中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050402

對稱構造多邊形有向面積等面積線探討

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 林暐祐 高二 吳軒丞 高二 洪鼎睿	蕭健忠

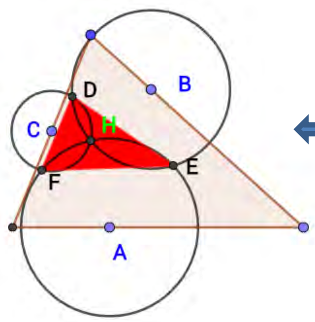
關鍵詞：有向面積、等面積線

摘要

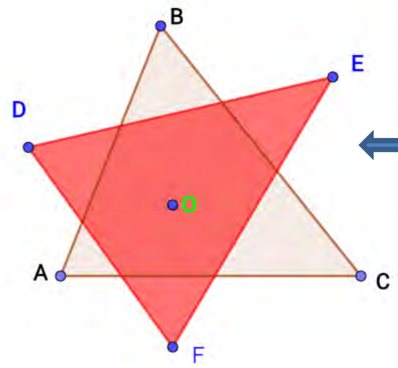
本科展目的在於研究一個點對多邊形各邊做對稱點，並將對稱點依對稱順序依序連起來所構成的多邊形有向面積，並探討其等面積線的圖形形狀。經研究發現對於多邊形僅可能出現圓形，直線及平面等三種情形。最後，我們想要找出構造等面積線為直線的方法，並得到一種可行的構造多邊形方法。

壹、　研究動機

本科展發想自國中所做的數學科展，國中的科展主要是探討藉由三邊上的特殊點與三角形五心的連線為半徑，以三邊上的點作為圓心依序畫出三個圓，兩兩相鄰圓的交點連線構成的三角形面積做為主要探討。在國中的科展中發現了一些面積相等的構造三角形並進行了證明。後來，在高中數學專題課時想要對國中科展作更廣義的探討，並想辦法找出構造圖形等面積的情況。最後發現原本命題與探討朝多邊形各邊做對稱點，並將對稱點依對稱順序依序連起來所構成的多邊形有向面積為等價的。因此我們就產生了一個探討面向不同的新題目。之後我們就朝等面積線探討的方向繼續研究下去，並拓展至複雜圖形的探討。



此圖是國中科展的示意圖，紅色三角形 DEF 是構造的面積。以邊上三點 ABC 到垂心 H 的距離為半徑做三圓，兩相鄰圓的交點 DEF 為構造的三角形面積，並探討面積不變量出現情形。



此圖為現在科展所要討論的的構造面積，構造方式為以平面上任意點 O 朝三角形 ABC 三邊做對稱得點 DEF，將 DEF 連線所得紅色三角形是本科展所要探討的面積。

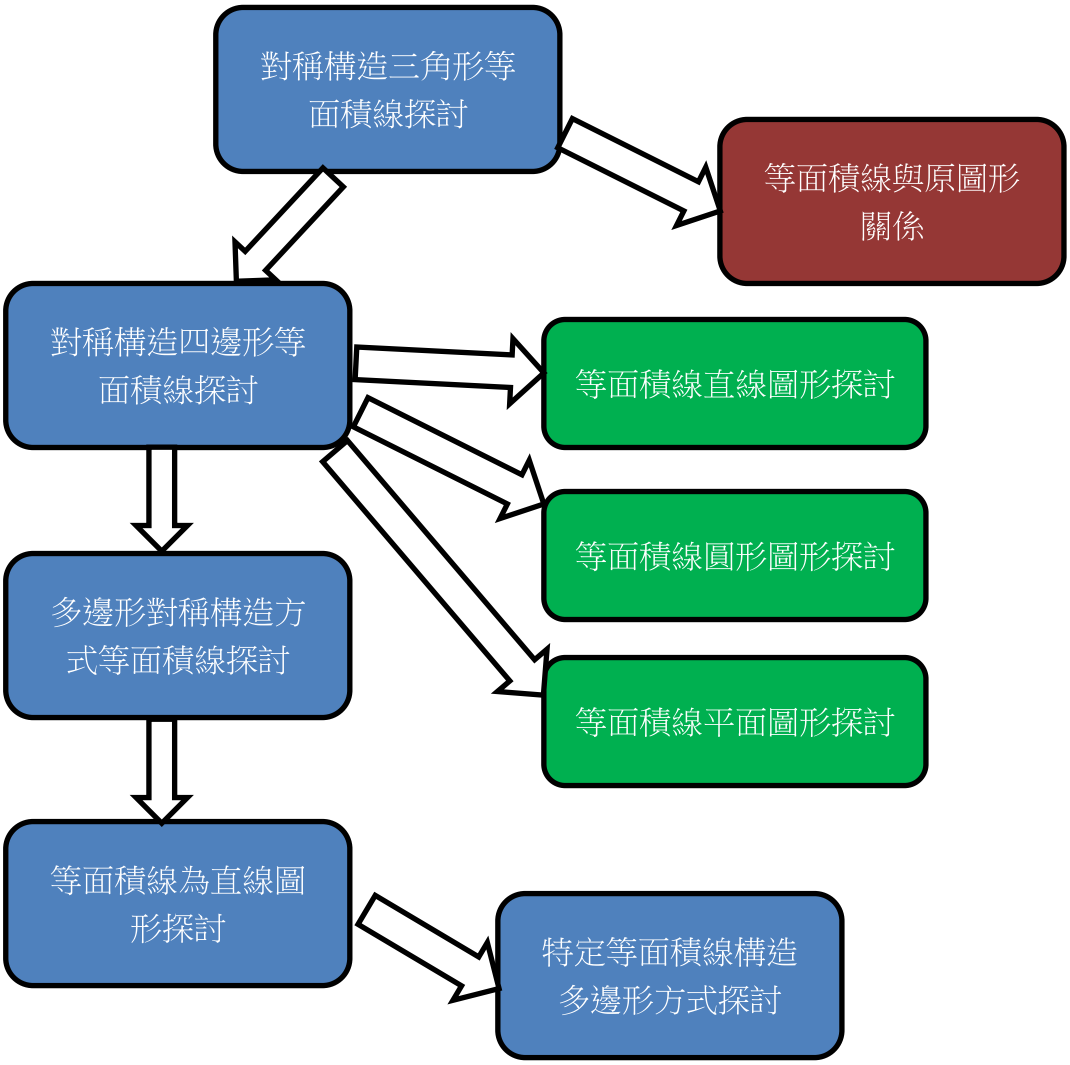
貳、　研究目的

一、證明三角形利用對稱方法所構造圖形的等面積線是圓形
二、證明四邊形利用對稱方法所構造圖形的等面積線可能為直線、圓或平面
三、找到對稱構造等面積線是直線的四邊形
四、探討對稱構造 n 邊形的等面積線
五、探討對稱構造 n 邊形等面積線是直線的情形
六、找出等面積線與原圖形性質的關聯性

參、　研究設備及器材

一、紙筆
二、*Georgebra* 繪圖軟體

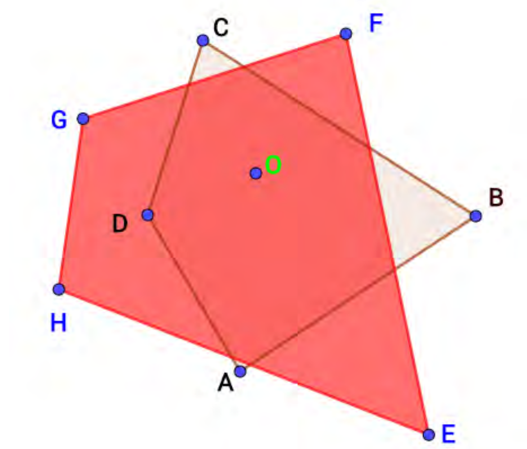
肆、　研究過程或方法



伍、　名詞定義

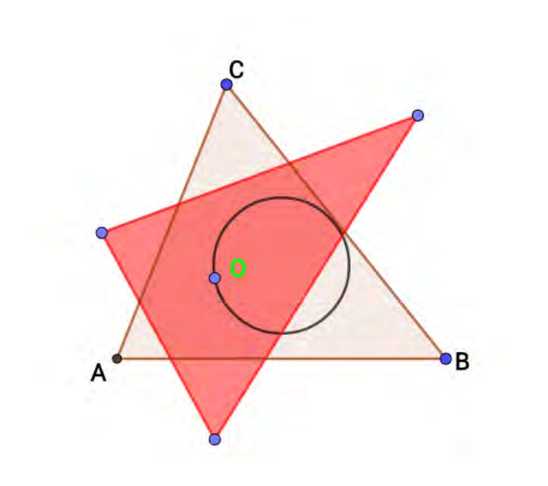
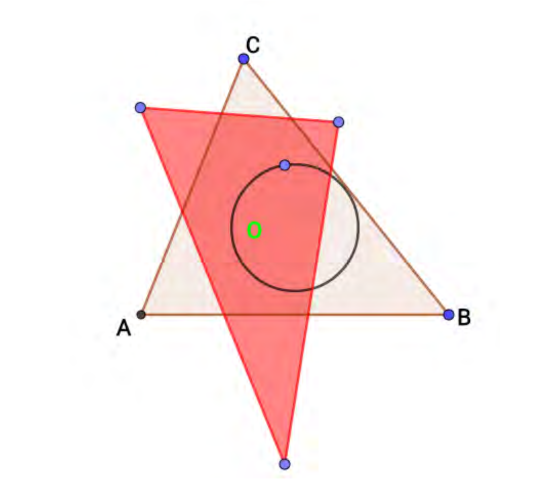
一、對稱源:朝多邊形各邊做對稱的平面上任意點稱為對稱源。

二、對稱構造面積方式:在平面上任意取對稱源，對平面上的一 n 邊形依照邊的順序做對稱，並將依序的對稱點連起來，構成一 n 邊形面積。上述方法就是本研究中構造面積的方式。下圖以四邊形做例子。



平面上任意對稱源 O 朝四邊形 $ABCD$ 四邊做對稱，並將依序對稱點 $EFGH$ 連起來構成紅色四邊形 $EFGH$，此方式是對稱構造面積方式

三、等面積線:對於構造出來的多邊形，將會構成同樣面積構造多邊形的平面上所有對稱源連線所得圖形。下圖以三角形進行說明。

	
Polygon (G'_2, G', G'_1) → t2 = 13.07	Polygon (G'_2, G', G'_1) → t2 = 13.07

由上表格中可看出三角形的等面積線為圓形

四、本科展中的面積定義:本科展中所探討的面積全部為有向面積

五、有向面積:

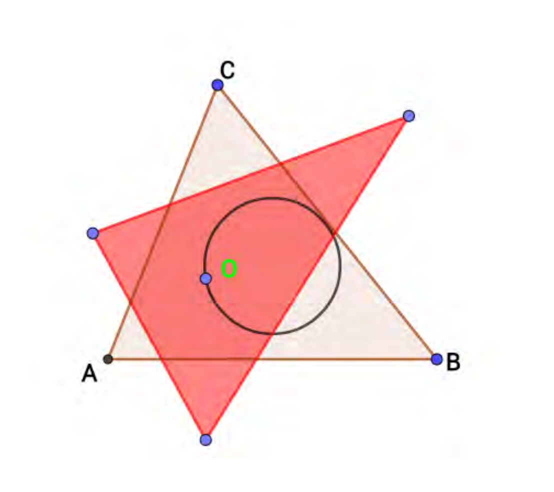
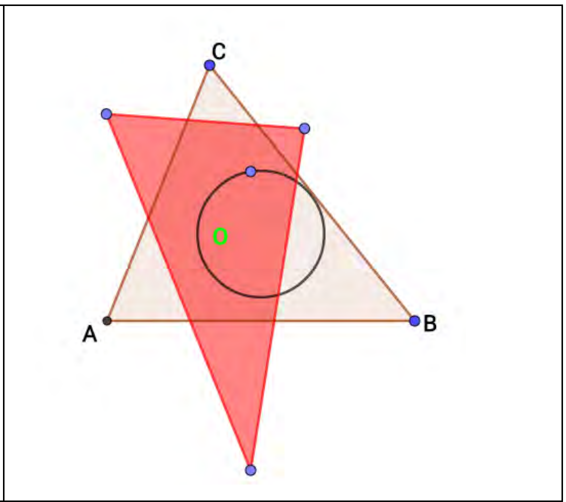
假設一多邊形$a_1a_2 \ldots\ldots a_n$， a_1的座標是(x_1, y_1)⋯⋯，則此多邊形有向面積是

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

陸、　研究結果

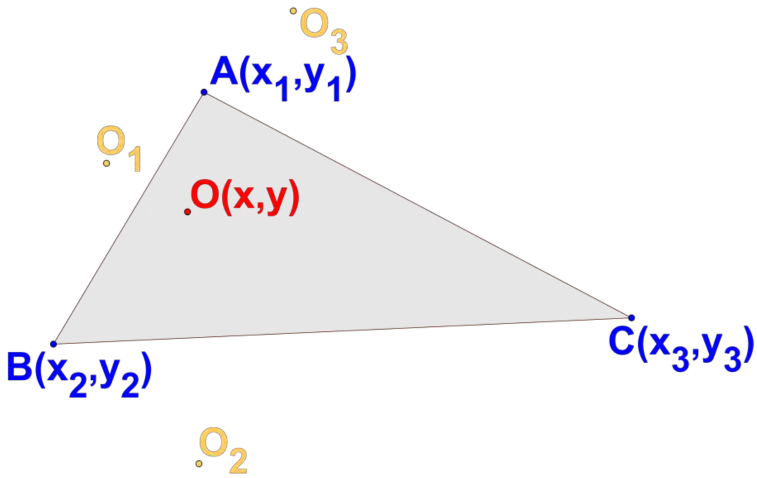
一、三角形的等面積線探討:

依照對稱構造方式所構造出來的面積，發現平面上任意對稱源取法能造成面積相等的對稱源連線為一圓，並以外心為其圓心。

	
Polygon (G'_2, G', G'_1) → t2 = 13.07	Polygon (G'_2, G', G'_1) → t2 = 13.07

由上表格中可看出三角形的等面積線為圓形

首先，先利用解析幾何的方法證明三角形的對稱構造三角形等面積線只可能有圓的情形



證明:

在平面上任取一點 O，向三角形三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$作對稱，得$O_1(O_{1x},O_{1y})$、$O_2(O_{2x},O_{2y})$、$O_3(O_{3x},O_{3y})$

$$O_1=\left(x-2(y_2-y_1)\cdot\frac{(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+x_2y_1-x_1y_2}{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2},\ y-2(x_1-x_2)\cdot\frac{(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+x_2y_1-x_1y_2}{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}\right)$$

$$O_2=\left(x-2(y_3-y_2)\cdot\frac{(y_3-y_2)x+(x_2-x_3)y+x_3y_2-x_2y_3}{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2},\ y-2(x_2-x_3)\cdot\frac{(y_3-y_2)x+(x_2-x_3)y+x_3y_2-x_2y_3}{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}\right)$$

$$O_3=\left(x-2(y_1-y_3)\cdot\frac{(y_1-y_3)x+(x_3-x_1)y+x_1y_3-x_3y_1}{(y_1-y_3)^2+(x_1-x_3)^2},\ y-2(x_3-x_1)\cdot\frac{(y_1-y_3)x+(x_3-x_1)y+x_1y_3-x_3y_1}{(y_1-y_3)^2+(x_1-x_3)^2}\right)$$

$$對稱構造三角形面積 = S_{\triangle O_1 O_2 O_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} O_{1x} & O_{2x} & O_{3x} & O_{1x} \\ O_{1y} & O_{2y} & O_{3y} & O_{1y} \end{vmatrix}$$

接下來，計算$\begin{vmatrix} O_{1x} & O_{2x} & O_{3x} & O_{1x} \\ O_{1y} & O_{2y} & O_{3y} & O_{1y} \end{vmatrix}$之$x^2$項係數及$y^2$項係數

$$對稱構造三角形面積 = S_{\triangle O_1 O_2 O_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} O_{1x} & O_{2x} & O_{3x} & O_{1x} \\ O_{1y} & O_{2y} & O_{3y} & O_{1y} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times$$

$$\begin{vmatrix} \frac{[(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2]x+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)y+(y_2-y_1)(x_1y_2-x_2y_1)}{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} & \frac{[(x_3-x_2)^2-(y_3-y_2)^2]x+2(x_3-x_2)(y_3-y_2)y+(y_3-y_2)(x_2y_3-x_3y_2)}{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2} & \frac{[(x_1-x_3)^2-(y_1-y_3)^2]x+2(x_1-x_3)(y_1-y_3)y+(y_1-y_3)(x_3y_1-x_1y_3)}{(y_1-y_3)^2+(x_1-x_3)^2} & \frac{[(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2]x+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)y+(y_2-y_1)(x_1y_2-x_2y_1)}{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} \\ \frac{[(y_2-y_1)^2-(x_2-x_1)^2]y+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)x+(x_2-x_1)(x_2y_1-x_1y_2)}{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} & \frac{[(y_3-y_2)^2-(x_3-x_2)^2]y+2(x_3-x_2)(y_3-y_2)x+(x_3-x_2)(x_3y_2-x_2y_3)}{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2} & \frac{[(y_1-y_3)^2-(x_1-x_3)^2]y+2(x_1-x_3)(y_1-y_3)x+(x_1-x_3)(x_1y_3-x_3y_1)}{(y_1-y_3)^2+(x_1-x_3)^2} & \frac{[(y_2-y_1)^2-(x_2-x_1)^2]y+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)x+(x_2-x_1)(x_2y_1-x_1y_2)}{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} \end{vmatrix}$$

發現兩項係數相等，且其值是

$$\frac{[(y_1-y_2)(x_2-x_3)-(x_1-x_2)(y_2-y_3)][(y_2-y_3)(x_3-x_1)-(x_2-x_3)(y_3-y_1)][(y_3-y_1)(x_1-x_2)-(x_3-x_1)(y_1-y_2)]}{[(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2]\cdot[(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2]\cdot[(y_1-y_3)^2+(x_1-x_3)^2]}$$

推得等面積線是直線(即x^2項係數 $= y^2$項係數 $= 0$ 時)僅成立於三角行兩邊平行時，因此等面積線是直線的三角形不存在

接下來、我們想要將結果簡化，因此利用三角函數的方式表達解析幾何的式子。將座標利用矩陣轉換的方式，我們寫出了如下的式子。

假設對稱源(x,y)對三角形的其中一邊(其方程式為$cos\theta x + sin\theta y + k = 0$，其中$\theta$是三角形邊與$x$軸的夾角)做對稱，

對稱座標是$\big(x - 2cos\theta(cos\theta x + sin\theta y + k), y - 2sin\theta(cos\theta x + sin\theta y + k)\big)$

此轉換式寫成矩陣的樣子如下，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin^2\theta - cos^2\theta & -2sin\theta cos\theta \\ -2sin\theta cos\theta & -sin^2\theta + cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2cos\theta k \\ -2sin\theta k \end{pmatrix}$$

即$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cos2\theta & -sin2\theta \\ -sin2\theta & cos2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2cos\theta k \\ -2sin\theta k \end{pmatrix}$

因為本研究中探討的是二次項係數的形式，因此可將加上去的常數項向量捨去，即$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cos2\theta & -sin2\theta \\ -sin2\theta & cos2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

接下來，我們令$\overline{AB}$的θ為θ_1，$\overline{BC}$的θ為θ_2，$\overline{AC}$的θ為θ_3，

因此對稱構造三角形的面積行列式為

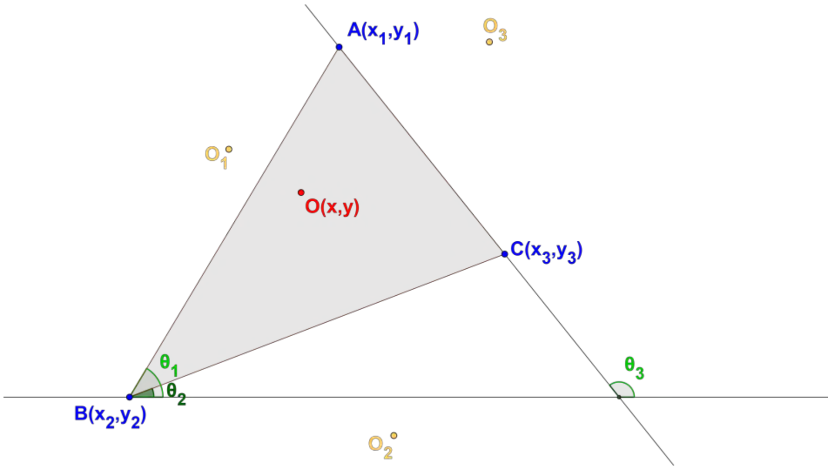
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -cos2\theta_1 x - sin2\theta_1 y & -cos2\theta_2 x - sin2\theta_2 y & -cos2\theta_3 x - sin2\theta_3 y & -cos2\theta_1 x - sin2\theta_1 y \\ -sin2\theta_1 x + cos2\theta_1 x & -sin2\theta_2 x + cos2\theta_2 x & -sin2\theta_3 x + cos2\theta_3 x & -sin2\theta_1 x + cos2\theta_1 x \end{vmatrix}$$

其二次項係數為

$$cos2\theta_1 sin2\theta_2 + cos2\theta_2 sin2\theta_3 + cos2\theta_3 sin2\theta_1 - sin2\theta_1 cos2\theta_2 - cos2\theta_3 sin2\theta_2$$

$-cos2\theta_1 sin2\theta_3 = sin(2\theta_2 - 2\theta_1) + sin(2\theta_3 - 2\theta_2) + sin(2\theta_1 - 2\theta_3)$

接下來，我們討論$2(\theta_2 - \theta_1)$、$2(\theta_3 - \theta_2)$、$2(\theta_1 - \theta_3)$分別代表什麼。



由上圖我們可以得知

$sin2(\theta_2 - \theta_1) = sin(-2\angle ABC) = -sin(2\angle ABC)$，

$sin2(\theta_3 - \theta_2) = sin(2\pi - 2\angle ACB) = si\,n(-2\angle ACB) = -\sin(2\angle ACB)$，

$sin2(\theta_1 - \theta_3) = sin(-2\angle BAC) = -sin(2\angle BAC)$。

let$\angle ABC = \alpha$、$\angle ACB = \beta$、$\angle BAC = \gamma$，我們有$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

因此二次項係數為

$sin(2\theta_2 - 2\theta_1) + sin(2\theta_3 - 2\theta_2) + si\,n(2\theta_1 - 2\theta_3)$

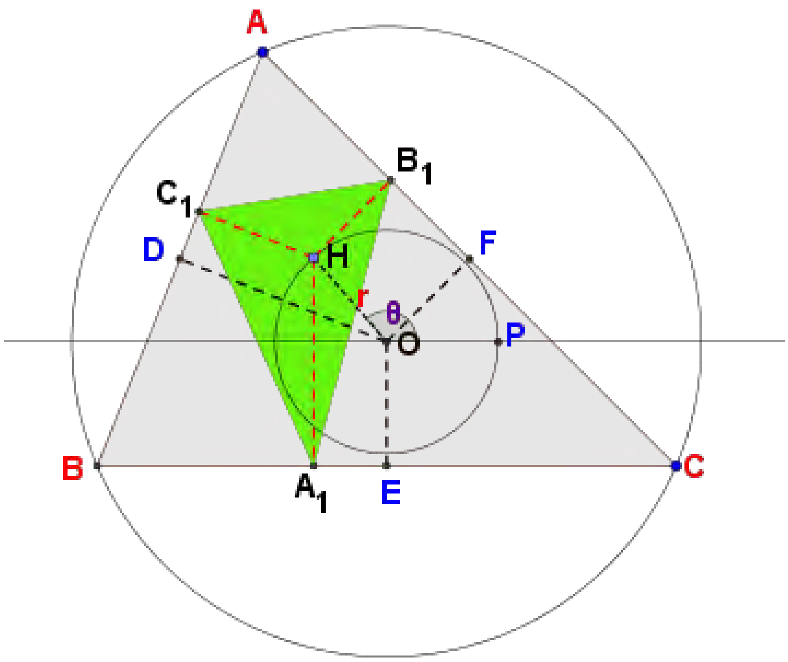
$= -si\,n(2\alpha) - \sin(2\beta) - si\,n(2\gamma) = -4sin\alpha sin\beta sin\gamma$

因此，我們得到了三角形的對稱構造三角形等面積線不會是直線，因為直線僅可能發生於$\alpha = 0$ or $\beta = 0$ or $\gamma = 0$，而這些情況皆不可能發生在三角形的情況下。

因為得知了這種方式的簡潔性，接下來多邊形的討論皆由此方法導證。

接下來，我們想利用幾何的方式證明原本命題。

證明:



(一)作一三角形 ABC 令其外心為 O 以 O 為圓心任意長度為半徑畫圓，圓上有一動點 H 且 H 朝三角形三邊作垂足，三垂足為 A_1、B_1、C_1。過點 O 做平行$\overline{BC}$的直線，令直線與小圓交於 P。令$\overline{OP}$旋轉 θ 至$\overline{OH}$，令$\overline{AB}=c$、$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{OH}=r$、$\overline{OC}=R$。由正弦定理得知:$\overline{AB}=2R\sin C=c$、$\overline{BC}=2R\sin A=a$、$\overline{AC}=2R\sin B=b$，而現在要證明$\frac{S_{AC_1B_1}}{S_{ABC}}+\frac{S_{CA_1B_1}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BA_1C_1}}{S_{ABC}}$為定值。

(二)$\overline{BC_1}=\frac{c}{2}+r\cos(B+360°-\theta)=\frac{c}{2}+r\cos(B-\theta)$，

$\overline{BA_1}=\frac{a}{2}+r\cos(360°-\theta)=\frac{a}{2}+r\cos\theta$，

$\overline{CA_1}=\frac{a}{2}-r\cos\theta$，

$\overline{CB_1}=\frac{b}{2}-r\cos\big(C-(360°-\theta)\big)$，

$\overline{AB_1}=\frac{b}{2}+r\cos(C+\theta)$，

$\overline{AC_1}=\frac{c}{2}-r\cos(B-\theta)$。

推得:$\frac{S_{AC_1B_1}}{S_{ABC}}+\frac{S_{CA_1B_1}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BA_1C_1}}{S_{ABC}}=$

$$\frac{\left(\frac{c}{2}+r\cos(B-\theta)\right)\left(\frac{a}{2}+r\cos\theta\right)}{ac}+\frac{\left(\frac{a}{2}-r\cos\theta\right)\left(\frac{b}{2}-r\cos(C+\theta)\right)}{ab}$$

$$+\frac{\left(\frac{b}{2}+r\cos(C+\theta)\right)\left(\frac{c}{2}-r\cos(B-\theta)\right)}{bc}=$$

$$\frac{\frac{ac}{4}+r\left(\frac{a}{2}\cos(B-\theta)+\frac{c}{2}\cos\theta\right)+r^2\cos\theta\cos(B-\theta)}{4R^2\sin A\sin C}$$
$$+\frac{\frac{ab}{4}-r\left(\frac{b}{2}\cos\theta+\frac{a}{2}\cos(C+\theta)\right)+r^2\cos\theta\cos(C+\theta)}{4R^2\sin A\sin B}$$
$$+\frac{\frac{bc}{4}+r\left(\frac{c}{2}\cos(C+\theta)-\frac{b}{2}\cos(B-\theta)\right)-r^2\cos(C+\theta)\cos(B-\theta)}{4R^2\sin B\sin C}$$

通分後分母為$4R^2\sin A\sin B\sin C$為定值

分子為$\underbrace{\left(\frac{ac}{4}\sin B+\frac{ab}{4}\sin C+\frac{bc}{4}\sin A\right)}_{1.}+r\Big[\underbrace{\frac{a}{2}\cos(B-\theta)\sin B+\frac{c}{2}\cos\theta\sin B-\frac{b}{2}\cos\theta\sin C-}_{2.}$

$\underbrace{\frac{a}{2}\cos(C+\theta)\sin C+\frac{c}{2}\cos(C+\theta)\sin A-\frac{b}{2}\cos(B-\theta)\sin A}\Big]+r^2[\underbrace{\cos\theta\sin B\cos(B-\theta)}_{3.}+$

$\underbrace{\cos\theta\sin C\cos(C+\theta)}_{4.}-\underbrace{\cos(C+\theta)\cos(B-\theta)\sin A}_{5.}]$

1. $\left(\frac{ac}{4}\sin B+\frac{ab}{4}\sin C+\frac{bc}{4}\sin A\right)$為定值

2. $\frac{a}{2}\cos(B-\theta)\sin B+\frac{c}{2}\cos\theta\sin B-\frac{b}{2}\cos\theta\sin C-\frac{a}{2}\cos(C+\theta)\sin C+\frac{C}{2}\cos(C+\theta)\sin A-\frac{b}{2}\cos(B-\theta)\sin A=R\sin A\sin B\cos(B-\theta)+R\sin B\sin C\cos\theta-R\sin B\sin C\cos\theta-R\sin A\sin C\cos(C+\theta)+R\sin A\sin C\cos(C+\theta)-R\sin A\sin B\cos(B-\theta)=0$(定值)-

3. $\cos\theta\sin B\cos(B-\theta)=\cos\theta\sin B(\cos B\cos\theta+\sin B\sin\theta)=\cos^2\theta\sin B\cos B+\sin^2 B\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cos^2\theta\sin 2B+(\sin^2 C+\cos^2 C)\sin^2 B\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cos^2\theta\sin 2B+\sin^2 C\sin^2 B\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\sin^2 B\sin\theta\cos\theta$

4. $\cos\theta\sin C\cos(C+\theta)=\cos C\sin C(\cos C\cos\theta-\sin C\sin\theta)=\cos^2\theta\sin C\cos C-\sin^2 C\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cos^2\theta\sin 2C-(\sin^2 B+\cos^2 B)\sin^2 C\sin\vartheta\cos\theta=\frac{1}{2}\cos^2\theta\sin 2C-\sin^2 B\sin^2 C\sin\theta\cos\theta-\cos^2 B\sin^2 C\sin\theta\cos\theta$

5. $\cos(C+\theta)\cos(B-\theta)\sin A=\cos(C+\theta)\cos(B-\theta)\sin(B+C)=(\cos C\cos\theta-\sin C\sin\theta)(\cos B\cos\theta-\sin B\sin\theta)\sin(B+C)=(\cos^2\theta\cos B\cos C+\cos C\sin B\sin\theta\cos\theta-\sin C\cos B\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\sin B\sin C)\sin=(\cos^2\theta\cos B\cos C+\sin(B-C)\sin\theta\cos\theta-\sin B\sin C\sin^2\theta)\sin(B+C)=(\cos^2\theta\cos B\cos C+\sin(B-C)\sin\theta\cos\theta-\sin B\sin C(1-\cos^2\theta))\sin(B+C)=(\cos^2\theta\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos^2\theta-\sin B\sin C+\sin(B-C)\sin\theta\cos\theta)\sin(B+C)=(\cos^2\theta(\cos B\cos C+\sin B\sin C)\sin(B+C)-\sin B\sin C\sin(B+C)+\sin(B-$

$C)\sin(B+C)\sin\theta\cos\theta = \cos^2\theta\cos(B-C)\sin(B+C) - \sin B\sin C\sin(B+C) +$

$\sin(B-C)\sin(B+C)\sin\theta\cos\theta = \cos^2\theta \times \frac{\sin 2B+\sin 2C}{2} - \sin B\sin C\sin(B+C) +$

$(\sin^2 B\cos^2 C - \sin^2 C\cos^2 B)\sin\theta\cos\theta$

6. 總結 $\frac{1}{2}\cos^2\theta\sin 2B + \sin^2 C\sin^2 B\sin\theta\cos\theta + \cos^2 C\sin^2 B\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin 2C -$

$\sin^2 B\sin^2 C\sin\theta\cos\theta - \cos^2 B\sin^2 C\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta \times \frac{\sin 2B+\sin 2C}{2} +$

$\sin B\sin C\sin(B+C) - (\sin^2 B\cos^2 C - \sin^2 C\cos^2 B)\sin\theta\cos\theta = \sin B\sin C\sin A$為一定值

因此我們推得到三角型的對稱構造三角形等面積線是圓形，並以外心為圓心。

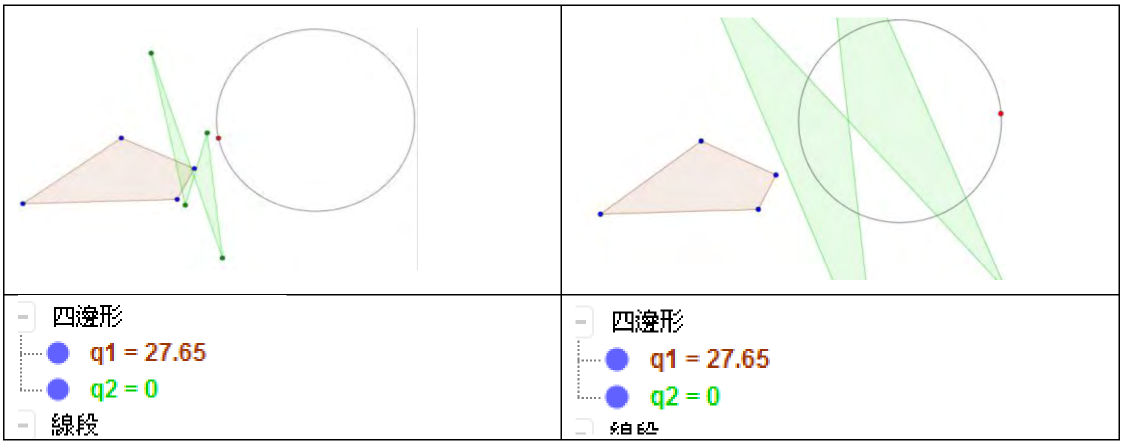
(在附錄二中，我們探討若取的對稱源在原三角形外的情形)

二、由三角形推廣到四邊形的等面積線

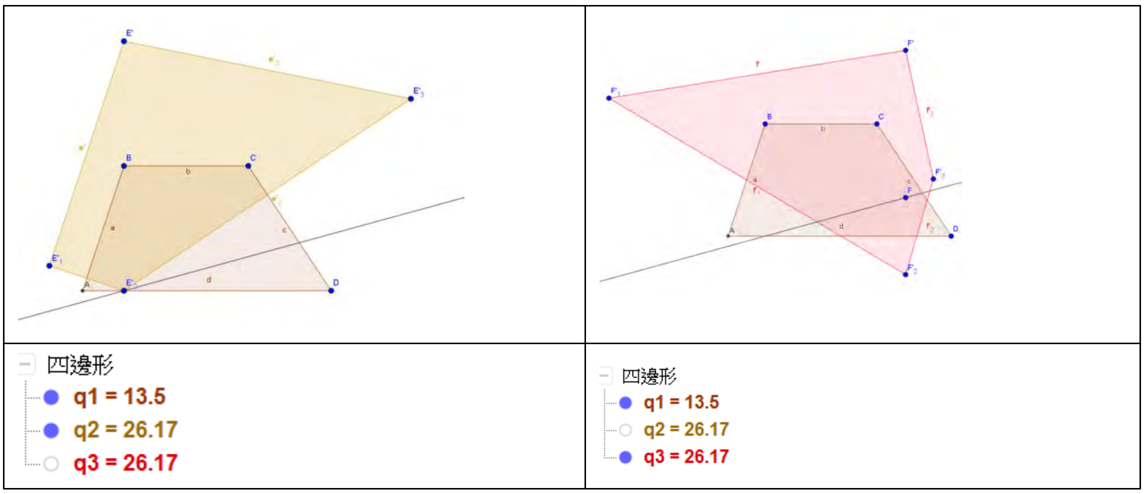
由前面的證明已知三角形的等面積線為圓形，我們接下來要推廣至四邊形的情形並探討對稱構造四邊形的等面積線。

利用 *ggb* 作圖過程中我們發現到構造四邊形等面積線可能出現圓、直線跟平面三種情況，如下表。

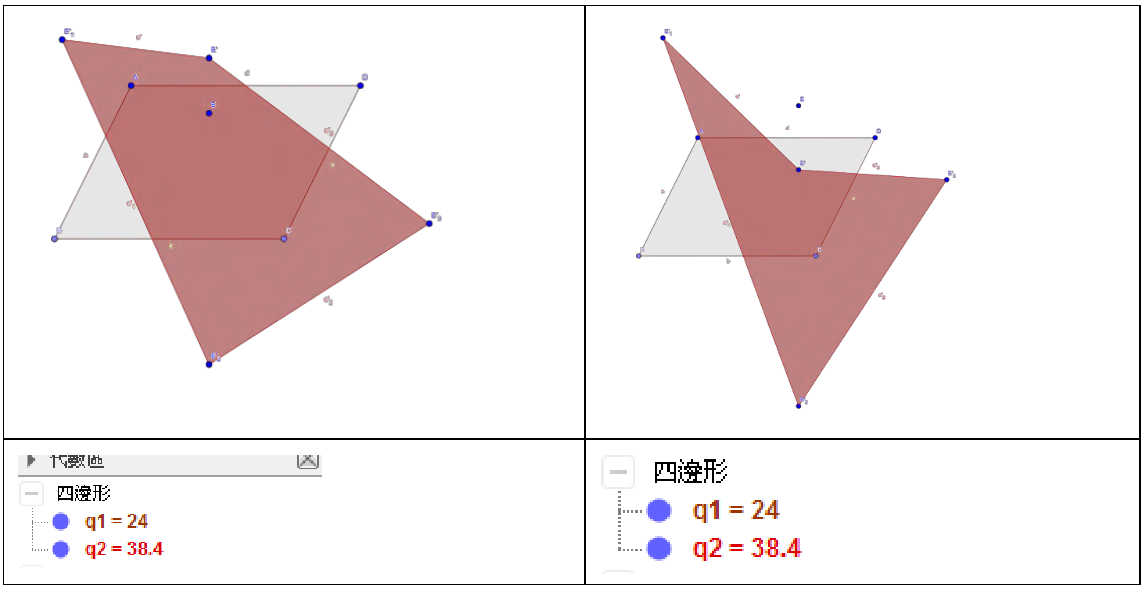
(一) 等面積線為圓形



(二) 等面積線為直線，其中原圖形是梯形



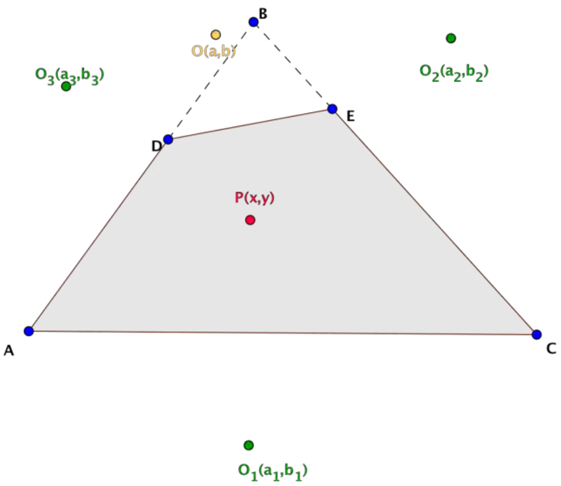
(三) 等面積線為平面，其中原圖形是平行四邊形。



下面，我們要證明四邊形的對稱構造四邊形等面積線的方程式可寫成

$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=S$

證明:因為本科展研究面積的是有向面積，因此可先用行列式表示面積。



由原三角形 ABC 對稱構造三角形 $O_1O_2O_3$ 的面積是 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix}$，而行列式的各元素皆可寫成 $Ax+By+C$。

而由四邊形 $ADEC$ 所作的對稱構造四邊形 $OO_2O_1O_3$ 的面積是 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a & a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b & b_3 & b_1 \end{vmatrix}$

因由原三角形 ABC 對稱構造三角形等面積線是圓形，因此 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix} = constant\ 1$ 可化簡成 $\alpha_1(x^2+y^2)+\beta_1x+\gamma_1y+\delta_1 = constant\ 1 = a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1-a_2b_1-a_3b_2-a_1b_3$

而因三角形 DBE 的對稱構造三角形等面積線也是圓形，因此 $\begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 & a \\ b & b_2 & b_3 & b \end{vmatrix} = constant\ 2$ 可化簡成 $\alpha_2(x^2+y^2)+\beta_2x+\gamma_2y+\delta_2 = constant\ 2 = a_3b+ab_2+a_2b_3-ab_3-a_2b-a_3b_2$

而待求之對稱構造四邊形 $OO_2O_1O_3$ 的面積 $=(a_1b_2+a_2b+ab_3+a_3b_1-ab_2-a_2b_1-a_3b-$

$a_1b_3) \div 2$

經比對後可發現 $a_1b_2 + a_2b + ab_3 + a_3b_1 - ab_2 - a_2b_1 - a_3b - a_1b_3 = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_2b_1 - a_3b_2 - a_1b_3 - (a_3b + ab_2 + a_2b_3 - ab_3 - a_2b - a_3b_2)$

而產生構造四邊形$OO_2O_1O_3$等面積線的情況是$\begin{vmatrix} a_1 & a & a_2 & a_3 & a_1 \\ b_1 & b & b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix} = constant\ 3 = -(\alpha_2(x^2 + y^2) + \beta_2x + \gamma_2y + \delta_2) + \alpha_1(x^2 + y^2) + \beta_1x + \gamma_1y + \delta_1 = (-\alpha_2 + \alpha_1)(x^2 + y^2) + (-\beta_2 + \beta_1)x + (-\gamma_2 + \gamma_1)y + (-\delta_2 + \delta_1)$

因此四邊形等面積線方程式是圓方程式，且若$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$時等面積線是直線。

而若$\alpha_1 - \alpha_2$、$\beta_1 - \beta_2$、$\gamma_1 - \gamma_2$皆等於 0，等面積線就會出現平面的情況。

三、

接下來、我們想要將結果簡化，因此利用三角函數的方式表達解析幾何的式子。將座標利用矩陣轉換的方式，我們寫出了如下的式子。

假設對稱源(x, y)對四邊形的其中一邊(其方程式為$cos\theta x + sin\theta y + k = 0$，其中$\theta$是四邊形邊與$x$軸的夾角)做對稱，

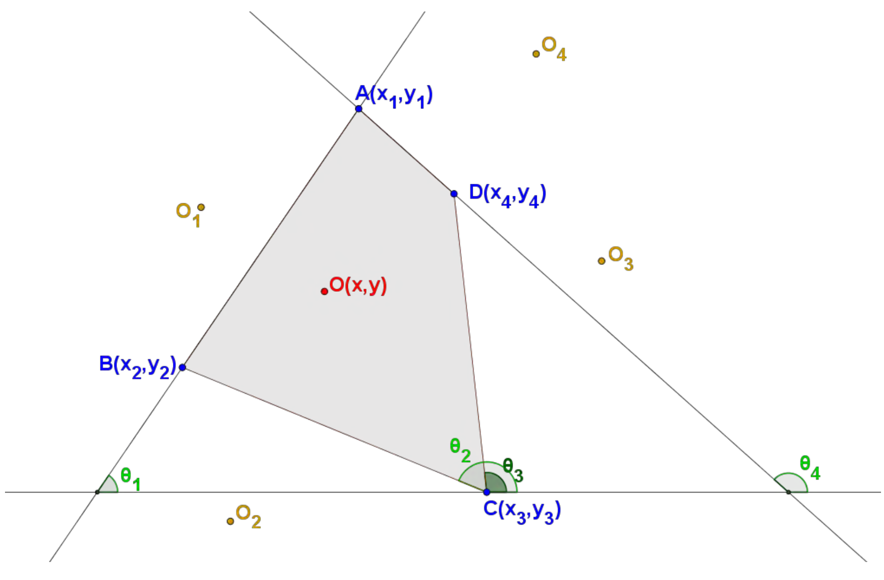
對稱座標是$\left(x - 2cos\theta(cos\theta x + sin\theta y + k), y - 2sin\theta(cos\theta x + sin\theta y + k)\right)$

此轉換式寫成矩陣的樣子如下，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin^2\theta - cos^2\theta & -2sin\theta cos\theta \\ -2sin\theta cos\theta & -sin^2\theta + cos^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2cos\theta k \\ -2sin\theta k \end{pmatrix}$$

則$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cos2\theta & -sin2\theta \\ -sin2\theta & cos2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2cos\theta k \\ -2sin\theta k \end{pmatrix}$

因為本研究中探討的是二次項係數的形式，因此可將加上去的常數項向量捨去，即$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cos2\theta & -sin2\theta \\ -sin2\theta & cos2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$。



接下來，我們令$\overline{AB}$的θ為θ_1，$\overline{BC}$的θ為θ_2，$\overline{CD}$的θ為θ_3，$\overline{DA}$的θ為θ_4

因此對稱構造四邊形的面積行列式為

$$\begin{vmatrix} -cos2\theta_1 x - sin2\theta_1 y & -cos2\theta_2 x - sin2\theta_2 y & -cos2\theta_3 x - sin2\theta_3 y & -cos2\theta_4 x - sin2\theta_4 y & -cos2\theta_1 x - sin2\theta_1 y \\ -sin2\theta_1 x + cos2\theta_1 x & -sin2\theta_2 x + cos2\theta_2 x & -sin2\theta_3 x + cos2\theta_3 x & -sin2\theta_4 x + cos2\theta_4 x & -sin2\theta_1 x + cos2\theta_1 x \end{vmatrix}$$

其二次項係數為

$$cos2\theta_1 sin2\theta_2 + cos2\theta_2 sin2\theta_3 + cos2\theta_3 sin2\theta_4 + cos2\theta_4 sin2\theta_1$$
$$-cos2\theta_2 sin2\theta_1 - cos2\theta_3 sin2\theta_2 - cos2\theta_4 sin2\theta_3 - cos2\theta_1 sin2\theta_4$$
$$= sin(2\theta_2 - 2\theta_1) + sin(2\theta_3 - 2\theta_2) + sin(2\theta_4 - 2\theta_3) + sin(2\theta_1 - 2\theta_4)$$

接下來，我們討論$2(\theta_2-\theta_1)$、$2(\theta_3-\theta_2)$、$2(\theta_4-\theta_3)$、$2(\theta_1-\theta_4)$分別代表什麼。

由上圖我們可以得知

$sin2(\theta_2-\theta_1) = sin(-2\angle ABC) = -sin(2\angle ABC)$，

$sin2(\theta_3-\theta_2) = sin(-2\angle BCD) = -\sin(2\angle BCD)$，

$sin2(\theta_4-\theta_3) = sin(-2\angle ADC) = -sin(2\angle ADC)$，

$sin2(\theta_1-\theta_4) = sin(-2\angle BAD) = -sin(2\angle BAD)$。

設$\angle ABC = \alpha$、$\angle BCD = \beta$、$\angle \mathrm{CDA} = \gamma$、$\angle DAB = \delta$，則$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$

因此二次項係數為

$$sin(2\theta_2 - 2\theta_1) + sin(2\theta_3 - 2\theta_2) + sin(2\theta_4 - 2\theta_3) + sin(2\theta_1 - 2\theta_4)$$
$$= -sin(2\alpha) - \sin(2\beta) - sin(2\gamma) - sin(2\delta)$$
$$= 4\sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\cos\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}$$

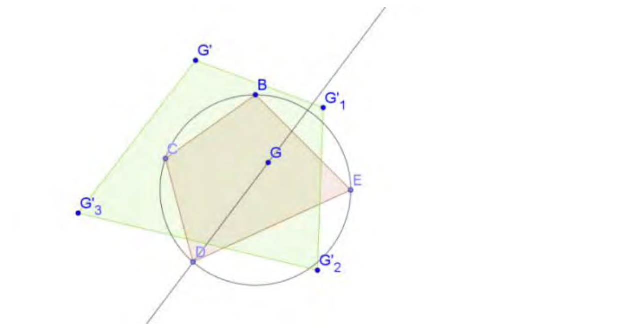
故我們討論二次項為 0 時情況:

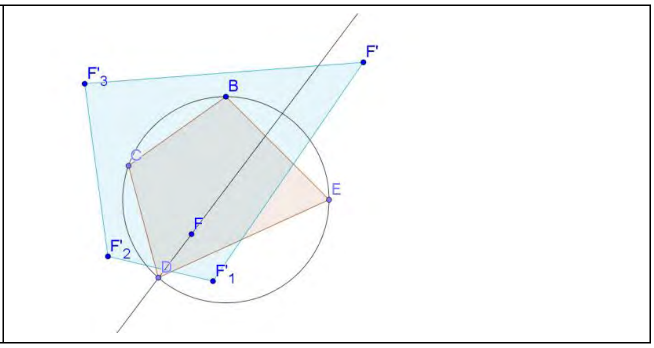
1. $\sin(\alpha+\beta) = 0$則$\alpha+\beta=\pi$，可為梯形與圓內接四邊形。
2. $\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2} = 0$則$\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2} = \frac{1}{2}\pi\ or\ \frac{3}{2}\pi$
3. $\cos\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2} = 0$則$\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2} = \frac{1}{2}\pi\ or\ \frac{3}{2}\pi$

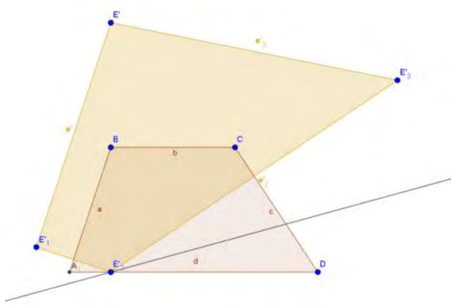
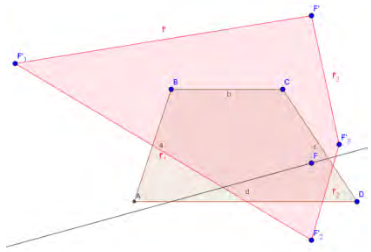
情形皆包含在第一點內。

結論：對稱構造四邊形等面積線為直線時有兩種情況，一為原四邊形是梯形，二為圓四邊形為圓內接四邊形。

下表展示圓內接四邊形及梯形的情形。





四邊形 q1 = 65.33 q2 = 127.53 q3 = 127.53	四邊形 q1 = 65.33 q2 = 127.53 q3 = 127.53
	
四邊形 q1 = 13.5 q2 = 26.17 q3 = 26.17	四邊形 q1 = 13.5 q2 = 26.17 q3 = 26.17

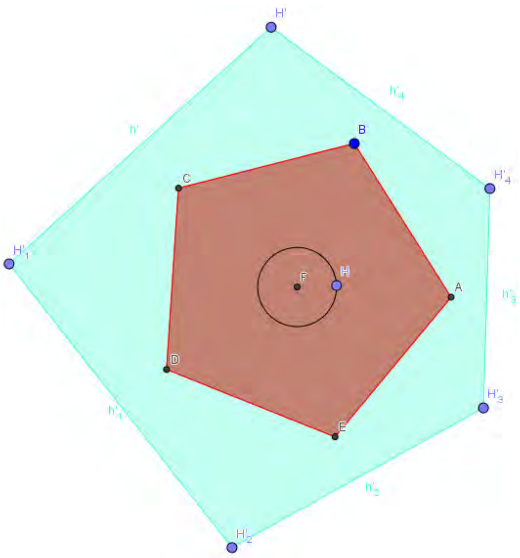
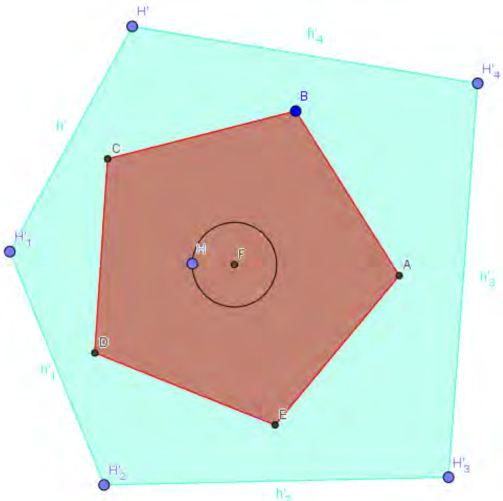
四、 n 邊形對稱構造等面積線的推廣探討

(一)特殊多邊形探討

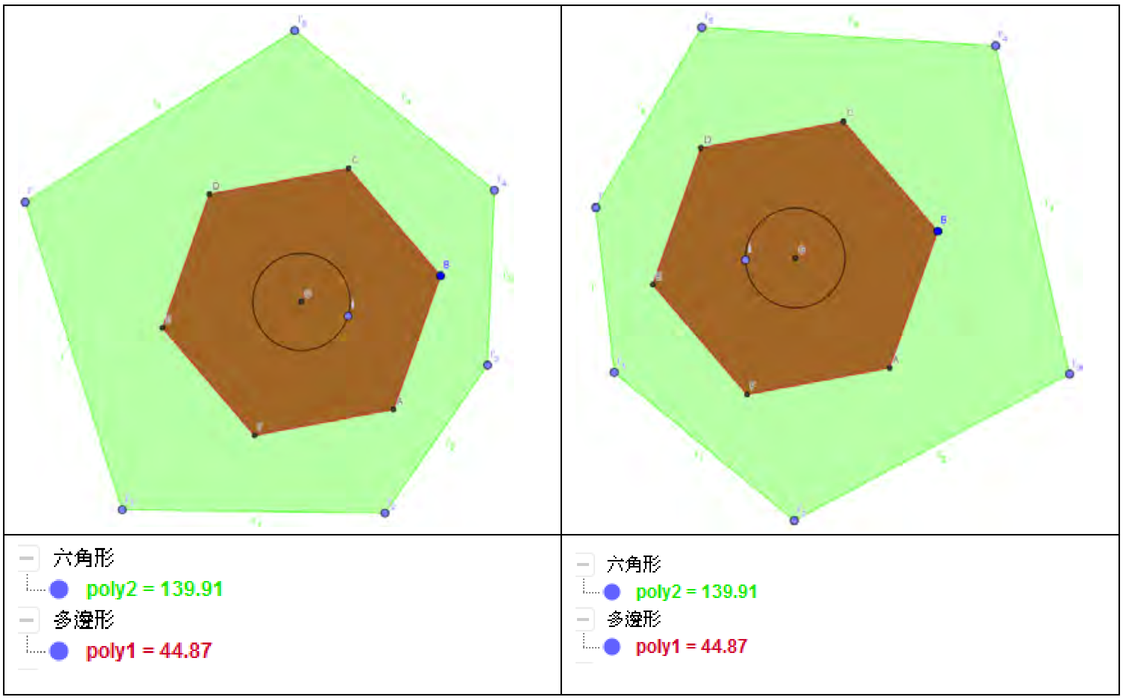
1.我們先討論正多邊形的圖形，依據先前的結論，我們知道正三角形的對稱構造等面積線是圓形，而正方形的對稱構造等面積線是平面。

接下來我們看五邊形及六邊形。

下表可以看出五邊形的對稱構造等面積線是圓形，並以正五邊形的中心為圓心。

	
五角形 poly2 = 63.03 多邊形 poly1 = 23.71	五角形 poly2 = 63.03 多邊形 poly1 = 23.71

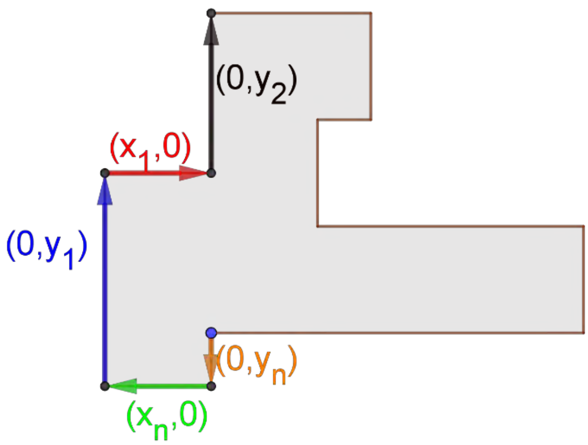
下表可以看出六邊形的對稱構造等面積線是圓形，並以正六邊形的中心為圓心。



結論:由後面的證明我們可以知道對於任意正 n 邊形來說，其對稱構造多邊形等面積線是圓形，並以圖形中心為圓心。

2.發現如果 n 邊形內角皆為$\frac{\pi}{2}$或$\frac{3}{2}\pi$，對稱構造 n 邊形對稱構造等面積線是平面

證明:
設第一條邊的向量為$(0, y_1)$，第二條邊為$(x_1, 0)$..........2n-1 條邊的向量為$(0, y_n)$，第 2n 條邊的向量為$(x_n, 0)$。如下圖所示。

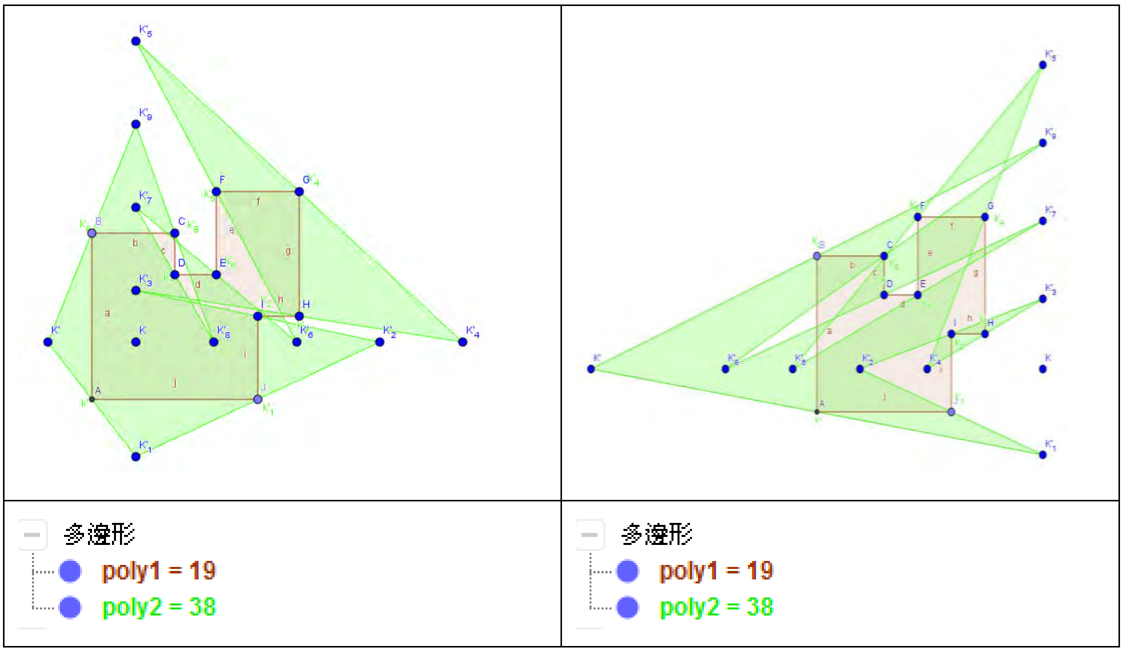


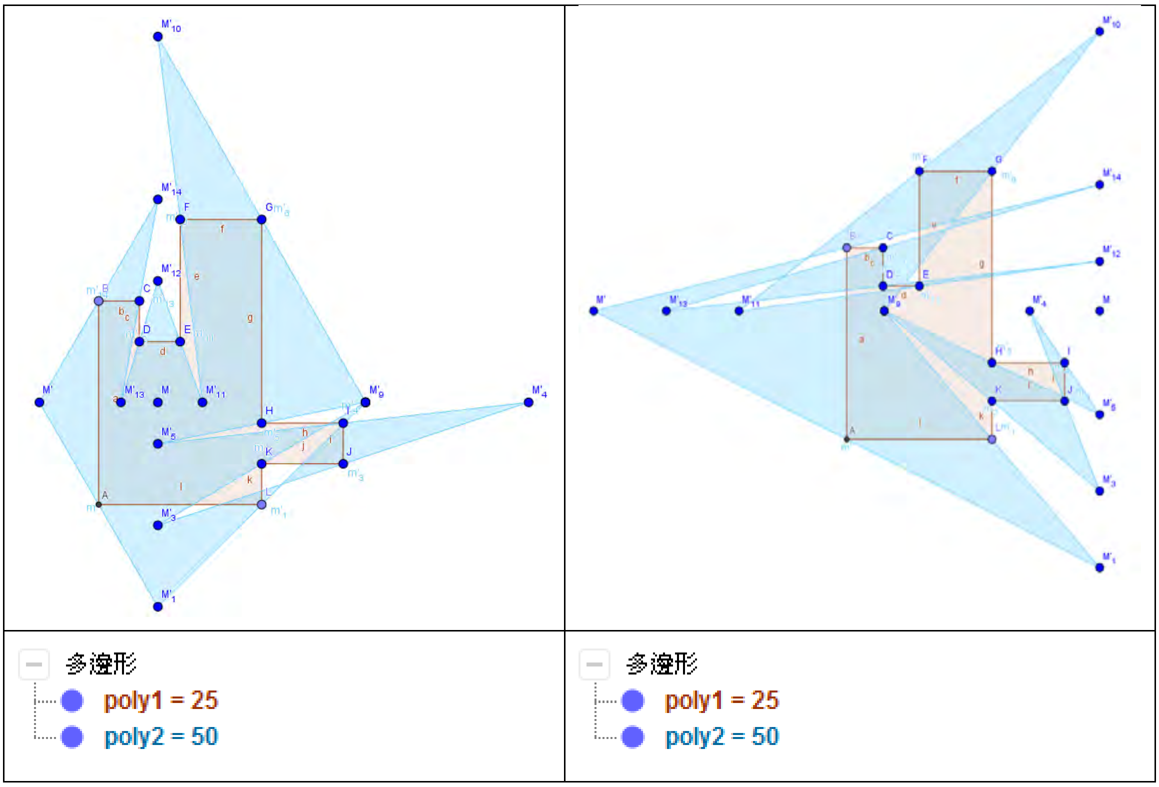
明顯的$\sum_1^n y_n$=0，$\sum_1^n x_n$=0
設平面上一點為(x, y)
而對稱點計算可得到對稱點一座標為$(-x, y)$，第二點為$(x, 2y_1 - y)$，第三點為$(2x_1 - x, y)$...........第 2n-1 點為$(2(x_1 + \cdots + x_{n-1}) - x, y)$，第 2n 個點為$(x, -y)$
利用行列式計算面積得

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -x & x & 2x_1 - x & \cdots\cdots & 2(x_1 + \cdots + x_{n+1}) - x & x \\ y & 2y_1 - y & y & & y & -y \end{vmatrix} = constant$$

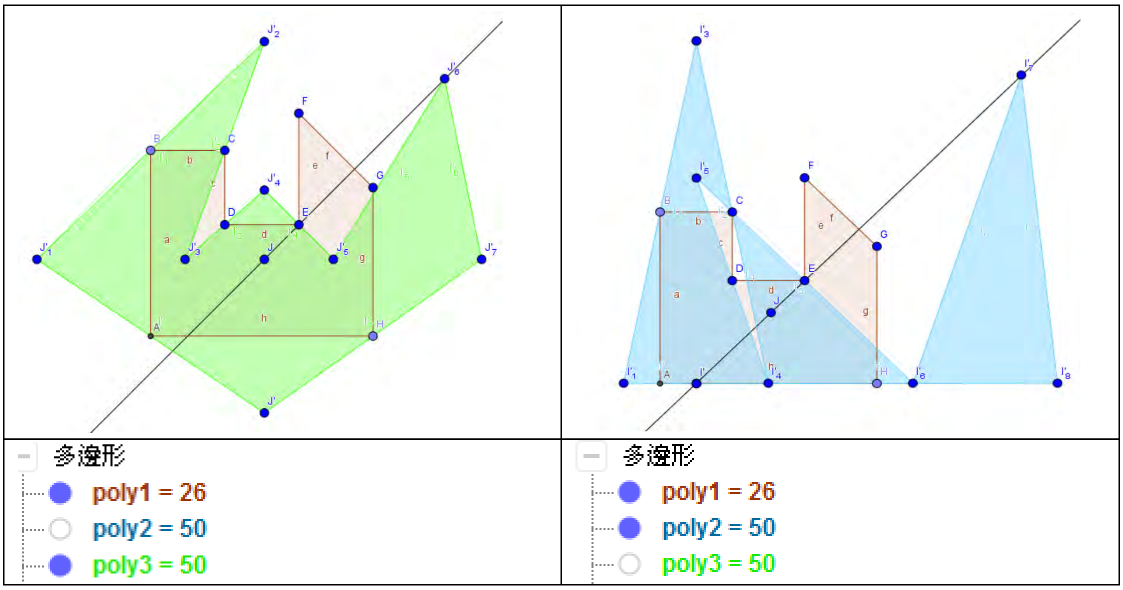
$= 2\sum_{i=1}^{i=n-1} x_i y_{i+1} - 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i = 2$倍原面積

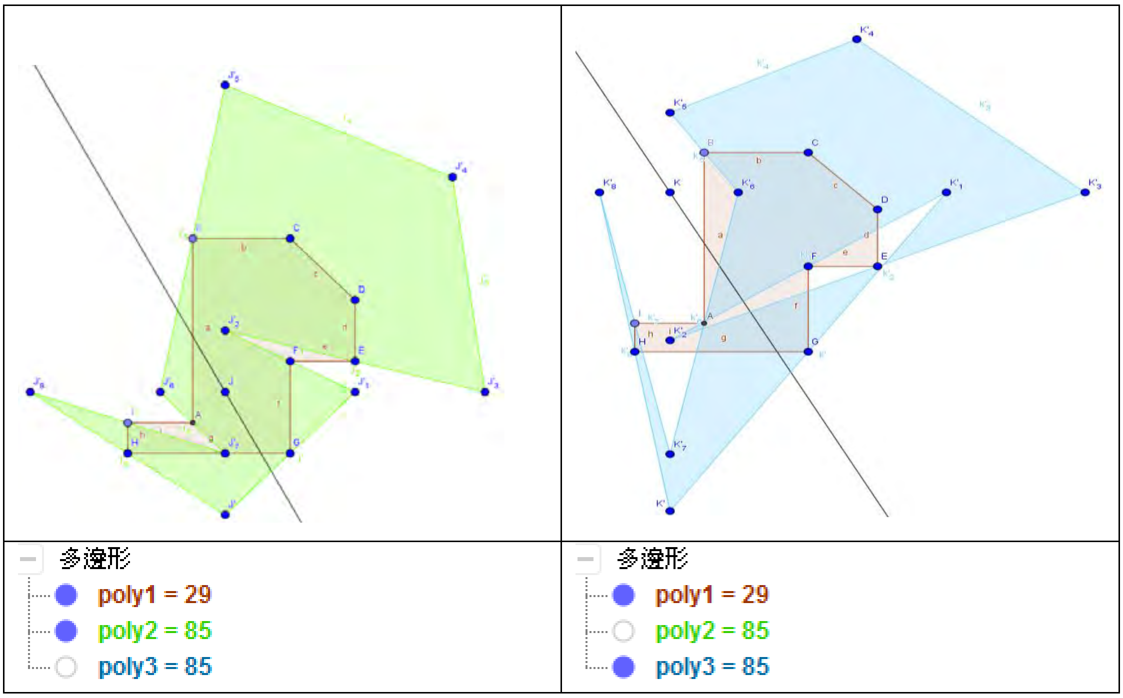
由此可知，原圖形之對稱構造面積與對稱源所在位置無關，其圖形的等面積線為所在平面。





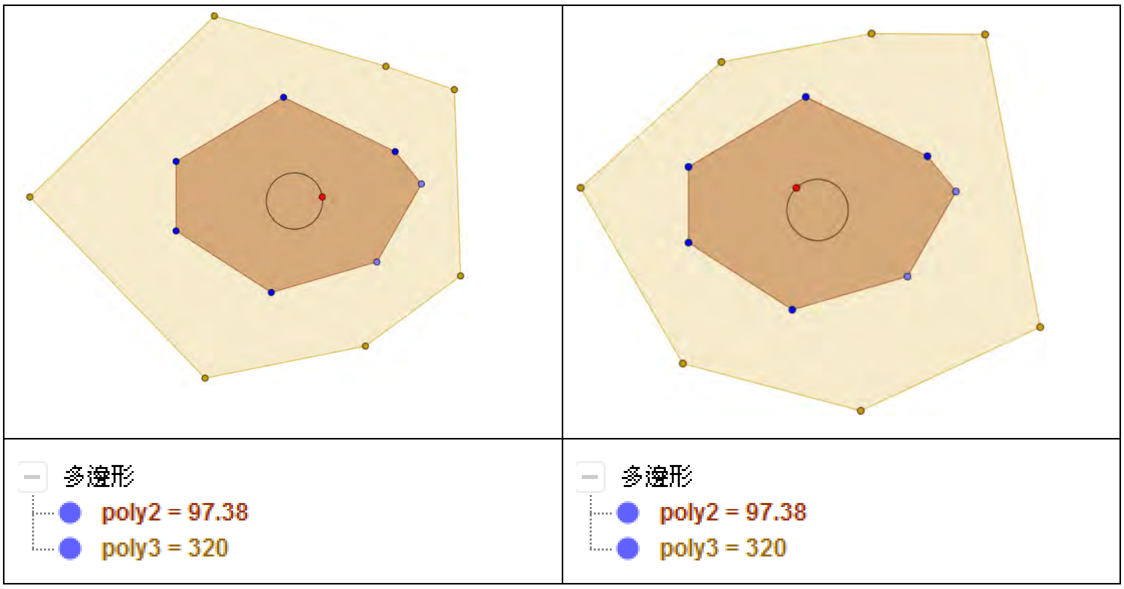
3. 由上述可得若一個圖形之內角為$\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$，其對稱構造等面積線為一平面。而當我們將任意一角去除(相當於挖掉一個直角三角形)，則發現其對稱構造等面積線為一條直線。



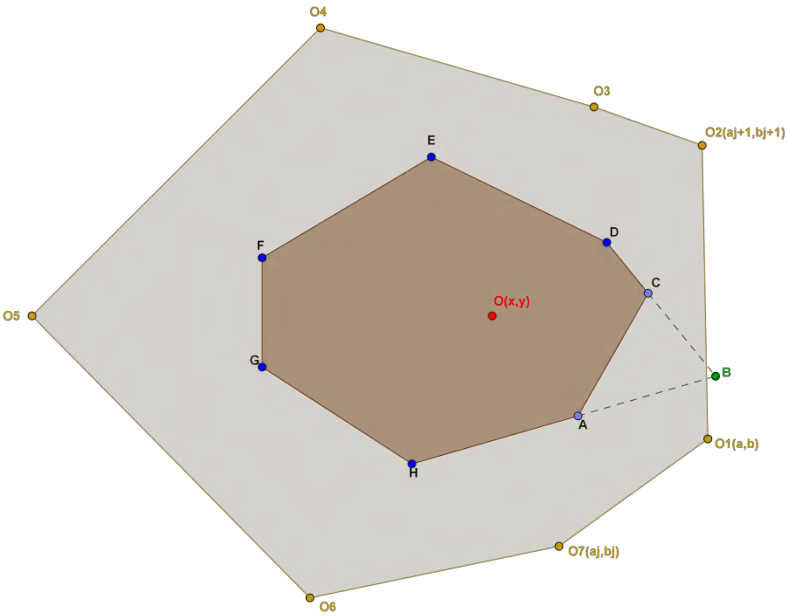


(二)證明任意多邊形的對稱構造多邊形等面積線可寫成 $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=S$

證明:我們利用數學歸納法證明(此處以七邊形舉例)，由下表格可以看到七邊形的對稱構造七邊形等面積線是圓。



我們利用假設對稱源朝 n 邊形個邊做對稱點，對稱點依序的座標為(a_1, b_1)-為朝第一個邊做對稱、(a_2, b_2)……(a_n, b_n)-為朝第 n 個邊做對稱。而 $n+1$ 邊形是在原 n 邊形的第 j 邊及的 $j+1$ 邊扣除一個三角形所構造而成。並令對稱源對 n 邊形構造出的新邊的對稱點是(a, b)。如下圖所示。



先從三邊形開始驗證數學歸納法:已知對稱構造三角形的等面積線是圓形，意即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \alpha_1(x^2 + y^2) + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1$$

其中(a_n, b_n)是對稱點依序的座標

假設對稱構造 n 邊形的等面積線的方程式是圓方程式，意即$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_n & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots & b_n & b_1 \end{vmatrix} =$

$\alpha_n(x^2 + y^2) + \beta_n x + \gamma_n y + \delta_n$

而對稱構造 $n+1$ 邊形的等面積線計算方式也可以從研究結果三的計算方法類比。

對稱構造 $n+1$ 邊形的面積可寫成$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_j & a & a_{j+1} \cdots a_n & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots\ b_j & b & b_{j+1} \ldots b_n & b_1 \end{vmatrix}$

又已知由三角形 ABC 所構造的對稱構造三角形的面積$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_j & a & a_{j+1} & a_j \\ b_j & b & b_{j+1} & b_j \end{vmatrix} = \alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta = a_j b + a b_{j+1} + a_{j+1} b_j - a b_j - a_{j+1} b - a_j b_{j+1}$

而對稱構造 n 邊形的面積為$(\sum_{k=1}^{k=n-1} a_k b_{k+1} + a_n b_1 - \sum_{k=1}^{k=n-1} a_{k+1} b_k - a_1 b_n) \div 2 = \alpha_n(x^2+y^2)+\beta_n x+\gamma_n y+\delta_n$，

對稱構造 n+1 邊形的面積為$(\sum_{k=1}^{k=j-1} a_k a_{k+1} + a_j b + a b_{j+1} + \sum_{k=j+1}^{k=n-1} a_k b_{k+1} + a_n b_1 - \sum_{k=1}^{k=j-1} a_{k+1} b_k - a b_j - a_{j+1} b - \sum_{k=j+1}^{k=n-1} a_{k+1} b_k - a_1 b_n) \div 2$

比較後可發現$a_j b + a b_{j+1} + a_{j+1} b_j - a b_j - a_{j+1} b - a_j b_{j+1} + \sum_{k=1}^{k=n-1} a_k b_{k+1} + a_n b_1 - \sum_{k=1}^{k=n-1} a_{k+1} b_k - a_1 b_n = \sum_{k=1}^{k=j-1} a_k a_{k+1} + a_j b + a b_{j+1} + \sum_{k=j+1}^{k=n-1} a_k b_{k+1} + a_n b_1 - \sum_{k=1}^{k=j-1} a_{k+1} b_k - a b_j - a_{j+1} b - \sum_{k=j+1}^{k=n-1} a_{k+1} b_k - a_1 b_n = \alpha_n(x^2+y^2)+\beta_n x+\gamma_n y+\delta_n + \alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta = (\alpha_n+\alpha)(x^2+y^2)+(\beta_n+\beta)x+(\gamma_n+\gamma)y+(\delta_n+\delta)$

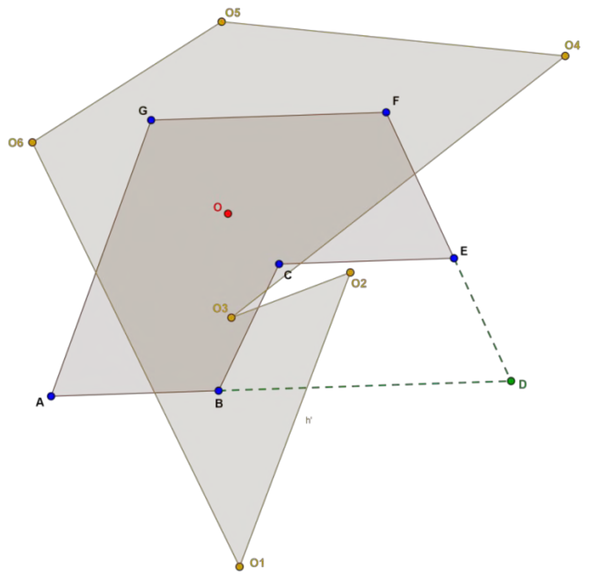
因此$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_j & a & a_{j+1} \cdots a_n & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots b_j & b & b_{j+1} \ldots b_n & b_1 \end{vmatrix} = (\alpha_n+\alpha)(x^2+y^2)+(\beta_n+\beta)x+(\gamma_n+\gamma)y+(\delta_n+\delta)$

如果欲求對稱構造 $n+1$ 邊形的等面積線，其條件為$(\alpha_n+\alpha)(x^2+y^2)+(\beta_n+\beta)x+(\gamma_n+\gamma)y+(\delta_n+\delta) = constant_{n+1}$

因此對稱構造 $n+1$ 邊形的等面積線方程式也是圓、直線、平面三種情形，故得證。

(三) 探討何者多邊形所構造出的對稱構造多邊形等面積線為直線。

我們已經知道對稱構造四邊形的面積是直線的情形只有是圓內接四邊形及梯形。那麼對稱構造多邊形呢?我們以梯形，圓內接四邊形為原圖形，找到一個構造對稱構造多邊形等面積線是直線的方法。廣義的來說，以對稱構造多邊形等面積線原本就是直線的多邊形做為原始圖形，並在其中一個角落扣去梯形、平行四邊形或是圓內接四邊形。以下圖做此構造方式的舉例說明。



上圖是梯形 $AGFD$ 扣去梯形 $BCED$ 所產生的圖形，上圖六邊形的構造對稱六邊形等面積線是直線，而原因就是先前提到的在原構造面積等面積線是直線的多邊形其中一個角落扣掉另一個構造面積等面積線是直線的四邊形。

現在來證明這種構造方式是可行的:

假設有一 n 邊形$p_1p_2p_3\ldots\ldots p_{j-1}p_jp_{j+1}\ldots\ldots p_n$且其對稱構造 n 邊形的等面積線是直線，並p_j的角落挖一個對稱構造四邊形等面積線是直線的四邊形，如上圖點 D 內挖一個梯形。現在假設點p_{j-1}跟p_j之間有一點如上圖點 E 的點α，而點p_j跟p_{j+1}之間有一點如上圖點 B 的點β，並有一點如上圖點 C 的點γ，而四邊形$\alpha\gamma\beta p_j$的對稱構造四邊形的等面積線是直線。

假設對稱源朝邊$\overline{p_1p_2}$做對稱點的座標是(a_1,b_1)朝邊$\overline{p_2p_3}$做對稱點的座標是(a_2,b_2)……..朝邊$\alpha\gamma$做的對稱點座標是(a,b)，朝$\gamma\beta$邊做的對稱點座標是(c,d)………朝邊$\overline{p_np_1}$做的對稱點座標是(a_n,b_n)。

原對稱構造 n 邊形的面積是

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2\ldots\ldots a_{j-1} & a_j & a_{j+1}\ldots\ldots a_n & a_1 \\ b_1 & b_2\ldots\ldots b_{j-1} & b_j & b_{j+1}\ldots\ldots b_n & b_1 \end{vmatrix}=(\sum_{k=1}^{k=n-1}a_kb_{k+1}+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n)\div 2=\beta_nx+\gamma_ny+\delta_n$$

對稱構造 $n+2$ 邊形的面積可寫成$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2a_3\ldots a_{j-1} & a & c & a_ja_{j+1}\ldots a_na_1 \\ b_1 & b_2\,b_3\ldots b_{j-1} & b & d & b_jb_{j+1}\ldots b_nb_1 \end{vmatrix}$=$(\sum_{k=1}^{k=j-2}a_kb_{k+1}+a_{j-1}b+ad+a_jd+cb_j+\sum_{k=j}^{k=n-1}a_kb_{k+1}+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=j-2}a_{k+1}b_k-ab_{j-1}-cb-da_j-\sum_{k=j}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n)\div 2$

而四邊形$\alpha\gamma\beta p_j$的對稱構造四邊形面積為

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{j-1} & a & c & a_j & a_{j-1} \\ b_{j-1} & b & d & b_j & b_{j-1} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{j-1}b+ad+cb_j+a_jb_{j-1}-ab_{j-1}-cb-a_jd-a_{j-1}b_j)\div 2=\beta x+\gamma y+\delta$$

比較後可發現

$(\sum_{k=1}^{k=n-1}a_kb_{k+1}+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n)\div 2+(a_{j-1}b+ad+cb_j+a_jb_{j-1}-ab_{j-1}-$

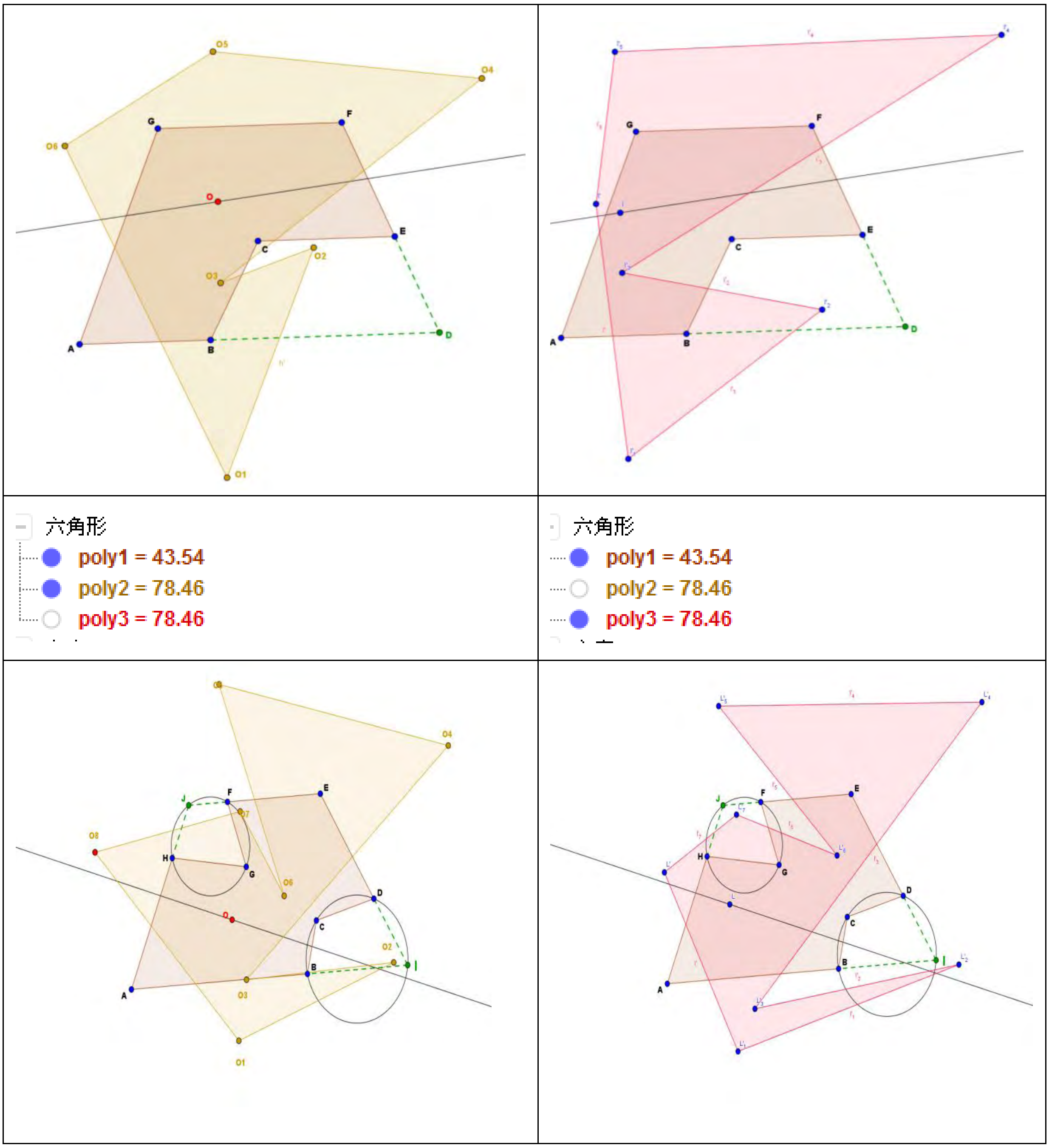
$cb - a_j d - a_{j-1} b_j) \div 2$=$\left(\sum_{k=1}^{k=j-2} a_k b_{k+1} + a_{j-1} b + ad + a_j d + cb_j + \sum_{k=j}^{k=n-1} a_k b_{k+1} + a_n b_1 - \right.$

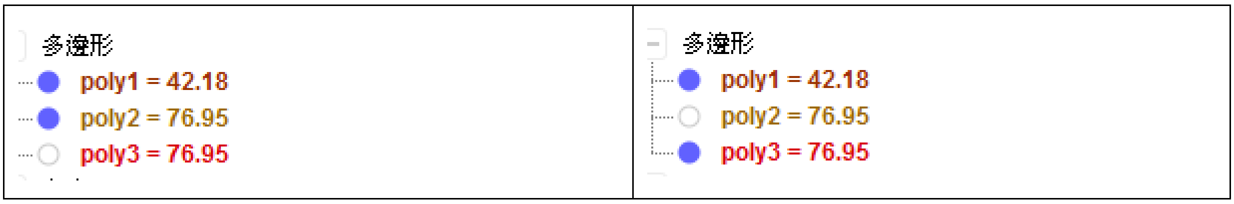
$\left.\sum_{k=1}^{k=j-2} a_{k+1} b_k - ab_{j-1} - cb - da_j - \sum_{k=j}^{k=n-1} a_{k+1} b_k - a_1 b_n\right) \div 2 = (\beta + \beta_n)x + (\gamma + \gamma_n)y +$

$(\delta + \delta_n)$

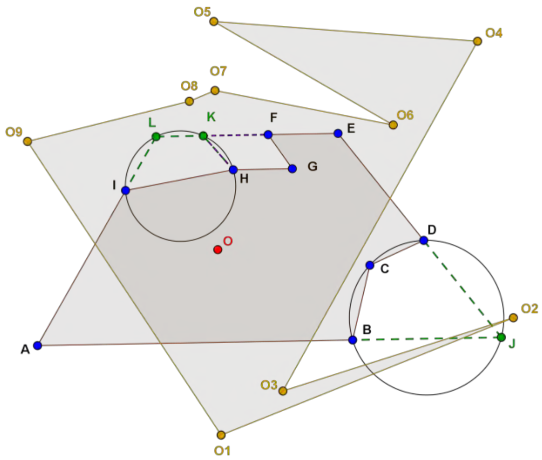
因此用此方式構造出的對稱構造 *n+2* 邊形等面積線是直線，故得證。

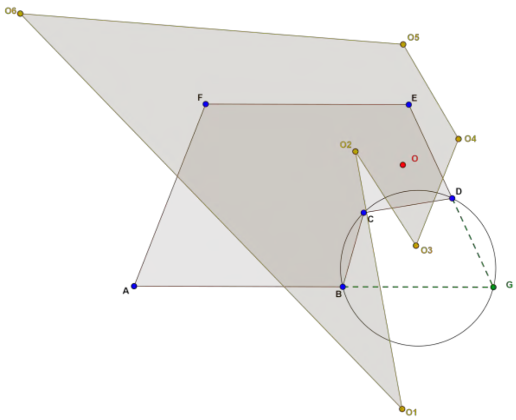
由上述討論可以知道，只要原多邊形的對稱構造多邊形等面積線是直線，並在其中一個角挖一塊梯形、圓內接四邊形、平行四邊形，就可以構造出對稱構造 n+2 邊形等面積線是直線的 *n+2* 邊形，如下圖所示。

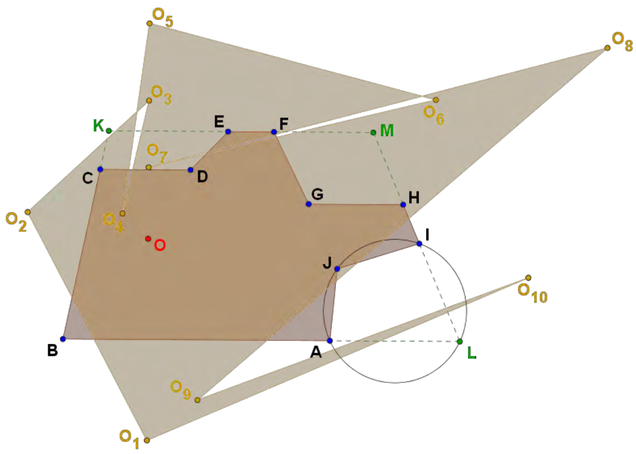




上圖是將梯形兩角各扣去一個圓內接四邊形所產生的八邊形，可以看到其對稱構造八邊形的等面積線是一直線。





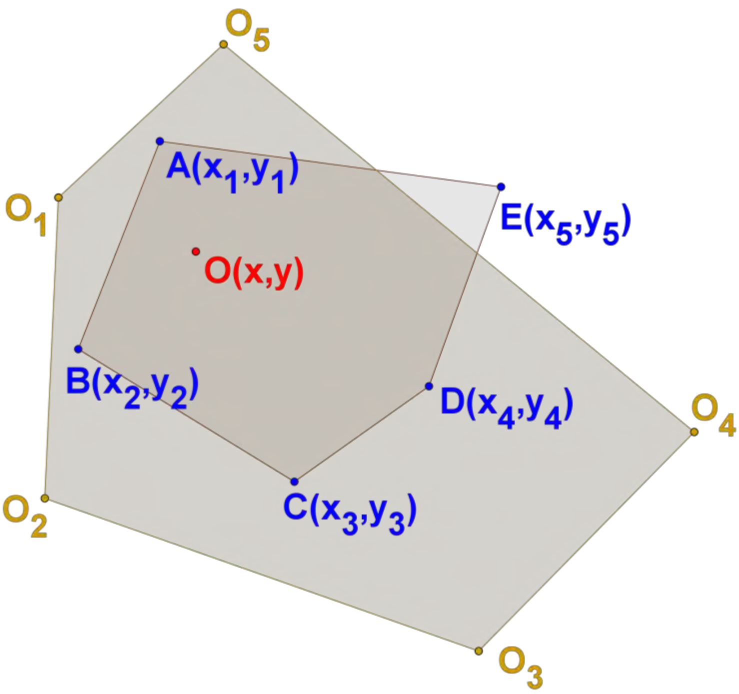


由上述討論可以知道，以上三圖的構造對稱多邊形等面積線是直線。

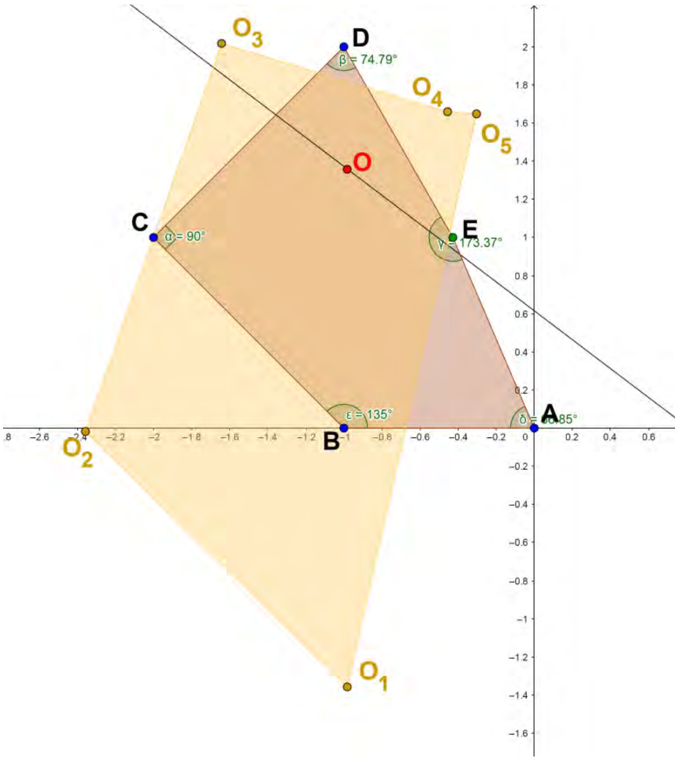
五、對稱構造 *n* 邊形等面積線直線情形討論

(一)五邊形探討

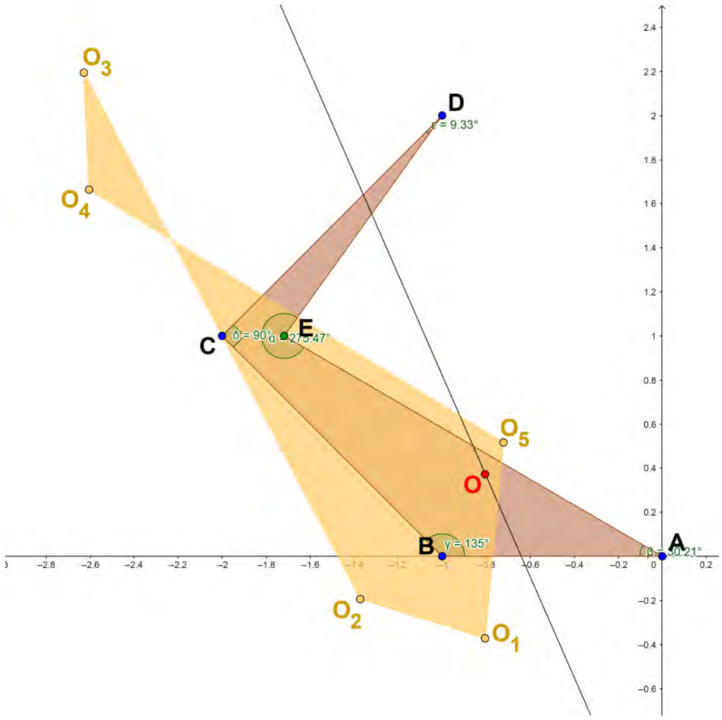
討論完四邊形後，我們對稱構造圖形等面積線是直線的五邊形進行一些探討。在計算過程中，我們發現五邊形不項四邊形的情況如此簡單，因此我們就利用數值解的方式繪製出對稱構造圖形等面積線是直線的五邊形，並說明這種圖形是存在的。



由先前討論可以知道，滿足五邊形對稱構造五邊形等面積線是直線的條件是 $sin2\alpha + sin2\beta + sin2\gamma + sin2\delta + sin2\varepsilon = 0$，其中$\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\delta$、$\varepsilon$為五邊形的五個內角。接下來，我們利用數值解的方法進行稱構造五邊形等面積線是直線的五邊形繪製。



圖形一:
在這個圖形中，
$\sin 180° + \sin 270° + \sin 149.58°$
$+\sin 346.74° + \sin 133.7° = 0$



圖形二:
在這個圖形中，
$\sin 180° + \sin 270° + \sin 18.66°$
$+\sin 550.94° + \sin 60.42° = 0$

在上述兩圖中以及我們所嘗試的其他圖形中，我們雖然知道這類五邊形需要滿足的式子，但因為五邊形的自由度$=3$ ，因此可以產生許多此種類的五邊形。

結論:利用數值解的方式能夠繪製許多此類圖形，但是由於自由度過高而五法歸納出圖形幾何性質的結論。

(二)n 邊形探討

先前的討論可以知道，對於 n 邊形來說其二次項係數為

$$\sum_{1}^{n-1} cos2\theta_j sin2\theta_{j+1} + cos2\theta_n sin2\theta_1 - sin2\theta_j cos2\theta_{j+1} - sin2\theta_n cos2\theta_1 =$$

$$\sum_{1}^{\mathrm{n}-1} \sin(2\theta_{j+1} - 2\theta_j) + \sin(2\theta_1 - 2\theta_n) = -\sum_{1}^{n} sin2\varphi_j$$

其中φ_j是 n 邊形第 j 個角的內角角度。

滿足對稱構造 n 邊形等面積線是直線的情況是

$$-\sum_{1}^{n} sin2\varphi_j = 0$$

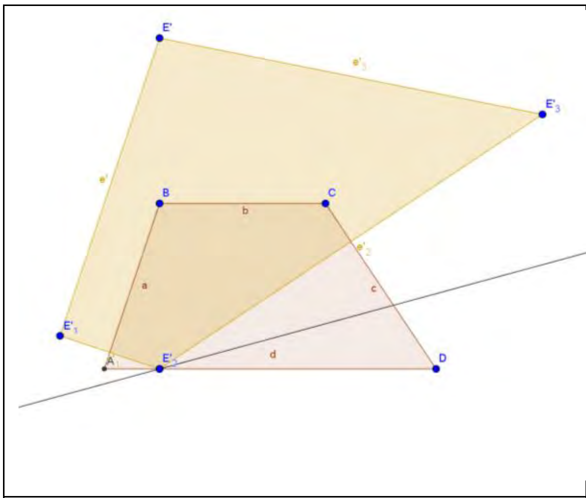
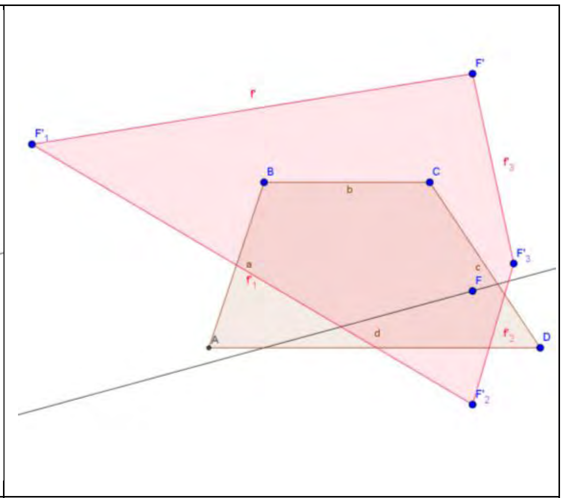
但由於 n 邊形的自由度是 n-2，因此能夠繪製的此類圖形有非常多種。

結論:對於 n 邊形我們得到了產生對稱構造圖形等面積線是直線的條件，但對於圖形的幾何性質我們將納入未來展望。

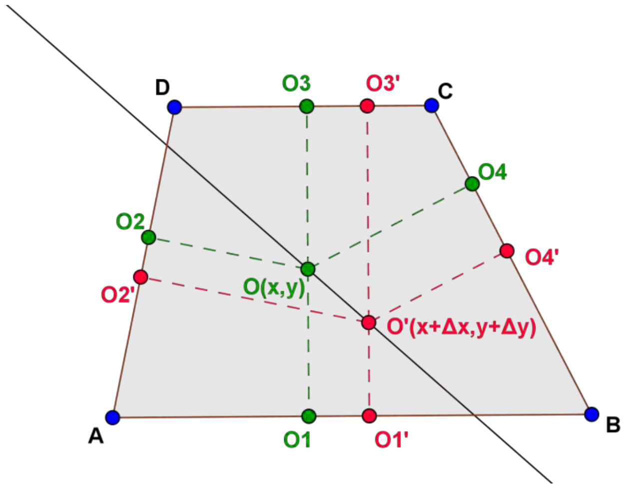
六、因為座標化結果無法與圖形本身性質做連結，因此接下來將探討特殊四邊形之對稱構造四邊形的等面積線與圖形本身性質的關聯。主要討論兩種四邊形：梯形、圓內接四邊形。

(一)梯形:

從解析結果已知對邊平行的四邊形(梯形)的對稱構造四邊形等面積線是直線。所以就依此結果探討。

	
四邊形 q1 = 13.5 q2 = 26.17 q3 = 26.17	四邊形 q1 = 13.5 q2 = 26.17 q3 = 26.17

由上表格可以看出梯形的等面積線是直線。



假設從原對稱源O移動$\vec{r} = (\Delta x, \Delta y)$至新的對稱源$O'$，而$\Delta y = m\Delta x$(m是直線斜率)

我們假設$\overline{OO_3} = a, \overline{OO_2} = b, \overline{OO_1} = c, \overline{OO_4} = d$且$\angle CAB = \varphi, \angle DAB = \theta$

原本的對稱構造四邊形面積是$2[(cd + ad)sin\varphi + (bc + ab)sin\theta]$

新對稱源的構造四邊形面積算法如下:

假設$\overline{O'O_3{}'} = a', \overline{O'O_2{}'} = b', \overline{O'O_3{}'} = c', \overline{O'O_4{}'} = d'$

$a' = a - m\Delta x\, , c' = c + m\Delta x\, ,$

$b' = b + (sin\theta + mcos\theta)\Delta x$

$d' = d - \Delta x(sin\varphi + mcos\varphi)$因此其面積等於:

$2[(c+m\Delta x)(d-\Delta x(sin\varphi+mcos\varphi))sin\varphi+(a-m\Delta x)(d-\Delta x(sin\varphi+mcos\varphi))sin\varphi$
$+(b+(sin\theta+mcos\theta)\Delta x)(c+m\Delta x)sin\theta+(a-m\Delta x)(b+(sin\theta+mcos\theta)\Delta x)sin\theta]$
$=2[(a+c)(d-\Delta x(sin\varphi+mcos\varphi))sin\varphi+(a+c)(b+(sin\theta+mcos\theta)\Delta x)sin\theta]$

將此面積與原對稱構造梯形面積相減，因為要考慮等面積情形，要等於 *0* 即

$2[(a+c)(d-\Delta x(sin\varphi+mcos\varphi))sin\varphi+(a+c)(b+(sin\theta+mcos\theta)\Delta x)sin\theta]$
$-2[(cd+ad)sin\varphi+(bc+ab)sin\theta]=0$
$=2(a+c)[\Delta x(sin\theta+mcos\theta)sin\theta-\Delta x(sin\varphi+mcos\varphi)sin\varphi]$

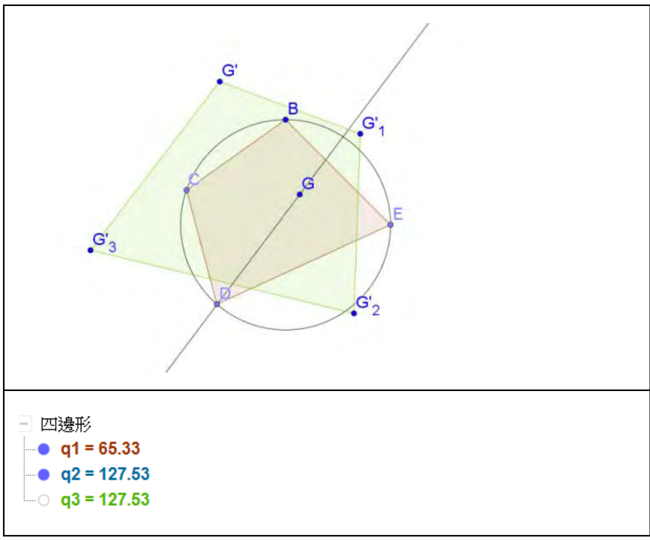
因$\mathrm{a+c}\neq 0$，得到$(sin\theta+mcos\theta)sin\theta=(sin\varphi+mcos\varphi)sin\varphi$

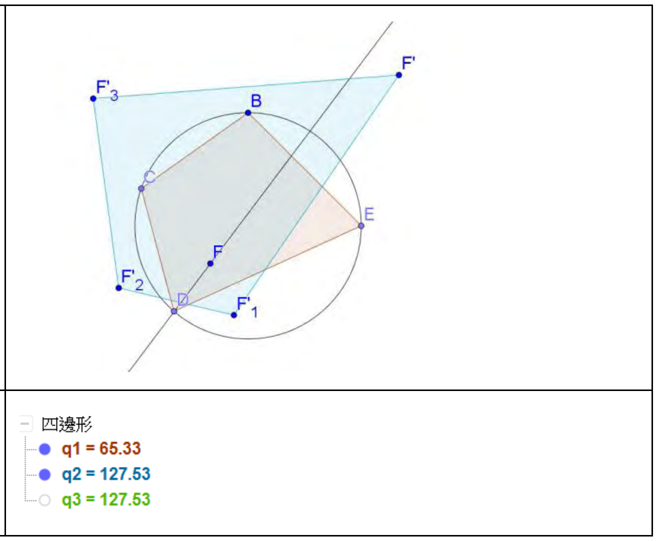
推得等面積直線斜率$=m=\frac{sin^2\theta-sin^2\varphi}{sin\varphi cos\varphi-sin\theta cos\theta}$

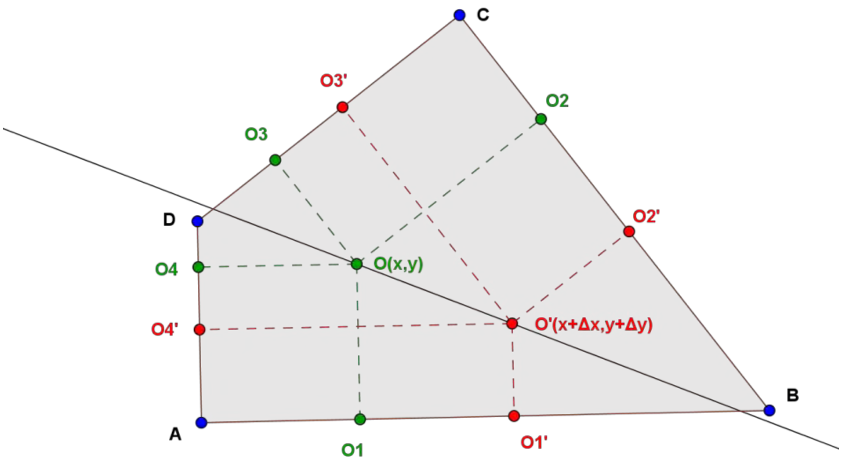
結論:斜率僅為梯形兩底角的函數。

(二)圓內接四邊形:

由以上討論可以知道圓內接四邊形的對稱構造四邊形的等面積線也是直線







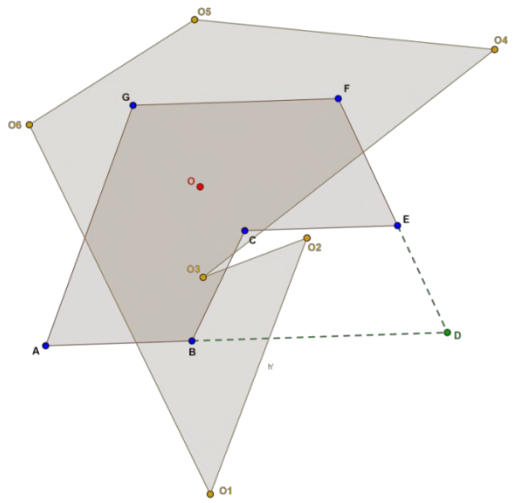
假設從原對稱源O移動$\vec{r}=(\Delta x,\Delta y)$至新的對稱源$O'$，而$\Delta y=m\Delta x$(m 是直線斜率)

我們假設$\overline{OO_3}=a,\overline{OO_4}=b,\overline{OO_1}=c,\overline{OO_2}=d$且$\angle DAB=\varphi,\angle CBA=\theta$
原本的對稱構造四邊形面積是$2[(cb+ad)sin\varphi+(dc+ab)sin\theta]$
新對稱源的構造四邊形面積算法如下:
假設$\overline{O'O_3{}'}=a',\overline{O'O_4{}'}=b',\overline{O'O_1{}'}=c',\overline{O'O_2{}'}=d'$
$a'=a-(\sin(\theta-\varphi)+mcos(\theta-\varphi))\Delta x\,,c'=c+m\Delta x\,,$
$b'=b+(sin\varphi-mcos\varphi)\Delta x$
$d'=d-\Delta x(sin\theta+mcos\theta)$面積等於:
$2[(c+m\Delta x)(d-\Delta x(sin\theta+mcos\theta))sin\theta+$
$\big(a-\big(\sin(\theta-\varphi)+mcos(\theta-\varphi)\big)\Delta x\big)(d-\Delta x(sin\theta+mcos\theta))sin\varphi+$
$(b+(sin\varphi-mcos\varphi)\Delta x)(c+m\Delta x)sin\varphi$
$+(a-(\sin(\theta-\varphi)+mcos(\theta-\varphi))\Delta x)(b+(sin\varphi-mcos\varphi)\Delta x)sin\theta]$
將此面積與原對稱構造梯形面積相減，因為要考慮等面積情形，要等於 *0*
即$-bsin\theta\big(sin(\theta-\varphi)+mcos(\theta-\varphi)\big)+asin\theta(sin\varphi-mcos\varphi)+csin\varphi(sin\varphi-mcos\varphi)+$
$bsin\varphi m-csin\theta(sin\theta+mcos\theta)+mdsin\theta-dsin\varphi\big(sin(\theta-\varphi)+mcos(\theta-\varphi)\big)-$
$asin\varphi(sin\theta+mcos\theta)=0$
因此$-bsin\theta\,sin(\theta-\varphi)+csin^2\varphi-csin^2\theta-dsin\varphi\sin(\theta-\varphi)=$
$m(bsin\theta\,cos(\theta-\varphi)+asin\theta cos\varphi+csin\varphi cos\varphi-bsin\varphi+csin\theta cos\theta-dsin\theta$
$+dsin\varphi\,cos(\theta-\varphi)+asin\varphi cos\theta)$
因此

$$m=\frac{-bsin\theta\,sin(\theta-\varphi)+csin^2\varphi-csin^2\theta-dsin\varphi\sin(\theta-\varphi)}{bsin\theta\,cos(\theta-\varphi)+asin\theta cos\varphi+csin\varphi cos\varphi-bsin\varphi+csin\theta cos\theta-dsin\theta+sin\varphi\,cos(\theta-\varphi)+asin\varphi cos\theta}$$

因此原內接四邊形的對稱構造圖形斜率不是僅跟角度有關，還與其邊長有相關性

(三)特殊圖形探討
在我們構造出的圖形當中有一類的圖形斜率是庫以直接計算的，這類的圖形是以兩底角互相一樣的兩個梯形互扣形成的。而此類的圖形斜率會跟原本的梯形斜率一樣。



六邊形 *ABCEFG* 的對稱構造圖形等面積線斜率與梯形 *ADFG* 的對稱構造四邊形等面積線斜率一樣

柒、　結論

一、三角形的對稱構造三角形等面積線是圓形，並以外心為圓心。

二、由三角形出發，推廣至四邊形的對稱構造四邊形等面積線探討，發現並證明對稱構造四邊形等面積線只有可能是圓形跟直線或平面。

三、對稱構造四邊形等面積線是直線的情形只出現在圓四邊形是梯形及圓內接四邊形的情形。

四、發現並證明對稱構造 n 邊形的等面積線方程式是圓方程式。

五、找出並證明了一種多邊形構造方式，使此多邊形的對稱構造多邊形等面積線是直線。

六、對 n 邊形的對稱構造圖形進行探討，雖然我們得到對稱構造圖形等面積線是直線的條件，但並沒有如四邊形那樣規律的圖形產生，並僅能以數值解的方式進行計算。

七、找出梯形的對稱構造四邊形的等面積線與原本梯形的關係式，發現僅跟梯形的兩底角角度有關。

八、找出圓內接四邊形的對稱構造四邊形的等面積線與原本圓內接四邊形的關係，發現跟圓內接四邊形的兩底角角度與邊長皆有相關。

捌、　參考資料及其他

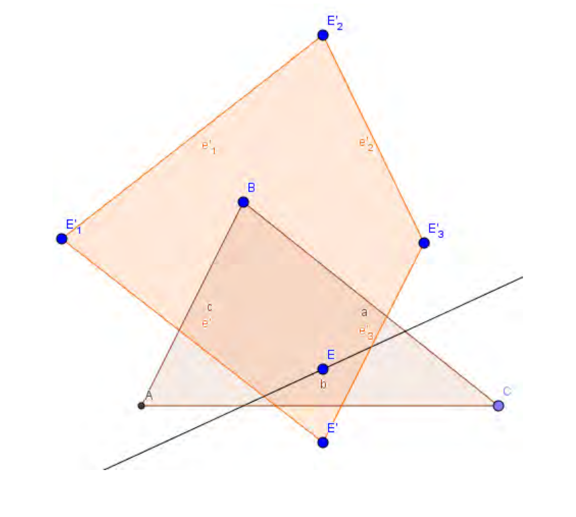
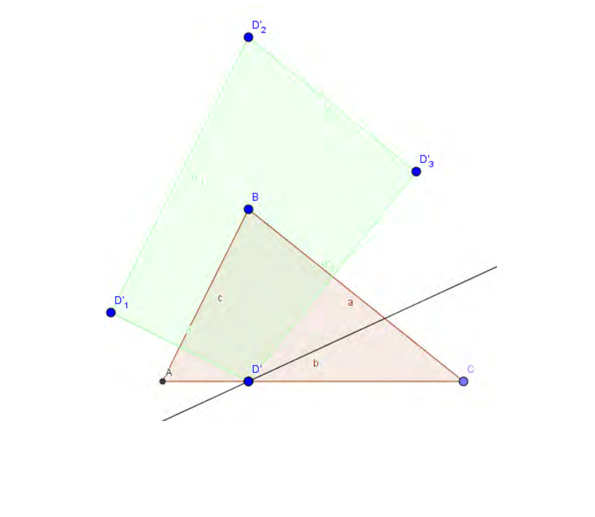
一、台南市第 55 屆國中科展-幾何「點」「心」「面」

二、因式分解網站 https://zh.numberempire.com/factoringcalculator.php

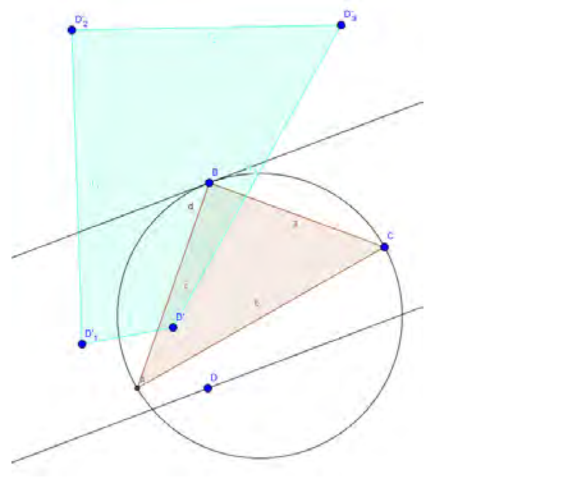
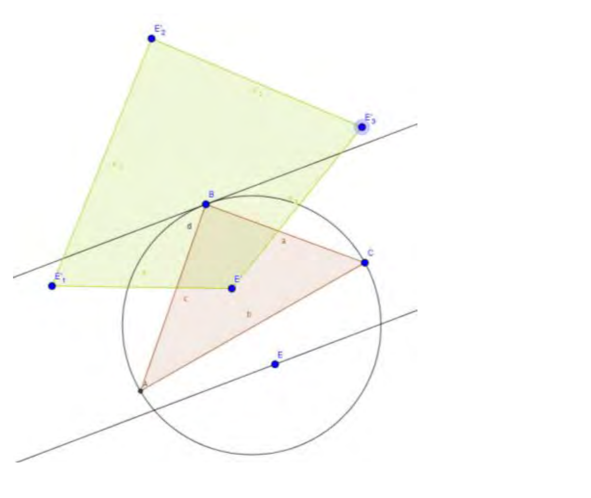
附錄

一、等面積線形狀不連續性的解釋

我們懷疑為何梯形方兩點極靠近時(成一個三角形)，其對稱構造等面積線會從直線突然變為圓形。經過思考後，發現當梯形趨近於三角形時，對稱點會比對稱構造三角形多一個點。此構造方式與我們所要求的三角形對稱構造方是不同，並沒有不連續的情形發生。而在此狀況下其等面積線仍為直線。

	
四邊形 q1 = 28.41 q2 = 28.41	四邊形 q1 = 28.41 q2 = 28.41

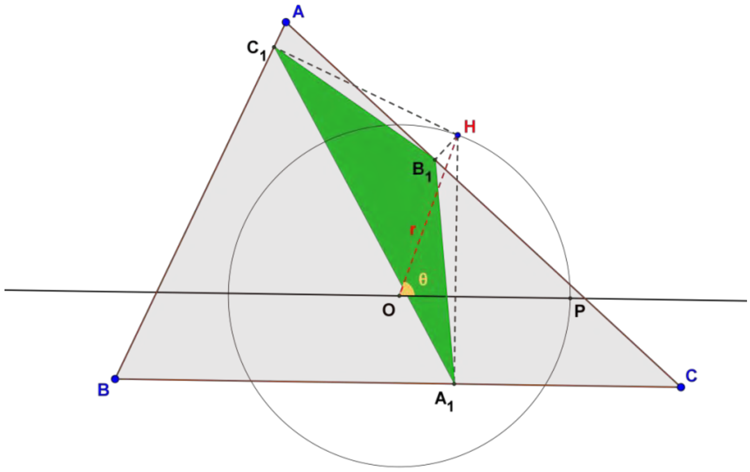
由上圖可推得為何圓內接四邊形與梯形之兩點極接近時，對稱構造等面積線仍為直線。因此其等面積線從圓形瞬間變成直線的情況可用此方式解釋之。

	
四邊形 q1 = 43.86 q2 = 43.86	四邊形 q1 = 43.86 q2 = 43.86

由上表格我們發現，當圓內接四邊形之一點趨近於另一點而成為三角形時，其對稱構造等面積線與過重和兩點之切線平行。

二、 對稱源在不同位置時三角形對稱構造圖形的描述

(一)對稱源於三角形外，但三垂足皆在三角形邊上



$$\overline{BC_1} = \frac{c}{2} + r\,cos(B + 360° - \theta) = \frac{C}{2} + r\,cos(B - \theta)$$

$$\overline{BA_1} = \frac{a}{2} + r\,cos(360° - \theta) = \frac{a}{2} + r\,cos\,\theta$$

$$\overline{CA_1} = \frac{a}{2} - r\,cos\,\theta$$

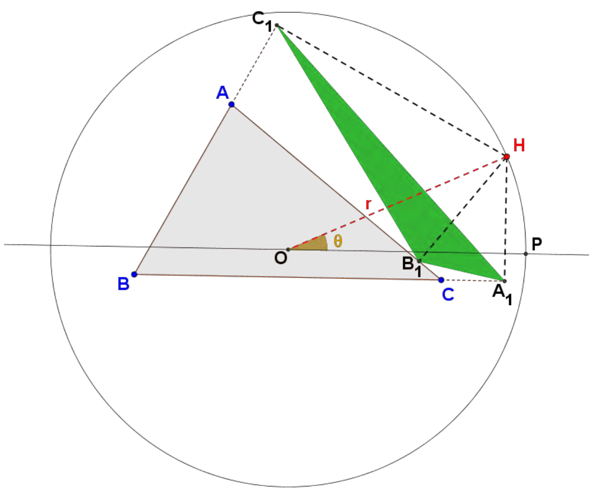
$$\overline{CB_1} = \frac{b}{2} - r\,cos(C + \theta)$$

$$\overline{AB_1} = \frac{b}{2} + r\,cos(C + \theta)$$

$$\overline{AC_1} = \frac{c}{2} - r\,cos(B - \theta)$$

由上可知，此情況與三角形對稱源在內部相同，可得知在此情況下外心亦為等面積圓之圓心。

(二) 對稱源於三角形外，但垂足有些在三角形邊的延伸線上



$\overline{CA_1} = -\frac{a}{2} + r\cos\theta$

$\overline{CB_1} = \frac{b}{2} - r\cos(C+\theta)$

$\overline{AB_1} = \frac{b}{2} + r\cos(C+\theta)$

$\overline{AC_1} = -\frac{c}{2} + r\cos(B-\theta)$

$$-\frac{S_{AC1B1}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CA1B1}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BA1C1}}{S_{ABC}} =$$

$$\frac{\left(\frac{c}{2} + r\cos(B-\theta)\right)\left(\frac{a}{2} + r\cos\theta\right)}{ac} - \frac{-\left(\frac{a}{2} - r\cos\theta\right)\left(\frac{b}{2} - r\cos(C+\theta)\right)}{ab}$$
$$-\frac{-\left(\frac{b}{2} + r\cos(C+\theta)\right)\left(\frac{c}{2} - r\cos(B-\theta)\right)}{bc} =$$
$$\frac{\frac{ac}{4} + r\left(\frac{a}{2}\cos(B-\theta) + \frac{c}{2}\cos\theta\right) + r^2\cos\theta\cos(B-\theta)}{4R^2\sin A\sin C}$$
$$+\frac{\frac{ab}{4} - r\left(\frac{b}{2}\cos\theta + \frac{a}{2}\cos(C+\theta)\right) + r^2\cos\theta\cos(C+\theta)}{4R^2\sin A\sin B}$$
$$+\frac{\frac{bc}{4} + r\left(\frac{c}{2}\cos(C+\theta) - \frac{b}{2}\cos(B-\theta)\right) - r^2\cos(C+\theta)\cos(B-\theta)}{4R^2\sin B\sin C}$$

此結果與報告書的情況相同，因此結論是不論對稱源與原三角形的位置關係是什麼，都不影響到面積比例的結果。

【評語】050402

本文解決下列問題：平面上任意對稱源取法能造成面積相等的對稱源連線為一圓，並以外心為其圓心。作者們透過解析方式找出等面積線的軌跡，討論詳盡，實屬有趣的研究題材。有幾個建議及問題，提供參考：

1. 事先說明對稱點等面積線本來就為二次式或其退化曲線。
2. 三角形對稱點等面積線是圓，圓心是外心，那半徑 r 如何決定？
3. 等面積線為何一定是封閉曲線？
4. 五邊形的等面積線構造比較難，難在哪裡？(五邊形得自由度是 3，哪 3 個？)這一點很重要！
5. 本性質是否為充要條件成立？亦即，給定一個等面積之對稱三角形，經過平移或旋轉後的三角形，其對應之對稱源是否在此對稱線上(圓)？

作品海報

摘要

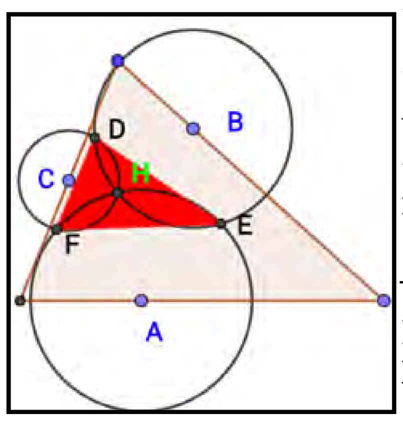
本科展目的在於研究一個點對多邊形各邊做對稱點，並將對稱點依對稱順序依序連起來所構成的多邊形有向面積，並探討其等面積的圖形形狀。經研究發現對於多邊形僅可能出現圓形，直線及平面等三種情形。最後，我們想要找出構造等面積為直線的方法，並得到一種可行的構造多邊形方法。

一、研究動機

本科展發想自國中所做的數學科展，國中的科展主要是探討藉由三邊上的特殊點與三角形心的連線為半徑，以三邊上的點作為圓心依序畫出三個圓，兩兩相鄰圓的交點連線構成的三角形面積做為主要探討。在國中的科展中發現了一些面積相等的構造三角形並進行了證明。後來，在高中數學專題課時想要對國中科展作更廣義的探討，並想辦法找出構造圖形等面積的情況。最後發現原本命題與探討朝多邊形各邊做對稱點，並將對稱點依對稱順序依序連起來所構成的多邊形有向面積為等價的。因此我們就產生了一個探討面向不同的新題目。之後我們就朝等面積探討的方向繼續研究下去，並拓展至複雜圖形的探討。

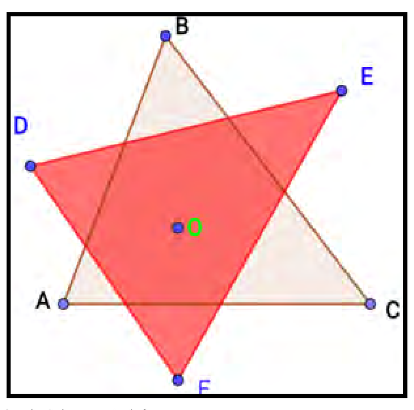
二、研究目的

(一)、證明三角形利用對稱方法所構造圖形的等面積線是圓形
(二)、證明四邊形利用對稱方法所構造圖形的等面積線可能為直線、圓或平面
(三)、找到對稱構造等面積線是直線的四邊形
(四)、探討對稱構造 n 邊形的等面積
(五)、探討對稱構造 n 邊形等面積線是直線的情形
(六)、探討等面積線與原圖形性質之關聯性



←圖一：此圖是國中科展的示意圖，紅色三角形 DEF 是構造的面積。以上三點 ABC 到垂心 H 的距離為半徑做三圓，兩相鄰圓的交點 DEF 為構造的三角形面積，並探討面積不變量出現情形。

→圖二：此圖為現在科展所要討論的的構造面積，構造方式為以平面上任意點 O 朝三角形 ABC 三邊做對稱得點 DEF，將 DEF 連線所得紅色三角形是本科展所要探討的面積。

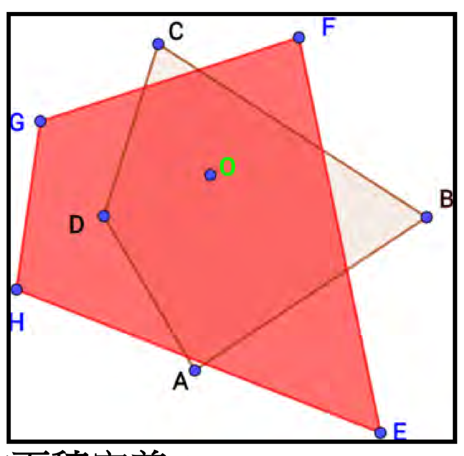


→平面上任意對稱源 O 朝四邊形 $ABCD$ 四邊做對稱，並依序將對稱點 E、F、G、H 連起來，構成紅色四邊形 $EFGH$，此方式即為對稱構造面積方式。

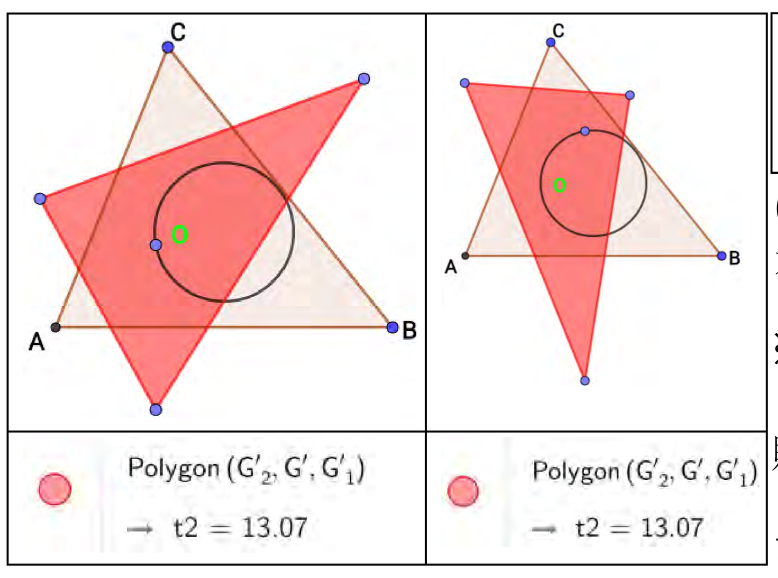
三、名詞定義

(一)、**對稱源**：朝多邊形各邊做對稱的平面上任意點稱為對稱源。

(二)、**對稱構造面積方式**：在平面上任意取對稱源，對平面上的一 n 邊形依邊的順序做對稱，並將依序的對稱點連起來，構成一 n 邊形面積就是本研究中構造面積的方式。下圖以四邊形做為例子。



(三)、**等面積線**：對於構造出來的多邊形，將會構成同樣面積構造多邊形的平面上所有對稱源連線所得圖形。下圖以三角形進行說明。



←可看出三角形的等面積線為圓形

(四)、**本科展中的面積定義**：本科展中所探討的面積全部為有向面積

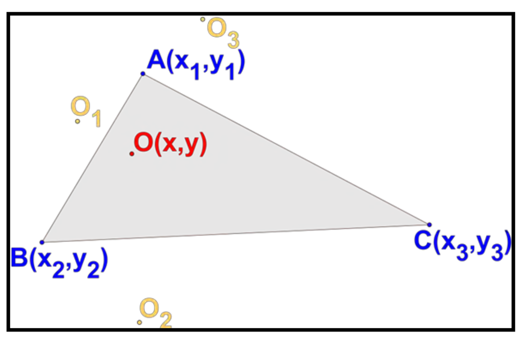
※**有向面積**：假設一多邊形 $a_1a_2\cdots\cdots a_n$ 且 a_1 的座標是 (x_1,y_1) ……。

則此多邊形有向面積為：

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

四、研究結果

一、證明三角形的等面積線是圓



1 用解析幾何證明:

在平面上任取一點 O，向三角形三邊 $\overline{AB}$ & $\overline{BC}$ & $\overline{CA}$ 作對稱，得 $O_1(O_{1x},O_{1y})$ & $O_2(O_{2x},O_{2y})$ & $O_3(O_{3x},O_{3y})$

$$O_1=\left(x-2(y_2-y_1)\frac{(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+x_2y_1-x_1y_2}{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2},\ y-2(x_1-x_2)\frac{(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+x_2y_1-x_1y_2}{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}\right)$$

$$O_2=\left(x-2(y_3-y_2)\frac{(y_3-y_2)x+(x_2-x_3)y+x_3y_2-x_2y_3}{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2},\ y-2(x_2-x_3)\frac{(y_3-y_2)x+(x_2-x_3)y+x_3y_2-x_2y_3}{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}\right)$$

$$O_3=\left(x-2(y_1-y_3)\frac{(y_1-y_3)x+(x_3-x_1)y+x_1y_3-x_3y_1}{(y_1-y_3)^2+(x_1-x_3)^2},\ y-2(x_3-x_1)\frac{(y_1-y_3)x+(x_3-x_1)y+x_1y_3-x_3y_1}{(y_1-y_3)^2+(x_1-x_3)^2}\right)$$

對稱構造三角形面積 $S_{\triangle O_1O_2O_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} O_{1x} & O_{2x} & O_{3x} & O_{1x} \\ O_{1y} & O_{2y} & O_{3y} & O_{1y} \end{vmatrix}$

而將行列式展開後得 x^2 項= y^2 項 =

$$\frac{\lfloor(y_1-y_2)(x_2-x_3)-(x_1-x_2)(y_2-y_3)\rfloor\lfloor(y_2-y_3)(x_3-x_1)-(x_2-x_3)(y_3-y_1)\rfloor\lfloor(y_3-y_1)(x_1-x_2)-(x_3-x_1)(y_1-y_2)\rfloor}{[(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2]\,[(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2]\,[(y_1-y_3)^2+(x_1-x_3)^2]}$$

推得等面積線是直線(即 x^2 項= y^2 項=0) 的三角形僅成立於兩邊平行時，因此等面積線是直線的三角形不存在。

2 以三角函數及矩陣變換來簡化結果:

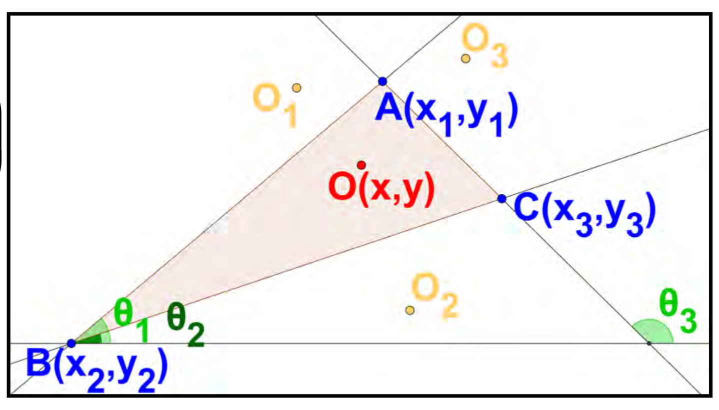
假設對稱源 $O(x,y)$ 對三角形的其中一邊(方程式為 $cos\theta x+sin\theta y+k=0$ 且 θ 是三角形邊與 x 軸的夾角)作對稱，對稱座標為 $\left(x-2cos\theta(cos\theta x+sin\theta y+k),\ y-2sin\theta(cos\theta x+sin\theta y+k)\right)$

再將此式寫成鏡射變換，即:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sin^2\theta-cos^2\theta & -2sin\theta cos\theta \\ -2sin\theta cos\theta & -sin^2\theta+cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2cos\theta k \\ -2sin\theta k \end{pmatrix}$$

因為本研究中探討的是二次項係數的形式，因此可將加上去的常數項向量捨去，即

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sin^2\theta-cos^2\theta & -2sin\theta cos\theta \\ -2sin\theta cos\theta & -sin^2\theta+cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



右圖展示三角形的情況，由右圖可以得知對稱構造三角形的行列式面積是:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -cos2\theta_1x-sin2\theta_1y & -cos2\theta_2x-sin2\theta_2y & -cos2\theta_3x-sin2\theta_3y & -cos2\theta_1x-sin2\theta_1y \\ -sin2\theta_1x+cos2\theta_1x & -sin2\theta_2x+cos2\theta_2x & -sin2\theta_3x+cos2\theta_3x & -sin2\theta_1x+cos2\theta_1x \end{vmatrix}$$

其二次項係數為 $\sin(2\theta_2-2\theta_1)+\sin(2\theta_3-2\theta_2)+sin(2\theta_1-2\theta_3)$

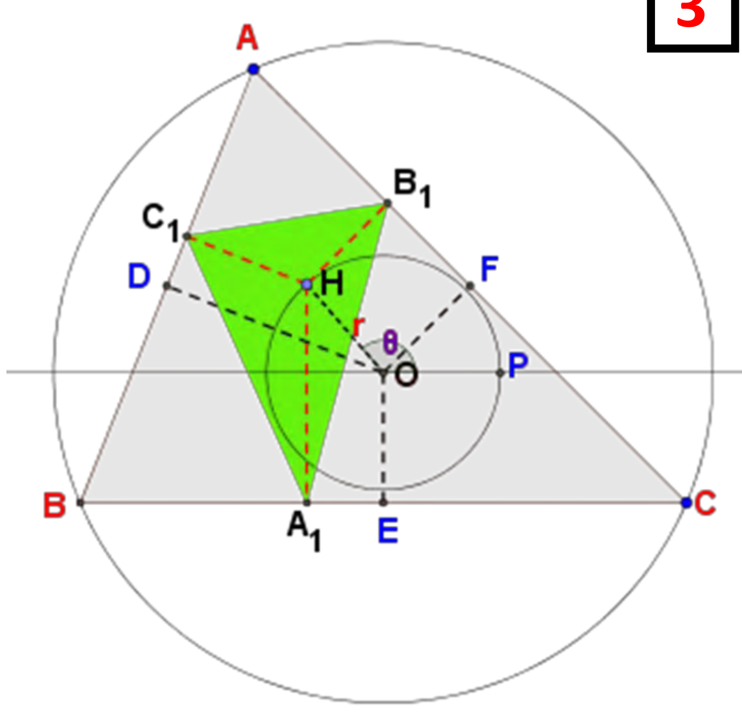
令：$\angle ABC=\alpha$，$\angle ACB=\beta$，$\angle BAC=\gamma$，則 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

因此二次項係數為: $-sin(2\alpha)-\sin(2\beta)-sin(2\gamma)=-4sin\alpha sin\beta sin\gamma$

因為 $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ 所以三角形的對稱構造三角形等面積線不會是直線

結論:我們因為得知了這種簡化方式的簡潔性，接下來多邊形的討論皆由此方法導證

3 用綜合幾何方法證明:



1.作一三角形 ABC 並令其外心為 O，以 O 為圓心、任意長度為半徑畫圓。圓上有一動點 H，且 H 朝三角形三邊作垂足，三垂足為 A_1、B_1、C_1。

2.過點 O 作平行 $\overline{BC}$ 的直線，令直線與小圓交於 P。

3.令 $\overline{OP}$ 旋轉θ 至 $\overline{OH}$ 而 $\overline{AB}=c$、$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{OH}=r$、$\overline{OC}=R$。

可由正弦定理得知：$\overline{AB}=2RsinC=c$，$\overline{BC}=2RsinA=a$、$\overline{AC}=2RsinB=b$。

4.又 a、b、c、$sinA$、$sinB$、$sinC$ 為定值。

→**推得要證** $\dfrac{S_{AC_1B_1}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{CA_1B_1}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{BA_1C_1}}{S_{ABC}}$ **為定值**

$\overline{BA_1}=\frac{a}{2}+r\cos(360°-\theta)=\frac{a}{2}+r\cos\theta$　　$\overline{BC_1}=\frac{c}{2}+r\cos(B+360°-\theta)=\frac{C}{2}+r\cos(B-\theta)$

$\overline{CA_1}=\frac{a}{2}-r\cos\theta$　　$\overline{CB_1}=\frac{b}{2}-r\cos(C-(360°-\theta))$

$\overline{AB_1}=\frac{b}{2}+r\cos(C+\theta)$　　$\overline{AC_1}=\frac{c}{2}-r\cos(B-\theta)$

推得：
$$\frac{S_{AC_1B_1}}{S_{ABC}}+\frac{S_{CA_1B_1}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BA_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{ac}{4}+r\left(\frac{a}{2}\cos(B-\theta)+\frac{c}{2}\cos\theta\right)+r^2\cos\theta\cos(B-\theta)}{4R^2\sin A\sin C}$$
$$+\frac{\frac{ab}{4}-r\left(\frac{b}{2}\cos\theta+\frac{a}{2}\cos(C+\theta)\right)+r^2\cos\theta\cos(C+\theta)}{4R^2\sin A\sin B}+\frac{\frac{bc}{4}+r\left(\frac{c}{2}\cos(C+\theta)+\frac{b}{2}\cos(B-\theta)\right)+r^2\cos(C+\theta)\cos(B-\theta)}{4R^2\sin B\sin C}$$

通分後分母為 $4R^2\sin A\sin B\sin C$ (定值)

分子為
$$\underbrace{\left(\frac{ac}{4}\sin B+\frac{ab}{4}\sin C+\frac{bc}{4}\sin A\right)}_{1}+r\underbrace{\left[\frac{a}{2}\cos(B-\theta)\sin B+\frac{c}{2}\cos\theta\sin B-\frac{b}{2}\cos\theta\sin C-\frac{a}{2}\cos(C+\theta)\sin C+\frac{c}{2}\cos(C+\theta)\sin A-\frac{b}{2}\cos(B-\theta)\sin A\right]}_{2}$$
$$+r^2[\underbrace{\cos\theta\sin B\cos(B-\theta)}_{3}+\underbrace{\cos\theta\sin C\cos(C+\theta)}_{4}\underbrace{-\cos(C+\theta)\cos(B-\theta)\sin A}_{5}]$$

1. $\left(\frac{ac}{4}\sin B+\frac{ab}{4}\sin C+\frac{bc}{4}\sin A\right)$ 為定值
2. $\frac{a}{2}\cos(B-\theta)\sin B+\frac{c}{2}\cos\theta\sin B-\frac{b}{2}\cos\theta\sin C-\frac{a}{2}\cos(C+\theta)\sin C+\frac{C}{2}\cos(C+\theta)\sin A-\frac{b}{2}\cos(B-\theta)\sin A=0$ (定值)
3. $\cos\theta\sin B\cos(B-\theta)=\frac{1}{2}cos^2\theta sin2B+sin^2Csin^2Bsin\theta\cos\theta+cos^2\theta sin^2B\sin\theta\cos\theta$
4. $\cos\theta\sin Ccos(C+\theta)=\frac{1}{2}cos^2\theta\sin 2C-sin^2Bsin^2C\sin\theta\cos\theta-cos^2Bsin^2C\sin\theta\cos\theta$
5. $\cos(C+\theta)\cos(B-\theta)\sin A=cos^2\theta\times\frac{\sin 2B+\sin 2C}{2}-\sin B\sin C\sin(B+C)+(sin^2Bcos^2C-sin^2Ccos^2B)\sin\theta\cos\theta$

總結：$\frac{1}{2}cos^2\theta\sin 2B+sin^2Csin^2B\sin\theta\cos\theta+cos^2Csin^2B\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}cos^2\theta\sin 2C-sin^2Bsin^2C\sin\theta\cos\theta-cos^2Bsin^2C\sin\theta\cos\theta-cos^2\theta\times\frac{\sin 2B+\sin 2C}{2}-\sin B\sin C\sin(B+C)+(sin^2Bcos^2C-sin^2Ccos^2B)\sin\theta\cos\theta=sinBsinCsinA$ (定值)

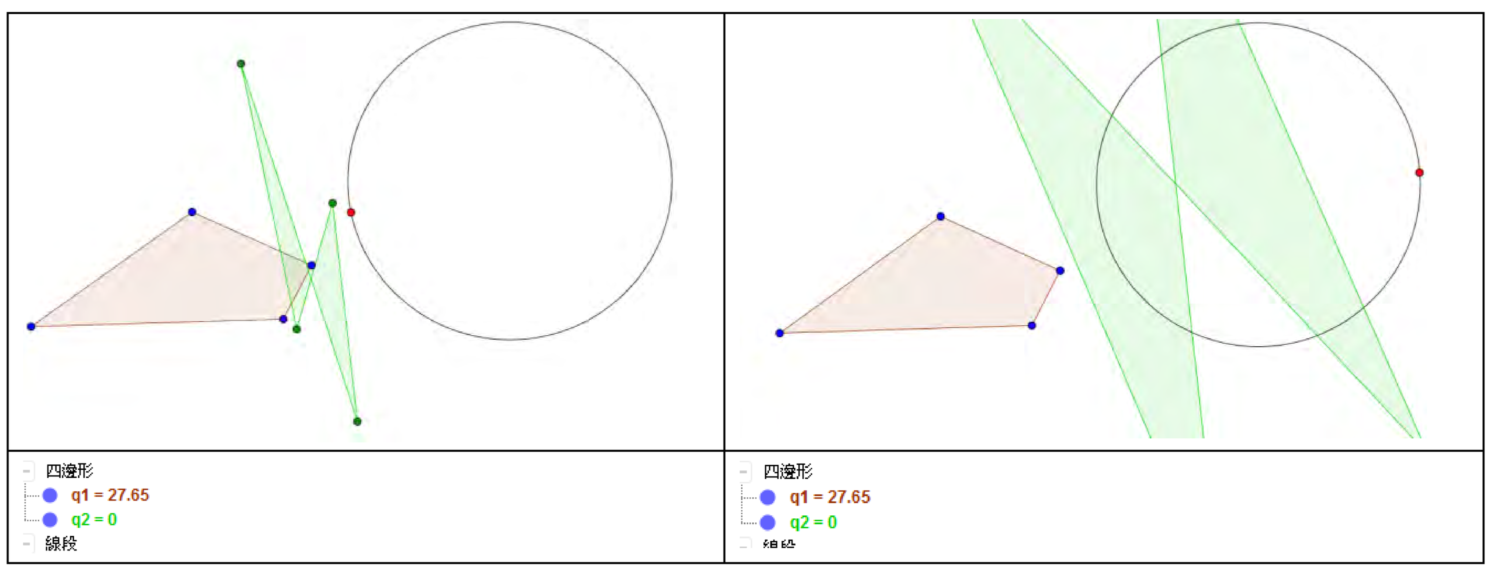
因此我們推得到三角形的對稱構造三角形等面積線是圓形，並以外心為圓心。

(在附錄二中，我們探討對稱源取在原三角形外的情形)

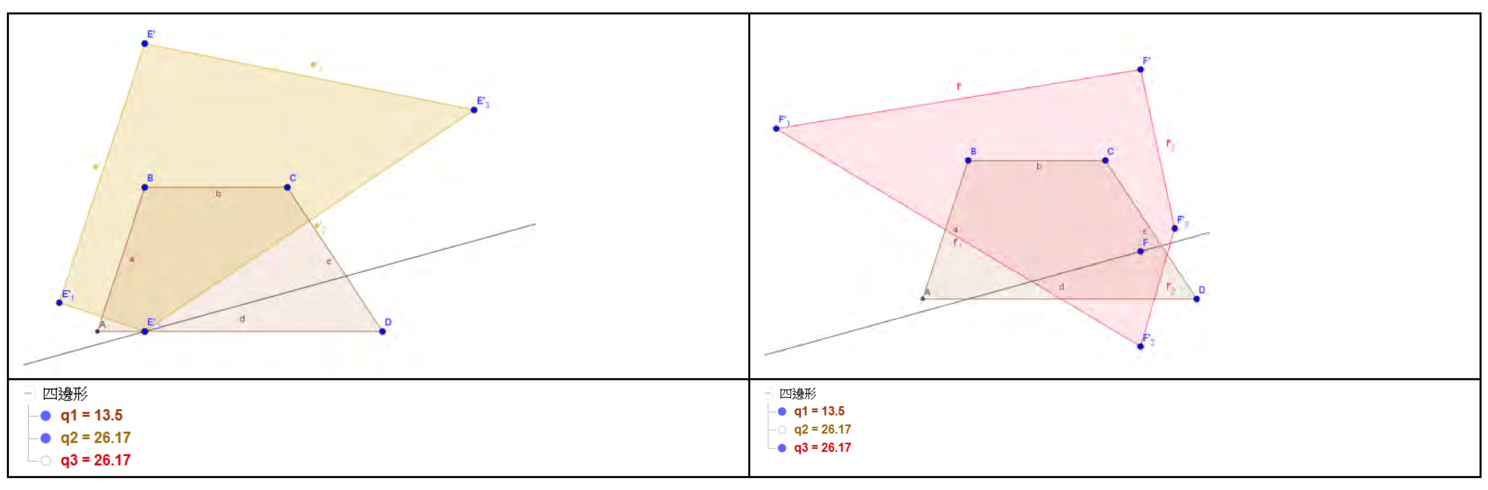
二、證明四邊形之等面積線為圓形、直線或平面

由前面的證明已知三角形的等面積線為圓形，我們接下來要推廣至四邊形的情形並探討對稱構造四邊形的等面積。在利用 ggb 作圖過程中，我們發現到構造四邊形等面積線可能出現圓、直線跟平面三種情況，如下表所示。

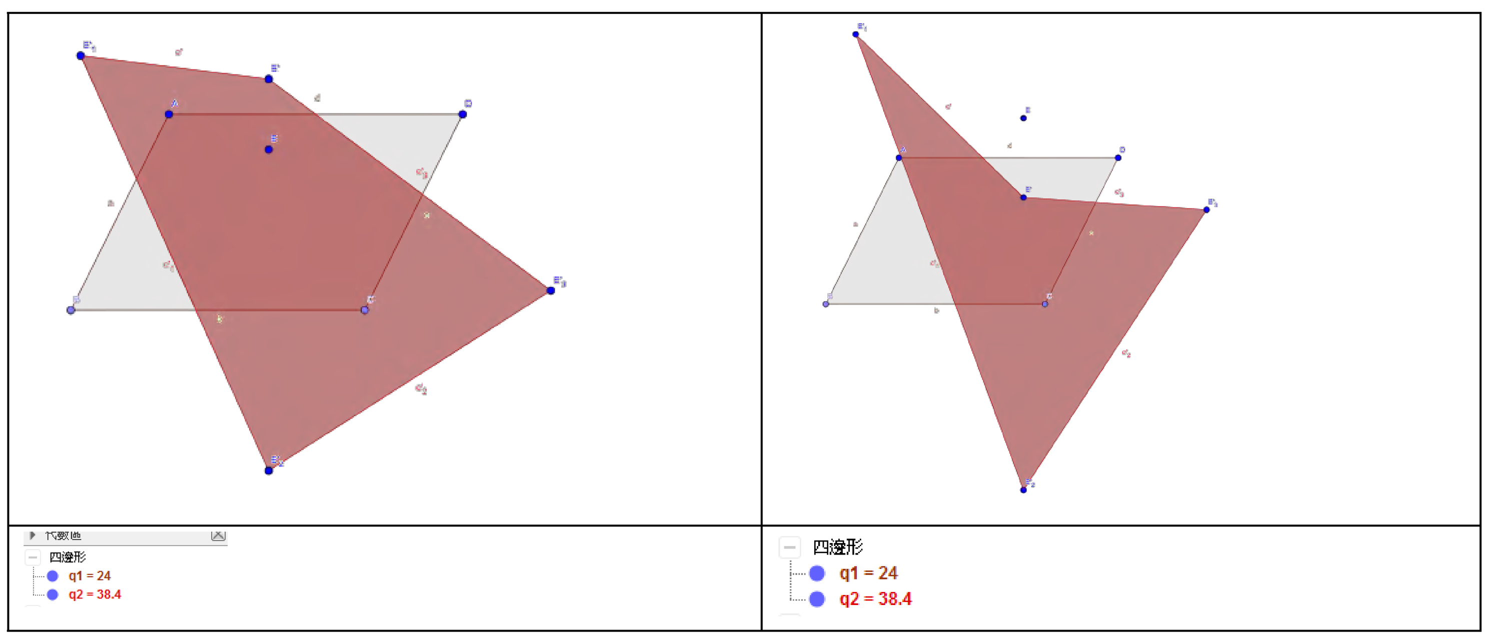
(一) 等面積線為圓形



(二) 等面積線為直線，其中原圖形是梯形

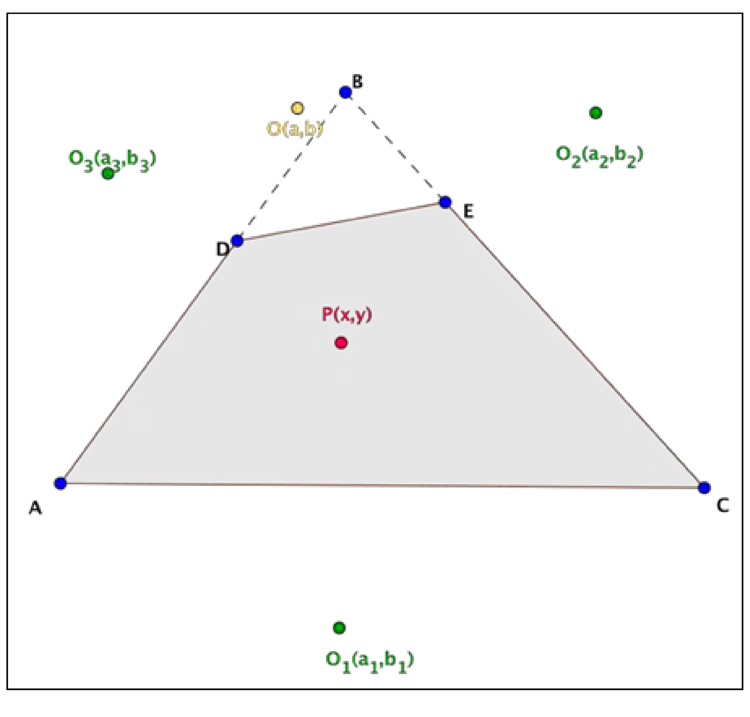


(三) 等面積線為平面，其中原圖形是平行四邊形



下面，我們要證明四邊形的對稱構造四邊形等面積線的方程式可寫成

$$a\left(x^2+y^2\right)+bx+cy+d=S$$



由原三角形 ABC 對稱構造三角形 $O_1O_2O_3$ 的面積是 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix}$

而由四邊形 $ADEC$ 所作的對稱構造四邊形 $OO_1O_2O_3$ 的面積是 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a & a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b & b_3 & b_1 \end{vmatrix}$

因由原三角形 ABC 對稱構造三角形等面積線是圓形，因此 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix}=constant_1$

可化簡成:

$$\alpha_1\left(x^2+y^2\right)+\beta_1x+\gamma_1y+\delta_1=constant_1$$
$$=a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1-a_2b_1-a_3b_2-a_1b_3$$

而因三角形 DBE 的對稱構造三角形等面積線也是圓形，因此 $\begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 & a \\ b & b_2 & b_3 & b \end{vmatrix} = constant_2$

可化簡成 $\alpha_2(x^2+y^2)+\beta_2 x+\gamma_2 y+\delta_2 = constant_2 = a_3b+ab_2+a_2b_3-ab_3-a_2b-a_3b_2$

而待求之對稱構造四邊形 $OO_2O_1O_3 = (a_1b_2+a_2b+ab_3+a_3b_1-ab_2-a_2b_1-a_3b-a_1b_3)\div 2$

經比對後可發現：

$$a_1b_2+a_2b+ab_3+a_3b_1-ab_2-a_2b_1-a_3b-a_1b_3 =$$
$$a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1-a_2b_1-a_3b_2-a_1b_3-(a_3b+ab_2+a_2b_3-ab_3-a_2b-a_3b_2)$$

而產生構造四邊形 $OO_2O_1O_3$ 等面積的情況是 $\begin{vmatrix} a_1 & a & a_2 & a_3 & a_1 \\ b_1 & b & b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix} = constant_3$

$$=-(\alpha_2(x^2+y^2)+\beta_2x+\gamma_2y+\delta_2)+\alpha_1(x^2+y^2)+\beta_1x+\gamma_1y+\delta_1$$
$$=(-\alpha_2+\alpha_1)(x^2+y^2)+(-\beta_2+\beta_1)x+(-\gamma_2+\gamma_1)y+(-\delta_2+\delta_1)$$

因此四邊形等面積線方程式是圓方程式，且若 $\alpha_1-\alpha_2=0$ 時等面積線是直線。

而三項係數皆是 0 時，等面積線是平面。

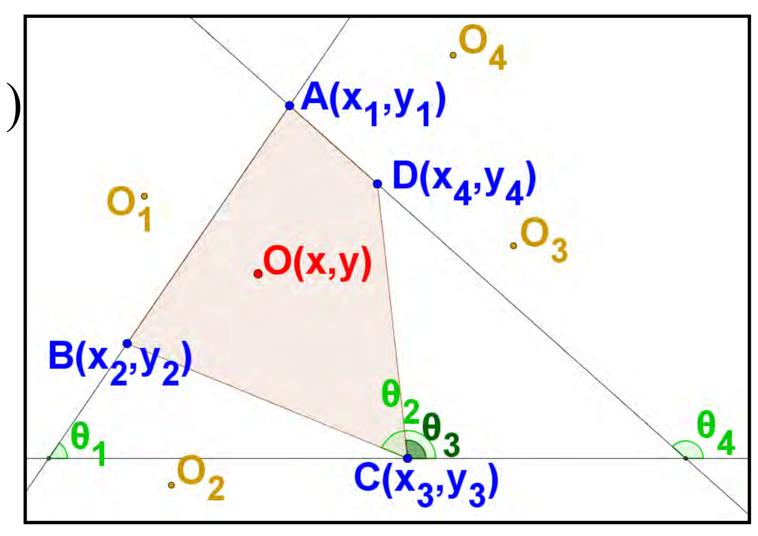
再來我們同樣用前述的三角函數及矩陣變換的方法來簡化對稱四邊形等面積線的計算

我們用與前述三角形相同的假設，則: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cos2\theta & -sin2\theta \\ -sin2\theta & cos2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

因此對稱構造四邊形的面積行列式為:

$$\begin{vmatrix} -cos2\theta_1x-sin2\theta_1y & -cos2\theta_2x-sin2\theta_2y & -cos2\theta_3x-sin2\theta_3y & -cos2\theta_4x-sin2\theta_4y & -cos2\theta_1x-sin2\theta_1y \\ -sin2\theta_1x+cos2\theta_1x & -sin2\theta_2x+cos2\theta_2x & -sin2\theta_3x+cos2\theta_3x & -sin2\theta_4x+cos2\theta_4x & -sin2\theta_1x+cos2\theta_1x \end{vmatrix}$$

其二次項係數為:



$$\sin(2\theta_2-2\theta_1)+\sin(2\theta_3-2\theta_2)+sin(2\theta_4-2\theta_3)$$
$+\sin(2\theta_1-2\theta_4)$，而由右圖可以得知:

$$\sin 2(\theta_2-\theta_1)=\sin(-2\angle ABC)=-\sin(2\angle ABC)$$
$$\sin 2(\theta_3-\theta_2)=\sin(-2\angle BCD)=-\sin(2\angle BCD)$$
$$\sin 2(\theta_4-\theta_3)=\sin(-2\angle ADC)=-\sin(2\angle ADC)$$
$$\sin 2(\theta_1-\theta_4)=\sin(-2\angle BAD)=-\sin(2\angle BAD)$$

設 $\angle ABC=\alpha$ $\angle BCD=\beta$ $\angle CDA=\gamma$ $\angle DAB=\delta$

則 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ 而二次項係數為 $4\sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\cos\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}$

我們討論此二次項係數為 0 時的三種情況:

1. $\sin(\alpha+\beta)=0$ 則 $\alpha+\beta=\pi$，可為梯形與圓內接四邊形。
2. $\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}=0$ 則 $\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}=\frac{1}{2}\pi\ or\ \frac{3}{2}\pi$
3. $\cos\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}=0$ 則 $\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}=\frac{1}{2}\pi\ or\ \frac{3}{2}\pi$

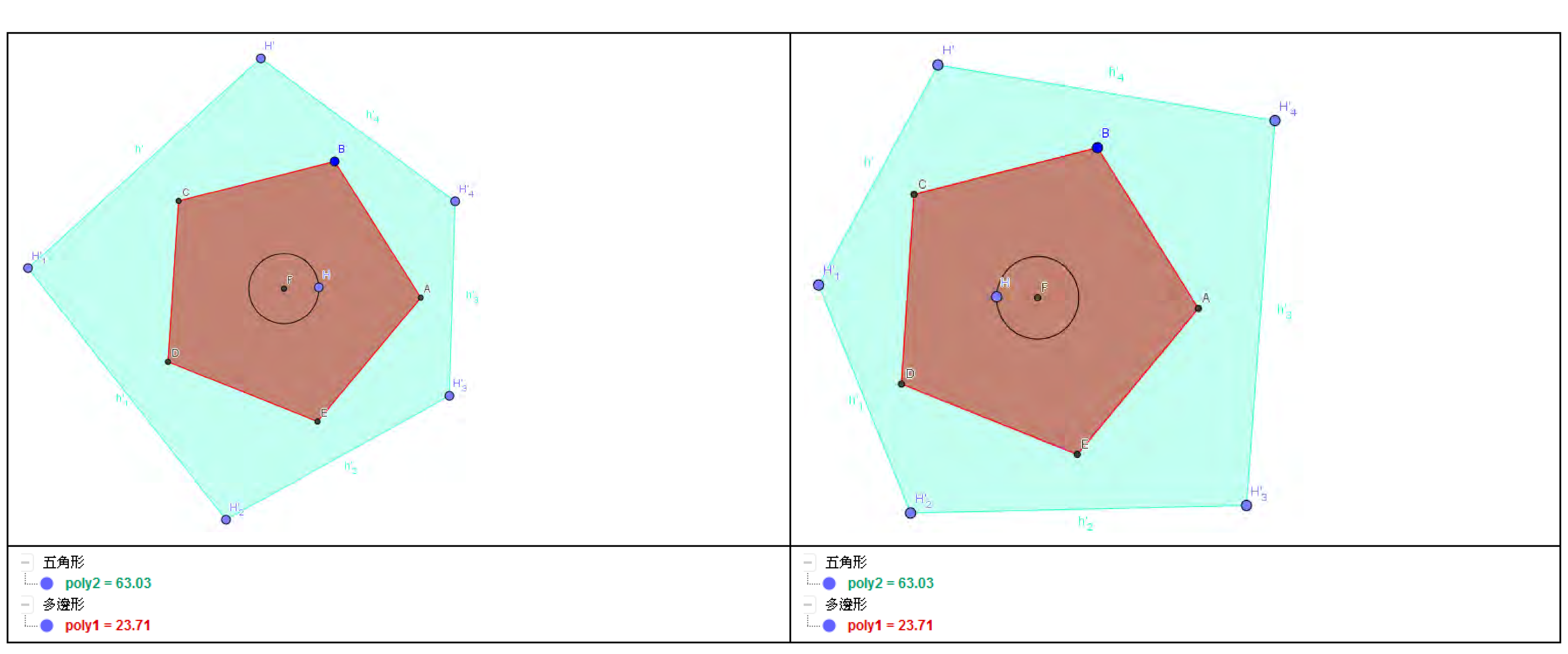
也是梯形或圓內接四邊形

三、*n* 邊形對稱構造等面積線的推廣

(一)特殊多邊形探討

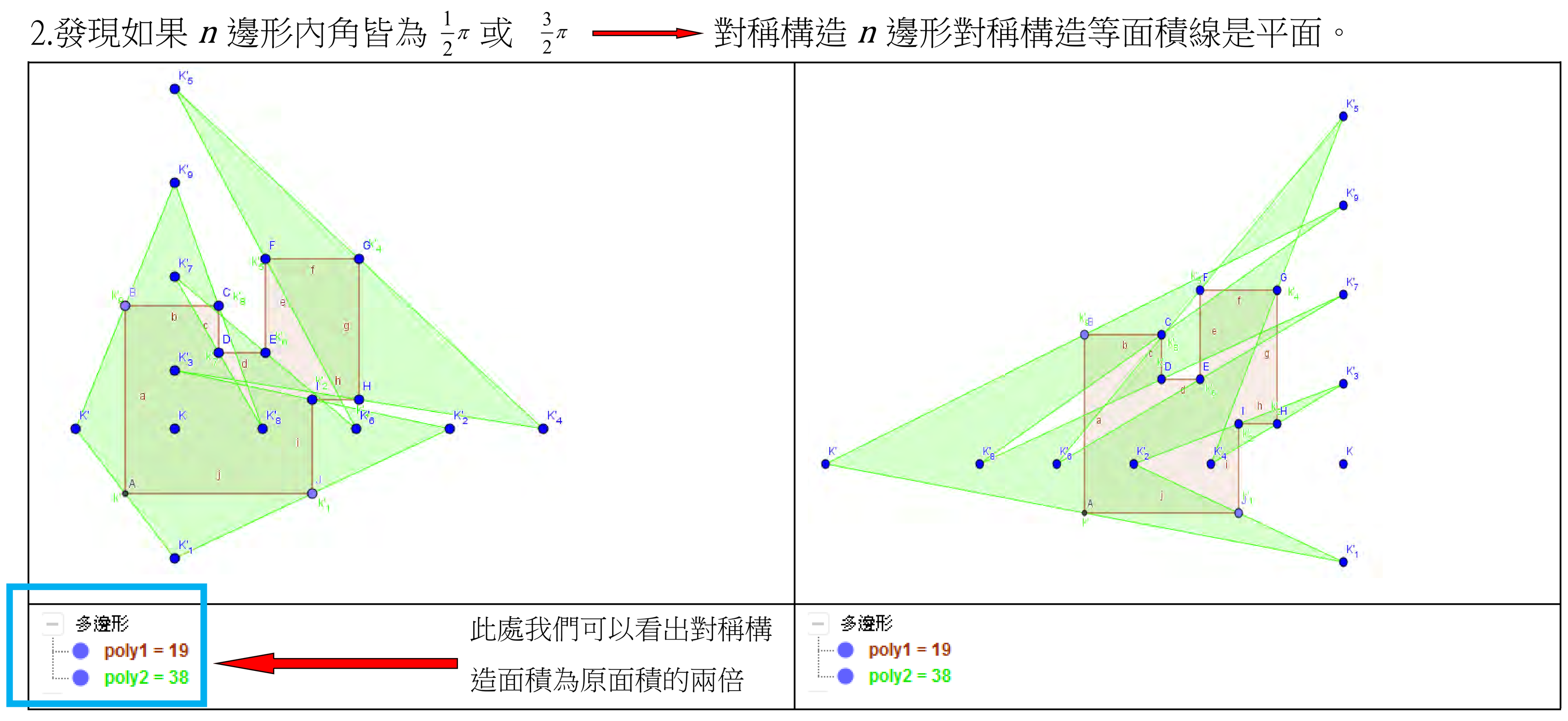
1.我們先討論正多邊形的圖形，依據先前的結論，我們知道正三角形的對稱構造等面積線是圓形，而正方形的對稱構造等面積線是平面。

接下來我們看五邊形及六邊形。下表可以看出五邊形的對稱構造等面積線是圓形，並以正五邊形的中心為圓心。

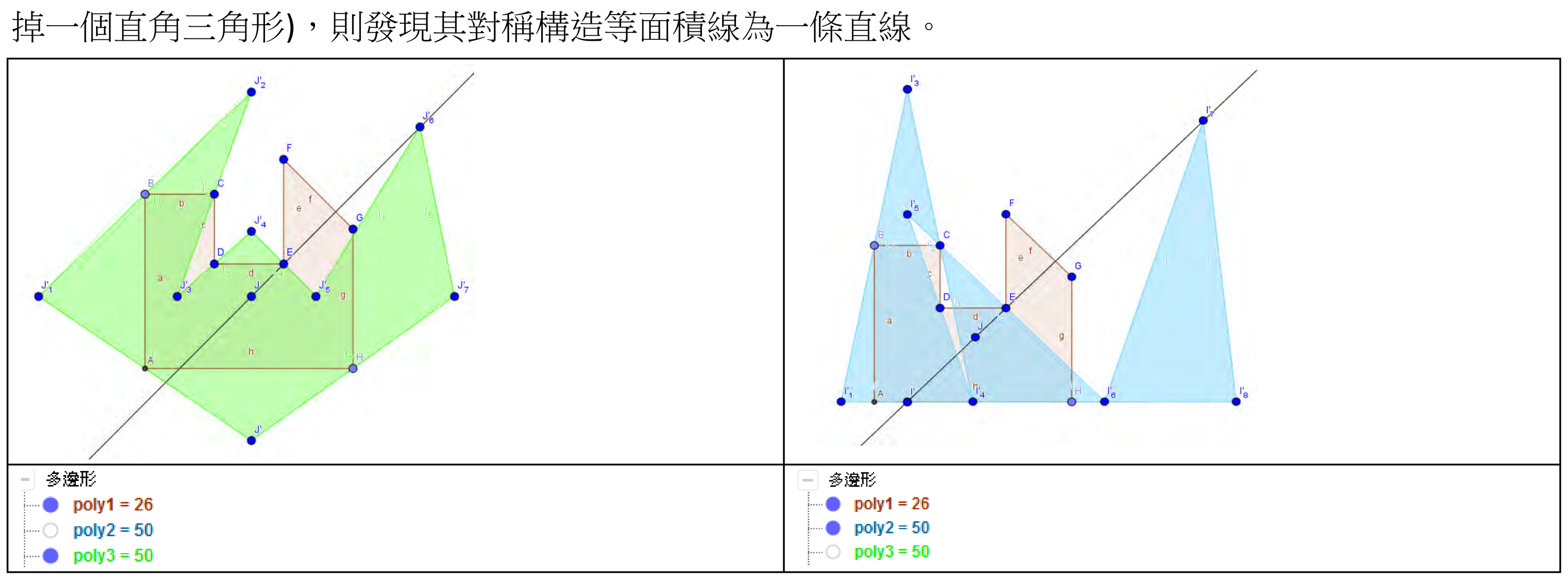


結論:由後面的證明我們可以知道對於任意正 *n* 邊形來說，其對稱構造多邊形等面積線是圓形，並以圖形中心為圓心。

2.發現如果 *n* 邊形內角皆為 $\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{3}{2}\pi$ ⟶ 對稱構造 *n* 邊形對稱構造等面積線是平面。



3. 由上述可得若一個圖形之內角為或其對稱構造等面積線為一平面。而當我們將任意一角去除(相當於挖掉一個直角三角形)，則發現其對稱構造等面積線為一條直線。

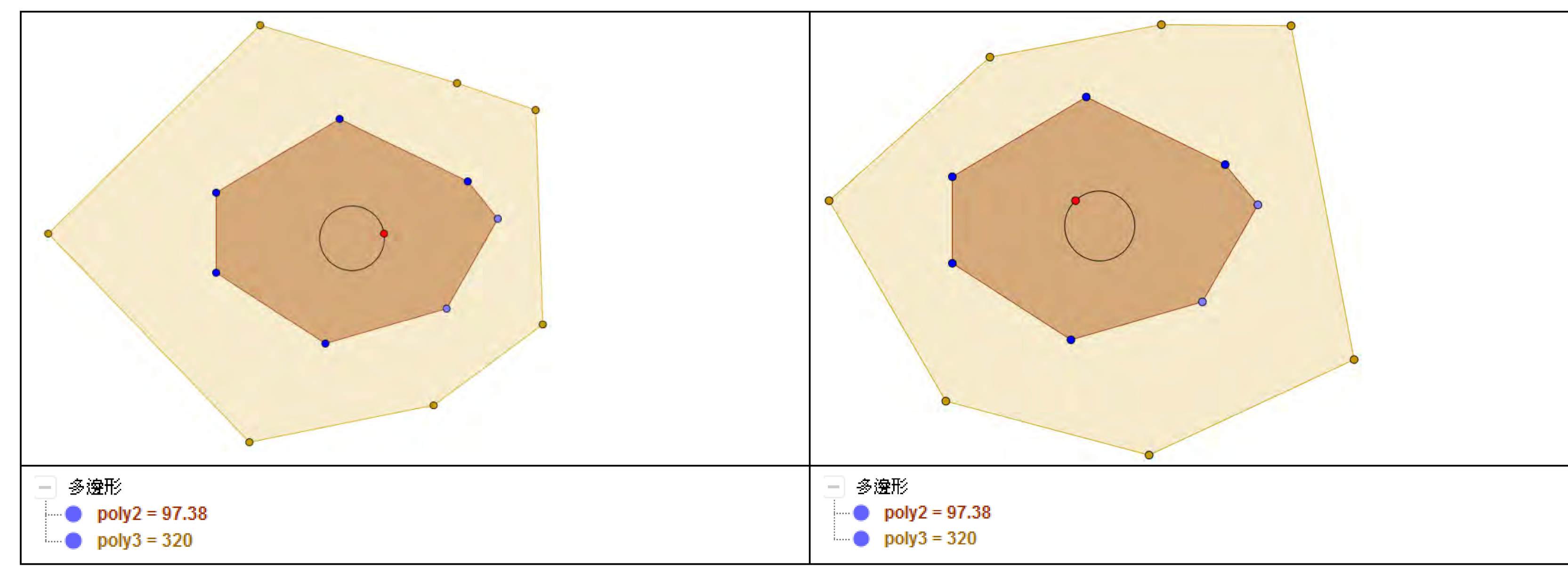


四、多邊形的對稱構造多邊形等面積線可寫成 $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=S$

在探討多邊形推廣中，我們找到了一些特殊多邊形的等面積線，有些多邊形的等面積線是直線，有的是圓形。因此，在接下來的探討及證明中，我們想要得出一般多邊形對稱構造圖形等面積線的型式。我們利用了與證明四邊形的對稱構造圖形等面積線是圓類似的方法，得出了多邊形的對稱構造圖形等面積線方程式可寫成 $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=S$ 。

接下來，我們將證明上述的結論。

此處我們先以七邊行進行舉例說明，由下表我們可以發現對稱構造七邊形等面積線是圓形。

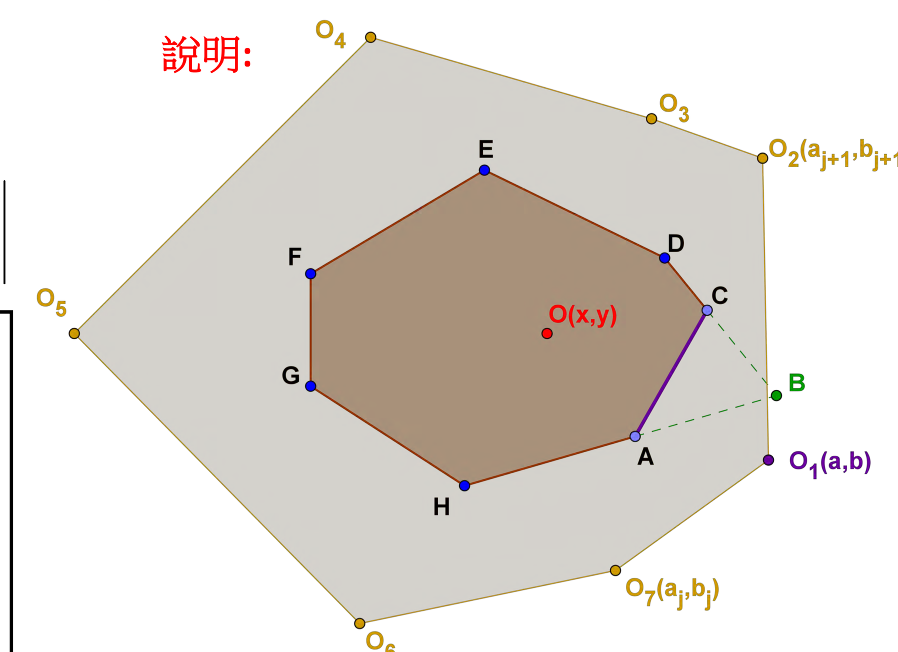


這裡的證明利用了數學歸納法。因此先從三角形開始驗證，發現推論為正確的。

接下來，假設 *n* 邊形的情況為真，意即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & b_1 \end{vmatrix} = \alpha_n(x^2+y^2)+\beta_nx+\gamma_ny+\delta_n$$

說明:



我們假設對稱源朝 *n* 邊形個邊做對稱點，對稱點依序的座標為 (a_1,b_1) -為朝第一個邊做對稱、(a_2,b_2) …… (a_n,b_n) -為朝第 *n* 個邊做對稱。而 *n+1* 邊形是在原 *n* 邊形的第 *j* 邊及的 *j+1* 邊扣除一個三角形所構造而成。並令對稱源對 *n* 邊形構造出的新邊的對稱點是 (a,b) 。如右圖所示。

而對稱構造 *n+1* 邊形的面積可寫成 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_j & a & a_{j+1} & a_n & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots b_j & b & b_{j+1} & \cdots b_n & b_1 \end{vmatrix}$

又已知由三角形 ABC 所構造的對稱構造三角形的面積

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_j & a & a_{j+1} & a_j \\ b_j & b & b_{j+1} & b_j \end{vmatrix} = \alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta = \frac{1}{2}(a_jb+ab_{j+1}+a_{j+1}b_j-ab_j-a_{j+1}b-a_jb_{j+1})$$

而對稱構造 *n* 邊形的面積為 $(\sum_{k=1}^{k=n-1}a_ka_{k+1}+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n)\div 2=\alpha_n(x^2+y^2)+\beta_nx+\gamma_ny+\delta_n$

對稱構造 *n+1* 邊形的面積為:

$$(\sum_{k=1}^{k=j-1}a_ka_{k+1}+a_jb+ab_{j+1}+\sum_{k=j+1}^{k=n-1}a_kb_{k+1}+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=j-1}a_{k+1}b_k-ab_j-a_{j+1}b-\sum_{k=j+1}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n)\div 2$$

比較後可發現 ⟶

$$a_jb+ab_{j+1}+a_{j+1}b_j-ab_j-a_{j+1}b-a_jb_{j+1}+\sum_{k=1}^{k=n-1}a_ka_{k+1}+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n)\div 2=$$
$$\sum_{k=1}^{k=j-1}a_ka_{k+1}+a_jb+ab_{j+1}+\sum_{k=j+1}^{k=n-1}a_kb_{k+1}+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=j-1}a_{k+1}b_k-ab_j-a_{j+1}b-\sum_{k=j+1}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n=$$

$$\boxed{(\alpha+\alpha_n)(x^2+y^2)+(\beta+\beta_n)x+(\gamma+\gamma_n)y+(\delta+\delta_n)}$$

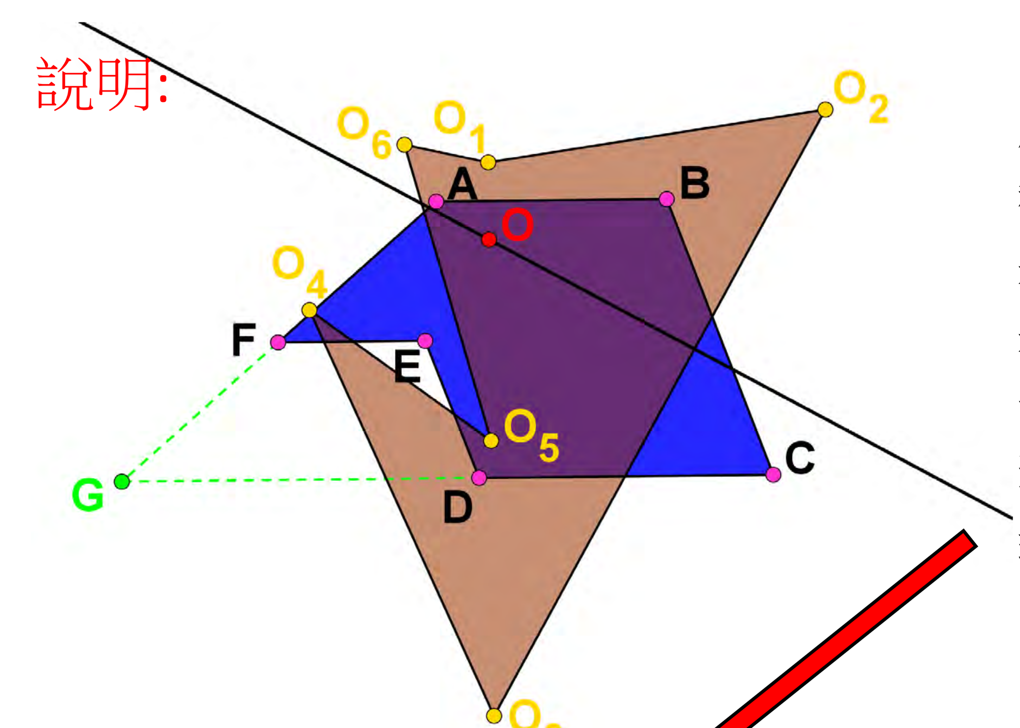
因此 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_j & a & a_{j+1} & a_n & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots b_j & b & b_{j+1} & \cdots b_n & b_1 \end{vmatrix} = (\alpha+\alpha_n)(x^2+y^2)+(\beta+\beta_n)x+(\gamma+\gamma_n)y+(\delta+\delta_n)$

如果欲求對稱構造 *n+1* 邊形的等面積線，其條件為 $\boxed{(\alpha+\alpha_n)(x^2+y^2)+(\beta+\beta_n)x+(\gamma+\gamma_n)y+(\delta+\delta_n)=C}$

五、探討什麼多邊形所構造出的對稱構造多邊形等面積線為直線

我們已經知道對稱構造四邊形的面積是直線的情形只有是圓內接四邊形及梯形。那麼對稱構造多邊形呢?我們以梯形，圓內接四邊形為原圖形，找到一個構造對稱構造多邊形等面積線是直線的方法。廣義的來說，以對稱構造多邊形等面積線原本就是直線的多邊形做為原始圖形，並在其中一個角落扣去梯形、平行四邊形或是圓內接四邊形。以下圖做此構造方式的舉例說明。

說明:

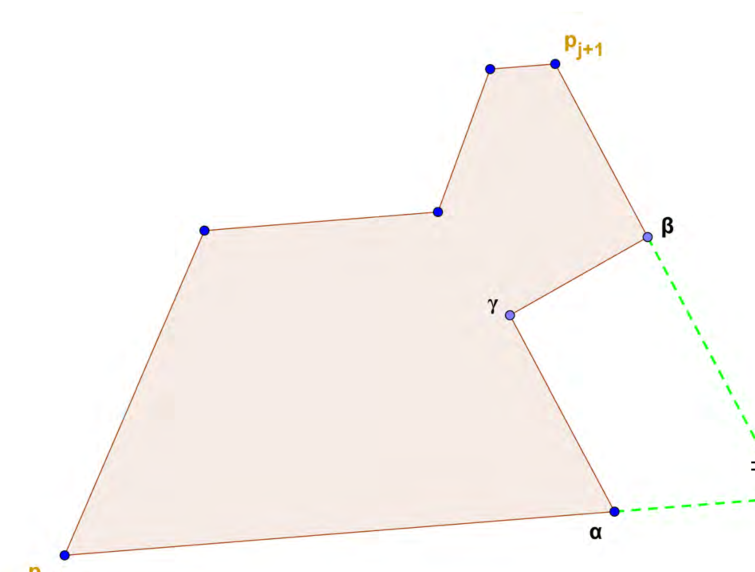


右圖是梯形 *AGFD* 扣去梯形 *BCED* 所產生的圖形，上圖六邊形的構造對稱六邊形等面積線是直線，而原因就是先前提到的在原構造面積等面積線是直線的多邊形其中一個角落扣掉另一個構造面積等面積線是直線的四邊形。

現在來證明這種構造方式是可行的:

假設有一 *n* 邊形 $p_1p_2p_3\cdots\cdots p_{j-1}p_jp_{j+1}\cdots\cdots p_n$ 且其對稱構造 n 邊形的等面積線是直線，並在 p_j 的角落挖一個對稱構造四邊形等面積線是直線的四邊形，如上圖點 *D* 內挖一個梯形。現在假設點 p_{j-1} 跟 p_j 之間有一點如上圖點 *E* 的 α 點，而點 p_j 跟 p_{j+1} 之間有一點如上圖點 *B* 的 β 點，並有一點如上圖點 *C* 的 γ 點，而四邊形 $\alpha\gamma\beta p_j$ 的對稱構造四邊形的等面積線是直線。

假設對稱源朝做 $\overline{p_1p_2}$ 對稱點的座標是朝做 (a_1,b_1) 對 $\overline{p_2p_3}$ 稱點的座標是 (a_2,b_2) 。朝邊做 $\alpha\gamma$ 的對稱點座標是朝 (a,b) 邊做 $\gamma\beta$ 的對稱點座標是 (c,d) ………朝 $\overline{p_np_1}$ 做的對稱點座標是 (a_n,b_n) 。如下圖所示。



證明過程：

原對稱構造 *n* 邊形的面積是

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2\ldots\ldots a_{j-1} & a_j & a_{j+1}\ldots\ldots a_n & a_1 \\ b_1 & b_2\ldots\ldots b_{j-1} & b_j & b_{j+1}\ldots\ldots b_n & b_1 \end{vmatrix}$$

$$=(\sum_{k=1}^{k=n-1}a_kb_{k+1}+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n)\div 2=\beta_nx+\gamma_ny+\delta_n$$

對稱構造 *n+2* 邊形的面積可寫成

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\ldots a_{j-1} & a & c & a_j & a_{j+1}\ldots a_n & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3\ldots & b_{j-1} & b & d & b_j & b_{j+1}\ldots b_n & b_1 \end{vmatrix} = (\sum_{k=1}^{k=j-2}a_kb_{k+1}+a_{j-1}b+ad+a_jd+cb_j+\sum_{k=j}^{k=n-1}a_kb_{k+1}$$
$$+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=j-2}a_{k+1}b_k-ab_{j-1}-cb-da_j-\sum_{k=j}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n)\div 2$$

而四邊形 $\alpha\gamma\beta p_j$ 的對稱構造四邊形面積為 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{j-1} & a & c & a_j & a_{j-1} \\ b_{j-1} & b & d & b_j & b_{j-1} \end{vmatrix}$

$$=(a_{j-1}b+ad+cb_j+a_jb_{j-1}-ab_{j-1}-cb-a_jd-a_{j-1}b_j)\div 2=\beta x+\gamma y+\delta$$

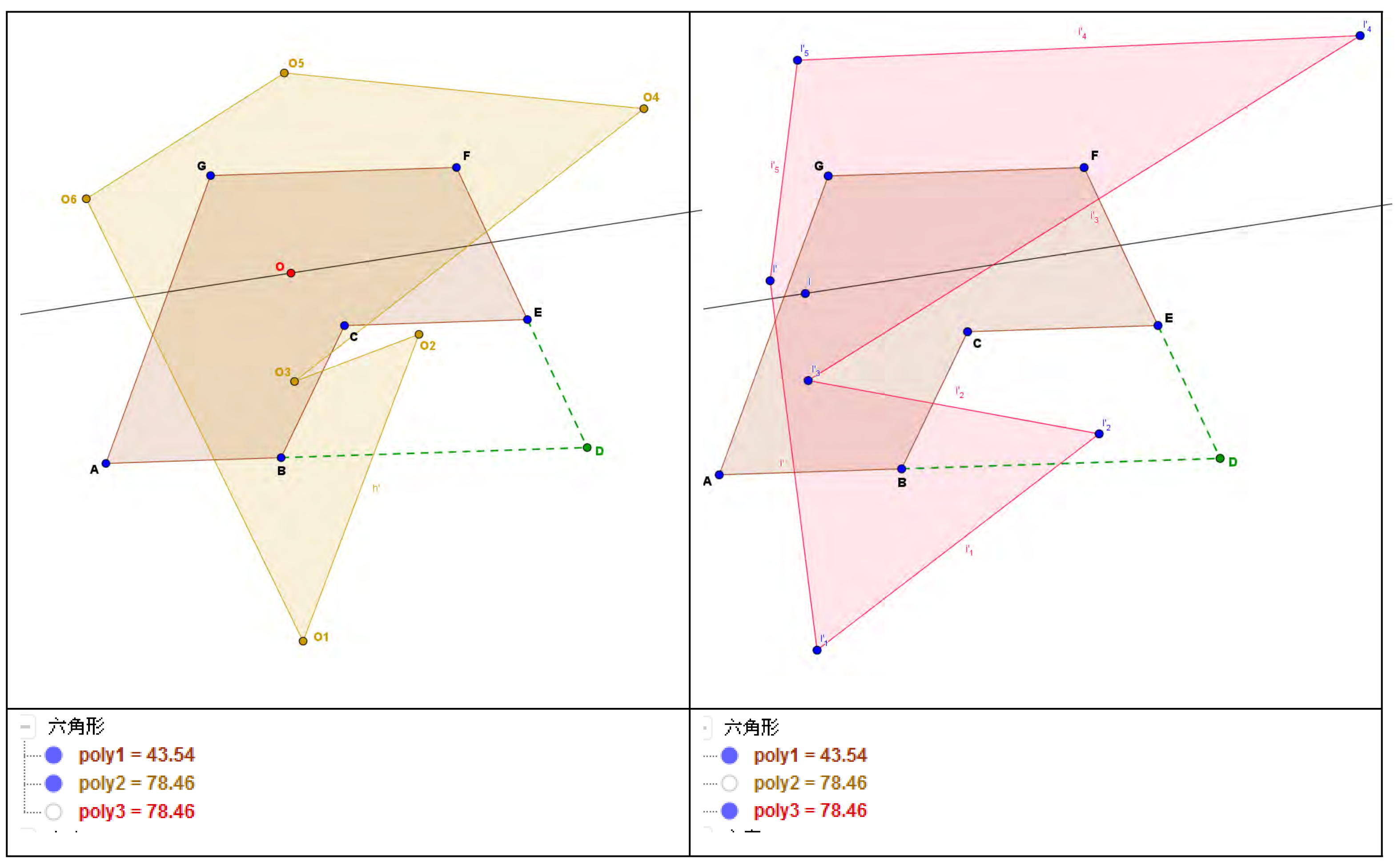
比較後可發現 $(\sum_{k=1}^{k=n-1}a_kb_{k+1}+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n)\div 2+(a_{j-1}b+ad+cb_j+a_jb_{j-1}-ab_{j-1}-cb-a_jd-a_{j-1}b_j)\div 2$

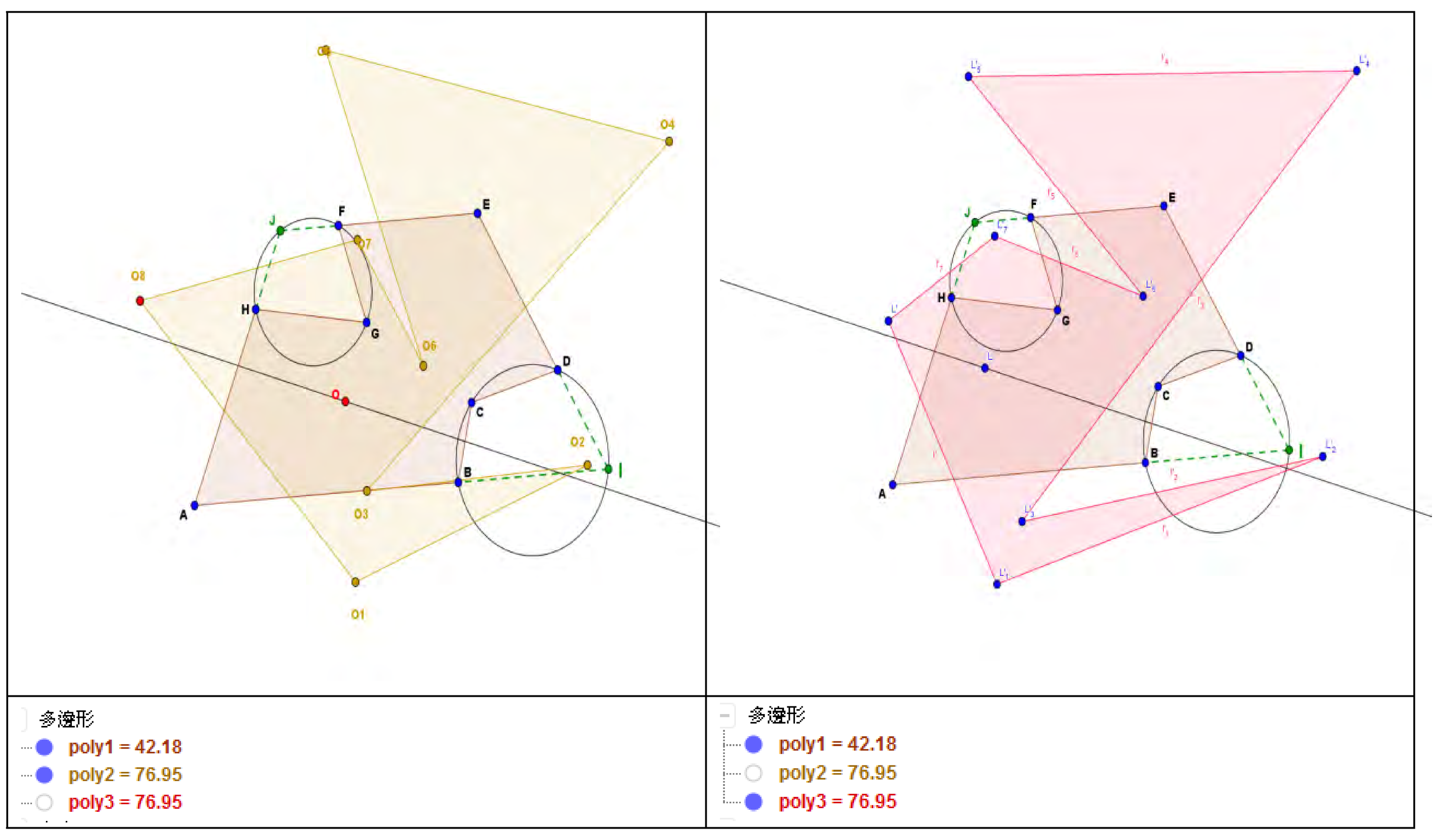
$$=\left(\sum_{k=1}^{k=j-2}a_kb_{k+1}+a_{j-1}b+ad+a_jd+cb_j+\sum_{k=j}^{k=n-1}a_kb_{k+1}+a_nb_1-\sum_{k=1}^{k=j-2}a_{k+1}b_k-ab_{j-1}-cb-da_j-\sum_{k=j}^{k=n-1}a_{k+1}b_k-a_1b_n\right)\div 2$$

$$=(\beta+\beta_n)x+(\gamma+\gamma_n)y+(\delta+\delta_n)$$

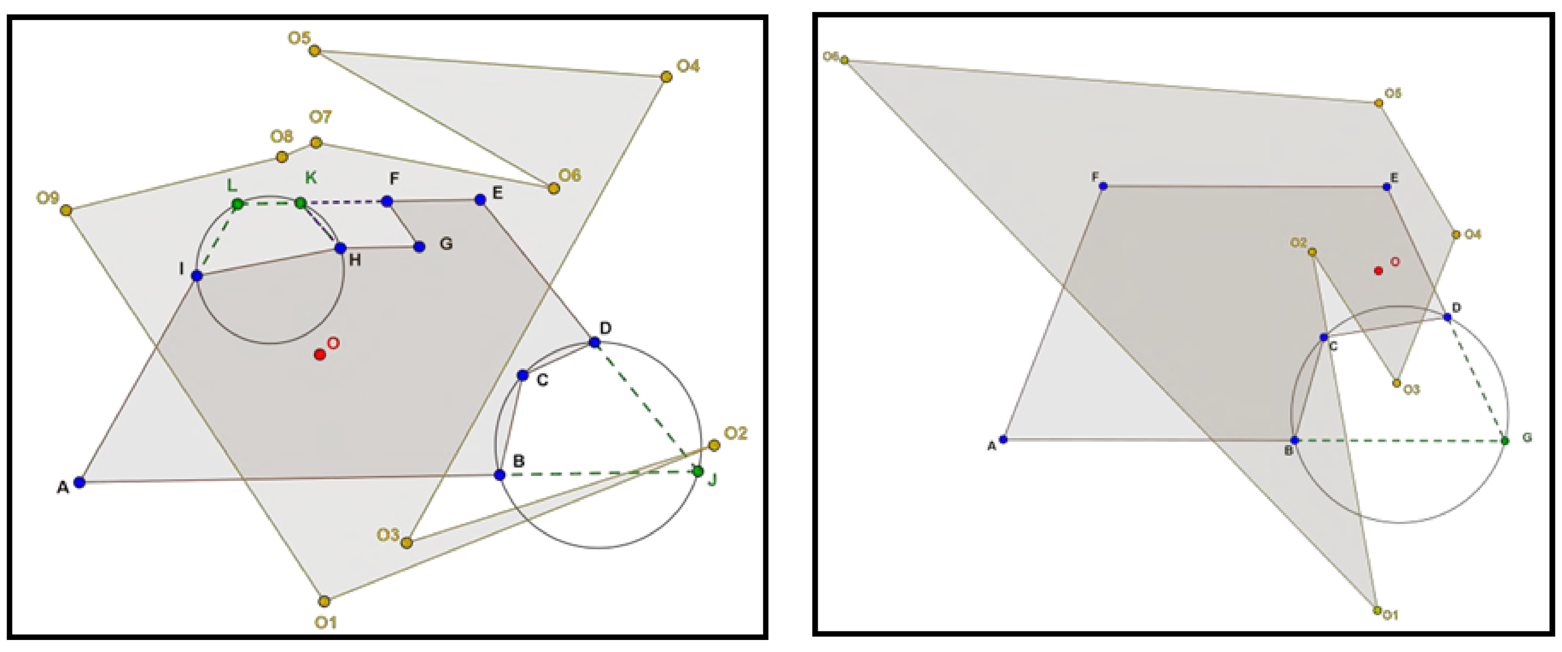
因此用此方式構造出的對稱構造 *n+2* 邊形等面積線是直線，故得證。

由上述討論可以知道，只要原多邊形的對稱構造多邊形等面積線是直線，並在其中一個角挖一塊梯形、圓內接四邊形、平行四邊形，就可以構造出對稱構造 *n+2* 邊形等面積線是直線的 *n+2* 邊形，如下圖所示。





上圖是將梯形兩角各扣去一個圓內接四邊形所產生的八邊形，可以看到其對稱構造八邊形的等面積線是一直線。

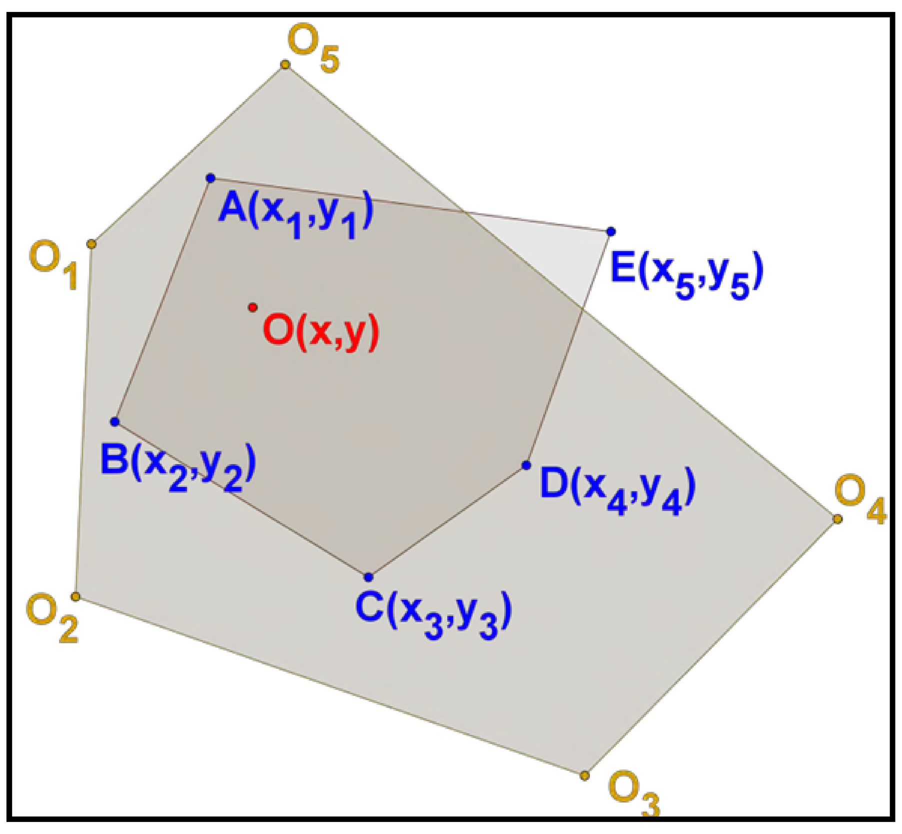


由上述討論可以知道，以上兩圖的構造對稱多邊形等面積線是直線。

六、對稱構造 *n* 邊形等面積線直線情形討論

(一)五邊形探討

討論完四邊形後，我們對稱構造圖形等面積線是直線的五邊形進行一些探討。在計算過程中，我們發現五邊形不項四邊形的情況如此簡單，因此我們就利用數值解的方式繪製出對

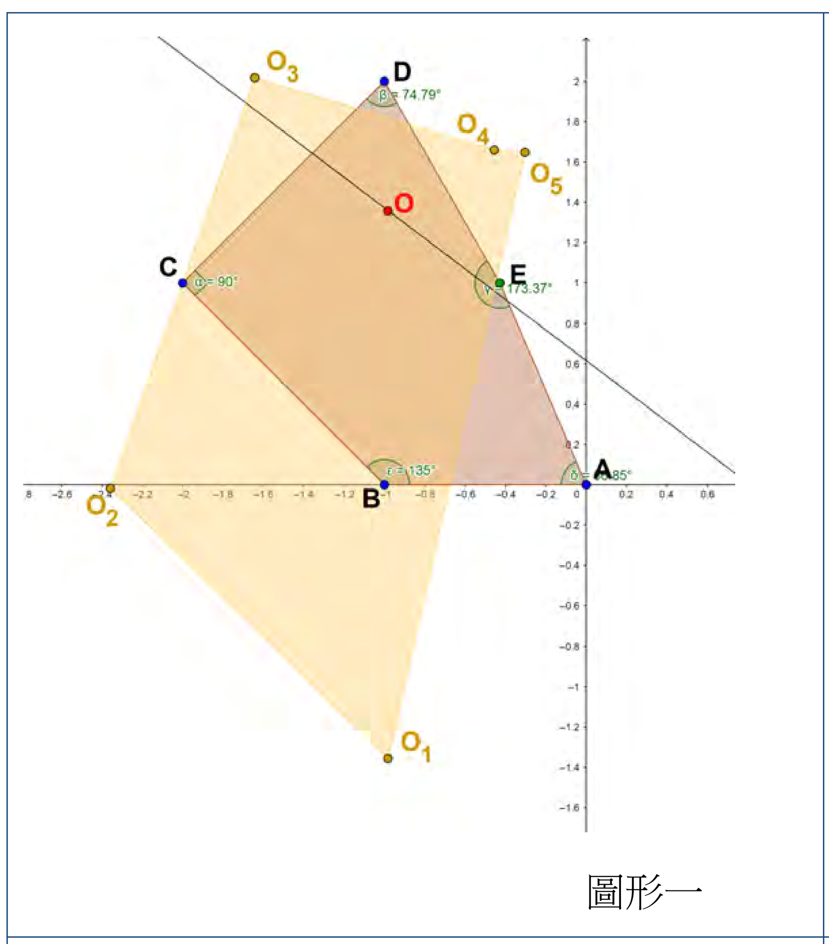


由先前討論可得知，滿足五邊形對稱構造五邊形等面積線是直線的條件是 $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma+\sin2\delta+\sin2\varepsilon=0$

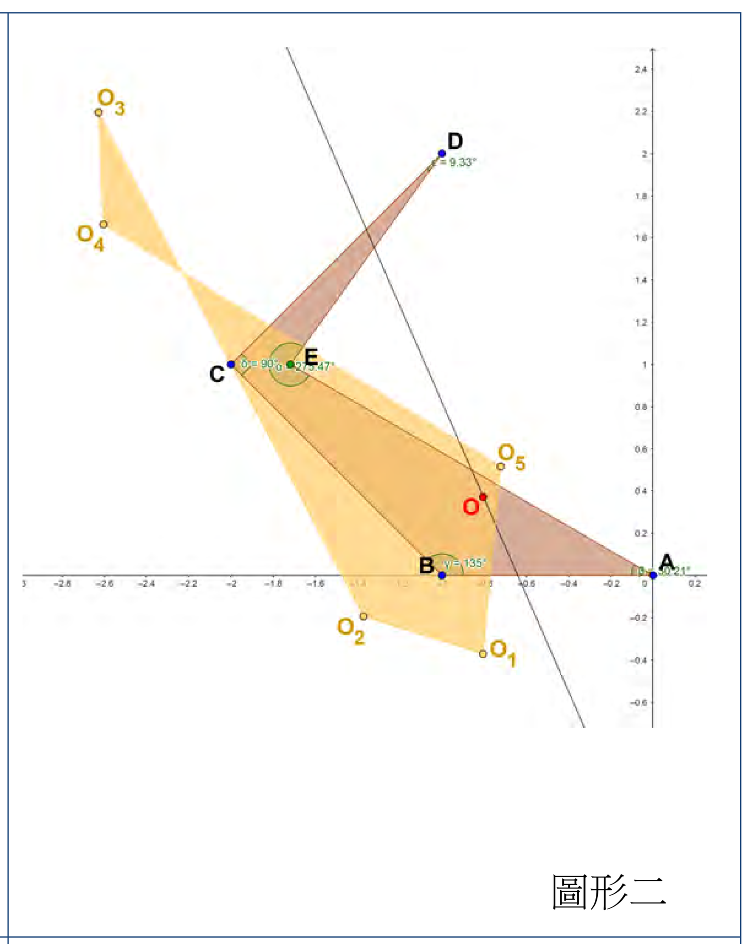
其中 $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ 為五邊形的五個內角。

接下來，我們利用數值解的方法進行稱構造五邊形等面積線是直線的五邊

在下表中，我們展示一些對稱構造五邊形等面積線是直線的五邊形。



圖形一



圖形二

此圖形中 $\sin180°+\sin270°+\sin149.58°+$ $\sin346.74°+\sin133.7°=0$	此圖形中 $\sin180°+\sin270°+\sin18.66°+$ $\sin550.94°+\sin60.42°=0$

在上述兩圖中以及我們所嘗試的其他圖形中，我們雖然知道這類五邊形需要滿足的式子，但因為五邊形的自由度=3，因此可以產生許多此種類的五邊形。

結論:

利用數值解的方式能夠繪製許多此類圖形，但是由於自由度過高而五法歸納出圖形幾何性質的結論。

(二)*n* 邊形探討

先前的討論可以知道，對於 *n* 邊形來說其二次項係數為

$$\sum_{1}^{n-1}cos2\theta_j sin2\theta_{j+1}+cos2\theta_n sin2\theta_1-sin2\theta_j cos2\theta_{j+1}-sin2\theta_n cos2\theta_1=$$
$$\sum_{1}^{n-1}\sin(2\theta_{j+1}-2\theta_j)+\sin(2\theta_1-2\theta_n)=-\sum_{1}^{n}sin2\varphi_j$$

其中 φ_j 是 *n* 邊形第 *j* 個角的內角角度。

滿足對稱構造 *n* 邊形等面積線是直線的情況是 $-\sum_{1}^{n}sin2\varphi_j=0$

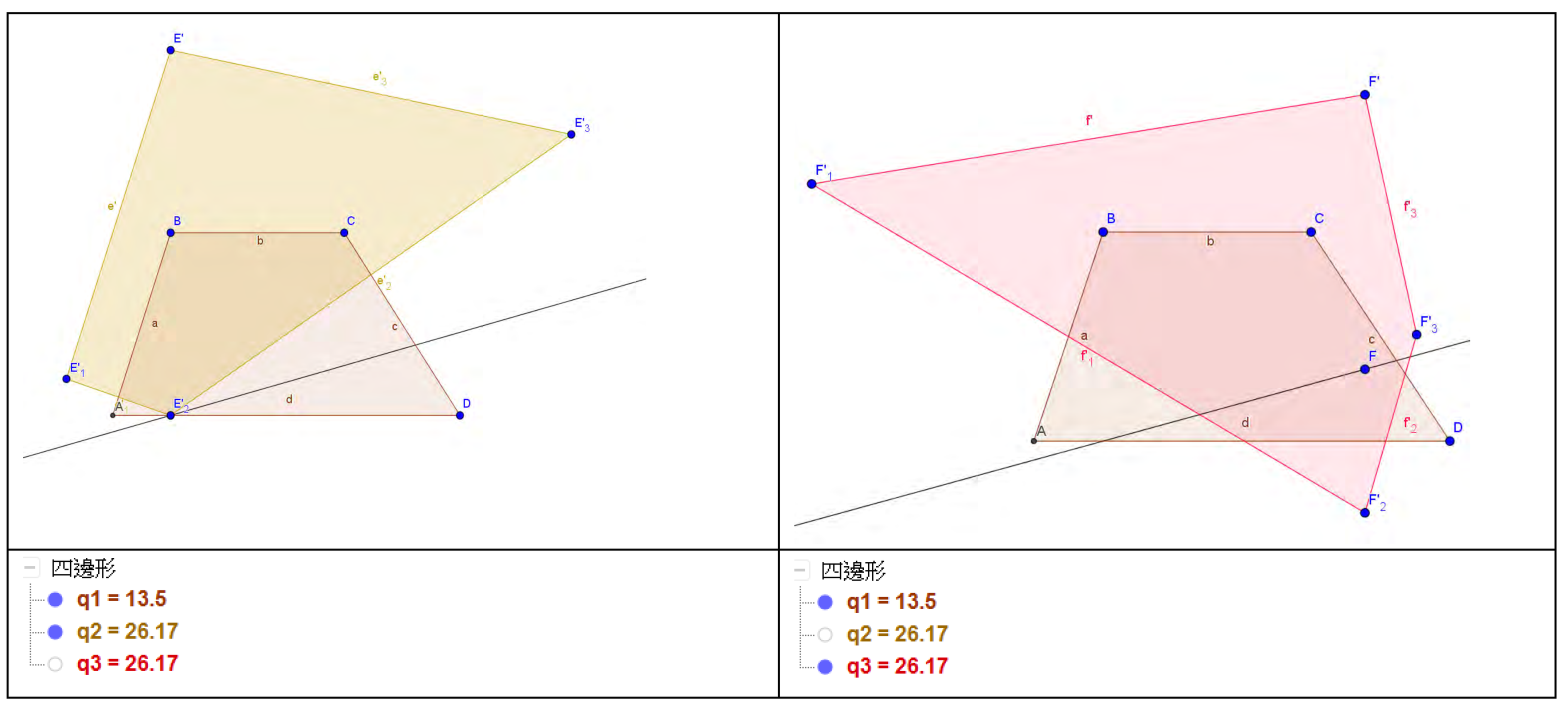
但由於 *n* 邊形的自由度是 *n-2*，因此能夠繪製的此類圖形有非常多種。

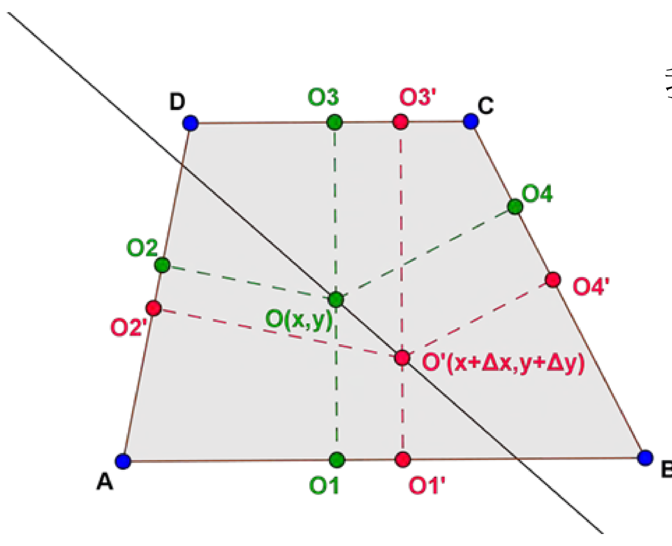
結論:對於 *n* 邊形我們得到了產生對稱構造圖形等面積線是直線的條件，但對於圖形的幾何性質我們將納入未來展望。

七、因為座標化結果無法與圖形本身性質做連結，因此接下來將探討特殊四邊形之對稱構造四邊形的等面積線與圖形本身性質的關聯。主要討論兩種四邊形：梯形、圓內接四邊形。

(一)梯形:

從解析結果已知對邊平行的四邊形(梯形)的對稱構造四邊形等面積線是直線。





我們假設 $\angle CAB=\varphi,\angle DAB=\theta$

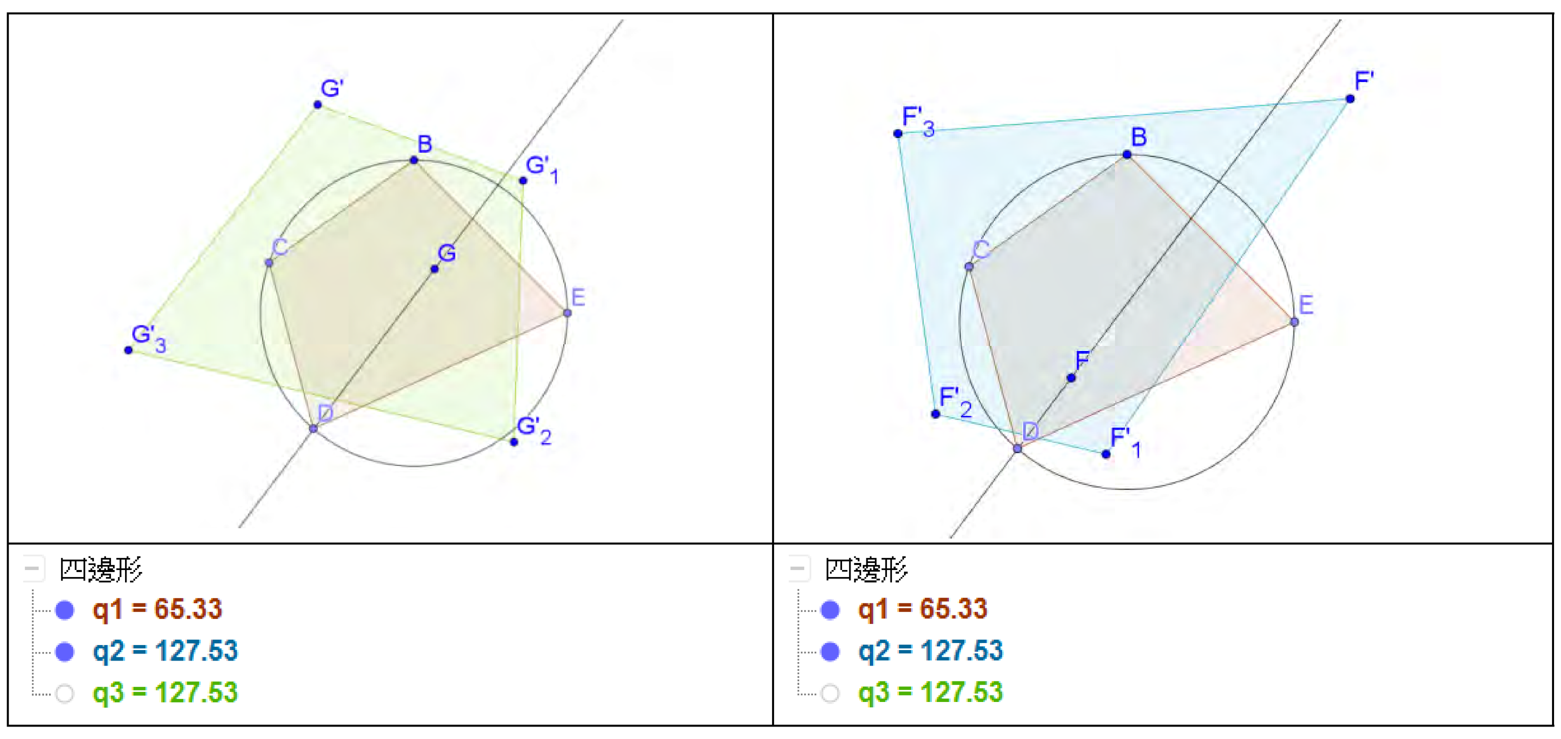
經過推導得等面積直線斜率

$$=m=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi-\sin\theta\cos\theta}$$

結論:斜率僅為梯形兩底角的函數。

(二)圓內接四邊形：

由以上討論可以知道圓內接四邊形的對稱構造四邊形的等面積線也是直線

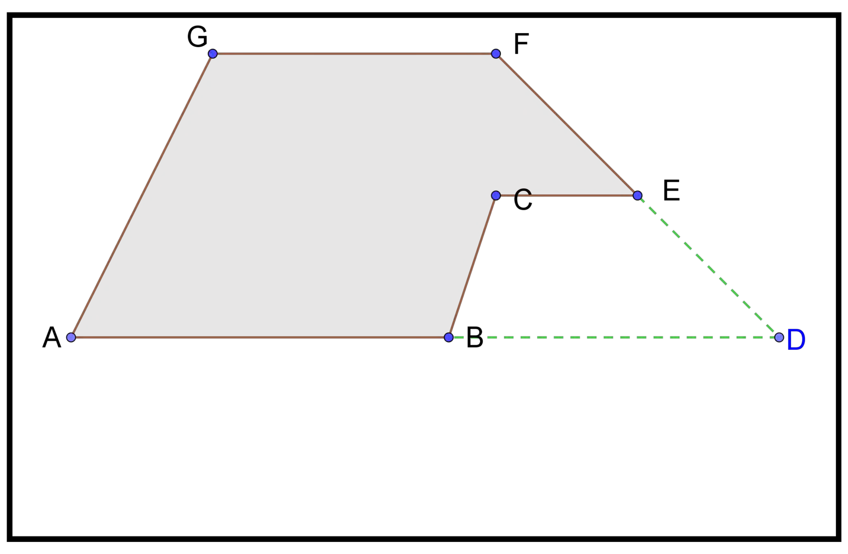


結論：

圓內接四邊形對稱構造四邊形等面積的直線斜率是底角跟邊長的函數。

(三)特殊圖形探討

在我們構造出的圖形當中有一類的圖形斜率是可以直接計算的，這類的圖形是以兩底角互相一樣的兩個梯形互扣形成的。而此類的圖形斜率會跟原本的梯形斜率一樣。



六邊形 ABCEFG 的對稱構造圖形等面積線斜率與梯形 ADFG 的對稱構造四邊形等面積斜率一樣

七、結論

一、三角形的對稱構造三角形等面積線是圓形，並以外心為圓心。

二、由三角形出發，推廣至四邊形的對稱構造四邊形等面積線探討，發現並證明對稱構造四邊形等面積線只有可能是圓形跟直線或平面。

三、對稱構造四邊形等面積線是直線的情形只出現在圓四邊形是梯形及圓內接四邊形的情形。

四、發現並證明對稱構造 n 邊形的等面積線方程式是圓方程式。

五、找出並證明了一種多邊形構造方式，使此多邊形的對稱構造多邊形等面積線是直線。

六、對 n 邊形的對稱構造圖形進行探討，雖然我們得到對稱構造圖形等面積線是直線的條件，但並沒有如四邊形那樣規律的圖形產生，並僅能以數值解的方式進行計算。

七、找出梯形的對稱構造四邊形的等面積線與原本梯形的關係式，發現僅跟梯形的兩底角角度有關。並找出圓內接四邊形的對稱構造四邊形的等面積線與原本圓內接四邊形的關係，發現跟圓內接四邊形的兩底角角度與邊長皆有相關。

八、參考資料及其他

一、台南市第 55 屆國中科展-幾何「點」「心」「面」

二、因式分解網站 https://zh.numberempire.com/factoringcalculator.php