

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 生活與應用科學(一)科

團隊合作獎

032807

動畫世界中的物理

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者： 國二 林有珩 國二 胡澤安	指導老師： 魏語彤
---------------------------------	------------------

關鍵詞：2D 逐格動畫、物理引擎工具、Excel

摘要

一般在繪製 2D 逐格動畫時，在真實與誇張之間要拿捏一個好的平衡點相當不容易，尤其是當您不熟悉物理力學原理時，在運動軌跡的決定上就會毫無依據。此研究藉由對於物理力學原理的探索，思考哪些理論是動畫世界中仍然必須依循的，整理與推導出幾項實用的公式，並將公式寫入 Excel 表格，利用圖表的方式顯示出符合物理原理的運動軌跡，提供做為作動畫時參考的準則。我們完成的 Excel 表單，可以稱為是初級版的 2D 的動畫物理引擎工具。實驗利用兩組動畫的比較，一組是在自習物理力學原理前繪製的，當時完全憑經驗與想像；另一組則是靠我們製作的工具輔助才繪製完成的。可以看出後者的動畫作品不但不失原本的生動感，且動作更流暢並令人信服。

壹、前言與研究動機

隨著電腦的普及與軟硬體進步，製作動畫不再是專業動畫公司獨有的優勢，就算是一般使用者獨自想製作動畫也不是遙不可及的任務。現今的生活中處處可以接觸到電腦動畫，如電影、廣告、遊戲等等，對於年輕人而言，例如 Line 貼圖動畫更是與生活習慣緊密結合。

動畫的特色與優勢**就是可以發揮無限想像力，無須受到物理學的束縛**，可以以**誇大的手法**達到吸引人注意的目的。然而動畫中的動作，**真的是可以完全不遵循物理學的原理嗎？**答案絕對是否定的。回憶一下所有看過的動畫影片，雖然有時動作會十分誇大以達到預計的效果或是“笑”果，但是都仍然遵循著基本的物理學原理，例如地心引力與牛頓力學等等。

深愛動畫創作的我們，常常利用身邊的軟體資源，例如 Flash，繪製 2D 逐格動畫 (frame-by-frame animation)。但是由於物理的基礎力學單元是國三(甚至是高中)才會學到的知識，作畫時，往往靠著想像以及直覺，不斷嘗試、重畫並修改，

審視自己的作品時，總覺得整體動作 (motion) 不論怎麼改善都仍是不自然，但是並不瞭解原因，時常因而感到沮喪。諮詢父母，他們說，雖然我繪製的動畫角色頗為生動，但動作上大多只利用位移的元素，缺乏例如慣性或加速度等的概念，所以整體上動作可能會顯得不夠細膩。建議我多去了解物理力學的原理，將對於動畫繪製會很有幫助。

藉著科展的激勵，我們希望藉由網路資源，靠自己預先學習物理力學的原理，整理出與動畫製作相關且實用的公式，一方面，提升自己動畫作品的專業度，另一方面，希望整理出來的結論與成果也能夠讓其他動畫愛好者得以方便使用。

貳、研究目的

此專題將探討動畫世界中必定要遵循的物理現象，針對製作 2D 逐格動畫的需求，思索那些定理與公式是在製作動畫時經常需要用到的，希望進而能夠整理出一些準則。最後利用 Excel 電腦軟體將準則轉化為實用的小工具，目的是讓任何有興趣從事 2D 逐格動畫的愛好者，可省去複雜物理公式理解與推導的過程，只要輕鬆利用我們提供的工具，就可以求得符合物理原理的物體運動軌跡，提供動作繪製時參考。

我們的目標是回答下列問題：

- 物理的力學公式可以相當複雜，但是大家都知道動畫世界中不需要“精確地”符合所有物理現象，只要抓住基本的物理法則即可。我們是否可以整理出一些準則(簡化過的公式或合理的假設)做為動作繪製之參考?
- 這些整理出來的物理準則(公式)是否也可以同時兼具某些誇張的元素?
- 如何讓其他人也能方便使用我們整理出來的準則(公式)?
- 我們整理的結論(與製作的工具)是否真的對 2D 逐格動畫的繪製有幫助?

參、研究方法

我們將使用 Adobe Flash Professional CS6 來製作 2D 逐格動畫，並利用 Office Excel 當作數據分析之工具，並編輯 Excel 圖表來呈現物理準則公式，做成輔助小工具。

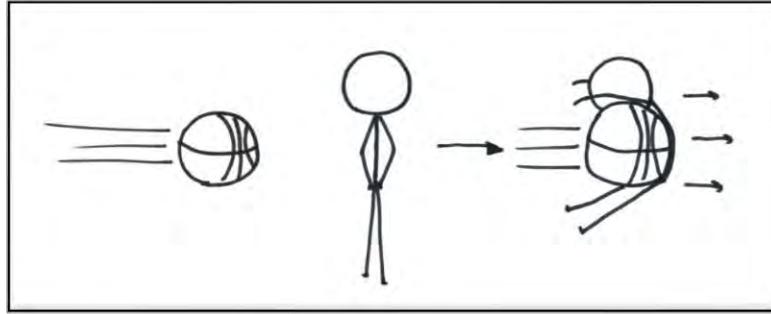
首先要決定哪幾類運動 (motion) 是動畫中常出現的，將針對不同的運動類別分別探討其對應的動作。在研讀物理力學並思考過後，我們決定探討以下三種運動，包括碰撞運動 (collision motion)、拋射體運動 (projectile motion) 以及等速運動 (constant velocity motion)，相信這三類運動涵蓋了許多動畫情節的需求。由於學習的資源大多數是英文，因此保留英文的原名詞。

接著，根據每一種運動類別，我們列舉一或兩個實際的動作範例，針對這些動作分別尋求適當的公式，經過合理的假設與數學推導，最後編輯 Excel 的製圖工具呈現出公式的結果，並套用在動作繪製上。在實驗與討論中，我們將比較兩套動畫：第一套動畫是在尚未學習物理力學公式之前繪製的，第二套動畫則是運用了我們的成果工具之輔助所繪製的。藉由動畫比較來驗證我們所提出的物理準則公式之實用性。

以下彙整我們在每一類物理力學運動所學習到的知識，說明我們的假設與數學推導的過程，以及製作的 Excel 工具。

一、第一種運動：碰撞運動

我們優先想討論的是關於任意兩個物體碰撞的動畫情節，例如動畫角色與環境中的移動物體相撞，或者是動畫角色被某個高速運動的物體擊中等。這類的動作需要利用物理學中所稱的碰撞運動 (collision motion) 原理[1, 2]來解釋。



圖一：碰撞運動的動畫範例示意圖。一個靜止的角色被高速飛過來的物體擊中的動畫，探討什麼是合理的碰撞物理反應。

碰撞運動分為彈性碰撞 (elastic collision) 與非彈性碰撞 (inelastic collision) 兩種 [3,4]，而碰撞時兩物體質心連線與碰撞點是否共線，又可以區分為正向彈性碰撞與斜向彈向碰撞[5]。其中非彈性碰撞是指兩物體在碰撞後結合再一起，例如兩個磁鐵碰撞後相吸，此種情況在動畫中出現機率較少，所以在此我們只針對正向彈性碰撞做分析。

(一)、碰撞的動畫範例

測試的動畫範例為：一個靜止的角色被高速飛過來的物體擊中之效果，我們以簡單的人物造型擔任被擊中的角色，且以高速移動的籃球為例，想探討人物被籃球擊中後，什麼是合理的物理反應。範例動作之示意草圖請見圖一，以下列出我們對於這個動作所做的**假設**。第一，人原本靜止不動，並且不知有球朝向他飛過來；第二，空氣阻力不列入考量；第三，雖然人與球都是軟性(非剛性)的物體，在碰撞時部分能量會被物體吸收，但能量轉換難以估計，所以暫時忽略；第四，因為是漫畫(動畫)，我們可以假設球速超乎現實的快，以達到誇張的效果；第五，碰撞前高速運動中的球因為水平方向的速度明顯大於垂直的加速度(地心引力)，因此，球飛過來時暫時不考慮地心引力的影響，只計算水平位移情形；最後第六，碰撞之後才開始將地心引力以及落地後與地面產生的摩擦力列入考量，這樣球最後才有辦法停下來。

(二)、碰撞理論整理與公式推導

在兩物體正向彈性碰撞的過程中，會同時遵守(線)動量守恆 (conservation of linear momentum) 與動能守恆 (conservation of kinetic energy) [5,6]。動量 (momentum) 是指運動物體內含的力量[7,8]，以 P 表示，值與物體的質量 m 與速度 v 成正比，定義是

$$P = mv,$$

單位為 $kg \cdot m/s$ 。而動能 (kinetic energy) 是指物體運動時所擁有的能量[9,10]，以 K 表示，它的值同樣與與物體的質量 m 與速度 v 成正相關，定義是

$$K = \frac{1}{2}mv^2,$$

單位為焦耳(J)，以基本單位表示是 $kg \cdot m^2/s^2$ 。由於要遵守上述兩個守恆原則，我們以下標 A 代表第一個物體，下標 B 代表另一個物體，再以字母 s 代表碰撞前，字母 f 代表碰撞後，列出以下兩個等式。

$$P_{As} + P_{Bs} = P_{Af} + P_{Bf} \quad (1)$$

$$K_{As} + K_{Bs} = K_{Af} + K_{Bf} \quad (2)$$

假設第一個物體的質量為 m_A ，碰撞前速度為 v_{As} ，碰撞後速度為 v_{Af} ，第二個物體的質量為 m_B ，碰撞前與後之速度分別為 v_{Bs} 與 v_{Bf} 。則根據動量守恆公式(1)，可得到以下式子:

$$m_A v_{As} + m_B v_{Bs} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} \quad (3)$$

再根據動能守恆公式(2)，得到以下式子:

$$\frac{1}{2}m_A v_{As}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bs}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bf}^2 \quad (4)$$

由以上(3)與(4)兩個方程式，若把 m_A 、 m_B 、 v_{As} 、 v_{Bs} 當作已知，可求解出碰撞後的速度 v_{Af} 與 v_{Bf} 。先將式子(3)與(4)寫成聯立方程式，未知項移到等號左邊，已知項移到等號右邊，其中式子(4)等號兩邊同乘以 2，如下：

$$\begin{cases} m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = m_A v_{As} + m_B v_{Bs} \\ m_A v_{Af}^2 + m_B v_{Bf}^2 = m_A v_{As}^2 + m_B v_{Bs}^2 \end{cases}$$

為了簡化運算式，因此暫時設 $c = m_A v_{As} + m_B v_{Bs}$ 以及 $d = m_A v_{As}^2 + m_B v_{Bs}^2$ ，

$$\begin{cases} m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = c & (5) \\ m_A v_{Af}^2 + m_B v_{Bf}^2 = d & (6) \end{cases}$$

由式子(5)可得到

$$v_{Af} = \frac{c - m_B v_{Bf}}{m_A} \quad (7)$$

$$v_{Af}^2 = \frac{c^2 - 2cm_B v_{Bf} + m_B^2 v_{Bf}^2}{m_A^2}$$

代入第(6)式

$$m_A \cdot \frac{c^2 - 2cm_B v_{Bf} + m_B^2 v_{Bf}^2}{m_A^2} + m_B v_{Bf}^2 = d$$

$$c^2 - 2cm_B v_{Bf} + m_B^2 v_{Bf}^2 + m_A m_B v_{Bf}^2 - m_A d = 0$$

$$(m_B^2 + m_A m_B) v_{Bf}^2 - 2cm_B v_{Bf} + (c^2 - m_A d) = 0$$

$$v_{Bf} = \frac{2cm_B \pm \sqrt{4c^2 m_B^2 - 4(m_B^2 + m_A m_B)(c^2 - m_A d)}}{2m_B^2 + 2m_A m_B}$$

$$v_{Bf} = \frac{2cm_B \pm \sqrt{4c^2 m_B^2 - 4(m_B^2 + m_A m_B)(c^2 - m_A d)}}{2m_B^2 + 2m_A m_B}$$

$$v_{Bf} = \frac{cm_B \pm \sqrt{m_A m_B (m_A d + m_B d - c^2)}}{m_B^2 + m_A m_B}$$

此時將 $c = m_A v_{As} + m_B v_{Bs}$ 以及 $d = m_A v_{As}^2 + m_B v_{Bs}^2$ 代回上式，整理後可得

$$v_{Bf} = \frac{m_B (m_A v_{As} + m_B v_{Bs}) \pm \sqrt{m_A^2 m_B^2 (v_{Bs} - v_{As})^2}}{m_B^2 + m_A m_B}$$

$$v_{Bf} = \frac{m_B m_A v_{As} + m_B^2 v_{Bs} \pm (m_A m_B v_{Bs} - m_A m_B v_{As})}{m_B^2 + m_A m_B}$$

$$v_{Bf} = \frac{m_A v_{As} + m_B v_{Bs} \pm (m_A v_{Bs} - m_A v_{As})}{m_B + m_A}$$

$$v_{Bf} = v_{Bs} \text{ 或 } \left(\frac{2m_A}{m_A+m_B}\right)v_{As} + \left(\frac{m_B-m_A}{m_A+m_B}\right)v_{Bs}$$

但 v_{Bf} 不可能等於 v_{Bs} ，因為物體碰撞後不可能維持原來的速度繼續往前移動，兩個物體不可能互相穿透。所以只將第二個解代入式子(7)求出 v_{Af} 的解。最後， v_{Af} 與 v_{Bf} 的解為：

$$v_{Af} = \left(\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B}\right)v_{As} + \left(\frac{2m_B}{m_A+m_B}\right)v_{Bs}$$

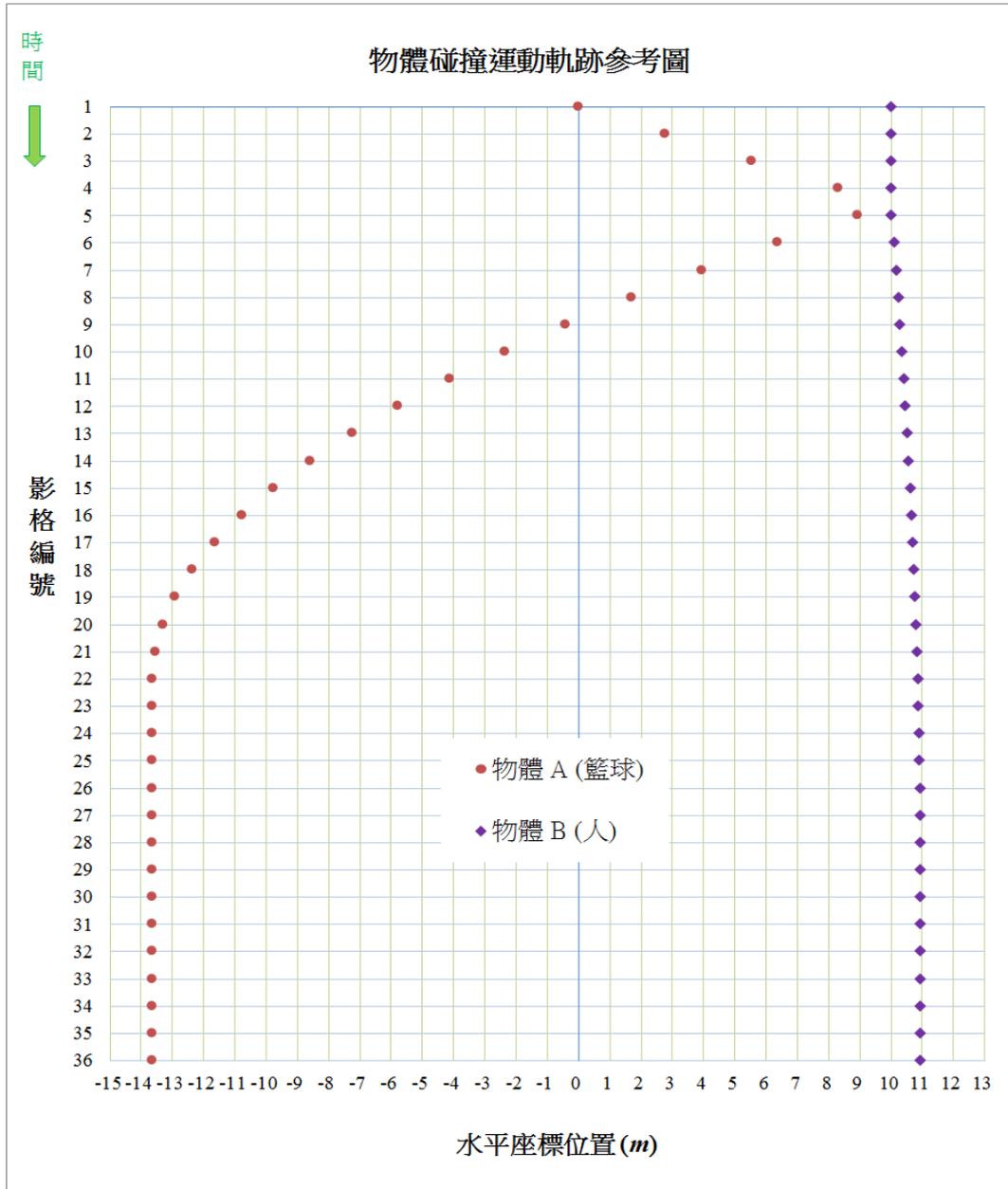
$$v_{Bf} = \left(\frac{2m_A}{m_A+m_B}\right)v_{As} + \left(\frac{m_B-m_A}{m_A+m_B}\right)v_{Bs} \quad (8)$$

(三)、製作 Excel 工具與使用說明

有了上述之公式，只要我們知道兩物體之質量 (mass) 與碰撞前之運動速度 (velocity)，就可以求得碰撞之後的運動速度(含方向)。因為要提供給製作逐格動畫使用，所以需要視覺化這個公式才能夠當作繪圖的輔助工具，因此，我們將式子(8)寫入 Excel 表格軟體，將速度加上時間軸，算出在每個單位時間，也就是每個影格 (frame)，物體 A 與 B 的位置。

我們的動畫是以每秒 18 個影格的方式繪製，所以每個時間單位為 1/18 (s) (註：秒)。我們編輯並設計出一個清楚的圖表，以點圖的方式分別顯示出兩個物體在各個影格應該出現的位置，如圖二所示。橫軸代表水平方向之距離，座標以公尺為單位，座標原點設在物體 A 的初始位置，縱軸代表影格編號，從第一個至第三十六個影格(由上至下)，因此，此圖顯示出兩秒鐘內物體碰撞前後的位置變化。

圖二所呈現的數據是這節中所選擇的測試動畫範例，設籃球為物體 A，人物為物體 B，且人剛開始為靜止狀態，故 $v_{Bs} = 0$ (m/s)。假設 A 與 B 的初始距離為 10 公尺，籃球重量大約為 700 克，而人的重量為 50 公斤，則公式中 $m_A = 0.7$ (kg)，



圖二：在 Excel 表單內寫入公式，設計出的圖表清楚顯示出兩個物體在每個影格中應該出現的位置，以不同顏色的點表示。

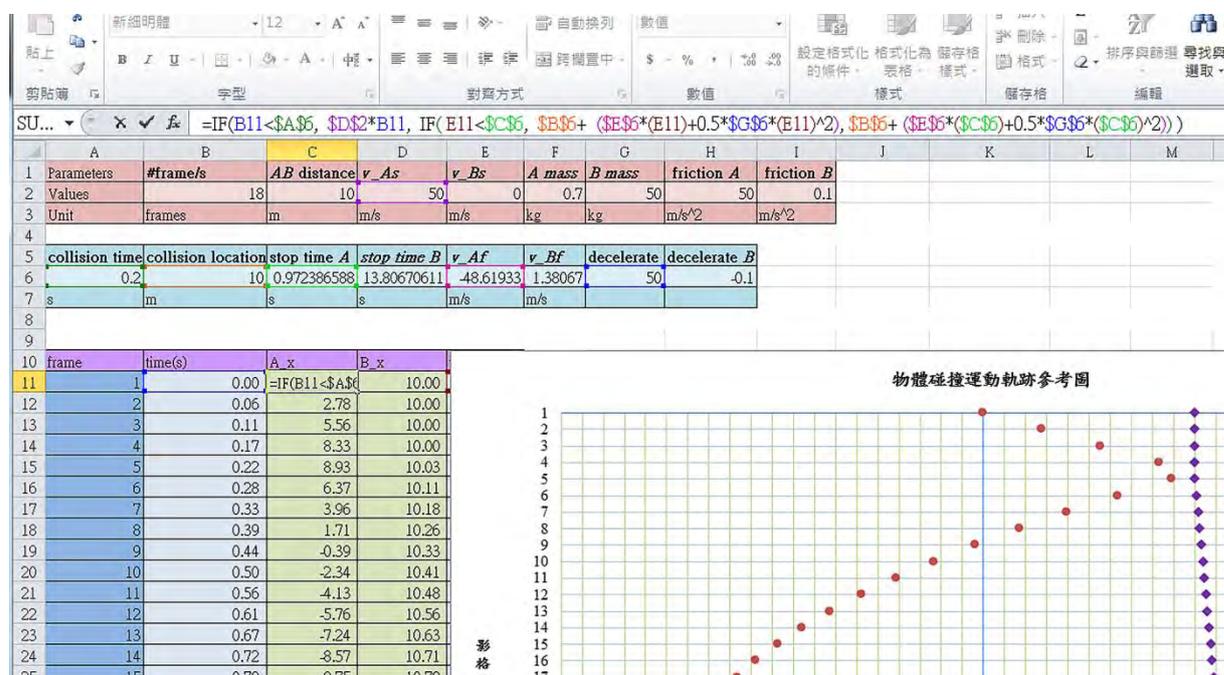
$m_B = 50 (kg)$ 。因為想製造出較誇大的動畫效果，所以假設籃球的飛行速度 v_{As} 是 $50 (m/s)$ 。利用公式(8)可求出

$$v_{Af} = \left(\frac{0.7-50}{50.7} \right) \times 50 \approx -48.62 (m/s)$$

$$v_{Bf} = \left(\frac{1.4}{50.7} \right) \times 50 \approx 1.38 (m/s)$$

圖三為製作 Excel 表單之工作視窗截圖，上方函數 f_x 欄位為計算物體 A 之水平位置的公式，須用到 IF 邏輯判斷式，才能將碰撞前與碰撞後分別用不同公式求出軌跡，繪製在同一個圖表中。前三列(粉紅色網底的欄位)記載使用到的參數，如每秒的影格數、AB 物體之距離與速度、摩擦力等。在此，必須要補充說明，因為造成摩擦力的因素複雜難以分析，所以在程式中，我們只能設定一個相反方向的加速度值，目的只是要讓物體在碰撞之後能漸漸減速並停止運動。

利用速度與距離的值，我們也在 Excel 表單中算出兩物體碰撞的時間點與碰撞的位置，顯示於第 5 至 7 列(藍綠色網底的欄位)。在這個例子中，碰撞發生在 0.2 秒時，因為球速很快(預設每秒 50 公尺)，而 AB 物體之初始距離僅為 10 公尺，所以由此結果可以知道碰撞發生介於第四與第五影格之間。我們還算出物體 A 與 B 在碰撞之後，過幾秒鐘後停止運動。球在碰撞後大約 1 秒內停止滾動，也就是說在這個例子中，很可能是戶外的砂石地類型，甚至有長草，阻力頗大。



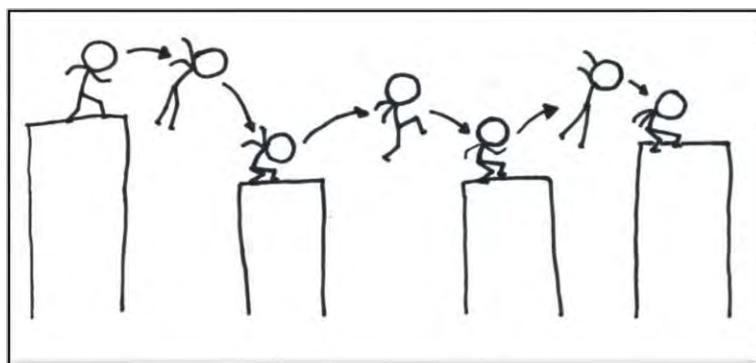
圖三: Excel 表單的工作視窗截圖，上方函數 f_x 欄位為計算物體 A 之水平位置的公式。前幾列記載使用到的參數，左下方表格則是用公式求出來的值。

當然 Excel 表單中前三列的參數都可以視不同需要做調整，使用者可以針對動畫中的碰撞情形，例如換成是兩輛車在行駛中的對撞，或機車從後方追撞行進中的腳踏車等，只要依據不同的碰撞範例輸入適當的重量與初始速度值等，此設計好的工具就可以自動產生碰撞運動軌跡位置圖表，當作是繪畫時的參考依據。

二、第二種運動：拋射體運動

任何物體被拋出或射出後，包括物體靠自己本身的力氣跳出去後，都是以弧形的路徑做位移，這類的動態在動畫中常常出現，也就是我們接著想探討的課題，在物理學中稱為拋體運動 (projectile motion) [11,12]。

拋體運動分為理想拋體與非理想拋體兩種[13]，我們將假設理想拋體的情況，也就是說物體運行中只受均勻地心引力的重力作用，即空氣阻力可忽略。伽立略認為在空氣阻力可以忽略的情況下，拋體運動由水平方向的等速運動與垂直方向的等加速度運動所組成，且兩者的運動彼此互不影響，可以分開來處理，稱之為運動的獨立性[14]。



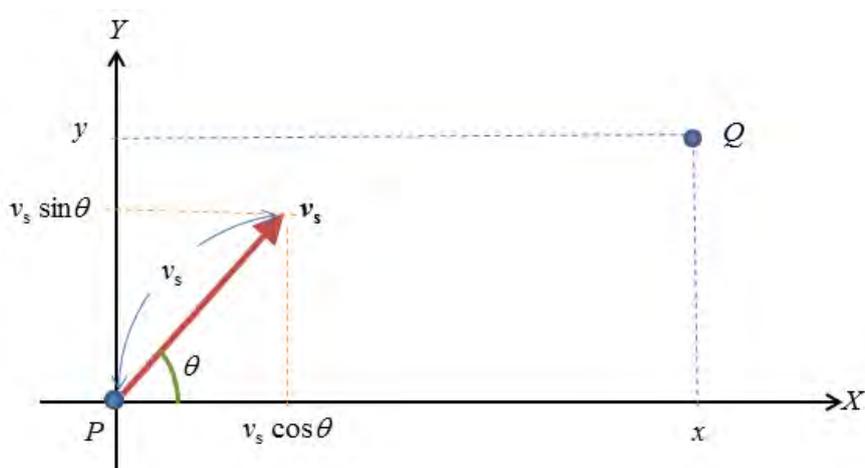
圖四：拋體運動的動畫範例示意圖。一個角色跳躍至不同高度柱子的動畫，探討應該有的拋體運動軌跡。

(一)、拋體動畫範例

這小節的測試動畫範例為：一個角色向前跳躍至不同高度地面的動畫，概念草圖如圖四所示，圖中出現數個不同高度的柱子，動畫的角色必須照順序由左跳到右，不能掉下去。我們做以下兩點**假設**，第一，由於每一個柱子的地面面積很小，計算時以地面中心點做為目標落地的位置；以及第二，因為是漫畫(動畫)，所以可以假設此人有卓越的腳力，他的跳躍能力可以不受真實人類極限的限制。

(二)、拋體運動公式推導

我們將所學習到的物理拋體運動公式整理與推導如下。目標是尋求從起始點 P 到終點 Q 的拋物體軌跡公式，假設地心引力 (gravity) 為 $-10 (m/s^2)$ 方便計算，負號表示向下的重力加速度，以符號 g 表示。設 P 點為座標原點，而 Q 點的相對座標為 (x, y) 。在這個問題中，我們需要探討並求出合理的物體之起始速度 (velocity) \mathbf{v}_s ，此為一個具方向性之向量，所以以粗體字表示，如圖五所示。其中的角度 θ 為起始速度向量 \mathbf{v}_s 與水平線(X 軸)的夾角，而 v_s 是指向量之大小 (或長度)，也就是 $v_s = \|\mathbf{v}_s\|$ 。當 P 點與 Q 點固定，則 θ 與 v_s 之值必須互相搭配得宜，不然跳躍的結果無法準確落於 Q 點。



圖五: 計算拋體運動軌跡的圖示，物體從 P 點(原點)經由初始速度 (velocity) \mathbf{v}_s 彈出，預計沿著拋物線軌跡抵達 Q 點。

因為水平方向的移動速度與垂直的移動速度互不干擾，所以我們分開思考。水平方向的速度以 v_h 表示，此為等速運動，可得知 $v_h = v_s \cos \theta$ (m/s)，垂直方向為等加速度運動，初始速度以 v_v 表示，且 $v_v = v_s \sin \theta$ (m/s)。物體由 P 點出發，在時間 t 秒後之 X 與 Y 軸之座標位置分別以函數 $h(t)$ 與 $k(t)$ 表示。

$$h(t) = v_h \cdot t = v_s t \cos \theta$$

$$k(t) = v_v \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 = v_s t \sin \theta - 5t^2$$

在某個時間 t 時，我們要求 $h(t) = x$ 且 $k(t) = y$ ，換句話說，假設物體在 t 秒時抵達 Q 點的位置，因此

$$h(t) = v_s t \cos \theta = x \Rightarrow t = \frac{x}{v_s \cos \theta} \quad (9)$$

將此 t 值代入 $k(t)$ ，得到

$$k\left(\frac{x}{v_s \cos \theta}\right) = \frac{v_s x \sin \theta}{v_s \cos \theta} - 5\left(\frac{x^2}{v_s^2 \cos^2 \theta}\right) = y$$

求出之拋物體軌跡公式為：

$$x \cdot \tan \theta - \frac{5x^2}{v_s^2 \cos^2 \theta} = y \quad (10)$$

(三)、公式數據分析

當地點 P 與 Q 固定，也就是當 Q 點座標 (x, y) 是已知的情況，以數學的角度而言，符合此拋物體軌跡公式(10)之 θ 與 v_s 之值有無限多解，但是以運動合理性的觀點來看， θ 與 v_s 之值必須局限在某個範圍之內，才有可能順利執行跳躍的動作。從公式本身無法看出或判斷哪個範圍的 θ 與 v_s 之值才是合理的，必須要以 Excel 圖表工具畫出拋物線，才能藉由視覺化的方式做判斷。我們將列舉幾個 θ 與 v_s 值的範例再進一步說明。

以 $(x, y) = (3, 1.5)$ 為範例做以下說明，由基本的三角函數可以得知 θ 值必須至少大於 $\tan^{-1}\left(\frac{1.5}{3}\right) \doteq 26.57$ 度，不然跳得不夠高等同去撞柱子。但是並不

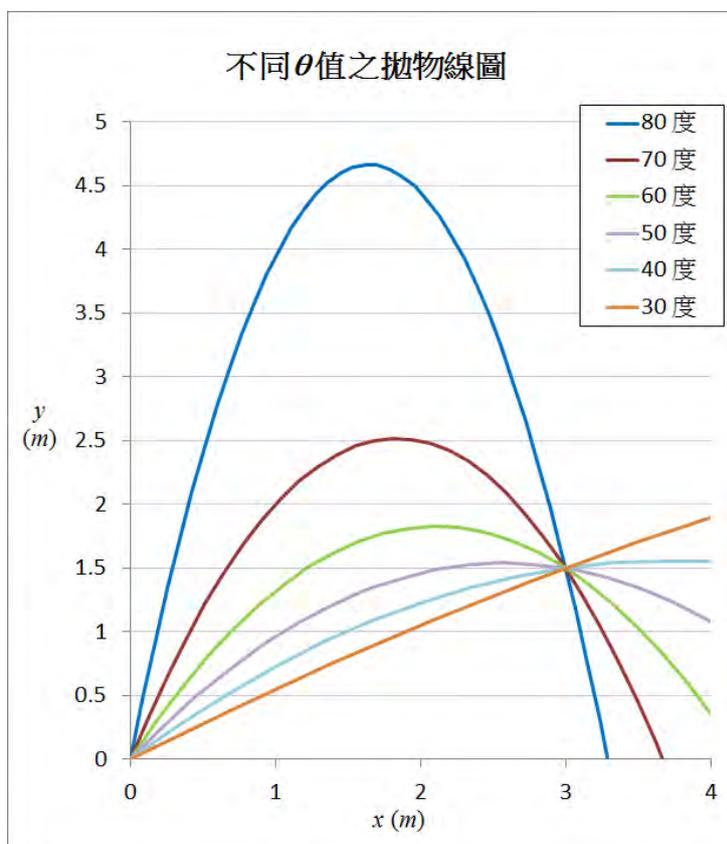
是所有大於的 26.57 度的 θ 值都合適，我們將式子(10)整理如下：

$$v_s = \sqrt{\frac{5x^2}{(x \cdot \tan\theta - y)\cos^2\theta}} \quad (11)$$

代入一些不同的 θ 值，求出相對應的 v_s 值，同時再代入式子(9)，求出時間 t ，呈現在表一中。這說明了什麼起跳角度 θ 需要搭配什麼跳躍的力道(速度) v_s ，才可以在時間 t 時順利落在規定的座標(3, 1.5)上。

表一：假設 $(x, y) = (3, 1.5)$ ，列舉 θ 與 v_s 的解(以四捨五入法求至小數第二位)。

θ (度)	v_s (m/s)	t (s)
30	16.08	0.22
40	8.68	0.45
50	7.24	0.64
60	6.98	0.86
70	7.55	1.16
80	9.81	1.76



圖六：不同 θ 值代入所畫出來之拋體運動軌跡比較圖。

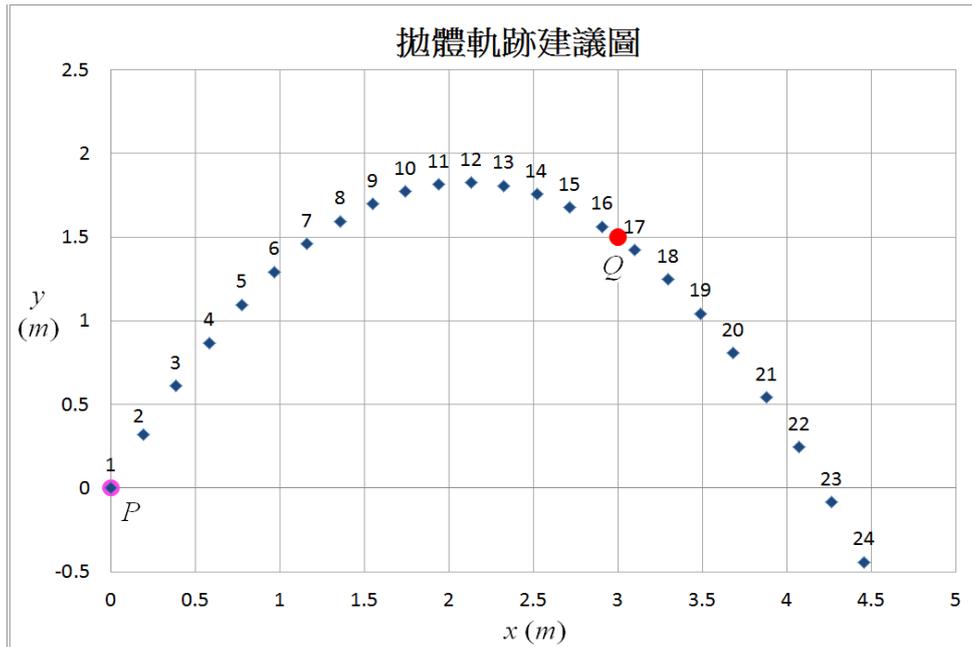
接著我們分別畫出各個對應的拋物體軌跡如圖六所示，雖然每一條拋物線都會通過(3, 1.5)這個點，但是以 30 度或 40 度為例，這樣的弧度比較像物體被是射出去而不是自己跳出去。因為在這個動畫範例中沒有助跑，所以若要跳出像是 30 度或 40 度這樣的拋物線會顯得十分牽強。

再回頭觀察表一中的值，從速度欄可以看出若是跳 60 度角，可以最省力，因為在此表中之起始速度值最小，當跳躍的角度越增大或減小，都必須要花更大力氣起跳。因此，我們若是要提供一條建議的軌跡，應該要選擇相對而言最省力且合理的那個起跳角度。若要以數學的方式求解，需要運用到微分方程，且是牽扯到複雜三角函數的微分，這我們目前尚沒有能力做到的，所以我們採用程式的方式做判定來代替，並提供一個建議值，在數學上這個建議值雖不是最精確的，但動畫本來就容許誤差，所以此值一樣可以達到功能，並不影響到實用性。

(四)、製作 Excel 工具

我們一樣利用 Excel 內建數學函數庫與簡單邏輯運算的功能，將推倒出來的公式寫入表格，再以圖表的方式呈現建議的軌跡，如圖七所示。圖中已經設定好自動顯示起點 P (粉紅色圓點)與終點 Q (紅色圓點)的位置，而每一個菱形藍點標示此拋物體在每一個影格應該出現的位置，此動畫範例設定每秒 18 個影格。以 $P = (0, 0)$ 以及 $Q = (3, 1.5)$ 為例，可以自動得出一個相對是最省力的跳躍角度，也就是 $\theta = 60$ 度，並算出抵達 Q 點的時間為 $t = 0.86$ 秒。

編輯此程式的過程中發現比較困難的地方是要運用到 MIN 函數，用法如下：
 $f_x = \{=MIN(IF(ISNUMBER(欄位範圍), 欄位範圍))\}$ ，這串指令會輸出在指定欄位範圍內最小的數值，也就是最小的速度值 v_s ，若部分欄位的運算結果不是數值，它會自動予以排除。還需要搭配 CELL 函數使用，如： $f_x = CELL("address", INDEX(欄位範圍, MATCH(某欄位, 欄位範圍, 0)))$ ，當“某欄位”指定為剛剛找到的最小值，則這串指令會輸出對應這最小值之角度 θ 。我們再以此角度畫出建議的軌跡。



圖七: 輸入起點 $P(0, 0)$ 與終點 $Q(3, 1.5)$ 所輸出之建議拋體軌跡，供繪圖參考。每一個菱形藍點標示此拋物體在每一個影格應該出現的位置。

三、第三種運動：等速運動(含相機投影)

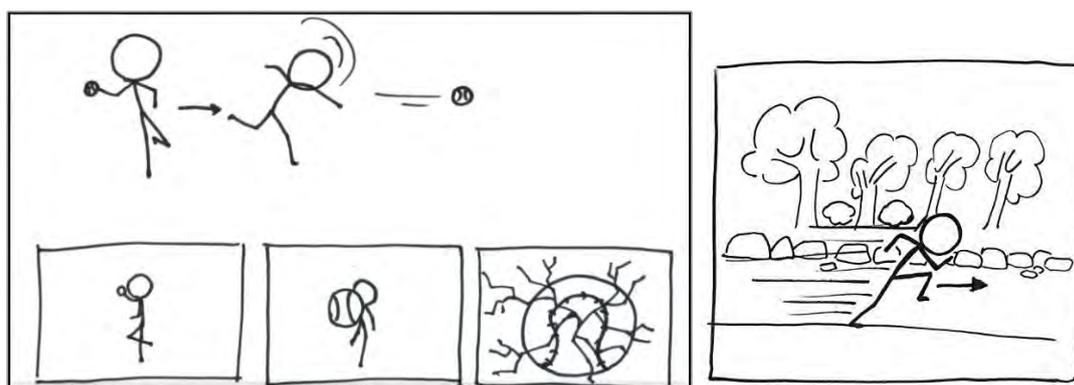
最後我們想討論等速運動 (constant velocity motion)，這種運動相對是最單純且應該是動畫中最常出現的一種情況，例如走路或跑步，只是由於走路或跑步大部分情況是屬於直線等速運動，所以繪製的技巧著重在於姿勢，而不是物理軌跡。因此，我們真正想探索的等速運動是透過相機之正視角所觀察到的變化，分為兩種情況：第一，就是當物體朝著相機飛過來的情況，物體在畫面中的變化；第二，則是相機跟著移動物體或角色等速平移的情況，想探討背景在畫面中的變化。

當某物體朝向相機鏡頭飛過來，我們看到的畫面中會出現此物體漸漸變大，最後可能撞擊到鏡頭。我們想回應以下問題，物體以怎樣的的速度變大，物體在什麼時候會撞擊鏡頭？另外，當相機跟著物體等速平移運動，其他靜止的景物在畫面中該以怎樣的的速度往反方向移動？要回應這類的問題，我們除了要了解物理的等速運動，更需要了解的是相機的 3D 投影原理。

運用於相機的 3D 投影幾何主要有正射投影 (orthographic projection) 以及透視投影 (perspective projection) 兩大類別[15,16]。一般在畫 2D 動畫所採用的投影效果是透視投影，這樣才能藉由不同的成像大小，在畫面上表現出物體相對的前後關係，例如同樣的車子，距離較遠時成像比較小，越接近時會將它畫得越大。

(一)、等速與投影的動畫範例

此小節，我們選擇的測試動畫範例有兩個：第一個動畫範例，某人朝著相機的方向高速的投出一顆棒球，最後擊中鏡頭，產生裂痕。動作示意圖如圖八(左)，圖上方只是示意此人丟球的動作，其實我們看到的畫面是下方框框中的樣子。以下列出我們對於這個動作所做的**假設**。第一，空氣阻力不列入考量；第二，因為是漫畫(動畫)，我們可以假設球速超乎現實的快，以達到誇張的效果；第三，碰撞前高速運動中的球因為水平方向的速度明顯大於垂直的加速度(地心引力)，因此，球飛過來時暫時不考慮地心引力的影響，只計算水平位移情形；最後第四，打到鏡頭後此動作畫面便停止，我們不再繼續討論撞擊之後球應有的軌跡，因為或許相機掉落或損毀了。

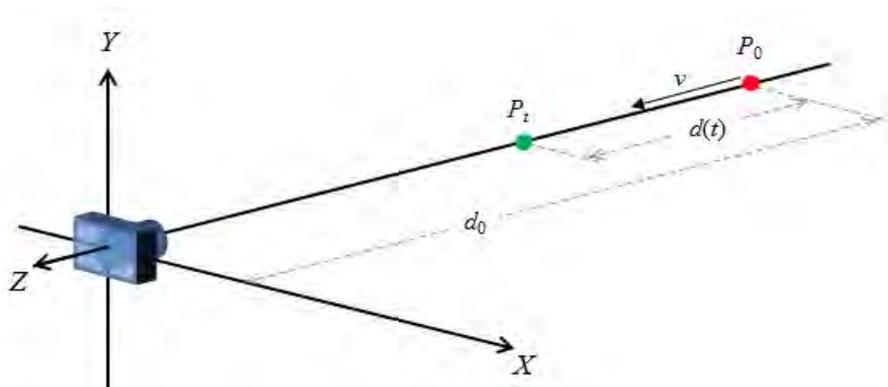


圖八：等速運動與相機投影的兩個動畫範例示意圖。(左) 一顆棒球高速的往鏡頭這邊飛過來，最後擊中鏡頭，產生裂痕。探討棒球大小應該如何變化。(右) 某人跑步朝右邊方向移動，相機追著拍，此時後方景物在畫面中會往左邊方向移動。探討不同遠近景物的移動速度。

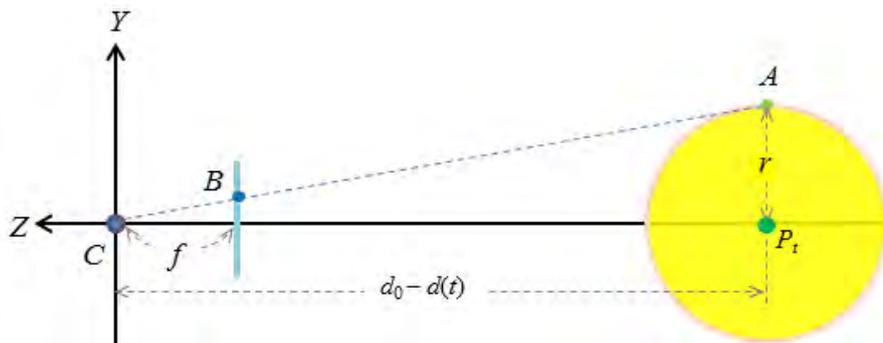
第二個動畫範例，某人跑步朝右邊方向移動，一般的運鏡手法是相機追著拍，此時這個人始終保持在畫面的中央，示意圖如圖八(右)，而後方的景物在畫面中則會往左邊方向移動，它們的移動速度與離相機的距離有關。我們**假設**：第一，人跑步是直線等速運動；第二，相機的運動方向及速度與人保持一致；第三，後方景物都是靜止且與相機之距離維持不變，這是 2D 動畫中常出現的運鏡手法。

(二)、相機透視投影幾何公式推導

等速運動的公式“距離等於速度乘以時間”已經學過，所以此小節主要是陳述學習相機透視投影幾何[17]後所獲得的知識整理與公式推導。第一個動畫範例，假設將 3D 座標原點設定在相機的投影中心點上，請見圖九，人物與相機的距離設為 d_0 (m)，當時間 t 等於 0 時，棒球位於 P_0 的位置上，它將會以每秒 v 公尺的速度朝原點飛過來，當經過時間 t 秒後，棒球的位置以 P_t 表示，此時球的飛行距離為 $d(t)$ ，我們知道 $d(t) = v \cdot t$ 。



圖九：相機與棒球的相對位置圖示，3D 座標原點設定在相機的投影中心點上。



圖十：相機的透視投影幾何側視圖。

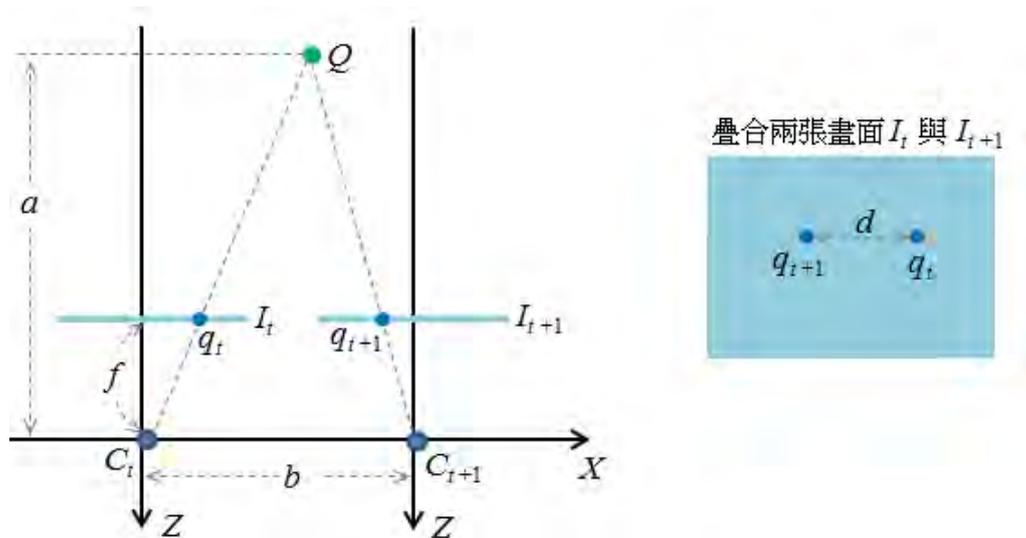
接著以側視圖來說明相機的透視投影公式，如圖十，此時的 X 軸垂直於紙的平面。相機的投影中心以 C 點表示(也代表座標原點)，設 A 點為球的頂點位置，球的半徑為 $r(m)$ ，所以 A 點的座標為 $(0, r, d(t) - d_0)$ ，(註：球位於 Z 軸負的方向)。相機的(虛擬)投影平面以淺藍色的垂直線表示之 (註：投影平面與 XY 平面平行，所以從側視圖只看到一條直線)，相機的焦距設為 $f(mm)$ ，通常焦距以公釐為單位，計算前需要先轉成一致的單位，這邊我們使用公尺。 A 點投影於平面上之 B 點的位置，假設 B 點的座標為 $(0, w, -f)$ 。可知

$$w = \frac{rf}{d_0 - d(t)} = \frac{rf}{d_0 - vt} \quad (12)$$

這邊的 w 值表示此時球在 2D 投影畫面的成像是一個半徑為 $w(m)$ 的圓。到目前為止，我們已經可以將時間 t 代入式子(12)，求出棒球成像的大小，但是，計算的單位是公尺，在畫圖時我們仍無法決定球應該畫多大才能符合求出來的 w 值。

基本上不同相機所採用的感光元件的尺寸都不同[18]，傳統的底片，也就是所謂的 full size 是指長寬分別為 $36(mm) \times 24(mm)$ 的感光元件，搭配 $35(mm)$ 的相機焦距，焦距是對焦點(也就是投影面)和鏡頭光學中心(也就是投影點)之間的距離，簡單來說，在圖十中 $f = 35(mm)$ 。如果我們以這個 35mm 相機的規格為依據來計算我們的動畫畫面，則棒球在畫面應該是多大？其實，我們無法以制定的長度單位來回應這個問題，因為畫面的大小取決於作畫的人，又或者取決於電腦的視窗設定，所以只能以“占據畫面的比例”來描述棒球成像的大小。假設畫面的寬(或高)為 1 單位，則長便是 1.5 單位，從式子(12)所算出來的成像半徑 w 先由公尺轉成公釐單位，再算出與感光元件寬之比值，就是我們要的成像與畫面的比例。

第二個動畫範例，同樣需要用到相機投影幾何，不同的是這次相機等速跟隨著角色移動，想求出靜止的景物在畫面中應該以怎樣的的速度往反方向移動？此速度與景物離相機的距離有關，幾何俯視圖如圖十一所示。兩個相鄰的相機位置分別以 C_t 與 C_{t+1} 表示，代表動畫中兩個連續影格的拍攝位置。某個景物點以 Q 表



圖十一: (左)靜止背景點 Q 投影於等速移動中相鄰的兩個相機畫面之幾何俯視圖。
 (右)將兩個相鄰的相機畫面重疊的正視圖。

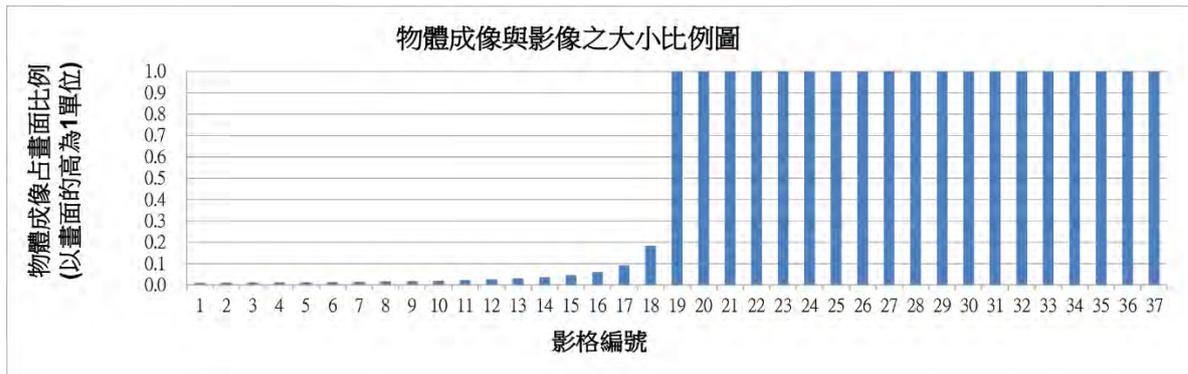
示，假設此 Q 點與相機距離為 a (m)。相機的投影面分別用 I_t 與 I_{t+1} 表示，相機焦距 f 一樣是 35mm，先將焦距轉換成 $f = 0.035$ (m)。兩個相鄰相機的投影中心距離為 b (m)。景物 Q 分別投影在 q_t 與 q_{t+1} 的點上，若是將兩張投影面重疊，則 q_t 與 q_{t+1} 點的距離為 d (m)。由上述幾何可以簡單求出以下的關係：

$$d = \frac{fb}{a} \quad (13)$$

距離 b 是由相機運動速度決定，假設速度是 v (m/s)，而兩個影格拍攝的時間間隔為 t (s)，則式子(13)可以改寫成

$$d = \frac{fvt}{a} \quad (14)$$

由於相機焦距與相機運動速度都固定，所以也可以說 d 與 a 成反比。這個求出的距離 d 就是相鄰影格之間景物位移的大小值。如同第一個動畫範例所討論的實用性，我們也可以將所求出的距離 d 值轉換成與畫面長度的比值來表示，或另一種實用的想法是用像素單位來表示。至於哪種表示法比較方便就視情況而定，看使用的繪圖軟體是否提供清楚的像素尺規工具作為繪圖的依循。



圖十二：在 Excel 內設計圖表顯示不同影格中物體成像與畫面大小的比例關係。

(三)、製作 Excel 工具

第一種動畫範例的情況，將公式(12)寫入 Excel 表單並設計圖表，以長條圖呈現出每個影格中物體成像與畫面大小之比例，如圖十二。套用到我們選擇的動畫範例，需要輸入的值有每秒影格數，此動畫設定為每秒 18 個影格，以及球與相機之初始距離 $d_0 = 10 (m)$ ，球速 $v = 10 (m/s)$ ，與棒球的半徑為 3.5 公分，也就是說 $r = 0.035 (m)$ 。圖表的縱軸為比例，橫軸為影格編號，以畫面的高為 1 單位，藍色方形的長度代表每個影格中棒球成像占畫面的比例，由此結果可以觀察到從第 19 個影格開始，球的成像就占滿整個畫面，這代表球在 1 秒時已經碰到鏡頭，此時鏡頭應該出現裂痕，畫面終止，後面的影格資訊其實就可以省略。

第二種動畫範例的情況，在完成幾何理清與公式推導之後才發現最初問題的答案十分簡單，如公式(14)所示，基本上距離 d 與距離 a 的關係成反比，其實用基本常識也可以知道此關係。根據公式整理出實用的結論就是，當某物體離相機的距離增加為 k 倍時，則此物體在畫面中的移動速度則就會是原來的 k 分之 1。因為結論相對單純，我們省略此 Excel 工具的結果圖。

肆、研究結果與討論

在物理公式的理解與寫入 Excel 製圖的過程中，我們除了將結果運用於這邊所提出的動畫範例之外，也利用做好的 Excel 物理引擎工具分析各種不同的動作情節，測試更多元的動畫範例與情境，最後將所觀察到的一些物理規則集結成作動畫的準則。

我們也將比較兩套動畫：第一套動畫是在尚未學習物理力學公式之前繪製的，繪製時完全憑靠想像力與經驗，而第二套動畫則是運用了我們的成果工具之輔助所繪製的，在說明書中僅以動畫影片之部分截圖呈現，完整的動畫成品遵循比賽之規則，將於現場比賽時以電腦播放展示。

一、碰撞運動之準則

我們利用開發的工具分析不同狀況的碰撞情形，列舉如下：

(一) 物體 A 與物體 B 質量相等

- 當兩個物體起始速度不為零且方向相反時(相向運動)，則碰撞之後的移動方向必定與之前的速度方向相反，變成反向運動。
- 當兩個物體起始速度不為零且運動方向相同時，若有碰撞情況發生，則碰撞之後原本速度較快的會減速，而原本速度慢的會加速前進。
- 若其中一個物體起始速度為零(靜止狀態)，則在碰撞之後，原本靜止的物體會承襲另一物體之速度前進，而原本移動的物體則於碰撞後停止運動。

(二) 物體 A 質量大於物體 B 質量

- 則兩個物體的起始速度(含方向)與碰撞之後的速度(含方向)會根據兩者質量的差異而有不同的變化，沒有固定的規則，此時便更凸顯出我們開發工具之實用性。

無論是上述哪一種情況，由公式(8)，我們也可以發現：

$$v_{As} - v_{Bs} = v_{Bf} - v_{Af}$$

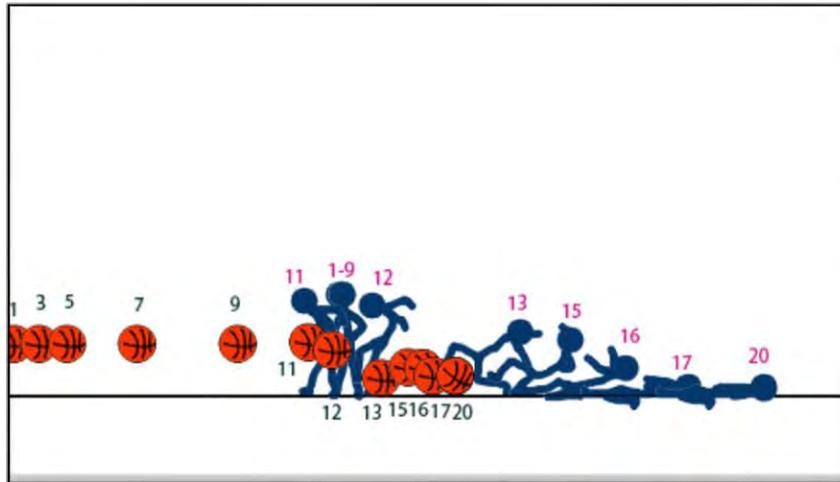
也就是說，兩物體碰撞前的相對速度等於碰撞後的相對速度。

二、兩組碰撞動畫範例之比較與討論

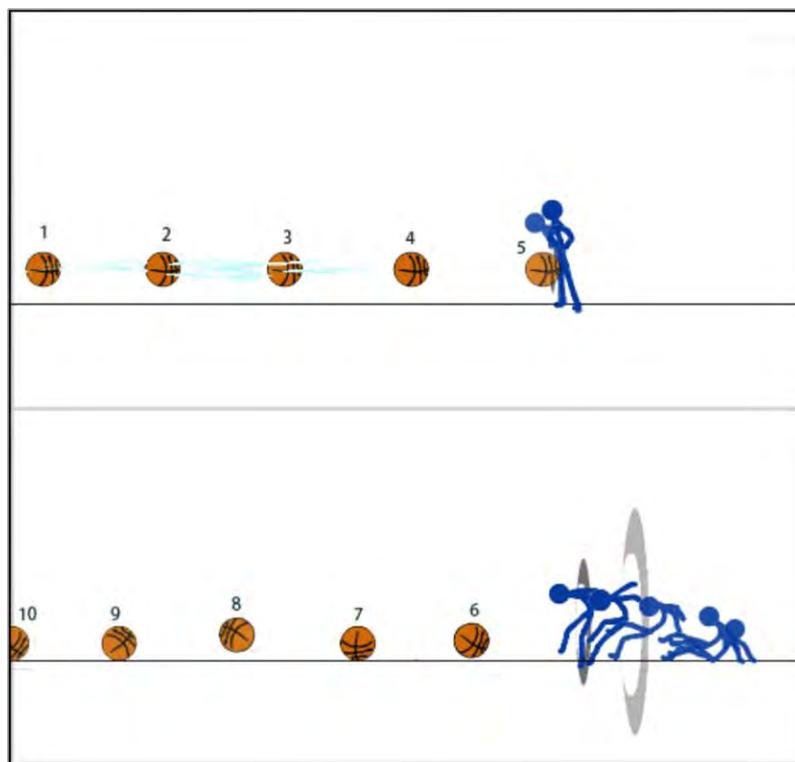
繪製第一套動畫時，我們心中完全還沒有物理碰撞理論的概念，只能想像人被高速球撞飛倒地的情形，以及球撞擊人之後繼續往前並快速下墜落地，影片截圖如圖十三所示。我們將部分影格重疊展示方便看清楚動作軌跡，球與人用不同顏色的數字標示影格號碼。之後，我們參考圖二的結論，逐格繪製了第二套動畫，動畫影片截圖如圖十四，上方是碰撞前，下方為碰撞後。

學習了物理力學以及碰撞運動原理才明白我們第一次畫的動畫有許多不合理的地方，第一，籃球在碰撞前不應該呈現加速；第二，籃球因為質量比人還小，所以碰撞之後應該反彈，而不是繼續往前飛；第三，碰撞後人往後飛的速度比球快，且跌倒後滑行的距離比球滾動的距離還遠。這些其實都不符合物理，換句話說很難解釋得通，但在了解力學原理前，卻絲毫無法察覺這些錯誤。

在繪製第二套動畫時，因為畫面大小的限制，我們發現比較難呈現出動作的全貌，籃球因為速度太快，一下子就飛離畫面，所以除了以上兩套動畫，我們還額外錄了一個桌面影片，此影片錄製了 Flash 軟體的視窗，跳脫畫面大小的限制，看到籃球的整體運動軌跡。



圖十三: 動作範例一_碰撞_運用物理知識之前。動畫影片部分影格(如數字編號)之截圖。繪製時，完全還沒有物理碰撞理論的概念，只能想像人被高速球撞飛倒地的情形。



圖十四: 動作範例一_碰撞_運用物理知識之後。動畫影片部分影格(如數字編號)之截圖，上方是碰撞前，下方為碰撞後。

我們所製作的工具在使用上十分簡單，輸入必要的參數值，程式就會自動提供物體運動軌跡圖表，而且配合逐格動畫的需求，圖表以影格為單位，顯示出兩個物體在每一個影格中應該出現的位置。這個工具也可以同時兼具誇張的元素，如速度或質量都可以選擇性的誇大，強化視覺上的效果，卻又不失物理原則。

三、拋體運動之發現

我們已經於前面的章節說明過公式(10)的特性，這裡簡單重述重要的發現。當起點與終點固定，以數學的角度可以定義出無限條不同的拋體軌跡。換句話說，在公式(10)中 x 與 y 均為常數 (constant values) 時，起始速度 v_s 與角度 θ 的組合有無限多解。但是隨著角度 θ 由小到大的變化(最大也必須小於 90 度)，會發現速度 v_s 值會先由大變小再由小變大，也就是說在某個角度會對應到一個最小的 v_s 值，表示這個起跳角度比較省力就可以抵達目的地，也就是我們工具所建議的拋體軌跡。

我們也發現只要起點與終點固定，最佳的拋體軌跡當然也會是固定，若忽略空氣的摩擦力，則抵達終點所花的時間跟物體本身的質量無關。也就是說，當拋物體軌跡相同，則任何物體循著此拋物線移動的速度也會相同。

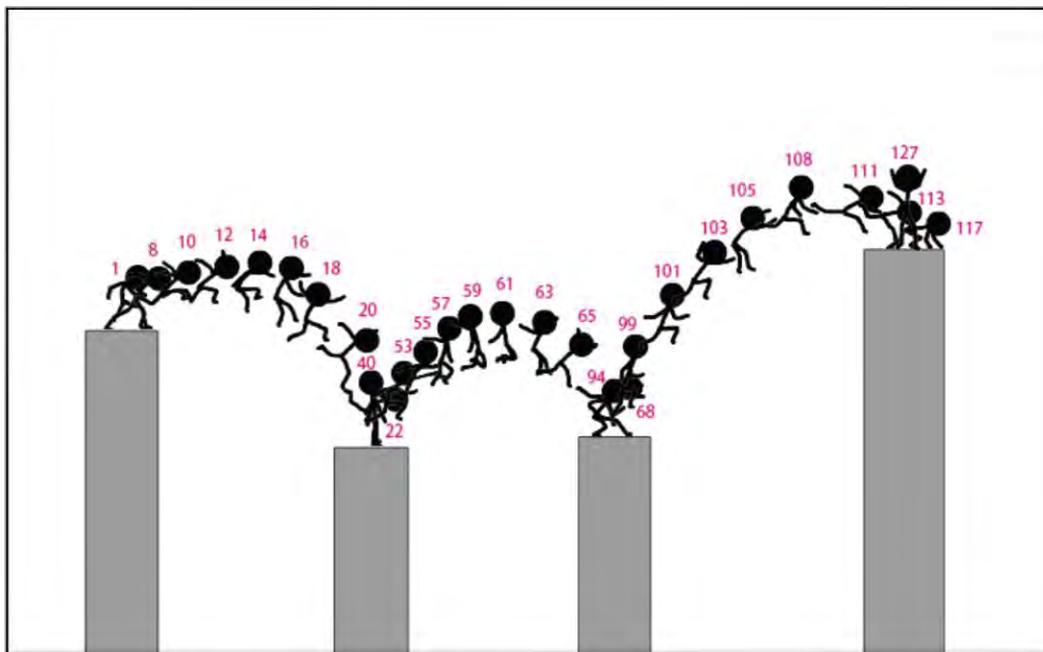
四、兩組拋體動畫範例之比較與討論

這裡的動畫範例是跳柱子，我們在開始學習拋體運動之前，先以自己的想像繪製出一套動畫，在繪製時，我們只知道運動軌跡必須是弧形，請見圖十五，此圖以疊合的方式呈現部分動畫影格，影格編號如數字所示。

我們所開發的 Excel 小工具，可以運用在計算任何兩點的拋物線，也就是無論是往上跳或往下跳，只要輸入兩點的相對座標，就可以依據匯出的圖表繪製動



圖十五: 動作範例二_拋體_運用物理知識之前。動畫影片部分影格(如編號)之截圖。重疊不同影格可更看得清楚軌跡。



圖十六: 動作範例二_拋體_運用物理知識之後。動畫影片部分影格(如編號)之截圖。重疊不同影格可更看得清楚軌跡。

畫，圖表上清楚標示出每個影格中物體應該出現的位置。利用我們輔助工具，重新再繪製一次跳躍柱子的動畫，將每相鄰兩根柱子間的相對位子關係輸入表單，再依據建議的軌跡逐格畫上人物的位置，完成的作品動畫截圖如圖十六。

學到了拋物體運動才知道，固定起點與終點的拋物線有無限多條，容易讓人誤以為是否隨便畫一條弓形弧線都能近似，但觀察第一次畫的跳躍軌跡，雖然有弧度，卻其實完全不符合條拋物線的原則，所以整體看起來，動作雖然活潑，但總是感覺到有些不太自然。第二套動畫看起來確實有明顯的改善。在誇張性的訴求上，同樣的可以調整兩點的相對高度或距離，以保有動畫誇大的特性。

五、等速運動加透視投影之觀察

由公式(12)可以了解到當時間值固定，也就是當物體與相機之間的距離固定時，物體的大小(以 r 表示)與其成像的大小(以 w 表示)是成正比的關係，這點比較容易理解。但觀察圖十二中成像大小變化與時間(也就是距離)的關係曲線(註：長條圖的變化曲線)，體會到投影幾何的不容易預測性，若不靠工具提示，應該很難可以用想像力或甚至是常識加經驗估測到不同時間點成像應有的大小。這也更凸顯出我們製作此工具的價值。

需要特別註明的是，因為這裡的動畫的範例是球，所以我們以半徑當作推導公式的依據，但是這個 r 值其實這只是一個長度的代表，我們結論的公式可以套用於任何物體，不限圓形。此外，因為球速快，所以就算是在碰撞到相機前的一個影格，球的成像還是只占畫面頗小的比例(如圖十二之第 18 個影格)，但在下一個影格就突然占據整個畫面。若換成其他速度慢的等速運動，如走路，會更容易看出物體成像大小的變化情形。

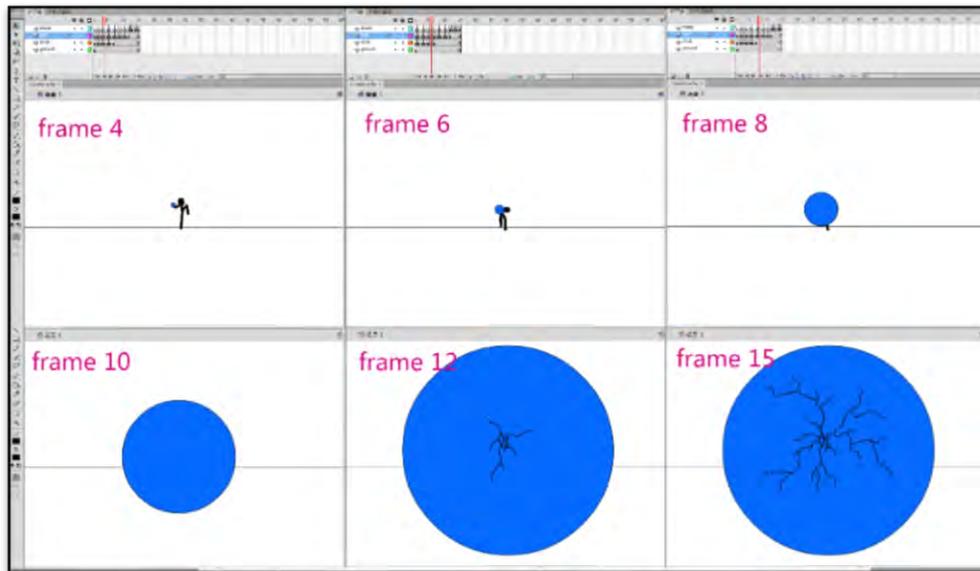
最後，雖然我們是以球朝向鏡頭直線飛過來為範例，但是我們觀察到公式(12)影響 w 的關鍵是物體與相機之距離，而既然是等速運動，所以其實這個結論公式也適用於任何角度拍攝的直線等速運動物體，不一定是正視角，就算是斜視角也符合，因為以物體本身與相機的距離而言，一樣是等速變小。

六、兩組透視投影動畫範例之比較與討論

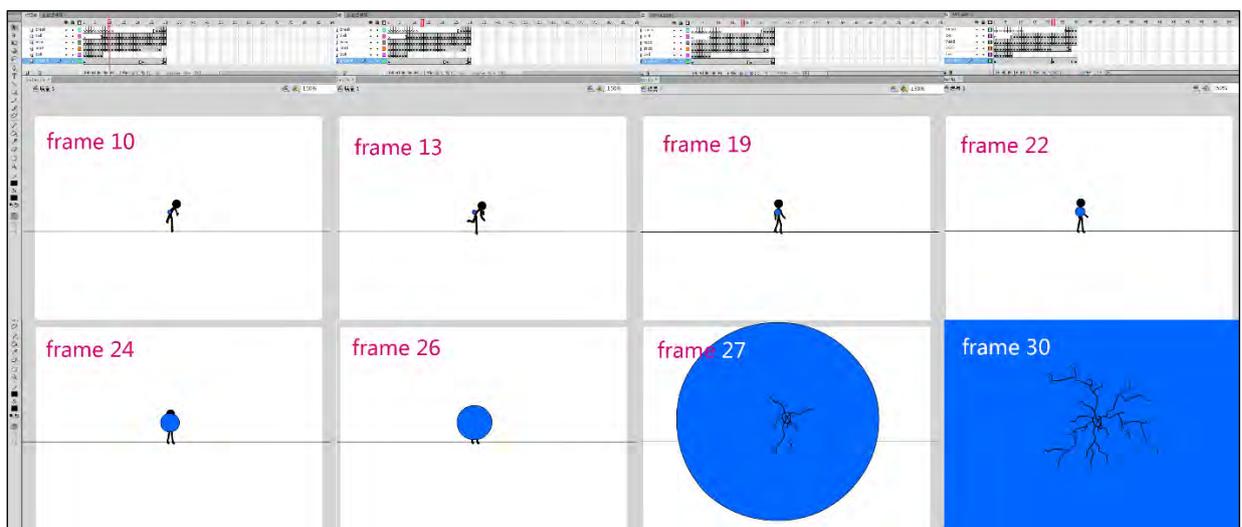
僅以第一個動畫範例，一顆棒球往鏡頭飛過來的動畫，說明與討論，因為第二個動畫範例要呈現出背景物體的相對移動速度，靜態的圖無法感覺出來差異，將於比賽現場直些看動畫結果比較。

跟前面章節相同，我們比較兩套動畫，第一套動畫一樣是在學習相機透視投影幾何之前繪製的，我們只知道當球越接近鏡頭時，它必須變大，球才有前進的感覺。我們擷取其中六個影格呈現於圖十七。之後再使用我們的工具，依據建議的大小比例逐格畫出棒球的成像，重新再繪製一次棒球丟向鏡頭的動畫(也就是第二套動畫)，完成的動畫影格截圖如圖十八。

了解透視原理後，我們才知道其實等速運動物體的投影影像大小與時間的關係，不可能像第一套動畫所表現的那樣，大原則是，物體的投影影像大小必須是在碰到鏡頭前的少數影格才会有明顯的變大。在第二套動畫中，因為想表現丟棒球的姿勢，所以球直到第十個影格才剛離手，若要對照圖十二的結果圖表，這個動畫的第十個影格應該對應到圖表中的第二個影格，如此類推，動畫中的第 26 個影格就會是撞到相機前的那畫面(圖表中的第 18 個影格)，而第 27 個影格如圖十八所示，已經撞擊到相機鏡頭產生裂痕，這也是誇張手法的表現。



圖十七: 動作範例三_等速與投影_運用物理知識之前。動畫影片其中六個影格的截圖。



圖十八: 動作範例三_等速與投影_運用物理知識之後。動畫影片其中八個影格的截圖。

七、實驗總結

透過動畫的比較，我們想證實我們所開發之物理引擎繪圖輔助工具之方便實用性與重要性。在沒有任何物理原理數據可以參考之前，就算獨有繪圖的天分，也很可能因為不熟悉物理現象而在動畫繪製上遇到瓶頸，卻不知所以然。若有簡單工具的輔助，且提供清楚的圖示，將是 2D 動畫創作者的福音，我們的訴求不是要一絲不苟地照著建議的軌跡或大小來作畫，而是提供一個正確的物理學依據，讓作畫的人可以適度參考，自由地結合誇張元素，創作出更具專業且更讓人信服的作品。

我們目前的能力只能利用 Excel 開發，未來若結合程式語言，並繼續擴充更多物理原理與公式，它將會是一個名副其實且非常實用的獨立 2D 物理引擎工具軟體。

伍、結論

在這份研究中我們整理出在物理學上的三種運動公式，並以動畫實例來驗證動畫中遵循這些物理原則的必要性，動畫作品也顯示這些整理出來物理原則可以與動畫世界中誇張的元素並存，互不牴觸。科展主要的貢獻是將公式寫成輔助繪圖的 Excel 物理引擎小工具，讓任何有興趣從事 2D 逐格動畫的愛好者，省去複雜物理公式理解與推導的過程，輕鬆利用我們提供的工具，只要變換參數就可以求出符合物理原理的物體運動軌跡或成像大小，提供繪畫之參考。此物理引擎工具操作簡單，設計的圖示清楚且容易理解，雖然本意是開發動畫輔助程式，但基於以上優點，也頗適合當作物理教學上的輔助工具。

陸、網路參考資料

- [1] Wikipedia: Collision (<https://en.wikipedia.org/wiki/Collision>)
- [2] The Physics Classroom: Mechanics: Momentum and Collisions. (<http://www.physicsclassroom.com/calcpad/momentum>)
- [3] Isaac Physics: Collisions - Physics Concept. (https://isaacphysics.org/concepts/cp_collisions)
- [4] Khan Academy: Physics- Elastic & inelastic collisions. (<https://www.khanacademy.org/science/physics/linear-momentum/elastic-and-inelastic-collisions>)
- [5] 科學 Online: 王尊信與洪連輝老師。彈性碰撞 Elastic collision. (<http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=18806>)
- [6] 科學 Online: 陳智勝與蔡志申老師。彈性碰撞簡介 Brief Introduction of Elastic Collision. (<http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=18769>)
- [7] 科學 Online: 金佳龍與洪連輝老師。動量概念的歷史發展 Momentum. (<http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=19078>)
- [8] Khan Academy: Physics– Momentum & impulse. (<https://www.khanacademy.org/science/physics/linear-momentum/momentum-tutorial>)
- [9] 科學 Online: 李品慧與洪連輝老師。動能 Kinetic Energy. (<http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=828>)
- [10] Khan Academy: Physics - Work and energy. (<https://www.khanacademy.org/science/physics/work-and-energy/work-and-energy-tutorial>)
- [11] Khan Academy: Physics - Two-dimensional projectile motion. (<https://www.khanacademy.org/science/physics/two-dimensional-motion/two-dimensional-projectile-motion/a/what-is-2d-projectile-motion>)
- [12] 長庚大學通識教育中心. 格物致知學習網站：拋體運動的概念發展. (<http://chiuphysics.cgu.edu.tw/yun-ju/CGUWeb/PhyChiu/H101bProjectile/ProjectileConcept.htm>)
- [13] 科學 Online: 林姝霏、黃克雄與洪連輝老師。拋體運動 Projectile Motion. (<http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=855>)
- [14] 物理觀念通: 拋體運動. (<http://ezphysics.nchu.edu.tw/ccp/kinematics/k2.htm>)
- [15] Wikipedia: 3D Projection. (https://en.wikipedia.org/wiki/3D_projection)
- [16] 投影的相關知識與工程圖學的繪圖技巧: 投影的分類. (<https://sites.google.com/site/3d2dprojection/tou-ying-de-fen-lei>)
- [17] Paul Schrater, University of Minnesota. Camera Models and Perspective Projection. (http://vision.psych.umn.edu/users/schrater/schrater_lab/courses/CompVis07/Papers/Lec02CamModels.pdf)
- [18] 個人圖書館: CCD/CMOS 尺寸大小與說明. (http://www.360doc.com/content/09/0518/11/55615_3549407.shtml)

【評語】 032807

1. 滿好的問題。動畫一張一張放出來，時間間隔是一樣的，所以位置的計算是顯示的關鍵。又因時間間隔一樣，所以算出速度就可以。三種主要的運動：碰撞、拋射、等速。就碰撞而言，兩物體在接觸的瞬間應該有加速度的過程，這沒被算進去。不過，應該是沒關係，除非是要強調慢動作的細微過程。該作品有趣的地方在於利用 Excel 表單與基礎物理學推斷 2D 動畫移動軌跡，可提供學習者無限想像力的可能，將會是一不錯發展物理教學教具。
2. 動畫結合力學及運動學，貼近實境運動，讓閱聽人有感是不錯的想法。較之現有的技術相關物理早已融入動畫及電玩之中。報告人未來可以再精進突破現有框架。
3. 這作品引進物理的牛頓力學企圖讓動畫更貼近物理直覺，用速度計算與物體碰撞模擬鏡頭動畫中物體可能的時間位置以符合動畫上的位置。
4. 但是牛頓力學與實際世界上，仍有很多在動畫中難以模擬逼真的如物件表面並非光滑地面也可能粗躁，物體也可能有柔軟的表面非剛體物件就很難用理想公式計算解決。所以作品雖有立意良好實際上仍很難逼真。物理計算實務上也有時很困難。

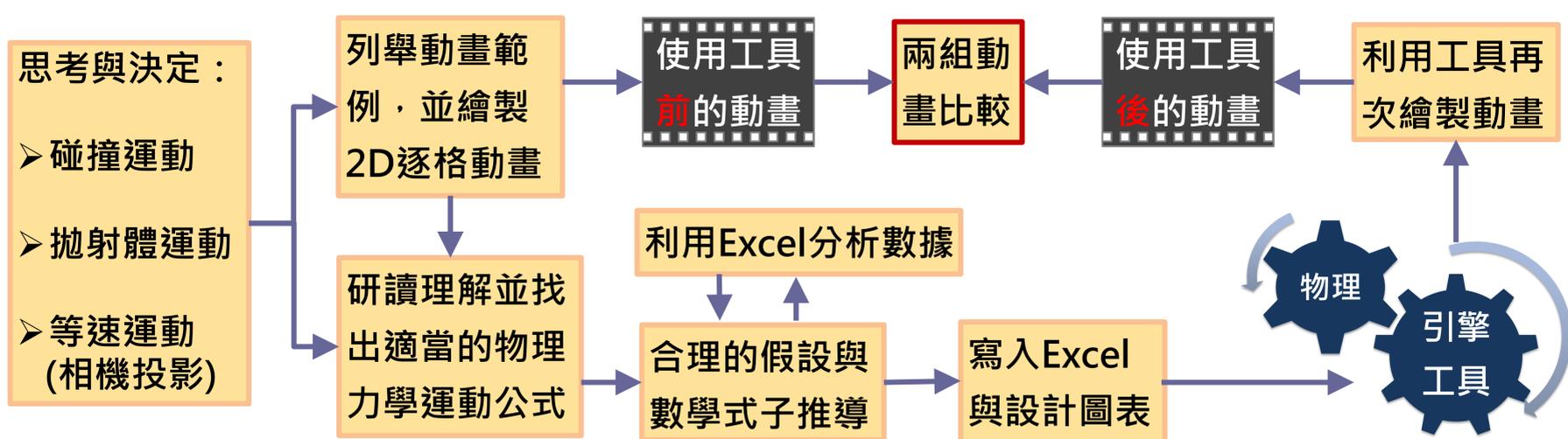
動機與目的

動畫的特色與優勢就是可以發揮無限想像力，無須受到物理學的束縛，可以以誇大手法達到吸引人注意的目的。然而動畫中的動作，真的是可以完全不遵循物理學的原理嗎？答案絕對是否定的。

但是若不熟悉物理的原理，在繪製2D逐格動畫(frame-by-frame animation)時，只能單靠想像力與直覺，不斷嘗試，卻往往徒勞無功。因此，本專題的目的是整理出與動畫相關且實用的公式，並製作出一個簡單視覺化的物理引擎工具，讓所有動畫愛好者省去複雜物理公式理解與推導的過程，只要輕鬆利用我們提供的工具，就可以求得符合物理原理的物體運動軌跡，作為繪圖時參考的準則。

研究方法

電腦軟體：使用 Adobe Flash Professional CS6 來製作 2D 逐格動畫，並利用 Office Excel 當作數據分析之工具，並編輯 Excel 圖表來呈現物理準則公式，做成繪圖輔助小工具。



第一種運動：碰撞運動 (Collision motion)

我們只針對正向彈性碰撞做分析。在兩物體正向彈性碰撞的過程中，會同時遵守(線)動量守恆 (conservation of linear momentum) 與動能守恆 (conservation of kinetic energy)。動量是指運動物體內含的力量，以 P 表示，值與物體的質量 m 與速度 v 成正比，定義是

$$p = mv$$

單位為 $kg \cdot m/s$ 。而動能是指物體運動時所擁有的能量，以 K 表示，它的值同樣與與物體的質量 m 與速度 v 成正相關，定義是

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

單位為焦耳(J)。由於要遵守上述兩個守恆原則，我們以下標 A 代表第一個物體，下標 B 代表另一個物體，再以字母 s 代表碰撞前，字母 f 代表碰撞後，列出以下兩個等式：

$$m_A v_{As} + m_B v_{Bs} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}$$

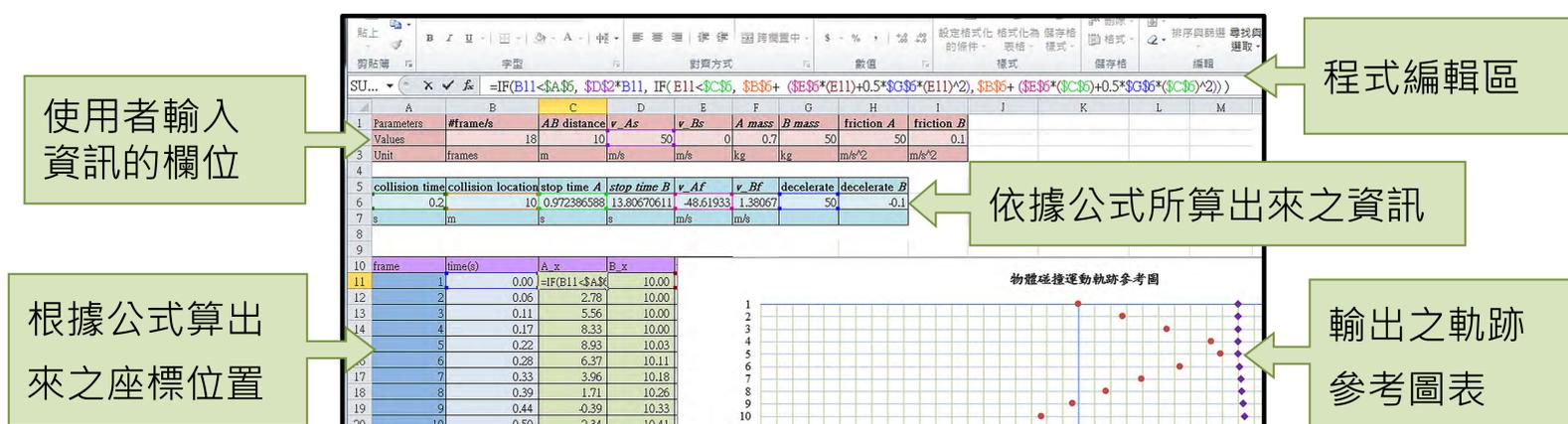
$$\frac{1}{2}m_A v_{As}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bs}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bf}^2$$

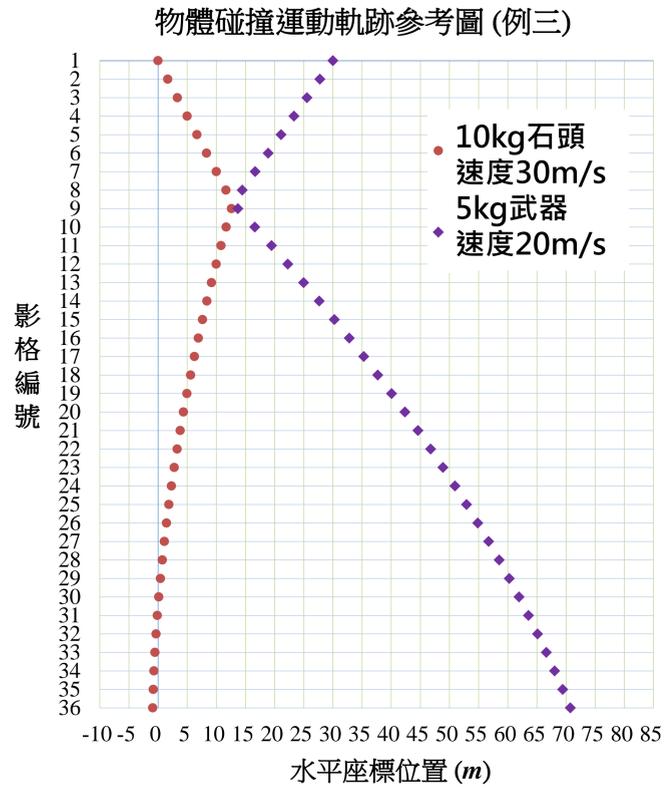
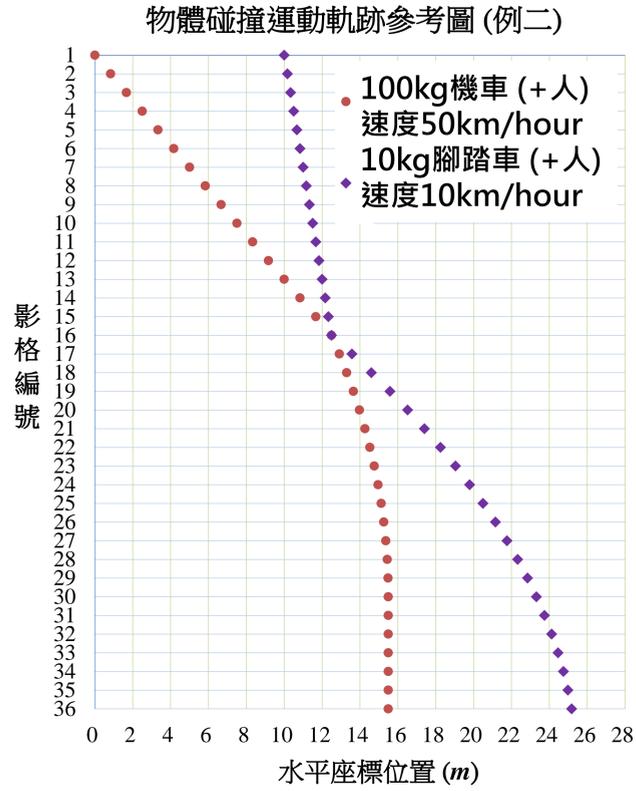
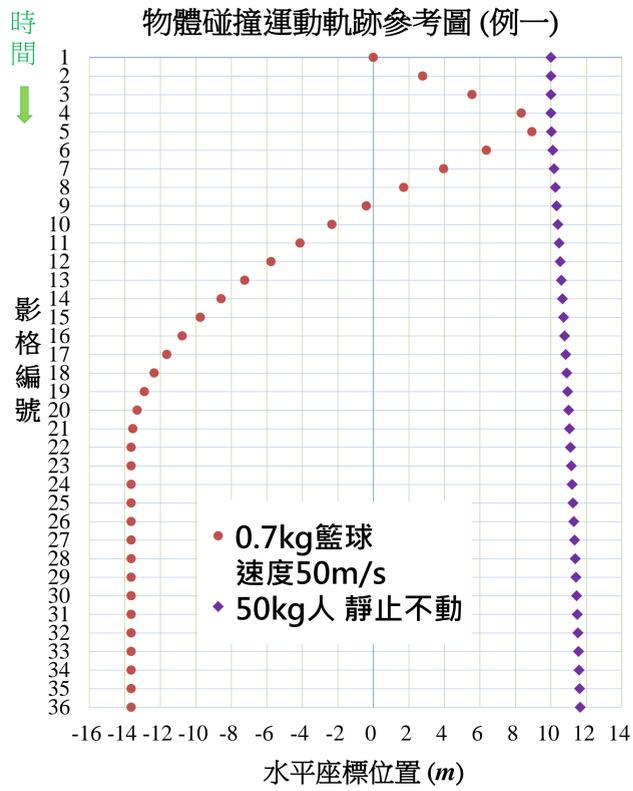
若把 m_A 、 m_B 、 v_{As} 、 v_{Bs} 當作已知，可求解出碰撞後的速度 v_{Af} 與 v_{Bf} 。經過整理，最後求得

$$v_{Af} = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \right) v_{As} + \left(\frac{2m_B}{m_A + m_B} \right) v_{Bs}$$

$$v_{Bf} = \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B} \right) v_{As} + \left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} \right) v_{Bs}$$

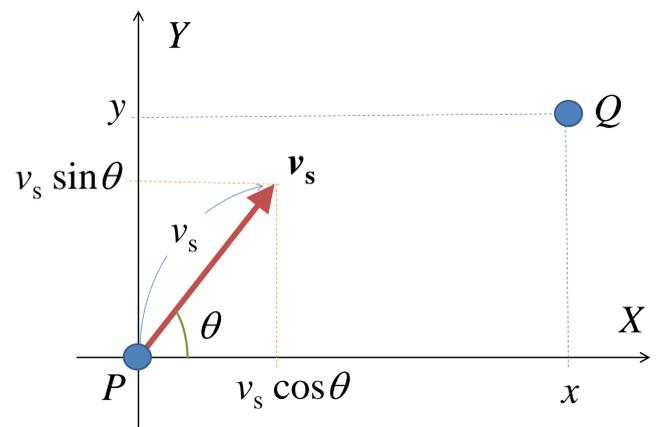
編輯 Excel 並設計圖表，製作繪圖輔助工具，下方為工作視窗截圖：





第二種運動：拋射體運動 (Projectile motion)

假設理想拋體的情況，也就是說物體運行中只受均勻地心引力的重力作用，即空氣阻力可忽略。起點為 P 也是座標原點，終點為 Q 座標為 (x, y) ，目標是尋求從 P 至 Q 的拋物體軌跡公式，地心引力 g (gravity) 設為 $-10 (m/s^2)$ 方便計算。在這個問題中，我們需要探討並求出合理的物體之起始速度 (velocity) v_s ，此為一個具方向性之向量，所以以粗體字表示。角度 θ 為起始速度向量 v_s 與水平線(X軸)的夾角，而 v_s 是指向量之大小 (或長度)，也就是 $v_s = \|v_s\|$ 。當 P 點與 Q 點固定，則 θ 與 v_s 之值必須互相搭配得宜，不然拋物線無法抵達 Q 點。



水平與垂直方向的移動速度互不干擾，水平方向為等速運動，以 v_h 表示，可得知 $v_h = v_s \cos \theta (m/s)$ ，垂直方向為等加速度運動，初始速度以 v_v 表示，且 $v_v = v_s \sin \theta (m/s)$ 。物體由 P 點出發，經時間 t 秒後抵達 Q 點之座標位置，可列出以下式子：

$$x = v_h t = v_s t \cos \theta$$

$$y = v_v t + \frac{1}{2} g t^2 = v_s t \sin \theta - 5 t^2$$

整理後求得拋物體軌跡公式為：

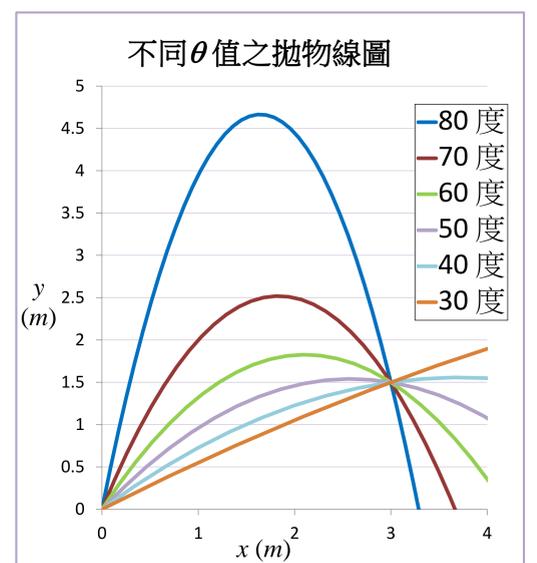
$$x \tan \theta - \frac{5x^2}{v_s^2 \cos^2 \theta} = y$$

當 x 與 y 值固定，可以求出無限多組 θ 與 v_s 的解。

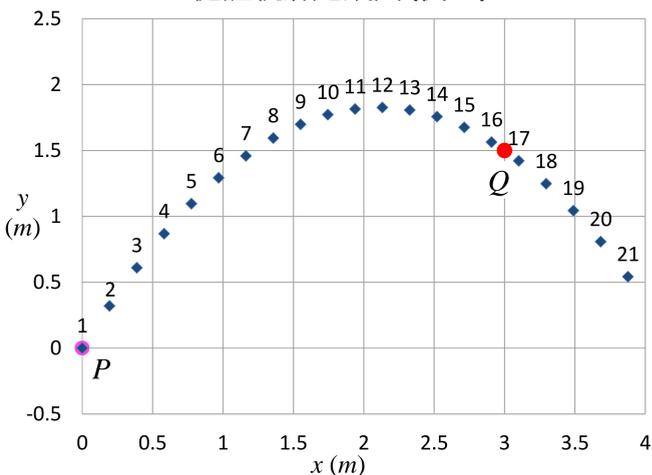
設 $(x, y) = (3, 1.5)$ ，右表列舉出6組可能的解，而右下圖為不同 θ 值所對應的拋物線。當角度逐漸變大，可以觀察到速度 v_s 的變化，先由大變小再漸漸變大，也就是說，存在某個 θ 值對應到最小的 v_s 值。以力學角度而言，拋物體同樣都可以落在指定的終點，卻有某個拋出的角度最省力，這也是我們理想的解答。

θ (度)	v_s (m/s)	t (s)
30	16.08	0.22
40	8.68	0.45
50	7.24	0.64
60	6.98	0.86
70	7.55	1.16
80	9.81	1.76

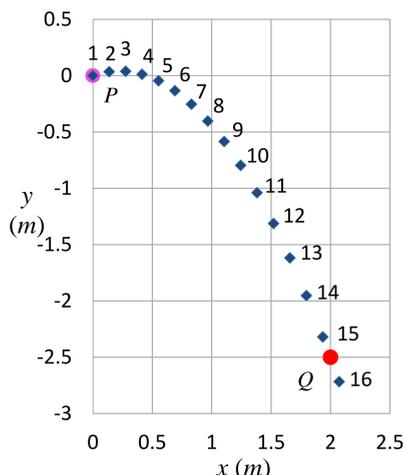
若要以數學的方式計算需要運用到微分方程，這我們目前尚沒有能力做到的，所以我們採用編輯 Excel 程式的方式做判定來代替，並提供一個建議值，這雖在數學上不是最精確的，但動畫本來就容許誤差，所以此值一樣可以達到功能，並不影響到實用性。程式運用到的函數如：MIN、ISNUMBER、OFFSET、INDEX 與 MATCH等。



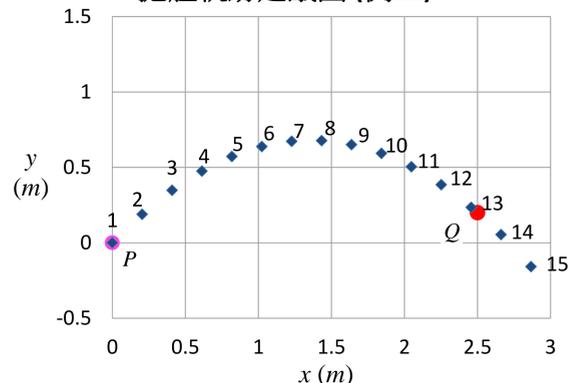
拋體軌跡建議圖 (例一)



拋體軌跡建議圖 (例二)



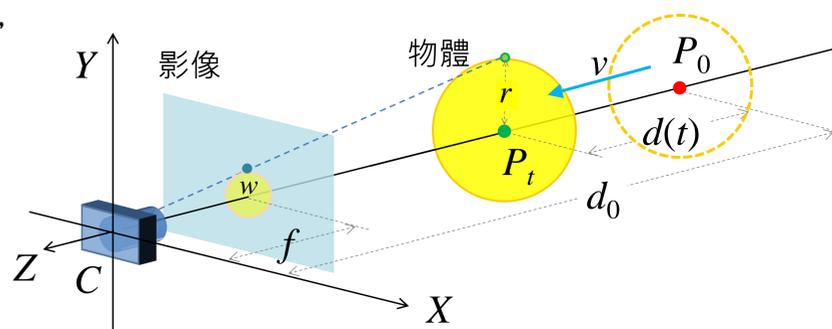
拋體軌跡建議圖 (例三)



第三種運動：等速運動(含相機投影) (Constant velocity motion)

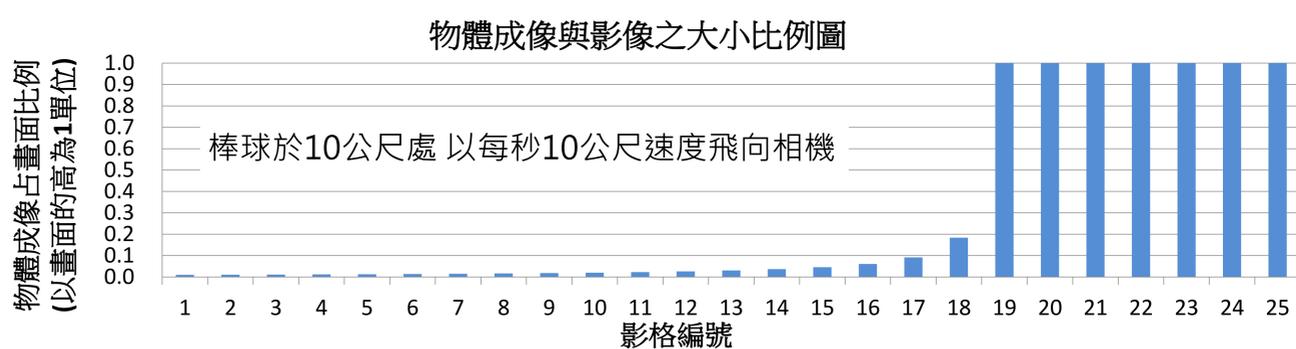
我們想探索的是透過相機之正視角所觀察到物體的等速運動變化，也就是當物體朝著相機飛過來的情況。因此，除了要了解物理的等速運動，更需要了解的是一般相機的透視投影原理 (Perspective projection)。假設將3D座標原點設定在相機的投影中心 C 點上，如下圖所示，某物體從 P_0 出發，以等速 v (m/s) 往相機方向前進， t 秒後物體在 P_t 的位置，半徑為 r 之物體投影於影像中之成像大小半徑為 w ，投影公式如下：

$$w = \frac{rf}{d_0 - d(t)} = \frac{rf}{d_0 - vt}$$



求出之 w 值單位是公尺，但以使用者的角度而言，我們需要知道的是每個影格中物體成像與影像大小之比例。以傳統的底片做為計算基準，影像為 $36(mm) \times 24(mm)$ ，搭配 $35(mm)$ 的相機焦距 ($f = 35$)，設影像的高為1單位，其長則為1.5單位，將 w 轉成比值，以下圖呈現。

在這個每秒18個影格的動畫範例中，棒球於1秒後(也就是第19個影格)撞擊到相機鏡頭。



動畫比較與研究結果

	運用物理知識與工具之前	運用物理知識與工具之後	學習心得
碰撞運動 動畫範例			學習後才明白 1.籃球在碰撞前不應該呈現加速，2.籃球因為質量比人還小，所以碰撞之後應該反彈，不可能繼續往前飛
拋體運動 動畫範例			1.原本以為任意決定一條弓形弧線軌跡都能近似拋物線，但其實不然。2.當拋物線固定，則物體抵達終點所花的時間跟物體本身的質量無關。
等速運動 + 透視 投影 動畫範例			1.物體成像之大小與距離的關係其實很難憑著經驗或想像力得知，這更凸顯出我們的輔助工具之重要性。2.所推導之成像比值公式，其實也適用於任何角度拍攝的直線等速運動物體，不只用於正視角。

我們所製作的物理引擎輔助工具在使用上十分簡單，只要輸入必要的參數值，程式就會自動以清楚的圖表呈現出物體運動軌跡或成像比例之資訊，而且配合逐格動畫的需求，圖表以影格為單位，使用者可以直接採用，當作繪製動畫時的參考依據。這個工具也可以同時兼具誇張的元素，如速度或質量都可以選擇性的誇大，強化視覺上的效果，卻又不失物理原則。

結論

整理出物理學上的三種運動公式，並以動畫實例來驗證動畫中遵循這些物理原則的必要性，動畫作品也顯示這些整理出來的物理原則可以與動畫世界中誇張的元素並存，互不牴觸。主要貢獻是將物理運動公式寫成輔助繪圖的Excel物理引擎小工具，不僅動畫繪製時可藉以使用參考，來增加製作效率及滿足動畫角色運動呈現之合理性需求，也頗適合當作物理教學上的輔助工具。