隔點位於 $(3t,1)$。故可知 $n\geq1$ 時，阻隔點分布情形如下:

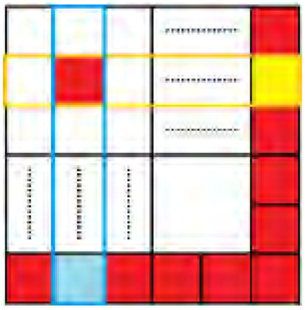


合併以上兩個結論，推測 $B=\{(i,j):1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n, i$ 或 j 為 3 的倍數$\}$ 是一個 P_3 的阻隔集，如圖 3。為方便討論，將其分割為單位正方形，如圖 4。


（圖 3）

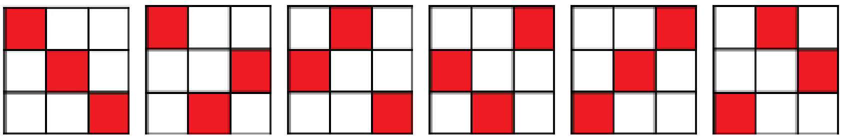

（圖 4）

以未知數 r 代入上述想法中，得 $B=\{(i,j):1\le i\le m,1\le j\le n,i$ 或 j 為 r 的倍數$\}$ 是一個 P_r 的阻隔集。但阻隔點數量可以更少，如下圖，於**任兩相異阻隔點各自對應之長方形**相重疊的格子中放置一阻隔點，則此阻隔點可代替原本兩阻隔點。

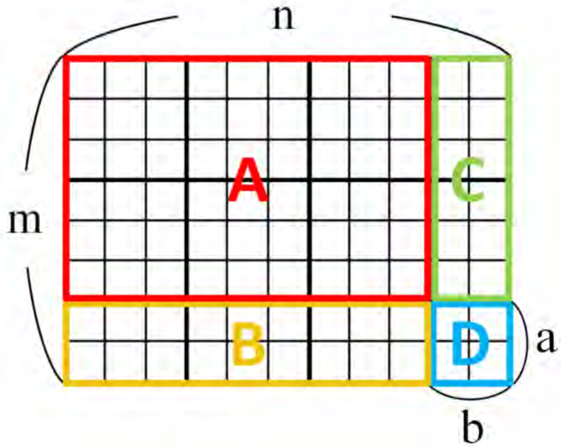


以此方式合併後，共可得 $r!$ 種單位正方形。

以 P_3 為例，即為以下六種單位正方形:

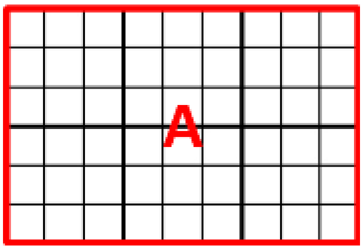


到底使用哪個單位正方形能夠求出阻隔集數量的最小值呢?若棋盤恰可分割成若干個單位正方形，則使用不同的單位正方形不影響阻隔點個數，因為每個單位正方形中阻隔點個數皆為 r；若棋盤無法恰好分割成若干個單位正方形，則需另行討論，以下用 8×11 棋盤說明:如下圖，將 8×11 棋盤分成 A、B、C、D 四部分討論。

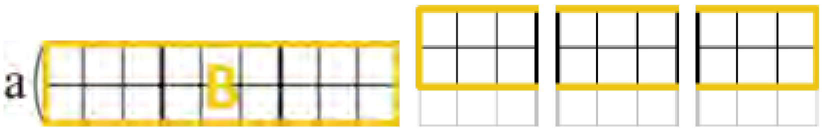


如下圖，A 部分恰可分成2×3個3×3正方形，每個正方形有 3 個阻隔點，共有 18 個阻隔點。

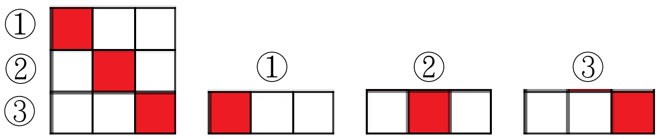
即恰可分成$\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor$個 r×r 正方形，每個正方形中有 r 個阻隔點，故 A 部分共有$r\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor$個阻隔點，其中$r\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor$**為 r 的倍數**。



如下圖，B 部分可視為 3 個2×3長方形，每個長方形中阻隔點的位置，可透過長方形在單位正方形中的**相對位置**得到。

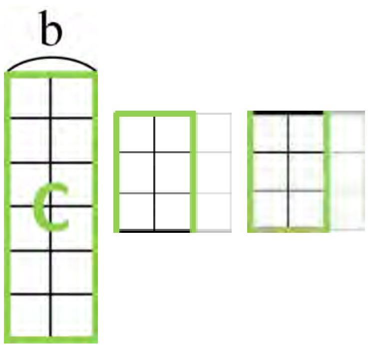


雖然不知該使用何種單位正方形，無法確定阻隔點的位置，但不論是何種單位正方形，都能將其看成由 3 個1×3長方形組成，而每個長方形中皆恰有一個阻隔點，舉例如下圖。

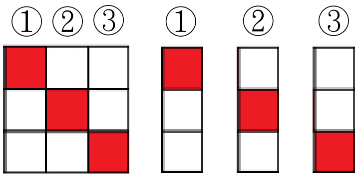


因此每個2×3長方形中有 2 個阻隔點，B 部分共有 6 個阻隔點。即$\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$個$a\times r$長方形，每個長方形中有 a 個阻隔點，又$a=m-r\left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor$，故 B 部分共有$\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left(m-r\left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor\right)$個阻隔點，其中$\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left(m-r\left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor\right)$**為 r 的倍數**。

如下圖，C 部分可視為 2 個3×2長方形，每個長方形中阻隔點的位置，可透過長方形在單位正方形中的**相對位置**得到。



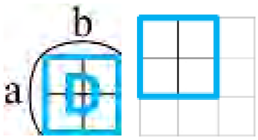
雖然不知該使用何種單位正方形，無法確定阻隔點的位置，但不論是何種單位正方形，都能將其看成由 3 個 3×1 長方形組成，而每個長方形中皆恰有一個阻隔點，舉例如下圖。



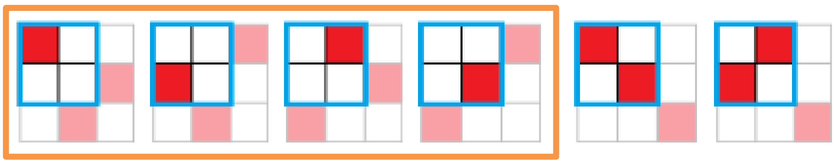
因此每個 3×2 長方形中有 2 個阻隔點，C 部分共有 4 個阻隔點。即 $\left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor$ 個 $r\times b$ 長方形，每個長方形中有 b 個阻隔點，又 $b=n-r\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$，故 C 部分共有 $\left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor\left(n-r\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor\right)$ 個阻隔點，其中

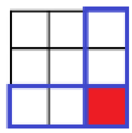
$\left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor\left(n-r\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor\right)$ **為 r 的倍數**。

如下圖，以 $a=2,b=2$ 為例，D 部分為 $a\times b$ 長方形，每個長方形中阻隔點的位置，可透過長方形在單位正方形中的**相對位置**得到。



如下圖，$a\times b$ 長方形中最少有一阻隔點(圖 5)，我們觀察**符合最少阻隔點**的單位正方形，發現其共通點為**不放阻隔點於 $a\times b$ 長方形外剩餘行列的交會處(圖 6)**。


(圖 5)

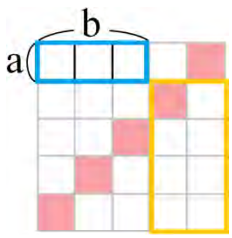

(圖 6)

所以可用 $a\times b$ 長方形外剩餘行列數，回推 $a\times b$ 長方形中阻隔點的個數：

$a\times b$ 長方形外剩餘行列數為 $(r-a)+(r-b)$，單位正方形中阻隔點個數為 r

$\Rightarrow$ $a\times b$ 長方形中阻隔點個數 $=r-\left[(r-a)+(r-b)\right]=a+b-r.$

若 $a+b-r<0$，即 $a<r-b$ 或 $b<r-a$，則**必有阻隔點位於行列交會處**，以 $a=1,b=3,r=5$ 為例，如下圖，**此時 $a\times b$ 長方形中可不放置任何阻隔點**。



因此，將 $a\times b$ 長方形中阻隔點的個數修正為 $Max\{0, a+b-r\}$.

故雖然不知道該使用何種單位正方形，無法確定阻隔點的位置，但不論是何種單位正方形，D 部分阻隔點個數最少為 $Max\{0, a+b-r\}$.

又因為 A、B、C 三部分阻隔集個數皆為 r 的倍數，所以用 $\dfrac{mn-ab}{r}$ 表示此三部分的阻隔集個數，故得 $|B|=\dfrac{mn-ab}{r}+Max\{0,a+b-r\}$.

接著要證明此一般式確可求出 $b(m,n,P_r)$：

結論 2

$b(m,n,P_r)=$

1. 若 $1\le m\le r-1, n\ge 1$，則 $b(m,n,P_r)=m\left\lfloor \dfrac{n}{r}\right\rfloor$.

   若 $m\ge 2, 1\le n\le r-1$，則 $b(m,n,P_r)=n\left\lfloor \dfrac{m}{r}\right\rfloor$.

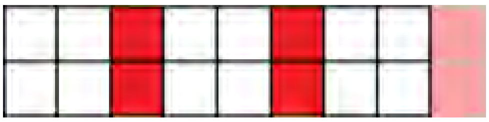
2. 若 $m\ge r, n\ge r$，則

   $b(m,n,P_r)=$

$$\left\lfloor \frac{mn-\left[\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\right]}{r}\right\rfloor+Max\left\{0, m+n-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]+1\right)\right\}.$$

【證明】

1. 若 $1\le m\le r-1, n\ge 1$，以 $m=2, n=8, r=3$ 為例，因為不須合併阻隔點，所以阻隔點排列方式如下：



阻隔點個數為 $\left\lfloor \dfrac{8}{3}\right\rfloor\times 2$，即 $m\left\lfloor \dfrac{n}{r}\right\rfloor$.

若 $m\ge 2, 1\le n\le r-1$，想法同上，阻隔點個數為 $n\left\lfloor \dfrac{m}{r}\right\rfloor$.

2. $\because$ 此排列方式是一個 P_r 的阻隔集，但不確定阻隔集數量是否為最小值

$\therefore b(m,n,P_r)\le |B|=\dfrac{mn-ab}{r}+Max\{0,a+b-r\}$. ……上界

$\because a \le r-1, b \le r-1 \quad \therefore 0 \le Max\{0, a+b-r\} \le r-2.$

$\because$棋盤中有 $\dfrac{mn-ab}{r}$ 個不重疊的 P_r 圖形，而每個 P_r 圖形中至少要有一阻隔點

$\therefore b(m,n,P_r) \ge \dfrac{mn-ab}{r}$.……下界

接著，一一討論 $Max\{0, a+b-r\}$ 的所有可能:

若 $Max\{0, a+b-r\}=0$，則 $\dfrac{mn-ab}{r} \le b(m,n,P_r) \le \dfrac{mn-ab}{r}$.

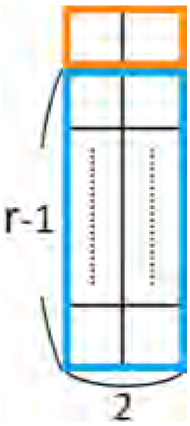
得 $b(m,n,P_r) = \dfrac{mn-ab}{r} + Max\{0, a+b-r\}$.

若 $Max\{0, a+b-r\}=1$，則 $\dfrac{mn-ab}{r} \le b(m,n,P_r) \le \dfrac{mn-ab}{r}+1$.

可設 $a=r-1, b=2$，如圖 7，若 $b(m,n,P_r) = \dfrac{mn-ab}{r}$（即 $a \times b$ 中沒有阻隔點），

則橘色部分每格皆須有一阻隔點，為合併前的排列方式，不符最小排列方式，

故得 $b(m,n,P_r) = \dfrac{mn-ab}{r} + Max\{0, a+b-r\}$.



（圖 7）

若 $Max\{0, a+b-r\}=2$，則 $\dfrac{mn-ab}{r} \le b(m,n,P_r) \le \dfrac{mn-ab}{r}+2$.

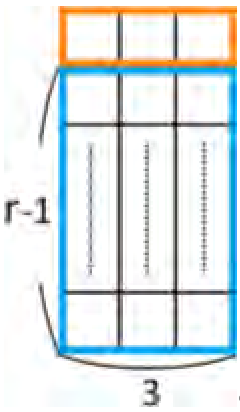
可設 $a=r-1, b=3$:

(1)若 $b(m,n,P_r)=\dfrac{mn-ab}{r}$（即 $a\times b$ 棋盤中沒有阻隔點），

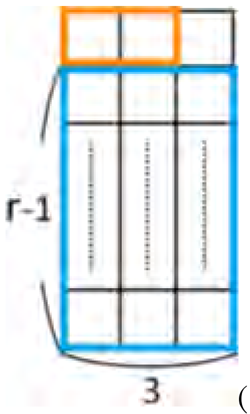
則橘色部分每格皆須有一阻隔點，不符最小排列方式(圖 8-1)。

(2)若 $b(m,n,P_r)=\dfrac{mn-ab}{r}+1$（即 $a\times b$ 棋盤中有一阻隔點），

則橘色部分每格皆須有一阻隔點，不符最小排列方式(圖 8-2)。



(圖 8-1)



(圖 8-2)

故得 $b(m,n,P_r)=\dfrac{mn-ab}{r}+Max\{0,a+b-r\}.$

若 $Max\{0,a+b-r\}=3$，則 $\dfrac{mn-ab}{r}\le b(m,n,P_r)\le\dfrac{mn-ab}{r}+3.$

可設 $a=r-1,b=4$：

(1)若 $b(m,n,P_r)=\dfrac{mn-ab}{r}$（即 $a\times b$ 棋盤中沒有阻隔點），

則橘色部分每格皆須有一阻隔點，不符最小排列方式(圖 9-1)。

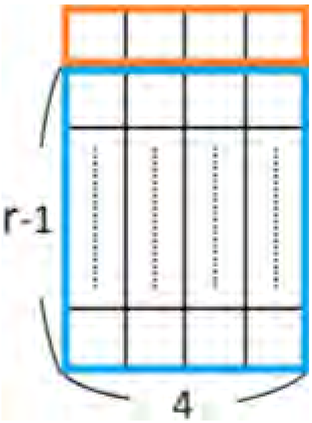
(2)若 $b(m,n,P_r)=\dfrac{mn-ab}{r}+1$（即 $a\times b$ 棋盤中有一阻隔點），

則橘色部分每格皆須有一阻隔點，不符最小排列方式(圖 9-2)。

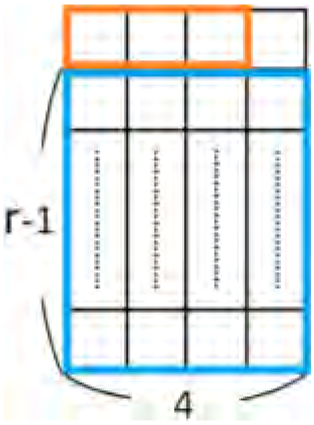
(3)若 $b(m,n,P_r)=\dfrac{mn-ab}{r}+2$（即 $a\times b$ 棋盤中有兩阻隔點），

則橘色部分每格皆須有一阻隔點，不符最小排列方式(圖 9-3)。

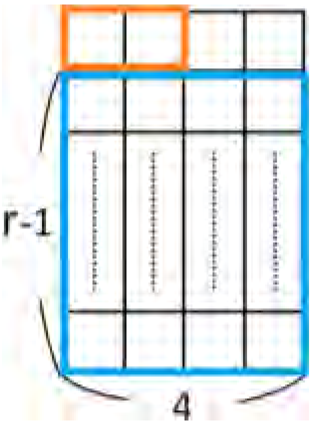
故得 $b\left(m,n,P_r\right)=\dfrac{mn-ab}{r}+Max\left\{0,a+b-r\right\}.$



（圖 9-1）



（圖 9-2）



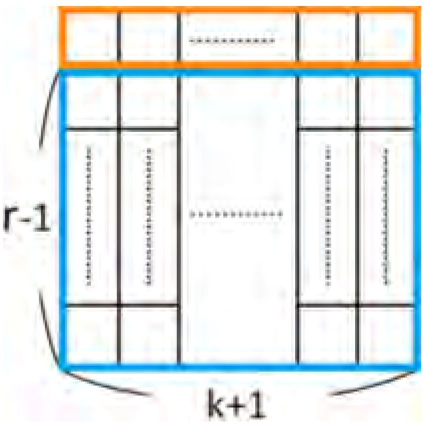
（圖 9-3）

以此類推，可知若 $Max\left\{0,a+b-r\right\}=k(1\le k\le r-2,\mathrm{k}\in\mathbb{N})$

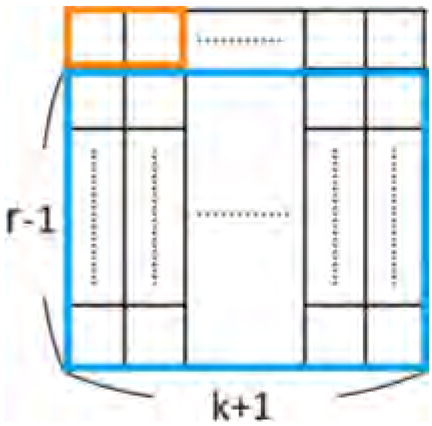
則 $\dfrac{mn-ab}{r}\le b\left(m,n,P_r\right)\le\dfrac{mn-ab}{r}+k.$

可設 $a=r-1,b=k+1$ ，

不符合的情況之討論範圍自 $\dfrac{mn-ab}{r}$ 至 $\dfrac{mn-ab}{r}+\left(k-1\right)$，橘色部分的變化為**自圖 10-1 逐漸縮小至圖 10-2**。



（圖 10-1）



（圖 10-2）

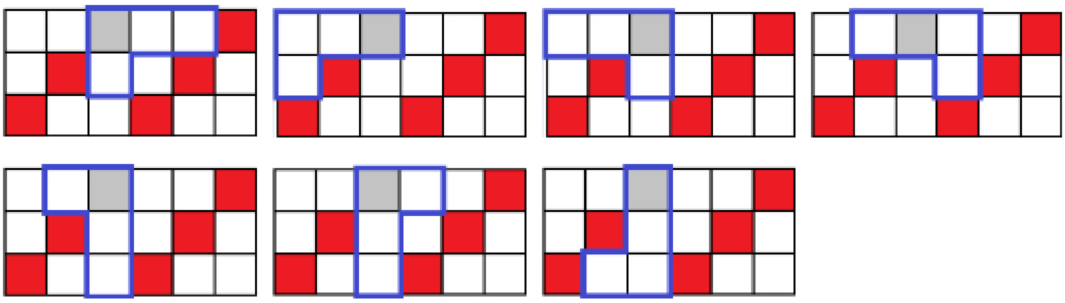
故所有情況下最後皆可得 $b\left(m,n,P_r\right)=\dfrac{mn-ab}{r}+Max\left\{0,a+b-r\right\}.$

下表為此證明的架構:

$Max\{0,a+b-r\}=$	$b(m,n,P_r)$範圍	假設	不符合的情況
0	$\frac{mn-ab}{r}\le b(m,n,P_r)\le\frac{mn-ab}{r}.$		
1	$\frac{mn-ab}{r}\le b(m,n,P_r)\le\frac{mn-ab}{r}+1.$	$a=r-1,b=2$	圖 7
2	$\frac{mn-ab}{r}\le b(m,n,P_r)\le\frac{mn-ab}{r}+2.$	$a=r-1,b=3$	圖 8
3	$\frac{mn-ab}{r}\le b(m,n,P_r)\le\frac{mn-ab}{r}+3.$	$a=r-1,b=4$	圖 9
k	$\frac{mn-ab}{r}\le b(m,n,P_r)\le\frac{mn-ab}{r}+k.$	$a=r-1,b=k+1$	圖 10

(三)$b(m,n,L_r)$

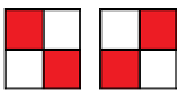
L_r圖形是由P_r圖形末端旁接上一個方格得到的，因此P_r圖形的阻隔集是L_r圖形的一個阻隔集，且$r\ge 3$時阻隔集個數無法更少，以L_3圖形其中一種單位正方形為例說明:如下圖，若拿走其一阻隔點(灰色格子)，則可放入許多L_3圖形。



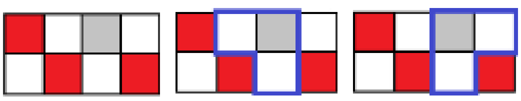
唯放置阻隔點於這些L_3圖形交集的格子中，方能阻隔所有L_3圖形，但其交集即為原本的灰色格子，所以可說L_3圖形的阻隔集與P_3圖形相同。以相同想法分析此單位正方形的其他阻隔點，抑或其他單位正方形，皆能得到相同結論。故$r\ge 3$時，$b(m,n,L_r)$的結論大致與$b(m,n,P_r)$相同，不同的是m或$n=1$時無法放入任何L圖形，故$b(1,n,L_r)=b(m,1,L_r)=0.$

另外需要特別注意的是$r=2$時，以下說明之:

如下圖，P_2圖形的單位正方形有兩種。

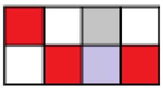


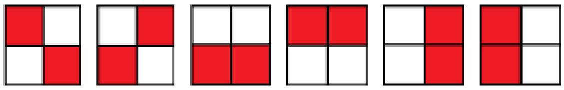
以左方的單位正方形為例，如下圖，若拿走其一阻隔點(灰色格子)，則可放入兩L_2圖形。



但可透過放置阻隔點於紫色格中阻隔此二L_2圖形(圖 11)，故L_2圖形的單位正方形有六種(圖

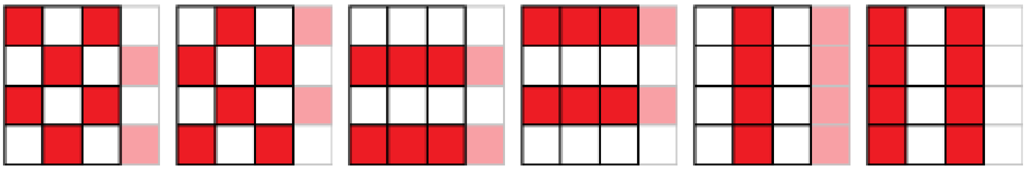
12)。

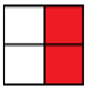

(圖 11)


(圖 12)

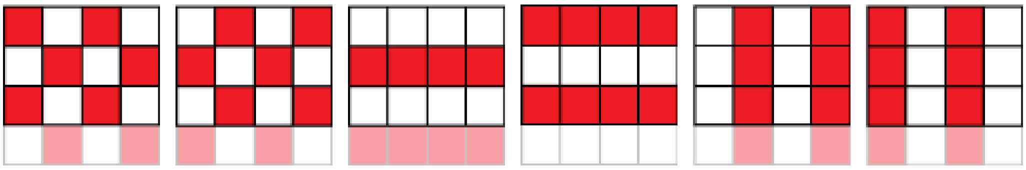
m,n 皆為偶數時，所有單位正方形皆能求出最小值；因此以下分成三種情況討論，分別是 m 為偶數 n 為奇數、m 為奇數 n 為偶數及 m,n 皆為奇數，確認何種單位正方形能求出最小值:

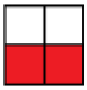
1. m 為偶數 n 為奇數(以 4×3 棋盤為例)



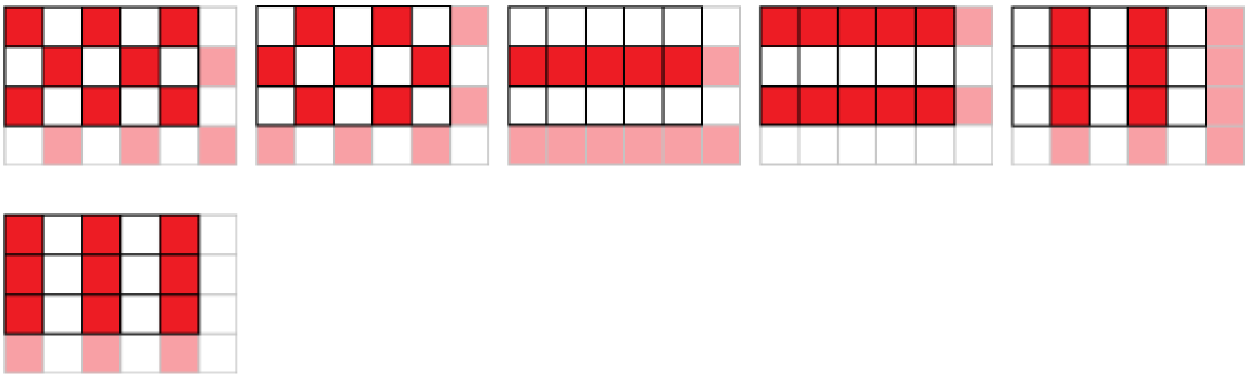
如上圖，很顯然地，使用  能求出最小值，$b(m,n,L_2)=m\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

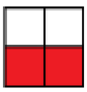
2. m 為奇數 n 為偶數(以 3×4 棋盤為例)

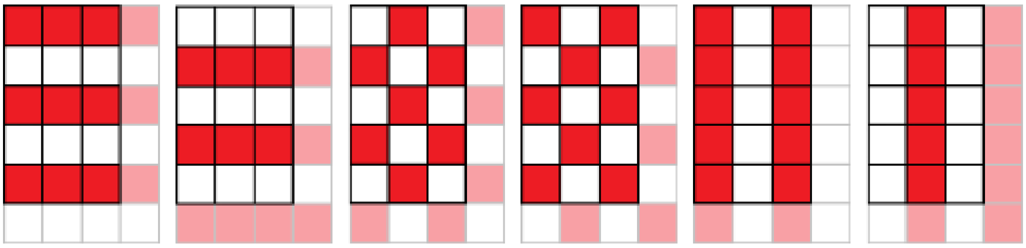


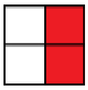
如上圖，很顯然地，使用  能求出最小值，$b(m,n,L_2)=n\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.

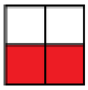
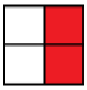
3. m 為奇數 n 為奇數(以 3×5 及 5×3 棋盤為例)



如上圖，很顯然地，$m\le n$ 時使用  能求出最小值，$b(m,n,L_2)=n\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.



如上圖，很顯然地，$m \ge n$ 時使用  能求出最小值，$b(m,n,L_2)=m\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$

觀察後發現，不須分成奇偶數討論，而是 $m \le n$ 時使用  $b(m,n,L_2)=n\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$，及 $m \ge n$ 時使用  $b(m,n,L_2)=m\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$

結論 3

$b(m,n,L_r)=$

1. $b(1,n,L_r)=b(m,1,L_r)=0.$

2. 若 $2 \le m \le r-1, n \ge 1$，則 $b(m,n,L_r)=m\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor.$

   若 $m \ge 1, 2 \le n \le r-1$，則 $b(m,n,L_r)=n\left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor.$

3. 若 $m \ge r, n \ge r, r \ge 3$，則

$b(m,n,L_r)=$

$$\left[\frac{mn-\left[\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\right]}{r}\right]+Max\left\{0,m+n-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]+1\right)\right\}.$$

4. 若 $r=2, m \le n$，則 $b(m,n,L_2)=n\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$

   若 $r=2, m \ge n$，則 $b(m,n,L_2)=m\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$

二、立體情況

(一) $b(m,n,\ell,S'_r)$

首先，以 S'_3 圖形為例，欲找出 m、n、ℓ 各自對阻隔點放置的影響，故分為 $m=3, n \ge 3, \ell=3$、$m \ge 3, n=3, \ell=3$ 及 $m=3, n=3, \ell \ge 3$ 三種情況討論。

1. $m=3,n\geq 3,\ell=3$：與平面的分析手法相同，可得阻隔點會位於$S_{i,3t,k}$此面中任一格。

2. $m\geq 3,n=3,\ell=3$：與平面的分析手法相同，可得阻隔點會位於$S_{3t,j,k}$此面中任一格。

2. $m=3,n=3,\ell\geq 3$：與平面的分析手法相同，可得阻隔點會位於$S_{i,j,3t}$此面中任一格。

合併以上三個結論，推測$B=\{(i,j,k):1\leq i\leq m,1\leq j\leq n,1\leq k\leq \ell,i,j,k$均為3的倍數$\}$是一個$S'_3$的阻隔集。為方便討論，將其分割為單位正方體。

以未知數r代入上述想法中，得$B=\{(i,j,k):1\leq i\leq m,1\leq j\leq n,1\leq k\leq \ell,i,j,k$均為$r$的倍數$\}$是一個$S'_r$的阻隔集，且$|B|=\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]$.

接著要證明此一般式確可求出$b(m,n,\ell,S'_r)$：

結論 4

$$b(m,n,\ell,S'_r)=\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right].$$

【證明】

$\because B=\{(i,j,k):1\leq i\leq m,1\leq j\leq n,1\leq k\leq \ell,i,j,k$均為$r$的倍數$\}$是一個$S'_r$的阻隔集，但不知阻隔集個數能否更少

$\therefore b(m,n,\ell,S'_r)\leq|B|=\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]$. …上界

$\because m\times n\times\ell$長方體可以分割出$\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]$個$S'_r$圖形，而任一個$S'_r$圖形中至少要有一阻隔點

$\therefore b(m,n,\ell,S'_r)\geq\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]$. …下界

故可得$b(m,n,\ell,S'_r)=\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]$.

(二) $b(m,n,\ell,P'_r)$

P'_r圖形有三種同構圖形，以P'_3圖形為例，即為$1\times3\times1$長方體、$3\times1\times1$長方體與$1\times1\times3$長方體，因此就不同圖形分為$m=1,n\geq 3,\ell=1$、$m\geq 3,n=1,\ell=1$及$m=1,n=1,\ell\geq 3$三種情況討論。

$1\times3\times1$長方體：$m=1,n\geq 3,\ell=1$.

與平面的分析手法相同，可得阻隔點會位於 $S_{i,3t,k}$ 此面所有格子中。

$3\times1\times1$ 長方體: $m\geq 3, n=1, \ell=1.$

與平面的分析手法相同，可得阻隔點會位於 $S_{3t,j,k}$ 此面所有格子中。

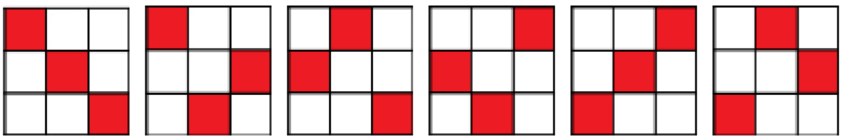
$1\times1\times3$ 長方體: $m=1, n=1, \ell\geq 3.$

與平面的分析手法相同，可得阻隔點會位於 $S_{i,j,3t}$ 此面所有格子中。

合併以上三個結論，推測 $B=\{(i,j,k):1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n, 1\leq k\leq \ell, i$ 或 j 或 k 為 3 的倍數$\}$是一個 P'_3 的阻隔集。為方便討論，將其分割為單位正方形。

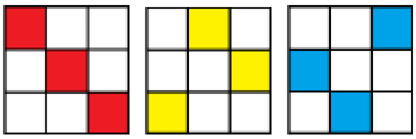
以未知數 r 代入上述想法中，得 $B=\{(i,j,k):1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n, 1\leq k\leq \ell, i$ 或 j 或 k 為 r 的倍數$\}$ 是一個 P'_r 的阻隔集。但阻隔點數量可以更少:於**任三相異阻隔點各自對應之長方體**相重疊的格子中放置一阻隔點，則此阻隔點可代替原本三阻隔點。以此方式合併後的單位立方體，可視為**由 r 層平面的 $r\times r$ 單位正方形組合而成**，但並非所有單位正方形皆可用來組合。

以 $r=3$ 為例，單位正方形有以下六種。

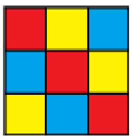


於此六種單位正方形中選擇三種組合成單位正方體。

第一層　第二層　第三層



但前提為俯視圖中各方格皆須有阻隔點，如下圖:



設 $a=m-r\left\lfloor\frac{m}{r}\right\rfloor, b=n-r\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor, c=\ell-r\left\lfloor\frac{\ell}{r}\right\rfloor$，與平面的概念相同，$a\times b\times c$ 長方體外區域阻隔集個數為 r 的倍數，可用 $\frac{mn\ell-abc}{r}$ 表示；$a\times b\times c$ 長方體部分以 $a=4, b=3, c=2, r=5$ 為例，分別扣除長方體中 $r\times(r-b)\times r$ 、$(r-a)\times b\times r$ 及 $a\times b\times(r-c)$ 此三區之阻隔點個數，則可得 $a\times b\times c$ 長方體中阻隔點個數為 $Max\{0, r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}.$

故得$|B|=\dfrac{mn\ell-abc}{r}+Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}.$

接著要證明此一般式確可求出$b(m,n,\ell,P'_r)$：

結論 5

$b(m,n,\ell,P'_r)=$

1. 若$m\ge 1,1\le n\le r-1,1\le \ell\le r-1$，則$b(m,n,\ell,P'_r)=n\ell\left\lfloor \dfrac{m}{r}\right\rfloor.$

   若$1\le m\le r-1,n\ge 1,1\le \ell\le r-1$，則$b(m,n,\ell,P'_r)=m\ell\left\lfloor \dfrac{n}{r}\right\rfloor.$

   若$1\le m\le r-1,1\le n\le r-1,\ell\ge 1$，則$b(m,n,\ell,P'_r)=mn\left[\dfrac{\ell}{r}\right].$

2. 若$m\ge 1,n\ge 1,1\le \ell\le r-1$，則$b(m,n,\ell,P'_r)=$

$$\ell\left\{\left\lfloor\frac{mn-\left\lfloor\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\right\rfloor}{r}\right\rfloor+Max\left\{0,m+n-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]+1\right)\right\}\right\}.$$

   若$1\le m\le r-1,n\ge 1,\ell\ge 1$，則$b(m,n,\ell,P'_r)=$

$$m\left\{\left[\frac{n\ell-\left[\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)\right]}{r}\right]+Max\left\{0,n+\ell-r\left(\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]+1\right)\right\}\right\}.$$

   若$m\ge 1,1\le n\le r-1,\ell\ge 1$，則$b(m,n,\ell,P'_r)=$

$$n\left\{\left[\frac{m\ell-\left[\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)\right]}{r}\right]+Max\left\{0,\mathrm{m}+\ell-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]+1\right)\right\}\right\}.$$

3. 若$m\ge r,n\ge r,\ell\ge r$，則$b(m,n,\ell,P'_r)=$

$$
\left[\frac{mn\ell-\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)}{r}\right]
+Max\left\{\begin{array}{l}0,r^{2}-r\left(m+n+\ell+r\left[\frac{m}{r}\right]+r\left[\frac{n}{r}\right]+r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)+mn+m\ell+n\ell\\-rm\left(\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)-rn\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)-r\ell\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]\right)\\-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)\end{array}\right\}.
$$

【證明】

1. 若 $m\geq 1,1\leq n\leq r-1,1\leq \ell\leq r-1$，則只需討論 $r\times 1\times 1$ 長方體，其阻隔點會位於 $S_{rt,j,k}$ 此面所有格子中，故 $b(m,n,\ell,P'_r)=n\ell\left\lfloor\frac{m}{r}\right\rfloor.$

   若 $1\leq m\leq r-1,n\geq 1,1\leq \ell\leq r-1$，則只需討論 $1\times r\times 1$ 長方體，其阻隔點會位於 $S_{i,rt,k}$ 此面所有格子中，故 $b(m,n,\ell,P'_r)=m\ell\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor.$

   若 $1\leq m\leq r-1,1\leq n\leq r-1,\ell\geq 1$，則只需討論 $1\times 1\times r$ 長方體，其阻隔點會位於 $S_{i,j,rt}$ 此面所有格子中，故 $b(m,n,\ell,P'_r)=mn\left[\frac{\ell}{r}\right].$

2. 若 $m\geq 1,n\geq 1,1\leq \ell\leq r-1$，則只需討論 $1\times r\times 1$ 長方體及 $r\times 1\times 1$ 長方體，因此可視 $m\times n\times \ell$ 長方體為 ℓ 層 $m\times n$ 棋盤，故 $b(m,n,\ell,P'_r)=\ell\times b(m,n,P_r).$

   $1\leq m\leq r-1,n\geq 1,\ell\geq 1$ 及 $m\geq 1,1\leq n\leq r-1,\ell\geq 1$ 時，概念同上。

3. $\because$ 此排列方式是一個 P'_r 的阻隔集，但不確定阻隔集數量是否為最小值

   $\therefore b(m,n,\ell,P'_r)\leq |B|=\frac{mn\ell-abc}{r}+Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}.$ ……上界

   $\because a\leq r-1,b\leq r-1,c\leq r-1$

   $\therefore 0\leq Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}\leq r^{2}-3r+3.$

$\because m\times n\times \ell$ 長方體中有 $\dfrac{mn\ell-abc}{r}$ 個不重疊的 P'_r 圖形，而每個 P'_r 圖形中至少要有一阻隔點

$\therefore b(m,n,\ell,P_r)\ge \dfrac{mn\ell-abc}{r}$.……下界

接著，一一討論 $Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}$ 的所有可能:

若 $Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}=0$ ，

則 $\dfrac{mn\ell-abc}{r}\le b(m,n,\ell,P'_r)\le \dfrac{mn\ell-abc}{r}$.

得 $b(m,n,\ell,P'_r)=\dfrac{mn\ell-abc}{r}+Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}$.

若 $Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}=1$ ，

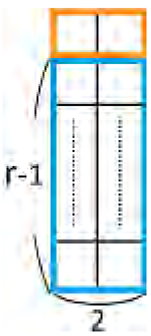
則 $\dfrac{mn\ell-abc}{r}\le b(m,n,\ell,P'_r)\le \dfrac{mn\ell-abc}{r}+1$.

可設 $a=r-1,b=2,c=1$，因為 $c=1$，**所以 $a\times b\times c$ 長方體可視為 $a\times b$ 棋盤**，如圖 13，

若 $b(m,n,\ell,P'_r)=\dfrac{mn\ell-abc}{r}$（即 $a\times b\times c$ 中沒有阻隔點），

則橘色部分每格皆須有一阻隔點，為合併前的排列方式，不符最小排列方式，

故得 $b(m,n,\ell,P'_r)=\dfrac{mn\ell-abc}{r}+Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}$.



（圖 13）

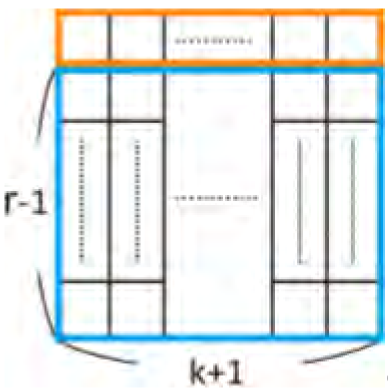
以此類推，

可知若 $Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}=k(1\le k\le r^2-3r+3,k\in\mathbb{N})$

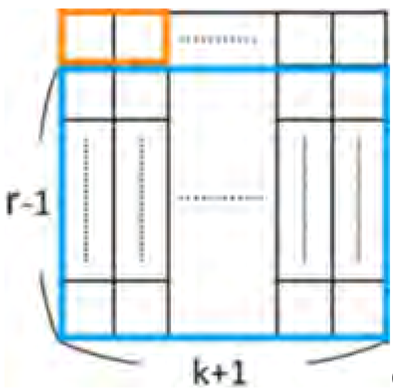
則 $\dfrac{mn\ell-abc}{r}\le b(m,n,\ell,P'_r)\le\dfrac{mn\ell-abc}{r}+k.$

可設 $a=r-1,b=k+1,c=1$，因為 $c=1$，**所以 $a\times b\times c$ 長方體可視為 $a\times b$ 棋盤**。

不符合的情況之討論範圍自 $\dfrac{mn\ell-abc}{r}$ 至 $\dfrac{mn\ell-abc}{r}+(k-1)$，橘色部分的變化為**自圖 14-1 逐漸縮小至圖 14-2**。



（圖 14-1）



（圖 14-2）

故所有情況下最後皆可得

$$b(m,n,\ell,P'_r)=\frac{mn\ell-abc}{r}+Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}.$$

（三）$b(m,n,\ell,L'_r)$

與平面的概念相同，故 $r\ge 3$ 時，$b(m,n,\ell,L'_r)$ 的結論大致與 $b(m,n,\ell,P'_r)$ 相同，不同的是 m 或 n 或 $\ell=1$ 時無法放入任何 L' 圖形，故 $b(1,n,\ell,L'_r)=b(m,1,\ell,L'_r)=b(m,n,1,L'_r)=0.$

另外需要特別注意的是 $r=2$ 時：

若 m 為奇數, n 為偶數, ℓ 為偶數，則 $b(m,n,\ell,L'_r)=n\left[\dfrac{m}{r}\right]\left[\dfrac{\ell}{r}\right].$

若 m 為奇數, n 為奇數, ℓ 為偶數，則 $b(m,n,\ell,L'_r)=\ell\left\lfloor\frac{m}{r}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor.$

若 m 為奇數, n 為偶數, ℓ 為奇數，則 $b(m,n,\ell,L'_r)=n\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right].$

陸、研究結果與結論

一、平面情況

1. $b(m,n,S_r)=\left\lfloor\frac{m}{r}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor.$

2. $b(m,n,P_r)=$

 (1)若 $1\le m\le r-1, n\ge 1$，則 $b(m,n,\mathrm{P}_r)=m\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor.$

 若 $m\ge 2, 1\le n\le r-1$，則 $b(m,n,\mathrm{P}_r)=n\left\lfloor\frac{m}{r}\right\rfloor.$

 (2)若 $m\ge r, n\ge r$，則

$$b(m,n,P_r)=$$

$$\left[\frac{mn-\left[\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\right]}{r}\right]+Max\left\{0,m+n-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]+1\right)\right\}.$$

3. $b(m,n,L_r)=$

 (1) $b(1,n,L_r)=b(m,1,L_r)=0.$

 (2)若 $2\le m\le r-1, n\ge 1$，則 $b(m,n,L_r)=m\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor.$

 若 $m\ge 1, 2\le n\le r-1$，則 $b(m,n,L_r)=n\left\lfloor\frac{m}{r}\right\rfloor.$

 (3)若 $m\ge r, n\ge r, r\ge 3$，則

$$b(m,n,L_r)=$$

$$\left[\frac{mn-\left[\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\right]}{r}\right]+Max\left\{0,m+n-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]+1\right)\right\}.$$

(4)若 $r=2, m\le n$ ，則 $b(m,n,L_2)=n\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor.$

若 $r=2, m\ge n$ ，則 $b(m,n,L_2)=m\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor.$

二、立體情況

1. $b(m,n,\ell,S'_r)=\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right].$

2. $b(m,n,\ell,P'_r)=$

(1)若 $m\ge 1, 1\le n\le r-1, 1\le \ell\le r-1$ ，則 $b(m,n,\ell,P'_r)=n\ell\left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor.$

若 $1\le m\le r-1, n\ge 1, 1\le \ell\le r-1$ ，則 $b(m,n,\ell,P'_r)=m\ell\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor.$

若 $1\le m\le r-1, 1\le n\le r-1, \ell\ge 1$ ，則 $b(m,n,\ell,P'_r)=mn\left[\frac{\ell}{r}\right].$

(2)若 $m\ge 1, n\ge 1, 1\le \ell\le r-1$ ，則 $b(m,n,\ell,P'_r)=$

$$\ell\left\{\left\lfloor \frac{mn-\left\lfloor\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\right\rfloor}{r}\right\rfloor+Max\left\{0,m+n-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]+1\right)\right\}\right\}.$$

若 $1\le m\le r-1, n\ge 1, \ell\ge 1$ ，則 $b(m,n,\ell,P'_r)=$

$$m\left\{\left[\frac{n\ell-\left[\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)\right]}{r}\right]+Max\left\{0,n+\ell-r\left(\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]+1\right)\right\}\right\}.$$

若 $m\ge 1, 1\le n\le r-1, \ell\ge 1$ ，則 $b(m,n,\ell,P'_r)=$

$$n\left\{\left[\frac{m\ell-\left[\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)\right]}{r}\right]+Max\left\{0,\mathrm{m}+\ell-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]+1\right)\right\}\right\}.$$

(3) 若 $m\ge r, n\ge r, \ell\ge r$ ，則 $b(m,n,\ell,P'_r)=$

$$\left[\frac{mn\ell-\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)}{r}\right]$$

$$+Max\left\{\begin{array}{l}0,r^2-r\left(m+n+\ell+r\left[\frac{m}{r}\right]+r\left[\frac{n}{r}\right]+r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)+mn+m\ell+n\ell\\-rm\left(\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)-rn\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)-r\ell\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]\right)\\-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)\end{array}\right\}.$$

3. $b\left(m,n,\ell,L'_r\right)=$

(1) $b\left(1,n,\ell,L'_r\right)=b\left(m,1,\ell,L'_r\right)=b\left(m,n,1,L'_r\right)=0.$

(2)若 $m\geq 1,2\leq n\leq r-1,2\leq \ell\leq r-1$，則 $b\left(m,n,\ell,L'_r\right)=n\ell\left\lfloor\frac{m}{r}\right\rfloor.$

若 $2\leq m\leq r-1,n\geq 1,2\leq \ell\leq r-1$，則 $b\left(m,n,\ell,L'_r\right)=m\ell\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor.$

若 $2\leq m\leq r-1,2\leq n\leq r-1,\ell\geq 1$，則 $b\left(m,n,\ell,L'_r\right)=mn\left[\frac{\ell}{r}\right].$

(3)若 $m\geq 1,n\geq 1,2\leq \ell\leq r-1$，則 $b\left(m,n,\ell,L'_r\right)=$

$$\ell\left\{\left\lfloor\frac{mn-\left\lfloor\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\right\rfloor}{r}\right\rfloor+Max\left\{0,m+n-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]+1\right)\right\}\right\}.$$

若 $2\leq m\leq r-1,n\geq 1,\ell\geq 1$，則 $b\left(m,n,\ell,L'_r\right)=$

$$m\left\{\left[\frac{n\ell-\left[\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)\right]}{r}\right]+Max\left\{0,n+\ell-r\left(\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]+1\right)\right\}\right\}.$$

若 $m\geq 1,2\leq n\leq r-1,\ell\geq 1$，則 $b\left(m,n,\ell,L'_r\right)=$

$$n\left\{\left[\frac{m\ell-\left[\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)\right]}{r}\right]+Max\left\{0,\mathrm{m}+\ell-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]+1\right)\right\}\right\}.$$

（4）若 $m\geq r,n\geq r,\ell\geq r,r\geq 3$，則 $b\left(m,n,\ell,P'_r\right)=$

$$\left[\frac{mn\ell-\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)}{r}\right]$$

$$+Max\left\{\begin{array}{l}0,r^2-r\left(m+n+\ell+r\left[\frac{m}{r}\right]+r\left[\frac{n}{r}\right]+r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)+mn+m\ell+n\ell\\-rm\left(\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)-rn\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)-r\ell\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]\right)\\-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)\end{array}\right\}.$$

（5）若 $r=2$, m 為奇數, n 為偶數, ℓ 為偶數，則 $b\left(m,n,\ell,L'_r\right)=n\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right].$

若 $r=2$, m 為奇數, n 為奇數, ℓ 為偶數，則 $b\left(m,n,\ell,L'_r\right)=\ell\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right].$

若 $r=2$, m 為奇數, n 為偶數, ℓ 為奇數，則 $b\left(m,n,\ell,L'_r\right)=n\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right].$

柒、未來展望

現實生活中，任意方格圖形更符合實際問題，希望配合工程上的需求，研究其他**不規則圖形**或**混合使用不同圖形**。而立體情況也許能夠透過**座標化**，將研究範圍擴展至 n 維，進一步結合組合數學中的**著色問題**，提高此研究的應用性。

捌、參考文獻

[1]《TRML 台灣區高中數學競賽歷屆試題暨詳解Ⅱ》，博凱出版社.

[2]《星星轉轉轉-阻隔集之研究》，永春高中數資班成發作品集.

[3]《星羅棋布-阻隔集研究》，1060331 梯次數學類小論文甲等.

【評語】050403

本作品為 TRML 試題的延伸討論，主要針對解決問題的方法進行改善，並延伸至三維棋盤的討論。主要是研究在棋盤中放入一些點，使得給定的圖形不論如何擺放，都會至少碰到給定的點；對於擺放的策略，本作品也針對數種圖形，分別提供出非常有效率的擺法，至於這樣子的方法是否為最優的方法，在理論上的證明是有著墨，相信可以寫得更精確。另外，所研究的圖形相對比較簡單，在這方面應該可以做得更好，尤其是能夠從圖論方面得到更多的參考資訊，對於推導公式的完整性也會有更具體的協助。

作品海報

壹、摘要

本篇研究中考慮在 $m\times n$ 棋盤中放置若干阻隔點，使得給定的圖形 A 經任意旋轉翻轉並放入棋盤中，皆會碰到阻隔點，這些阻隔點所形成的集合稱之為「阻隔集」。我們的目標是先有根據地推測阻隔點的排列方式，再證明我們的推測是正確的，以求出阻隔集的最小值。

貳、名詞定義與解釋

(一)圖形定義

首先定義在方格圖形中，經數次旋轉、翻轉而得之圖形稱為同構圖形。

(1)平面情況

S_r：表 $r\times r$ 的正方形。

P_r：表一邊為1、一邊為 r 的長方形之所有同構圖形。

L_r：表 P_r 末端旁接上一個方格的圖形之同構圖形，共有8種。

(2)立體情況

S'_r：表 $r\times r\times r$ 的正方體。

P'_r：表兩邊為1、一邊為 r 的長方體之所有同構圖形。

L'_r：表 P'_r 末端旁接上一個方塊的圖形之同構圖形，共有16種。

(二)阻隔集與 $b(m,n,A)$

定義 $b(m,n,A)$ 為最小的非負整數 k，使得在棋盤中可找出 k 個格子組成的集合 B，滿足棋盤中任一與 A 同構的圖形都與 B 至少有一共同的格子，這樣的集合 B 即稱為 A 的阻隔集。

參、研究目的

研究目的一：補充詳解中 $b(m,n,S_r)$ 及 $b(m,n,P_r)$ 證明之不足。

研究目的二：求出 $b(m,n,L_r)$ 之值。

研究目的三：求出 $m\times n\times \ell$ 三維空間中 $b(m,n,\ell,S'_r)$、$b(m,n,\ell,P'_r)$ 及 $b(m,n,\ell,L'_r)$ 之值。

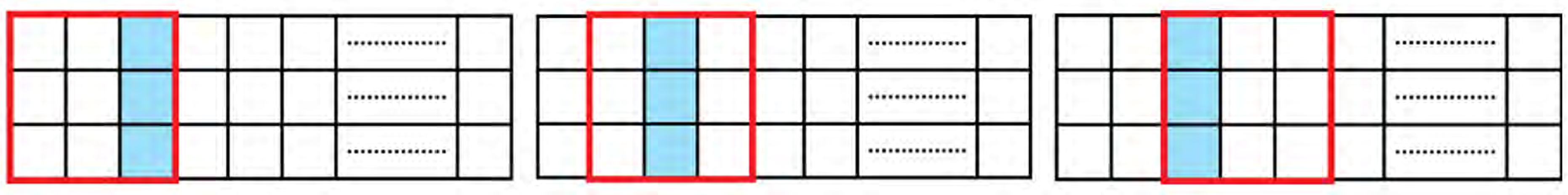
肆、研究過程

研究流程： 找出最小阻隔集可能的排列方式 ➡ 依其排列方式列出一般式 ➡ 證明此一般式確實能算出阻隔集最小值

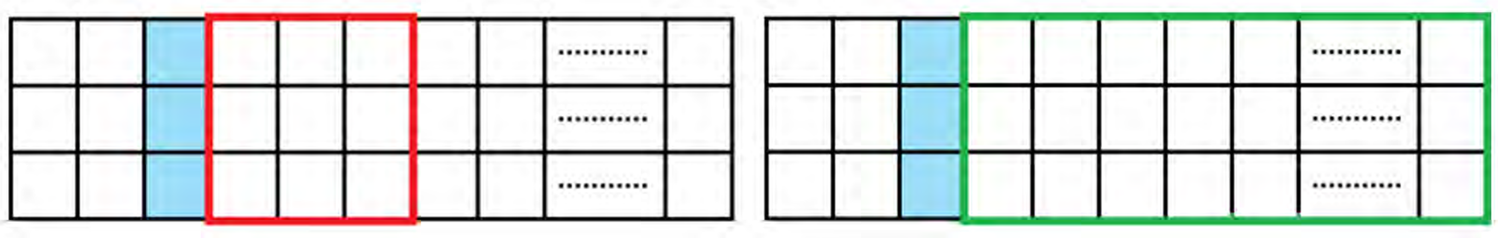
一、平面情況

(一) $b(m,n,S_r)$

討論 S_3 阻隔集的放置：

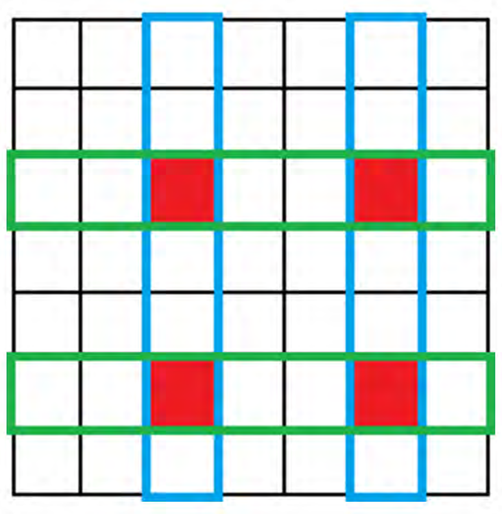


⇨ 放置第一個阻隔點於第三行中任一格

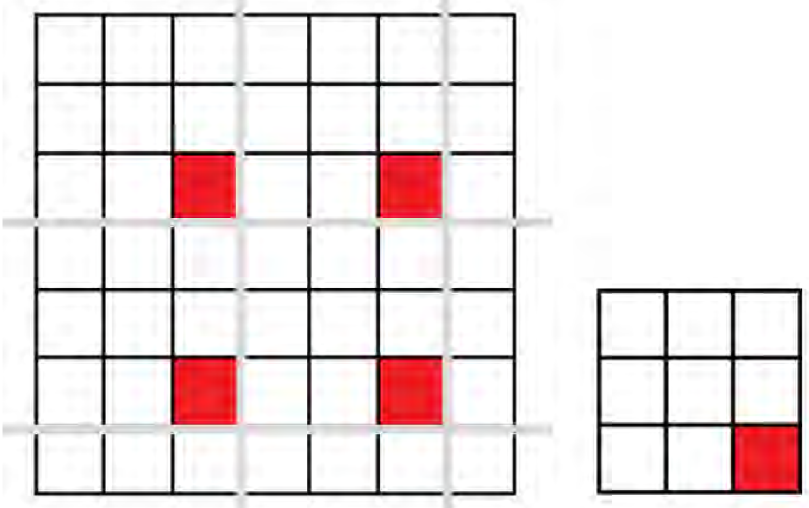


⇨ 正方形橫向分布時，阻隔點會位於行數為3的倍數的格子中

同理，正方形縱向分布時，阻隔點會位於列數為3的倍數的格子中。故推測 $B=\{(i,j):1\le i\le m,1\le j\le n$,i 和 j 為3的倍數$\}$ 是一個 S_3 的阻隔集，如圖(1)。為方便討論，將其分割為單位正方形，如圖(2)



圖(1)



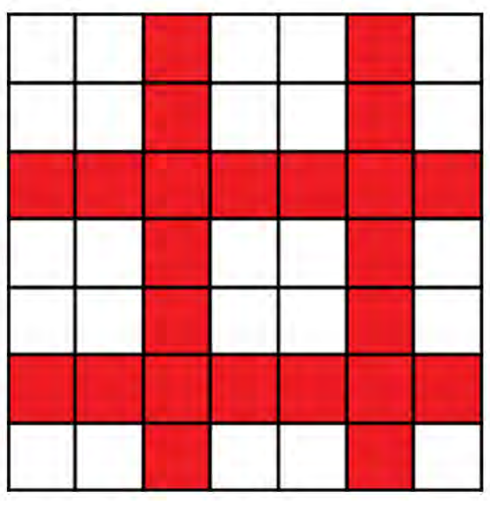
圖(2)

結論1

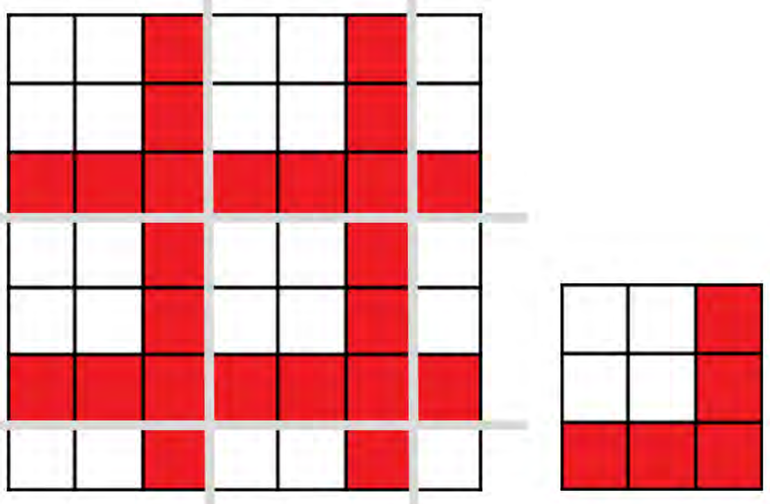
$$b(m,n,S_r)=\left\lfloor\frac{m}{r}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor.$$

(二) $b(m,n,P_r)$

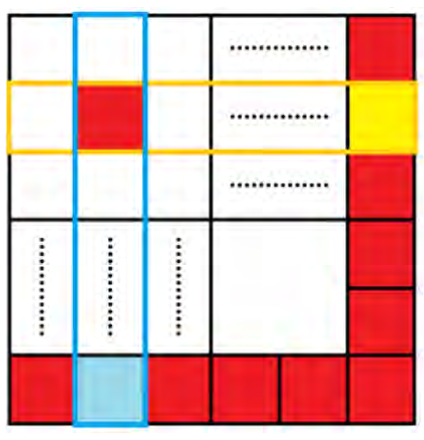
與 S_3 的分析手法相同，可推測 $B=\{(i,j):1\le i\le m,1\le j\le n,i$ 或 j 為3的倍數$\}$ 是一個 P_3 的阻隔集，如圖(3)。為方便討論，將其分割為單位正方形，如圖(4)。



圖(3)

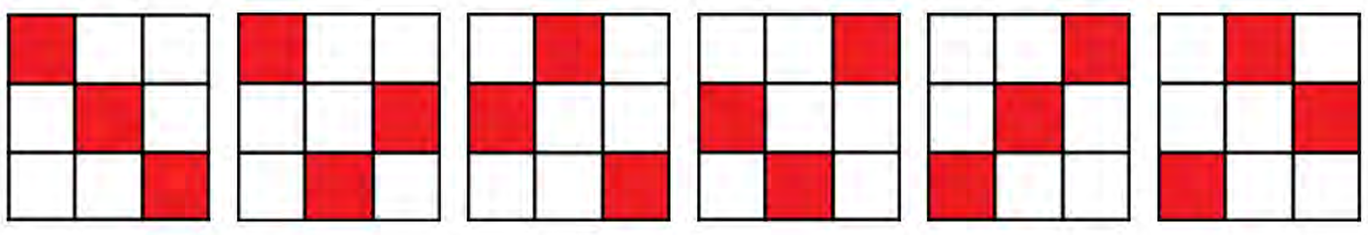


圖(4)

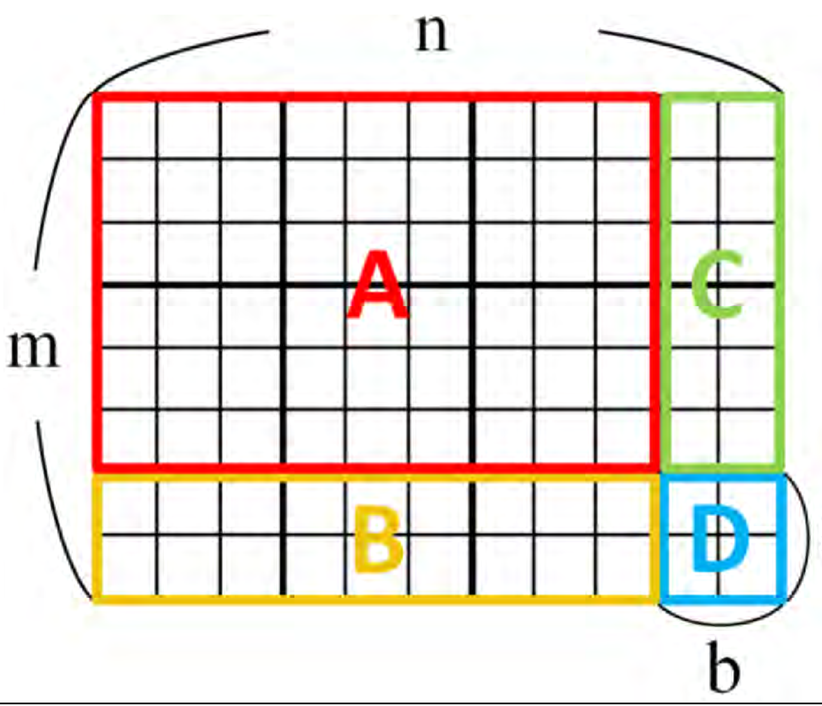


圖(5)

但**阻隔點數量可以更少**，如圖(5)，於任兩相異阻隔點各自對應之長方形相重疊的格子中放置一阻隔點，則此阻隔點可代替原本兩阻隔點。以此方式合併後，共可得 $r!$ 種單位正方形，以 P_3 為例如下圖。



到底使用哪個單位正方形能夠求出阻隔集數量的最小值呢?



(圖6)

將 $m\times n$ 棋盤分成ABCD四部分討論，如圖(6)，得A部分共有 $r\left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor$ 個阻隔點，B部分共有 $\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor\left(m-r\left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor\right)$ 個阻隔點，C部分共有 $\left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor\left(n-r\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor\right)$ 個阻隔點，D部分最少有 $Max\{0,a+b-r\}$ 個阻隔點，故 $|B|=\dfrac{mn-ab}{r}+Max\{0,a+b-r\}.$

結論2

$b(m,n,P_r)=$

1. 若 $1\le m<r,n\ge 1$，則 $b(m,n,P_r)=m\left\lfloor \frac{n}{r}\right\rfloor.$

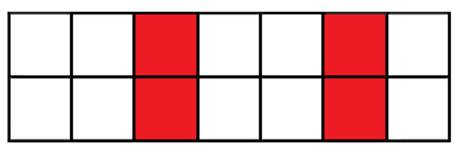
   若 $m\ge 1,1\le n<r$，則 $b(m,n,P_r)=n\left\lfloor \frac{m}{r}\right\rfloor.$

2. 若 $m\ge r,n\ge r$，則

$$b(m,n,P_r)=\frac{mn-\left[\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\right]}{r}+Max\left\{0,m+n-r\left(\left\lfloor\frac{m}{r}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor+1\right)\right\}.$$

【證明】

1. m 或 $n<r$ 時，只需考慮單一方向的 P_r 圖形，以 $r=3,m=2$ 為例，阻隔集排列方式如圖7，得證。


(圖7)

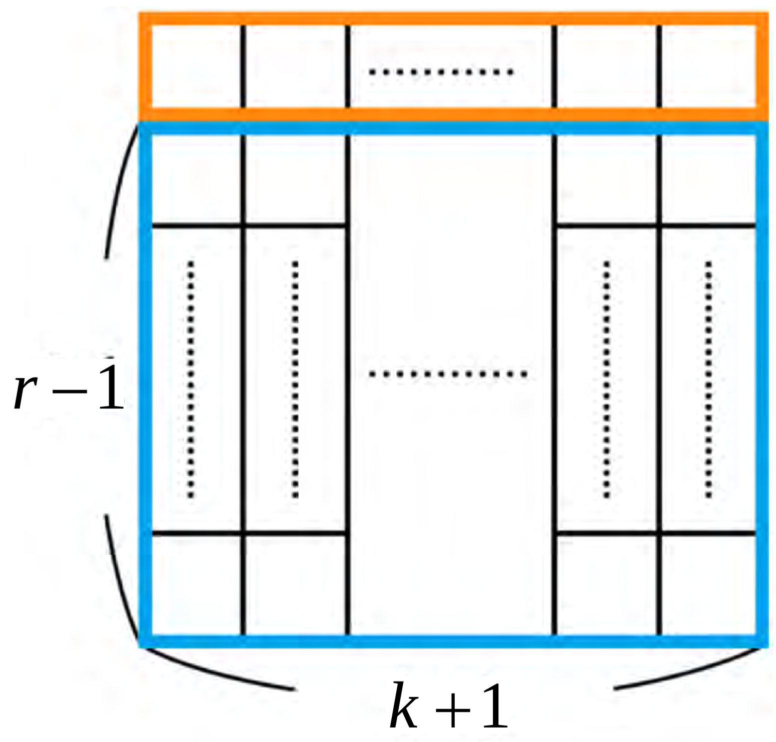
2. ∵此排列方式是一個 P_r 的阻隔集，但不確定阻隔集數量是否為最小值

$\therefore b(m,n,P_r)\le|B|=\dfrac{mn-ab}{r}+Max\{0,a+b-r\}.$ ……上界

$\because a<r,b<r \quad \therefore 0\le Max\{0,a+b-r\}\le r-2.$

∵棋盤中有 $\dfrac{mn-ab}{r}$ 個不重疊的 P_r 圖形，而每個 P_r 圖形中至少要有一阻隔點

$\therefore b(m,n,P_r)\ge\dfrac{mn-ab}{r}.$ ……下界



(圖8)

接著，討論 $Max\{0,a+b-r\}$ 的所有可能:

若 $Max\{0,a+b-r\}=k(1\le k\le r-2,k\in\mathbb{N})$，

則 $\dfrac{mn-ab}{r}\le b(m,n,P_r)\le\dfrac{mn-ab}{r}+k.$

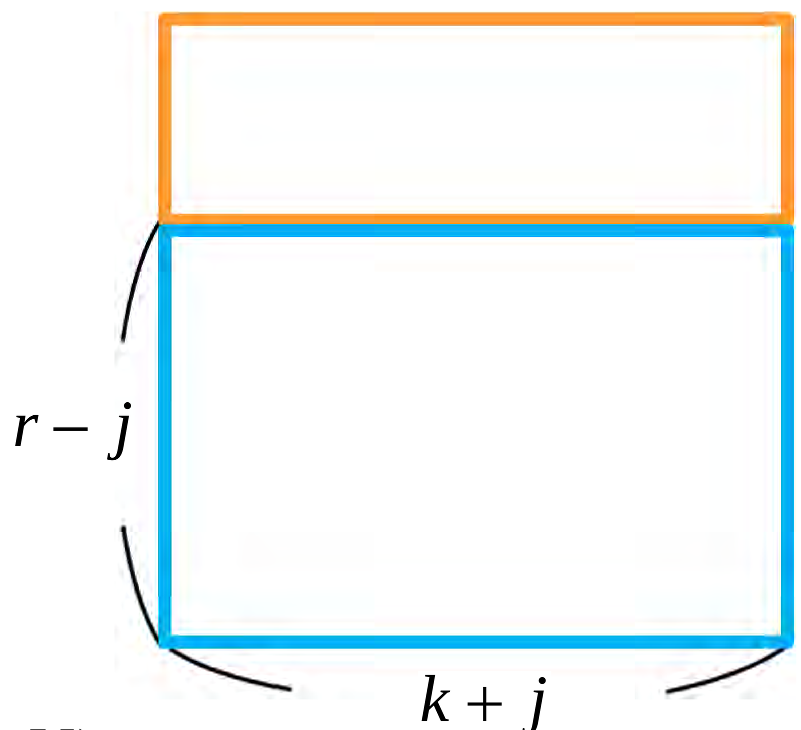
可設 $a=r-1,b=k+1$(如圖8)

若 $b(m,n,P_r)=\dfrac{mn-ab}{r}.$ (即藍色 $a\times b$ 區域不放置阻隔點)，

則圖8中橘色部分須有 $k+1$ 個阻隔點放在 1 列，不符最小排列方式。

若 $b(m,n,P_r)=\dfrac{mn-ab}{r}+(k-1).$ (即藍色 $a\times b$ 區域放置 $k-1$ 個阻隔點)

則圖8中橘色部分須有 2 個阻隔點放在 1 列，不符最小排列方式。



(圖9)

故 $a=r-1$ 的所有情況下皆符合 $b(m,n,P_r)=\dfrac{mn-ab}{r}+Max\{0,a+b-r\}.$

另外，以下考慮 $a+b-r$ 還有其他可能的長和寬，即 $a\ne r-1.$

設 $a=r-j,b=k+j(2\le j\le r-1)$ (如圖9)，令 $b(m,n,P_r)=\dfrac{mn-ab}{r}+t,(0\le t\le k,t\in\mathbb{N}).$

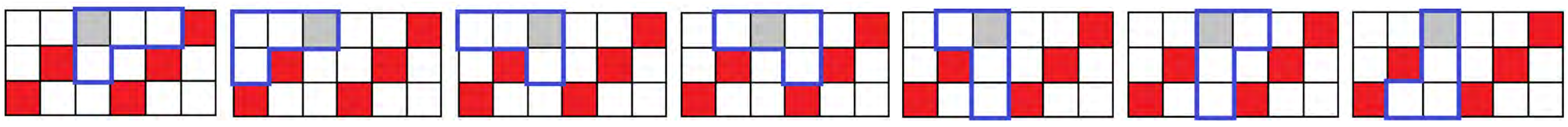
當 $t=0$ 時，橘色部分須有 $k+j$ 個阻隔點放在 j 列；當 $t=1$ 時，橘色部分須有 $k+j-1$ 個阻隔點放在 j 列...

以此類推討論，當 $t=k-1$ 時，橘色部分須有 $j+1$ 個阻隔點放在 j 列。

即當 $0\le t\le k-1$ 時，橘色部分的阻隔集皆不符合最小排列方式。得證。

(三) $b(m,n,L_r)$

L_r 圖形可視為 P_r 圖形末端旁接上一個方格，因此 **P_r 圖形的阻隔集是 L_r 圖形的一個阻隔集**，且當 $m\ge r,n\ge r$ 時，阻隔集個數無法更少(如圖10)，故此時結論大致與 P_r 圖形相同。


(圖10)

結論3

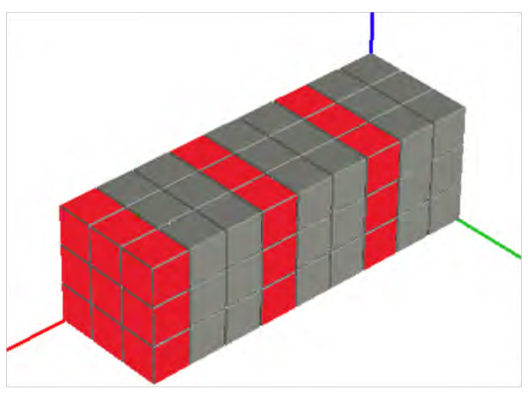
若 $m>r,n>r,r>3$，則 $b(m,n,L_r)=$

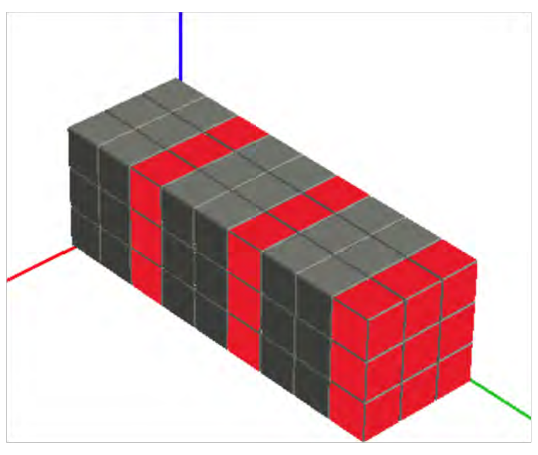
$$\frac{mn-\left[\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\right]}{r}+Max\left\{0,m+n-r\left(\left\lfloor\frac{m}{r}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor+1\right)\right\}.$$

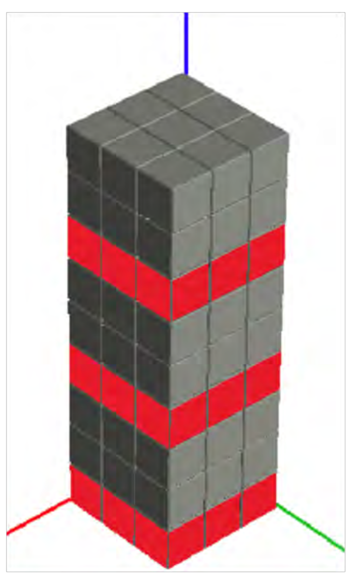
二、立體情況

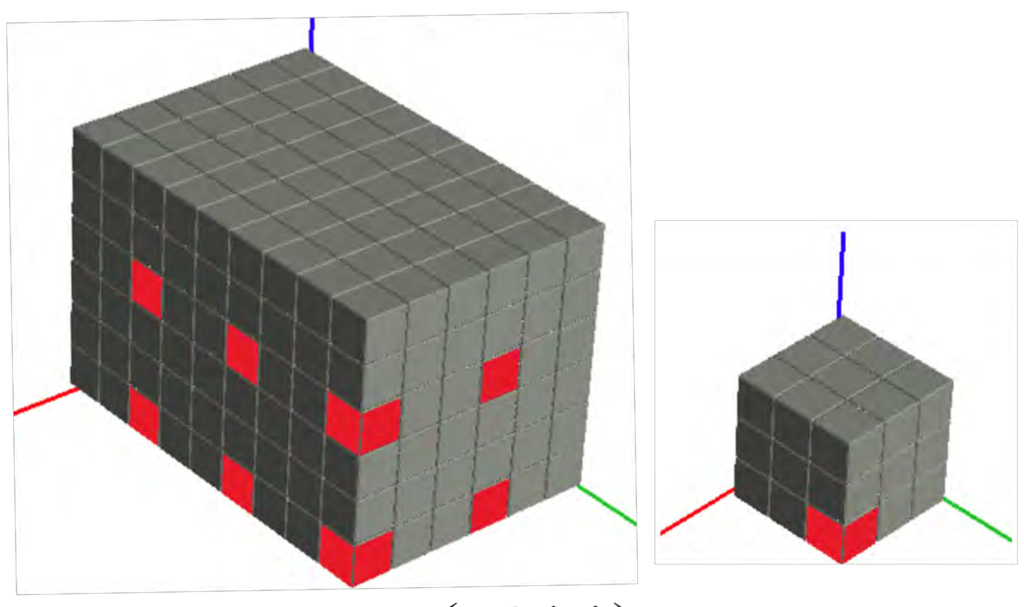
(一) $b(m,n,\ell,S'_r)$

與平面情況的分析手法相同，固定 n,ℓ 為 3 時，阻隔點會位於 $S_{3t,j,k}$ **此面中任一格**(如圖11)；固定 m,ℓ 為 3 時，阻隔點會位於 $S_{i,3t,k}$ **此面中任一格**(如圖12)；固定 m,n 為 3 時，阻隔點會位於 $S_{i,j,3t}$ **此面中任一格**(如圖13)。故推測 $B=\{(i,j,k):1\le i\le m,1\le j\le n,1\le k\le \ell,i,j,k$ 皆為 3 的倍數$\}$是一個 S'_3的阻隔集，為方便討論，將其分割為單位正方體(如圖14) 。


(圖11)


(圖12)


(圖13)

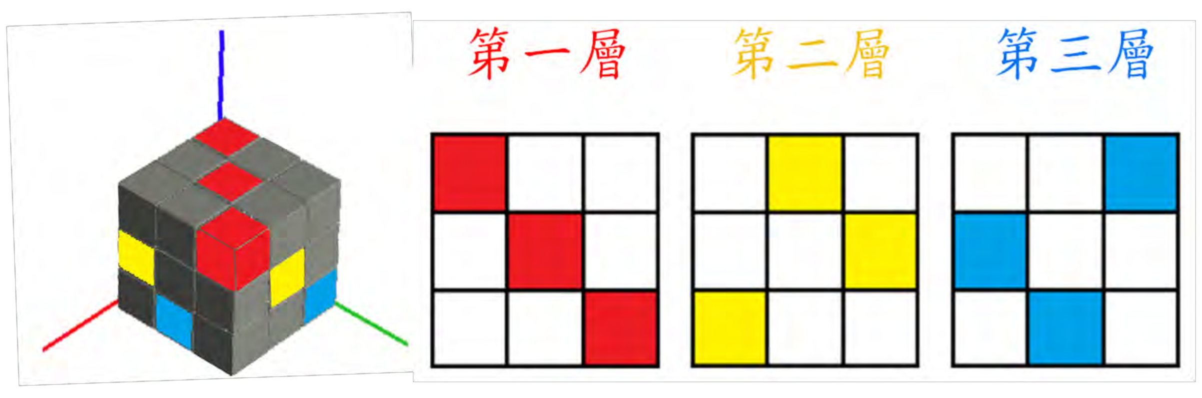

(圖14)

結論4

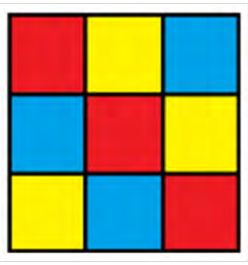
$$b(m,n,\ell,S'_r)=\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right].$$

(二) $b(m,n,\ell,P'_r)$ 及 $b(m,n,\ell,L'_r)$

使用與平面情況相同的分析手法，最終得到的單位正方體，可視為由r層平面情況的 $r\times r$單位正方形組合而成(舉例如圖15)，但前提是俯視圖中各方格皆須有阻隔點(如圖16)。設 $a=m-r\left[\frac{m}{r}\right]$，$b=n-r\left[\frac{n}{r}\right]$，$c=\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]$，計算後可得剩餘的 $a\times b\times c$ 區域阻隔點個數為 $Max\{0,r(r-a-b-c)+ab+ac+bc\}$.
另外，與平面的概念相同，若 $m>r,n>r,\ell>r,r>3$，則 $b(m,n,\ell,P'_r)=b(m,n,\ell,L'_r)$.



(圖15)


(圖16)

結論5

若 $m>r,n>r,\ell>r,r>3$，則 $b(m,n,\ell,P'_r)=b(m,n,\ell,L'_r)=$

$$\frac{mn\ell-\left(m-r\left[\frac{m}{r}\right]\right)\left(n-r\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\ell-r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)}{r}+Max\left\{\begin{array}{l}0,r^2-r\left(m+n+\ell+r\left[\frac{m}{r}\right]+r\left[\frac{n}{r}\right]+r\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)+mn+m\ell+n\ell\\-rm\left(\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)-rn\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)-r\ell\left(\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]\right)\\-r\left(\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{m}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]\left[\frac{\ell}{r}\right]\right)\end{array}\right\}.$$

伍、附錄

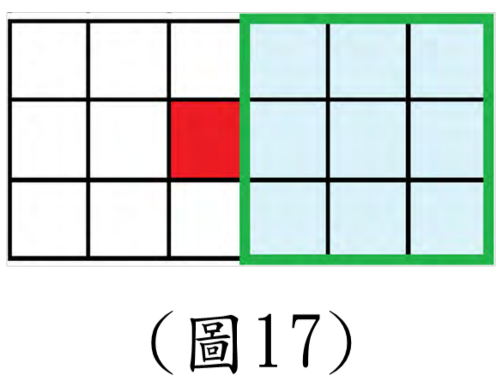
本篇研究旨在找出阻隔集的最小值，事實上，符合最小值的阻隔點排列方式不只一種，使我們產生進一步研究的動機。深入研究後發現，P圖形的排列方式只有一種，S圖形的排列總數相對非常複雜，甚至無法列出一般式，得寫程式輔助，以下說明之:

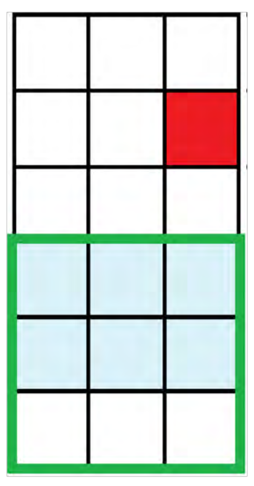
若綠色正方形左方的正方形選了第 $\begin{array}{c}r\\r-1\\\vdots\\1\end{array}$ 行，則綠色正方形可選第 $\begin{array}{c}1\sim r\\1\sim(r-1)\\\vdots\\1\end{array}$ 行其中一行(如圖17)。

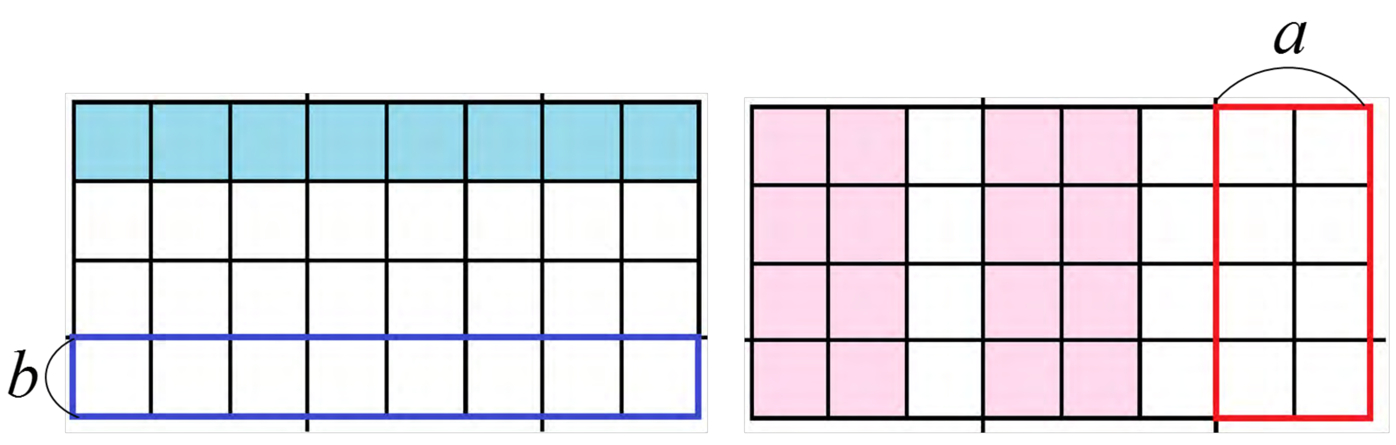
若綠色正方形上方的正方形選了第 $\begin{array}{c}r\\r-1\\\vdots\\1\end{array}$ 列，則綠色正方形可選第 $\begin{array}{c}1\sim r\\1\sim(r-1)\\\vdots\\1\end{array}$ 列其中一列(如圖18)。

⇨ 棋盤中每個單位正方形阻隔點位置的行數受左方正方形影響、列數受上方正方形影響。另外需要特別注意的是，若 m 或 n 非 r 的倍數，則不能選擇第$1\sim a$行、第$1\sim b$列，才符合最小值(如圖19)。

因此，**在已知 m,n,r的情況下，可由上述迴圈關係，計算出排列總數**。至於立體情況則多了變數 ℓ，概念與 m,n 相同。


(圖17)


(圖18)



(圖20)

研究設備與器材:紙、筆、電腦、小畫家繪圖軟體、Microsoft Office Word、Mathtype、BurrTools.