中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030423

正 n 邊形對角線交點數之探討

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者：	指導老師：
國三 林煒軒	沈志強
國三 莊紫婕	簡民峰
國三 林庭伃	

關鍵詞：對角線、正 n 邊形、交點

摘要

本科展內容為研究正 n 邊形對角線在圖形內形成的交點數。我們一開始利用 Geogebra 畫出圖形，進行對角線交點數的觀察。接下來我們針對中線上的三條對角線交點進行探討，求出中線上對角線三線共點個數公式。之後我們將圖形座標化，利用三角函數計算出中線上交點座標，再用求出的公式代入 Excel，發現中線上五線共點只會出現在 6 的倍數上，七線共點只會出現在 30 的倍數上，我們將其表格化，觀察規律。但由於 n 為 6 的倍數時，其中線上的交點呈現十分複雜之狀態，因此我們先針對非 6 倍數中線外的對角線三線共點進行探討，得到公式。最後我們將所有對角線三線共點個數公式化簡，推導出非 6 倍數正偶數 n 邊形內部所有對角線交點數的公式：If $n = 4k+2$ ： $C_4^n - \frac{5n^3-45n^2+70n-24}{24}$

If $n = 4k$ ： $C_4^n - \frac{5n^3-45n^2+106n-24}{24}$

壹、研究動機

在一次學長姐的專題報告中，他們進行了與正 n 邊形對角線相關的研究，而報告中提出正偶數 n 邊形對角線交點個數的問題在國內尚未有人進行研究及探討，而學長姐也未對此進行研究，因此令我們頗感興趣，立刻著手研究正多邊形的邊數如何影響內部對角線交點數量，並觀察三線(含)以上共點的數量。

貳、研究目的

一、觀察正偶數邊形對角線多線共點規律

二、尋找正偶數邊形中線上對角線三線共點個數

三、將正偶數邊形中線上對角線交點座標化並利用 Excel 計算座標位置進行探討

四、正偶數邊形非中線上對角線三線共點探討

五、歸納出公式，算出非 6 倍數正偶數邊形對角線交點數

參、研究內容

在一般的文獻，甚至高中數學課本，已經提到正奇數邊形的對角線不會有三線(含)以上共點出現，因此正奇數邊形(n 邊形)的對角線交點個數為C_4^n。而在文獻以及高中數學課本中，都尚未提出與正偶數邊形對角線交點相關的公式及研究，因此我們針對正偶數邊形對角線個數來進行研究及探討。

一、 觀察正偶數邊形對角線多線共點規律

因為正偶數邊形會有三線以上共點，所以決定先觀察其對角線交點是否有規律，進行了以下探討。

一開始我們利用 Geogebra 畫出正 4~30 的正偶數邊形的圖形，如附錄一及下(圖 1)，以觀察計算出對角線三線以上共點數後，將其表格化，(如表一)，以利觀察。

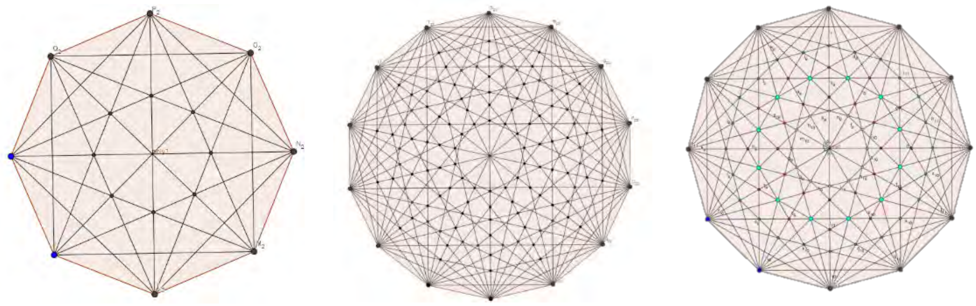


圖 1

表一

幾線共點 \ 正 n 邊形	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n=4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=8	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=10	20	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=12	60	12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=14	112	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
n=16	208	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
n=18	216	54	54	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
n=20	480	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
n=22	660	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
n=24	624	104	24	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
n=26	1196	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
n=28	1568	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
n=30	2490	120	180	120	30	0	0	0	0	0	0	0	1

觀察發現一：根據上表及附錄一，我們發現正偶數邊形中

1.在正 12 邊形以下，除中線外沒有三線以上共點，而正 14 邊形以上有。

2.除了中心點外，正 12 邊形時中線出現了四線共點。

3.除了中心點外，四線、五線共點皆只有出現在正 18 邊形、正 24 邊形及正 30 邊形(6 的倍數)。

4.正 30 邊形出現了七線共點。

二、 正偶數邊形中線上對角線三線共點個數

觀察完後我們決定縮小目標，先從中線(圖形對稱軸)上的點開始觀察，希望能求出中線上的對角線交點公式。

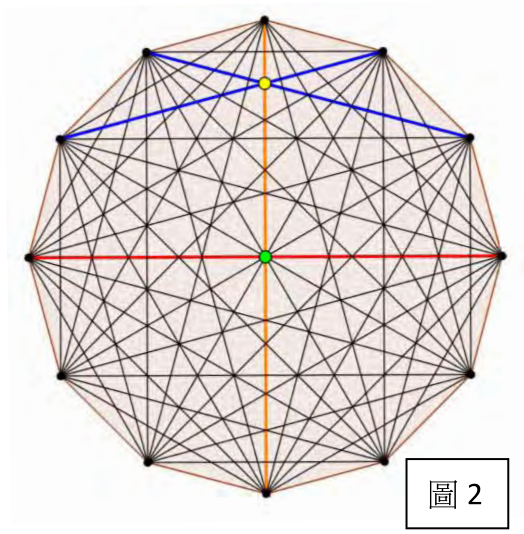


圖 2

我們可以把正偶數邊形呈現為以中線(橘線)為對稱軸的對稱模式，所以只要在其中一邊選出 2 點並與相對的 2 點交叉連線(藍線)便定會在對稱軸上出現對角線三線共點(黃點)。

由於在觀察時發現，當我們不考慮中心點，正偶數邊形除了 6 的倍數外，中線上最多只會有三線共點，而當大於等於正 18 邊形在 6 的倍數時中線會有五線共點(正 24 邊形時出現了四線共點)，甚至在正 30 邊形時會有七線共點。因此，我們將 6 的倍數分開討論，先探討正偶數邊形非 6 的倍數時，中線上對角線三線共點數。

定理一：正偶數 n 邊形非 6 的倍數時，中線上對角線三線共點數

If $n=4k+2$：

$$\frac{(\frac{n-2}{2})^2-\frac{n-2}{2}-\frac{n-2}{2}}{2}=\frac{n^2-8n+12}{8}$$

If $n=4k$ ：

$$\frac{(\frac{n-2}{2})^2-\frac{n-2}{2}-\frac{n-2}{2}+1}{2}=\frac{n^2-8n+16}{8}$$

證明：將中線對稱軸的一邊與另一邊所有頂點相連，因為各有$\frac{n-2}{2}$個點，所以會有$(\frac{n-2}{2})^2$條線，以中線為對稱軸互相對稱的兩點相連會垂直中線，並不會跟其他線相交，共有$\frac{n-2}{2}$條

當 $n=4k+2$ ，除了對稱軸外會有$\frac{n-2}{2}$條對角線交於中心點

因此中線上對角線三線共點數為

$$\frac{(\frac{n-2}{2})^2-\frac{n-2}{2}-\frac{n-2}{2}}{2}=\frac{n^2-8n+12}{8}$$

當 $n=4k$ ，除了對稱軸外會有$\frac{n-2}{2}$條對角線交於中心點，其中一條也會垂直中線

因此中線上對角線三線共點數為

$$\frac{(\frac{n-2}{2})^2-\frac{n-2}{2}-\frac{n-2}{2}+1}{2}=\frac{n^2-8n+16}{8}$$

三、 將正偶數 n 邊形中線上對角線交點座標化並利用 Excel 計算座標位置進行探討

為了更進一步探討中線上的多線共點，我們將圖形座標化，以圖形中心點為原點，內接於一單位圓，利用圓周角、圓心角、三角函數及相似形的概念，算出每一個中線上交點的座標，希望找出哪些線在同位置相交。

計算三線(兩線+中線)交點座標的方法：

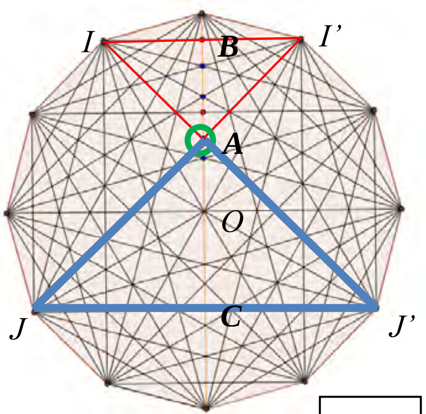


圖 3

1. 我們先將正多邊形以中線部份分割成左、右半邊，並將左半邊上的點從第一點開始依序編號 1~$\frac{n-2}{2}$，接著在左半邊任取兩點 I、J，且令 $J>I$，在右半邊做 I、J 以中線為對稱軸的對稱點 I'、J'。
2. 之後將$\overline{IJ'}$、$\overline{I'J}$與中線交點記為< I,J >，且交中線於 A 點。(往後的表格即以此表示)
3. 先算出$\overline{BC}$的長度，接著分別算出$\overline{BI}$與$\overline{CJ}$的長度，由於$\triangle AIB \sim \triangle AJC$(AA)所以我們可以透過兩相似三角形計算出$\overline{AB}$的長度，且$\overline{AO}=\overline{BO}-\overline{AB}$。
4. 由於正 n 邊為對稱圖形，因此，我們只針對**中線的上半部**進行探討，而下半部可利用對稱的方式求得。

依照上述方法，我們可推導得三線共點的座標公式，由於對稱的關係，對於 I 點我們只需討論範圍$1 \le I < \frac{n-2}{4}$，而且在推導的過程我們發現 J 需分三部分討論，在 $J < \frac{n}{4}$ 、$J > \frac{n}{4}$ 、$J = \frac{n}{4}$ 三種情況下分別會有不同結果。

定理二：若一正 n 邊形，n 是偶數，以圖形中心點為原點，內接於一單位圓，令對角線 $\overline{IJ'}$、$\overline{I'J}$的交點 A 在 O 點上方，其中$1 \le I < \frac{n-2}{4}$ ，且 $J > I$ 則 A 座標$(0, \overline{AO})$，其中

$$\text{if} \quad J < \frac{n}{4} \quad 則\ \overline{AO} = \frac{\cos\left(\frac{180^o \times (I+J)}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^o \times (J-I)}{n}\right)}$$

$$\text{if} \quad J > \frac{n}{4} \quad 則\ \overline{AO} = \frac{\sin\left(180^o \times \left((\frac{n}{2}-J)-I\right) \times \frac{1}{n}\right)}{\sin\left(180^o \times \left((\frac{n}{2}-J)+I\right) \times \frac{1}{n}\right)}$$

$$\text{if} \quad J = \frac{n}{4} \quad 則\ \overline{AO} = \frac{\cos\left(\frac{360^o \times I}{n}\right)}{\sin\left(\frac{360^o \times I}{n}\right)+1}$$

證明：如右圖，因為正 n 邊形內接於一單位圓，因此$\overline{IO}=1$

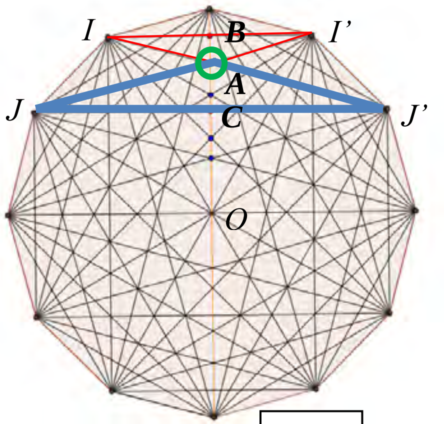


圖 4

我們可知 $\overline{BO} = \cos\left(\frac{360^o \times I}{n}\right)$ 、$\overline{BI} = \sin\left(\frac{360^o \times I}{n}\right)$、

$$\overline{CJ} = \sin\left(\frac{360^0 \times J}{n}\right)$$

當 $J < \frac{n}{4}$ ，$\overline{CO} = \cos\left(\frac{360^o \times J}{n}\right)$

$$\overline{BC} = \cos\left(\frac{360^o \times I}{n}\right) - \cos\left(\frac{360^o \times J}{n}\right)$$

$\because \Delta AIB \sim \Delta AJC$ (AA 相似)

$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BI} : \overline{CJ}$

$$\overline{AO}=\overline{BO}-\overline{AB}$$

$$=\cos\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)-\left(\cos\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)-\cos\left(\frac{360^o\times J}{n}\right)\right)\times\frac{\sin\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)}{\sin\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)+\sin\left(\frac{360^o\times J}{n}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)\times\sin\left(\frac{360^o\times J}{n}\right)+\cos\left(\frac{360^o\times J}{n}\right)\times\sin\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)}{\sin\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)+\sin\left(\frac{360^o\times J}{n}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{180^o\times(I+J)}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^o\times(J-I)}{n}\right)}$$

當 $J>\frac{n}{4}$，$\overline{CO}=\cos\left(\frac{360^o\times(\frac{n}{2}-J)}{n}\right)$，

$$\overline{BC}=\cos\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)+\cos\left(\frac{360^o\times(\frac{n}{2}-J)}{n}\right)$$

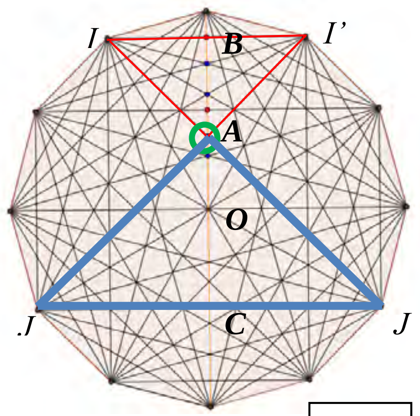


圖 5

利用與 $J<\frac{n}{4}$ 時相同的方法可得 $\overline{AO}=\frac{\sin\left(180^o\times\left((\frac{n}{2}-J)-I\right)\times\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(180^o\times\left((\frac{n}{2}-J)+I\right)\times\frac{1}{n}\right)}$

當 $J=\frac{n}{4}$，C 點即為 O 點，$\overline{BO}=\cos\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)$

利用與 $J<\frac{n}{4}$ 時相同的方法可得 $\overline{AO}=\frac{\cos\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)}{\sin\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)+1}$

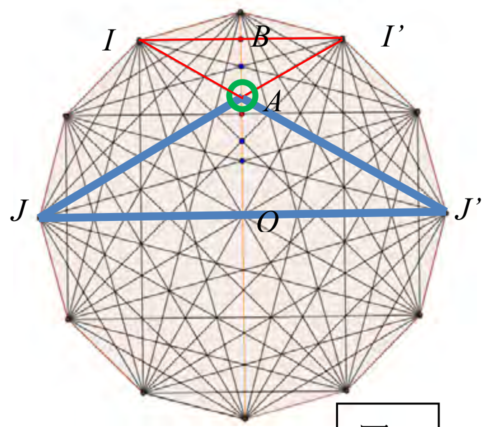


圖 6

求出中線上三線共點座標公式後，一開始我們還是無法從座標公式推得五線共點，為了方便研究，我們利用 Excel 寫入中線上三線共點的座標公式來求出各點位置，並利用 Excel 找出其中線上對角線交點有哪些點的座標相同，以利研究。

Excel 公式：

```
=IF(A2=0,0,IF(B2=3/4*A$1,COS(RADIANS(360/A$1*A2))/SIN(RADIANS(360/A$1*A2)+1),IF(B2<1/4*A$1,COS(RADIANS(180/A$1*(A2+B2)))/COS(RADIANS(180/A$1*(B2-A2))),SIN(RADIANS(180/A$1*(A$1/2-A2-B2)))/SIN(RADIANS(180/A$1*(A2+A$1/2-B2))))))
```

以正 24 邊形(輸入任意邊形都可如附錄二)為例，(如下表二)，在邊數欄輸入 24，即可得到 *I* 點與 *J* 點為有效範圍的值時座標位置的值，並利用排序及格式化條件標示出重複的值，即可得到多線共點的位置，如< 1 , 9 >與< 3 , 5 >：

表二

	A	B	C	D	E	F
1	邊數	I點	J點	分子三角函數內角度	分母三角函數內角度	座標位置
2	24	1	2	45/2	15/2	0.931852
3		1	3	30/1	15/1	0.896575
4		1	4	75/2	45/2	0.858719
5		1	5	45/1	30/1	0.816497
6		2	3	75/2	15/2	0.800199
7		1	6	15/1	15/1	0.767327
8		2	4	45/1	15/1	0.732051
9		1	7	30/1	45/1	0.707107
10		2	5	105/2	45/2	0.658919
11		1	8	45/2	75/2	0.628626
12		3	4	105/2	15/2	0.614014
13		2	6	30/1	30/1	0.57735
14		1	9	15/1	30/1	0.517638
15		3	5	60/1	15/1	0.517638
16		2	7	45/2	105/2	0.482362
17		3	6	45/1	45/1	0.414214
18		4	5	135/2	15/2	0.385986
19		2	8	15/1	45/1	0.366025
20		1	10	15/2	45/2	0.341081
21		3	7	15/1	60/1	0.298858
22		4	6	60/1	60/1	0.267949
23		2	9	15/2	75/2	0.214413
24		3	8	15/2	105/2	0.164525
25		4	7	15/2	135/2	0.141281
26		5	6	75/1	75/1	0.131652
27		1	11	0/1	15/1	0
28		2	10	0/1	30/1	0

觀察了很多 Excel 表格後，我們發現如下

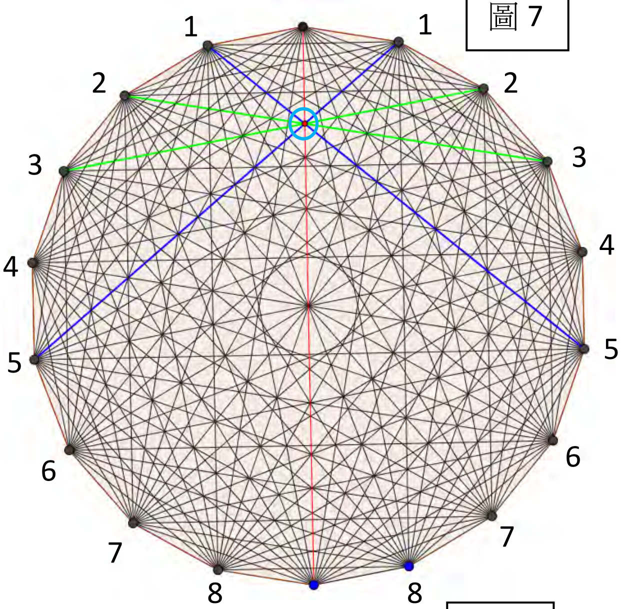
觀察發現二：在中線上，除了中心點，五線共點只會出現在 6 的倍數邊形，七線共點只會出現在 30 的倍數邊形。在觀察中，並沒有出現超過七線的共點。

由於五線共點只會出現在 6 的倍數上，為了解決中線上五線共點的交點數個數，我們針對 6 的倍數邊形進行研究。

我們先利用 Excel 算出 6 的倍數之交點座標，找出交點坐標位置相同的對角線組，將其標示出，並表格化以利觀察。舉個例子，如右圖，對角線三線共點如<1, 5>(藍色線)、<2, 3>(綠色線)，我們可以發現<1, 5> 、<2, 3>交於同一點，所以<1, 5> 、<2, 3>即為五線共點

我們將正 18、24、30、36 邊形中線上五線共點及七線共點整理如下表(三)，其餘如附錄三。

圖 7



表三

	對角線	與原點距離	對角線	與原點距離			值
18 邊形	<1,5>	sin30°/sin50°	<2,3>	cos50°/cos10°			0.652703645
	<1,6>	sin20°/sin40°	<2,4>	cos60°/cos20°			0.532088886
	<1,7>	sin10°/sin30°	<3,4>	cos70°/cos10°			0.347296355
24 邊形	<1,9>	sin15°/sin30°	<3,5>	cos60°/cos15°			0.51763809
30 邊形	<1,9>	sin30°/sin42°	<3,4>	cos42°/cos6°			0.747238275
	<2,4>	cos36°/cos12°	<1,7>	cos48°/cos36°			0.827090915
	<3,6>	cos54°/cos18°	<1,11>	sin18°/sin30°	<2,8>	sin30°/sin54°	0.618033989
	<4,8>	sin18°/sin66°	<1,13>	sin6°/sin18°			0.338261213
	<2,9>	sin24°/sin48°	<3,7>	cos60°/cos24°			0.547318139
	<1,12>	sin12°/sin24°	<4,6>	cos60°/cos12°			0.511170297
	<6,7>	cos78°/cos6°	<2,12>	sin6°/sin30°			0.209056927
36 邊形	<4,6>	cos50°/cos10°	<2,10>	sin30°/sin50°			0.652703645
	<4,8>	cos60°/cos20°	<2,12>	sin20°/sin40°			0.532088886
	<1,11>	sin30°/sin40°	<3,5>	cos40°/cos10°			0.777861913
	<1,13>	sin20°/sin30°	<3,7>	cos50°/cos20°			0.684040287
	<1,15>	sin10°/sin20°	<5,7>	cos60°/cos10°			0.507713306
	<6,8>	cos70°/cos10°	<2,14>	sin10°/sin30°			0.347296355

觀察發現三：1.在6的倍數邊形中線上多線共點，我們發現絕大部分是 $\dfrac{\sin(a)}{\sin(b)}=\dfrac{\cos(c)}{\cos(d)}$ 的型態，

而且如果符合這個型態，必有底下兩個特性：

(1) 必有兩個角度相同 $a=d$ or $b=c$

(2) 必存在 $\sin(30^\circ)$或 $\cos(60^\circ)$

2.在正 30 邊形中線上多線共點出現了 $\dfrac{\sin(a)}{\sin(b)}=\dfrac{\sin(c)}{\sin(d)}$ 及 $\dfrac{\cos(a)}{\cos(b)}=\dfrac{\cos(c)}{\cos(d)}$ 型態，這樣的型態也有兩個角度相同，但不見得有 $\sin(30^\circ)$或 $\cos(60^\circ)$

例如：正 18 邊形中的 $\dfrac{\sin(30^\circ)}{\sin(50^\circ)}=\dfrac{\cos(50^\circ)}{\cos(10^\circ)}$ 我們可以發現如上述觀察發現三所說，分別各有 1 個50°，而且也存在了一個 $\sin(30^\circ)$。

正 24 邊形中的 $\dfrac{\sin(15^\circ)}{\sin(30^\circ)}=\dfrac{\cos(60^\circ)}{\cos(15^\circ)}$ 我們可以發現如上述觀察發現三所說，分別各有 1 個15°，而且也存在了一個 $\cos(60^\circ)$。

在我們的觀察中也發現，只要出現 $\sin(30^\circ)$或 $\cos(60^\circ)$，該位置必定會有五線共點，因此我們可以利用這個特性找出兩組跟原點相等的距離，而確定哪幾條線共點。

定理三：若$\langle I_1 , J_1\rangle$、$\langle I_2 , J_2\rangle$與原點距離相等，型態為 $\dfrac{\sin(a)}{\sin(b)}=\dfrac{\cos(b)}{\cos(d)}$，且 $a=30^\circ$ 或 $d=60^\circ$

則 當 $a=30^\circ$ $\Rightarrow \begin{cases} d=90^\circ-2b & , \quad 2b<90^\circ \\ d=2b-90^\circ & , \quad 2b>90^\circ \end{cases}$

當 $d=60^\circ$ $\Rightarrow \begin{cases} a=2b & , \quad 2b<90^\circ \\ a=180^\circ-2b & , \quad 2b>90^\circ \end{cases}$

證明：當 $a=30^\circ$ 則 $\dfrac{\frac{1}{2}}{\sin(b)}=\dfrac{\cos(b)}{\cos(d)}$ $\Rightarrow \cos(d)=2\sin(b)\cos(b)$

$$\Rightarrow \cos(d)=\sin(2b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=90^\circ-2b & , \quad 2b<90^\circ \\ d=2b-90^\circ & , \quad 2b>90^\circ \end{cases}$$

當 $d=60^\circ$ 則 $\dfrac{\sin(a)}{\sin(b)}=\dfrac{\cos(b)}{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow \sin(a)=2\sin(b)\cos(b)$

$$\Rightarrow \sin(a)=\sin(2b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=90^\circ-2b & , \quad 2b<90^\circ \\ d=2b-90^\circ & , \quad 2b>90^\circ \end{cases}$$

由定理三我們可以找出或確定哪兩組線會共點，不需要借助 Excel 的運算。另外，若結合定理二，就可以找出所有形式。

例如：正 18 邊形時，我們假設在此情形中 $\frac{\sin(a)}{\sin(b)}=\frac{\cos(c)}{\cos(d)}$ ，$a=d, c=60°$，再代回定理二的 $J<\frac{n}{4}$ $\dfrac{\cos\left(\frac{180^o\times(I+J)}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^o\times(J-I)}{n}\right)}$ 中可知 $I+J=6$，而其中有<1,5>、<2,4>、<3,3>三種可能，但由於 $5>\frac{n}{4}$ 且<3,3>僅能畫出一直線，所以也不包含在內，所以 $I=2, J=4$，將其代回定理二中得 $\frac{\cos(60^o)}{\cos(20^o)}$ ，在依據我們的判別法可得 $\frac{\sin(20^o)}{\sin(40^o)}=\frac{\cos(60^o)}{\cos(20^o)}$ 。

但由於 6 的倍數之五線共點除了上述的情況外還會出現其他例外，如：正 30 邊形的<1,7> , <2,4> $\frac{\cos(48^o)}{\cos(36^o)}=\frac{\cos(36^o)}{\cos(12^o)}$ 以及正 30 邊形的<1,13> , <4,8> $\frac{\sin(6^o)}{\sin(18^o)}=\frac{\sin(18^o)}{\sin(66^o)}$ ，另外在正 60 邊形時出現了 $\frac{\sin(12^o)}{\sin(18^o)}=\frac{\sin(30^o)}{\sin(48^o)}$ 、$\frac{\cos(42^o)}{\cos(36^o)}=\frac{\cos(24^o)}{\cos(6^o)}$ 的情形(如附錄三)，暫時無法找出它的規律，因此我們決定先探討非 6 倍數正偶數邊形之中線外對角線交點數探討。

四、 正偶數邊形非中線上對角線三線共點探討

在探討非中線上對角線三線共點時，我們一開始做了很多不一樣方法觀察，例如：將所有三線共點做有序的連線，看是否有規律；每隔 1 點對角線連線標示一種顏色，每隔 2 點對角線連線標示另一種顏色，以此類推連出所有對角線並標示顏色，以觀察三線共點是否有規律(如附錄四)。我們一直無法有效觀察到規律，直到我們發現了底下方法。

找出正偶數邊形對角線三線共點方法，(如右圖 8)：

1. 找出三個彼此間隔都為 a.個邊的點依序標示為 P、Q、R。
2. 由 P 點(第一個點)連向距離 R 點(第三個點)b 個邊的點 S。
3. 由 Q 點連向距離 R 點(第三個點)2b 個邊的點 T。
4. 由 R 點(第三個點)連向距離 T 點 $\frac{n-2a-2b}{2}$ 個邊的點 U。
5. $\overline{PS}$ 、$\overline{QT}$ 、$\overline{RU}$ 三條線必定交於同一點。

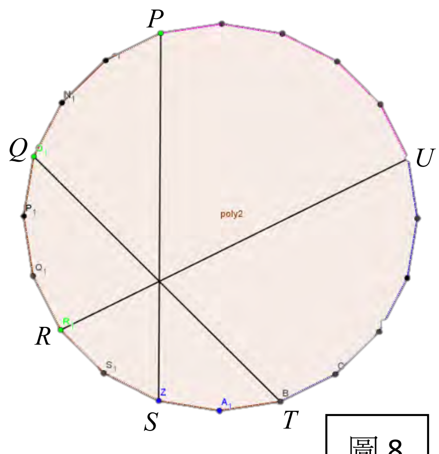


圖 8

以正二十邊形為例，(如右圖 9)：

1. 選取相鄰三點(間隔 1 個邊) P、Q、R。
2. 由 P 點連向距離 R 點 2 個邊的點 S。
3. 由 Q 點連向距離 R 點 4 個邊的點 T。
4. 由 R 點(第三個點)連向距離 T 點 $\dfrac{20-2-4}{2}=7$ 個邊的點 U。
5. $\overline{PS}$ 、$\overline{QT}$ 、$\overline{RU}$ 三條線交於同一點。

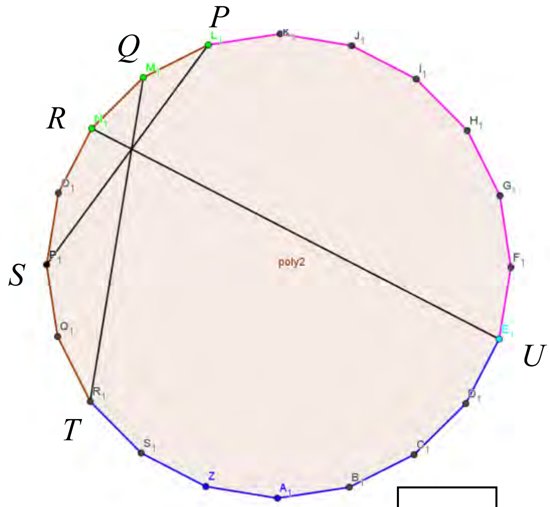


圖 9

我們再嘗試其他不同的間隔數(如$\mathrm{a}=1,\mathrm{b}=3$)，(如右圖 10)：

1. 選取相鄰三點(間隔 1 個邊) P、Q、R。
2. 由 P 點(第一個點)連向距離 R 點 3 個邊的點 S。
3. 由 Q 點連向距離 R 點 6 個邊的點 T。
4. 由 R 點(第三個點)連向距離 T 點 $\dfrac{20-2-6}{2}=6$ 個邊的點 U。
5. $\overline{PS}$ 、$\overline{QT}$ 、$\overline{RU}$ 三條線交於同一點。

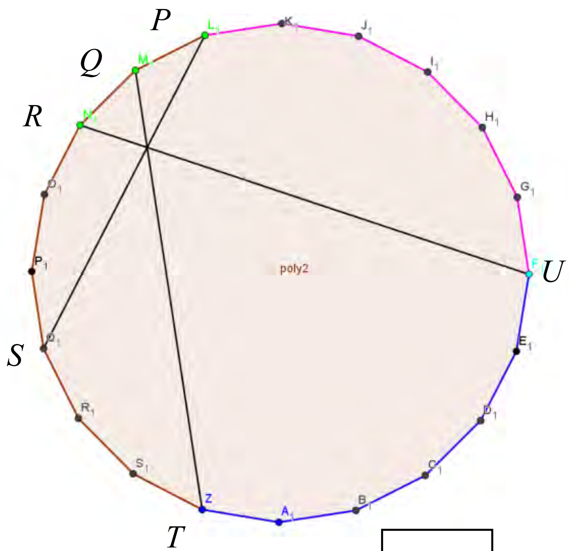
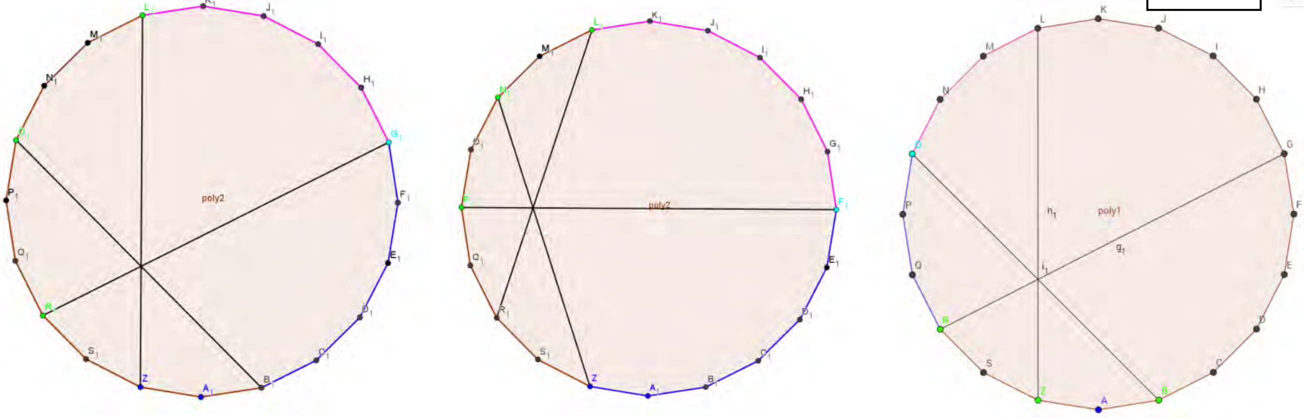


圖 10

這方法是我們畫了很多張圖後發現的規律，底下我們將證明以這樣的方法必定三線共點。

圖 11



定理四： 一正偶數 n 邊形，將三個彼此間隔都為 a 個邊的點依序標示為 P、Q、R。由 P 點(第一個點)連向距離 R 點(第三個點)b 個邊的點 S。由 Q 點連向距離 R 點(第三個點)2b 個邊的點 T。由 R 點(第三個點)連向距離 T 點 $\dfrac{n-2a-2b}{2}$ 個邊的點 U。

則 $\overline{PS}$ 、$\overline{QT}$ 、$\overline{RU}$ 三條線必定交於同一點。

證明： 我們令 $\overline{PS}$ 、$\overline{QT}$ 相交於 A 點，(如下圖 12-1)，$\overline{QT}$ 、$\overline{RU}$ 相交於 A' 點，(如下圖 12-2)

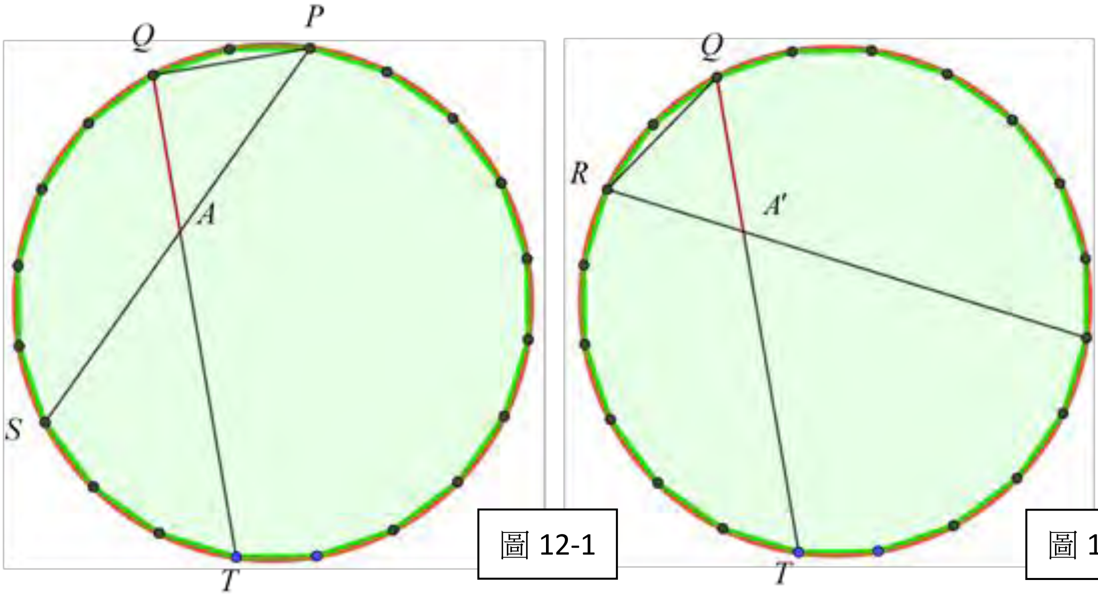


圖 12-1

圖 12-2

圖 12

我們只要證明 $\overline{QA}=\overline{QA'}$，則 $\overline{PS}$ 、$\overline{QT}$ 、$\overline{RU}$ 三條線即交於一點

如圖(12-1) $\angle QPS=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{QS}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a+b}{n}\times 360^{\circ}$

$\angle Q\mathrm{AP}=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{QP}+\overset{\frown}{ST})=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{a}{n}\times 360^{\circ}+\dfrac{b}{n}\times 360^{\circ})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a+b}{n}\times 360^{\circ}$

$\therefore \triangle QAP$ 為等腰三角形　$\overline{QA}=\overline{QP}$

又如圖(12-2) $\angle QRU=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{QU}=\dfrac{1}{2}\times(a+\dfrac{n-2a-2b}{2})\dfrac{1}{n}\times 360^{\circ}$

$\angle QA'R=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{QR}+\overset{\frown}{TU})=\dfrac{1}{2}\times(a+\dfrac{n-2a-2b}{2})\dfrac{1}{n}\times 360^{\circ}$

$\therefore \triangle QA'R$ 為等腰三角形　$\overline{QA'}=\overline{QR}$

又 $\overline{QP}=\overline{QR}$ (等弧對等弦) $\therefore \overline{QA}=\overline{QA'}$　故 $\overline{PS}$ 、$\overline{QT}$ 、$\overline{RU}$ 三條線交於一點

由找出正偶數邊形對角線外三線共點方法，我們想要推得正偶數邊形對角線外三線共點數的公式。

依照我們的方法，只要知道一開始間隔幾邊及 S 點會落在哪一點，T 及 U 的位置就被決定了，因此我們要探討三線共點數，只要探討間隔幾邊時 S 點的位置可以落在幾點就可以。

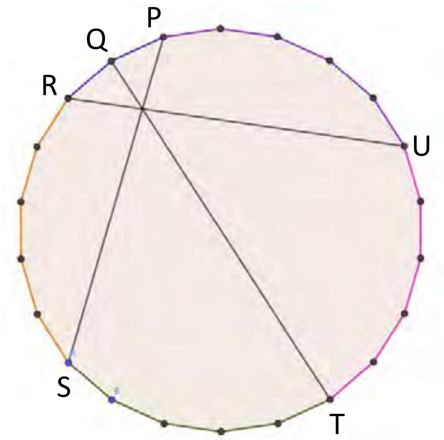


圖 13

首先，當點 P、Q、R 分別間隔 1 個邊時(如右圖 13 藍線部分)，在 n 個邊中就已用去 2 個邊，還剩$\mathrm{n}-2$個邊，接著 $\overline{PS}$ 、 $\overline{QT}$ 、 $\overline{RU}$ 又將其分為 4 個部分(如右圖 13 橘、綠、粉、紫部分)，那麼 S 點僅能在最多間隔 R 點 $\frac{n-2}{4}$ 邊的點上，.

在往後即會與之前重複，而當$\overline{RS}$ 、$\overline{ST}$之距離與$\overline{PQ}$ 、$\overline{QR}$一樣是相距 1 個邊時(如右圖 14)，就會出現對稱情形，因此為中線上的點，所以須減 1；相同的當 $\frac{n-2}{4}$ 為整數時(如右圖 13)，S 所連到的第 $\frac{n-2}{4}$ 個點一樣會在中線上，當 $\frac{n-2}{4}$ 為分數時則不會有中線上的點之情形，但我們必須取整數，所以我們加上天花板符號(天花板符號為大於等於的最小整數)再減 1。因此當點 P、Q、R 分別間隔 1 個邊時 S 點的位置可以落在$\left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil - 2$點上。(註：⌈ ⌉為天花板符號)

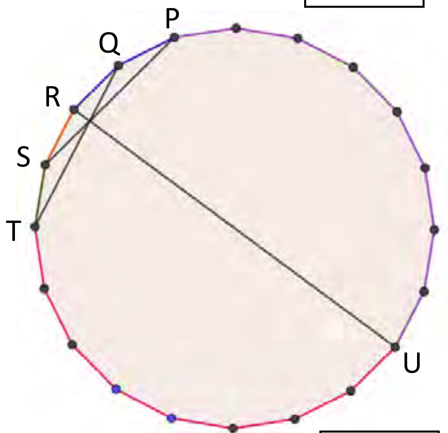


圖 14

以同樣的方式分析，可以得到當點 P、Q、R 分別間隔 2 個邊時，S 點的位置可以落在$\left\lceil \frac{n-4}{4} \right\rceil - 3$點上；當點 P、Q、R 分別間隔 2 個邊時，S 點的位置可以落在$\left\lceil \frac{n-6}{4} \right\rceil - 4$點上，以此類推直到最大的 j 使得$\left\lceil \frac{n-2j+2}{4} \right\rceil - j > 0$，因此將這些數全部加起來乘以 2($P$ 點的左右兩側)最後再乘以 n(共有 n 個點)，就是所有正偶數 n 邊形非中線上所有對角線三線共點數。

定理五：正偶數 n 邊形非中線上所有對角線三線共點數，如下：

if $n = 4k + 2$ ：

$$\left(\frac{n^2}{48} - \frac{n}{4} + \frac{5}{12}\right) \times 2n$$

if $n = 4k$ ：

$$\left(\frac{n^2}{48} - \frac{n}{4} + \frac{2}{3}\right) \times 2n$$

證明：正偶數 n 邊形非中線上所有對角線三線共點數為

$$\left(\left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil - 2 + \left\lceil \frac{n-4}{4} \right\rceil - 3 + \cdots\cdots + \left\lceil \frac{n-(2j-2)}{4} \right\rceil - j\right) \times 2n = \left(\sum_{i=2}^{j} \left\lceil \frac{n-(2i-2)}{4} \right\rceil - \sum_{i=2}^{j} i\right) \times 2n$$

$$\text{其中 } j \text{ 為最大的 } i \text{ 使得} \left\lceil \frac{n-2j+2}{4} \right\rceil - j > 0$$

先探討 j 的範圍

$\because$ j 為整數，$\frac{n-2j+2}{4}$ 是否取天花板符號並不會影響我們計算其範圍，因此

$$\frac{n-2j+2}{4} - j > 0$$

$$\Rightarrow j < \frac{n+2}{6}$$

接著想去掉運算中的天花板符號，因為 n 為偶數且不考慮 6 的倍數，因此我們分別以 $n = 4k + 2$ 跟 $n = 4k$ 來討論。

當 $n = 4k + 2$

$$\left\lceil \frac{n-2i+2}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{4k+2-2i+2}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{4k+4-2i}{4} \right\rceil$$

$$\text{當 } i \text{ 為偶數時，} \left\lceil \frac{4k+4-2i}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{4k+4-2(i+1)}{4} \right\rceil$$

$$\therefore \sum_{i=2}^{j} \left\lceil \frac{n-(2i-2)}{4} \right\rceil = \frac{n-2}{4} + \frac{n-2}{4} + \left(\frac{n-2}{4} - 1\right) + \left(\frac{n-2}{4} - 1\right) + \left(\frac{n-2}{4} - 2\right) + \left(\frac{n-2}{4} - 2\right) +$$

$$\cdots\cdots + \left(\frac{n-2}{4} - a + 1\right) + \left(\frac{n-2}{4} - a + 1\right) + \left(\frac{n-2}{4} - a\right) \times c$$

$$= 2 \times \sum_{i=1}^{a} \left(\frac{n-2}{4} - i + 1\right) + \left(\frac{n-2}{4} - a\right) \times c$$

其中 $a \le \frac{j-1}{2} < \frac{n-4}{12}$ ，c 為一等於 0 或 1 的函數，將在底下討論

$\because n=4k+2$ 且非 6 倍數，則 n 只有兩種型態 $6m-4$、$6m+4$

我們可以推導得

$$a=\begin{cases} \frac{n+2}{12}-1 & , \ if \ \ n-4 \equiv 0 \pmod 6 \\ \frac{n-2}{12}-1 & , \qquad o.w \end{cases}$$

$$c=\begin{cases} 0 & , \ if \ \ n-4 \equiv 0 \pmod 6 \\ 1 & , \qquad o.w \end{cases}$$

另外，為了統一讓 i 從 1 開始累加，我們將 $\sum_{i=2}^{j} i$ 改寫成 $\sum_{i=1}^{b} (i+1)$ ，其中

$$b=\begin{cases} \frac{n-4}{6}-1 & , \ if \ \ n-4 \equiv 0 \pmod 6 \\ \frac{n-2}{6}-1 & , \qquad o.w \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{i=2}^{j}\left\lceil \frac{n-(2i-2)}{4} \right\rceil - \sum_{i=2}^{j} i = 2\times\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{n-2}{4}-i+1\right)+\left(\frac{n-2}{4}-a\right)\times c-\sum_{i=1}^{b}(i+1) \cdots\cdots (1)$$

$if \ \ n-4 \equiv 0 \pmod 6$

$$(1)\text{式}=2\times\left(\frac{n+2}{12}-1\right)\times\left(\frac{n-2}{4}+\frac{n-2}{4}-\frac{n+2}{12}+2\right)\times\frac{1}{2}-\left(\frac{n-4}{6}-1\right)\times\left(2+\frac{n-4}{6}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{5}{12}$$

$if \quad o.w$

$$(1)\text{式}=2\times\left(\frac{n-2}{12}-1\right)\times\left(\frac{n-2}{4}+\frac{n-2}{4}-\frac{n-2}{12}+2\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{n-2}{4}-\frac{n-2}{12}+1\right)$$

$$-\left(\frac{n-2}{6}-1\right)\times\left(2+\frac{n-2}{6}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{5}{12}$$

$\therefore$ 當 $n=4k+2$ 非中線上所有對角線三線共點數為 $\left(\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{5}{12}\right)\times 2n$

當$n=4k$

與$n=4k+2$相同的推導方式得

$$\therefore \sum_{i=2}^{j}\left\lceil \frac{n-(2i-2)}{4} \right\rceil = \frac{n}{4}+\left(\frac{n}{4}-1\right)+\left(\frac{n}{4}-1\right)+\left(\frac{n}{4}-2\right)+\left(\frac{n}{4}-2\right)+$$

$$\cdots\cdots+\left(\frac{n}{4}-a+1\right)+\left(\frac{n}{4}-a+1\right)+\left(\frac{n}{4}-a\right)\times c$$

$$=2\times\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{n}{4}-i\right)+\frac{n}{4}-\left(\frac{n}{4}-a\right)\times c$$

其中$a\le\frac{j-1}{2}<\frac{n-4}{12}$，$c$ 為一等於 0 或 1 的函數，將在底下討論

$\because n=4k$ 且非 6 倍數，則 n 只有兩種型態$12m-4$、$12m+4$

我們可以推導得

$$a=\begin{cases}\frac{n-4}{12}-1 & , \quad if \;\; n-4\equiv 0 \pmod{12} \\ \frac{n+4}{12}-1 & , \quad o.w\end{cases}$$

$$c=\begin{cases}0 & , \quad if \;\; n-4\equiv 0 \pmod{12} \\ 1 & , \quad o.w\end{cases}$$

另外，為了統一讓 i 從 1 開始累加，我們將$\sum_{i=2}^{j} i$改寫成$\sum_{i=1}^{b}(i+1)$，其中

$$b=\begin{cases}\frac{n-4}{6}-1 & , \quad if \;\; n-4\equiv 0 \pmod{12} \\ \frac{n-2}{6}-1 & , \quad o.w\end{cases}$$

$$\therefore \sum_{i=2}^{j}\left\lceil \frac{n-(2i-2)}{4} \right\rceil-\sum_{i=2}^{j} i=2\times\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{n}{4}-i\right)+\frac{n}{4}-\left(\frac{n}{4}-a\right)\times c-\sum_{i=1}^{b}(i+1)\cdots\cdots(2)$$

$if \;\; n-4\equiv 0 \pmod{12}$

$$(2)\text{式}=2\times\left(\frac{n-4}{12}-1\right)\times\left(\frac{\frac{n}{4}-1+\frac{n}{4}-\frac{n-4}{12}+1}{2}\right)+\frac{n}{4}-\left(2+\frac{n-4}{6}\right)\times\left(\frac{n-4}{6}-1\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{2}{3}$$

$if \quad o.w$

(2)式

$$=2\times\left(\frac{n+4}{12}-1\right)\times\left(\frac{\frac{n}{4}-1+\frac{n}{4}-\frac{n+4}{12}+1}{2}\right)+\frac{n}{4}-\left(\frac{n}{4}-\frac{n+4}{12}+1\right)-\left(2+\frac{n-2}{6}\right)\times\left(\frac{n-2}{6}-1\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{2}{3}$$

∴ 當$n=4k$ 非中線上所有對角線三線共點數為$\left(\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{2}{3}\right)\times 2n$

五、非 6 倍數正偶數邊形所有對角線交點公式

非 6 倍數正偶數 n 邊形對角線交點僅有二線交點、三線共點及中心點$\frac{n}{2}$條線共點，

我們知道，任選四點必恰有一對角線交點，但若有三線共點，此三線本應有$C_2^3=3$個交

點，也就是每三線共點就少 2 個交點，而中心點少了$C_2^{\frac{n}{2}}-1$點。

我們可以二線交點公式結合**定理一**及**定理五**算出所有交點數。

定理六：非 6 倍數正偶數 n 邊形所有對角線交點數：

$if \quad n=4k+2$ ：

$$C_4^n-\frac{5n^3-45n^2+70n-24}{24}$$

$if \quad n=4k$ ：

$$C_4^n-\frac{5n^3-45n^2+106n-24}{24}$$

證明：我們知道非 6 倍數正偶數 n 邊形所有對角線交點數為：

$$C_4^n-三線共點數\times 2-\left(C_2^{\frac{n}{2}}-1\right)$$

而三線共點數需分$n=4k+2$、$n=4k$討論

當$n = 4k + 2$ 所有對角線交點數

$$C_4^n - 2\times\left(\left(\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{5}{12}\right)\times 2n+\left(\frac{n^2-8n+12}{8}\right)\times\frac{n}{2}\right)-C_2^{\frac{n}{2}}+1$$

$$=C_4^n-\frac{5n^3-45n^2+70n-24}{24}$$

當$n = 4k + 2$ 所有對角線交點數

$$C_4^n - 2\times\left(\left(\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{2}{3}\right)\times 2n+\left(\frac{n^2-8n+16}{8}\right)\times\frac{n}{2}\right)-C_2^{\frac{n}{2}}+1$$

$$=C_4^n-\frac{5n^3-45n^2+106n-24}{24}$$

得到了非 6 倍數正偶數 n 邊形所有對角線交點數的公式，我們製作了各正多邊形對角線個數的表格，(如下表四)。

表四

邊數			3	4	5	6	7	8	9	10
交點數			0	1	5	13	35	49	126	161
邊數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
交點數	330	301	715	757	1365	1377	2380	1837	3876	3841
邊數	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
交點數	5985	5941	8855	7297	12650	12481	17550	17249	23751	16801
邊數	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
交點數	31465	30913	40920	40257	52360		66045	64981	82251	80881
邊數	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
交點數	101270		123410	121441	148995	146741	178365		211876	208801
邊數	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
交點數	249900	246273	292825		341055	336337	395010	389761	455126	
邊數	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
交點數	521855	515221	595665	588161	677040		766480	757249	864501	854421

邊數	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
交點數	971635		1088430	1076257	1215450	1202017	1353275		1502501	1486561
邊數	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
交點數	1663740	1646561	1837620		2024785	2004661	2225895	2204049	2441626	
邊數	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
交點數	2672670	2647393	2919735	2892757	3183545		3464840	3433921	3764376	3731351

為 6 的倍數之 n 邊形，其交點數量還不確定

希望我們的這篇研究對於需要運用到正多邊形對角線交點個數的研究會有幫助。

肆、研究結果

一、觀察發現正偶數邊形的對角線交點中會出現三線共點，四線共點會出現在邊數大於等於 12 且為 6 的倍數時；五線共點會出現在大於等於 18 且為 6 的倍數時；七線共點則會出現在大於等於 30 且為 30 的倍數時。

二、正偶數 n 邊形非 6 的倍數時，中線上對角線三線共點數

當 $n=4k+2$： $\dfrac{n^2-8n+12}{8}\times\dfrac{n}{2}$

當 $n=4k$ ： $\dfrac{n^2-8n+16}{8}\times\dfrac{n}{2}$

三、若一正 n 邊形，n 是偶數，以圖形中心點為原點，內接於一單位圓，令對角線 $\overline{IJ'}$、$\overline{I'J}$的交點 A 在 O 點上方，其中$1\le I<\frac{n-2}{4}$ ，且 $J>I$ 則 A 座標(0 , $\overline{AO}$)，其中

$$\text{if}\quad J<\frac{n}{4}\quad 則\ \overline{AO}=\frac{\cos\left(\dfrac{180^o\times(I+J)}{n}\right)}{\cos\left(\dfrac{180^o\times(J-I)}{n}\right)}$$

$$\text{if}\quad J>\frac{n}{4}\quad 則\ \overline{AO}=\frac{\sin\left(180^o\times\left((\frac{n}{2}-J)-I\right)\times\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(180^o\times\left((\frac{n}{2}-J)+I\right)\times\frac{1}{n}\right)}$$

if $\quad J=\dfrac{n}{4}\quad$ 則 $\overline{AO}=\dfrac{\cos\left(\dfrac{360^{o}\times I}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{360^{o}\times I}{n}\right)+1}$

四、觀察中發現，只要出現 sin(30º)或 cos(60º)，該位置必定會有五線共點，因此我們可以利用這個特性找出兩組跟原點相等的距離，而確定哪幾條線共點。

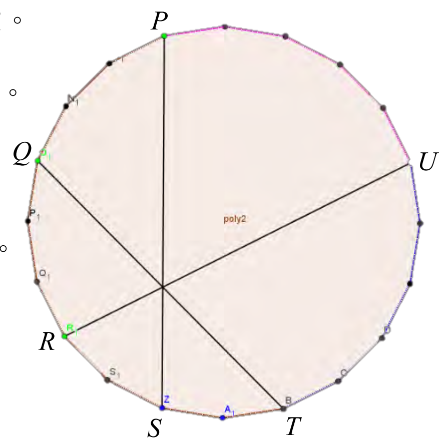
若 $<I_1, J_1>$、$<I_2, J_2>$ 與原點距離相等，型態為 $\dfrac{\sin(a)}{\sin(b)}=\dfrac{\cos(b)}{\cos(d)}$，且 a=30º 或 b=60º

則 當 a=30º $\Rightarrow\begin{cases} d=90^{o}-2b & , \quad 2b<90^{o} \\ d=2b-90^{o} & , \quad 2b>90^{o}\end{cases}$

當 b=60º $\Rightarrow\begin{cases} a=2b & , \quad 2b<90^{o} \\ a=180^{o}-2b & , \quad 2b>90^{o}\end{cases}$

由此我們可以找出或確定哪兩組線會共點，不需要借助 Excel 的運算。另外，若結合定理二，就可以找出所有形式。

五、**找出正偶數 n 邊形對角線三線共點方法：**



1. 找出三個彼此間隔都為 a 個邊的點依序標示為 P、Q、R。
2. 由 P 點(第一個點)連向距離 R 點(第三個點)b 個邊的點 S。
3. 由 Q 點連向距離 R 點(第三個點)2b 個邊的點 T。
4. 由 R 點(第三個點)連向距離 T 點 $\dfrac{n-2a-2b}{2}$ 個邊的點 U。
5. $\overline{PS}$ 、$\overline{QT}$ 、$\overline{RU}$ 三條線必定交於同一點。

六、正偶數 n 邊形非中線上所有對角線三線共點數，如下：

if $n=4k+2$ ：

所有對角線三線共點數 $=\left(\dfrac{n^2}{48}-\dfrac{n}{4}+\dfrac{5}{12}\right)\times 2n$

if $n=4k$：

所有對角線三線共點數 $=\left(\dfrac{n^2}{48}-\dfrac{n}{4}+\dfrac{2}{3}\right)\times 2n$

七、非 6 倍數正偶數 n 邊形所有對角線交點數：

$if \quad n=4k+2$ ：

$$C_4^n-\frac{5n^3-45n^2+70n-24}{24}$$

$if \quad n=4k$ ：

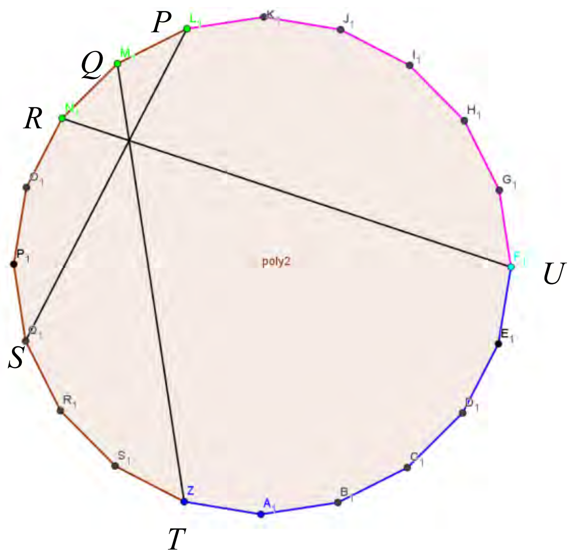
$$C_4^n-\frac{5n^3-45n^2+106n-24}{24}$$

伍、未來展望

在這篇科展中，我們已經找到了所有非 6 倍數的正偶數邊形對角線交點數計算方法。而以下兩點是我們將來還要繼續探討的：

（一） 我們雖然已看到部分規律，如對角線五線共點僅出現在 6 的倍數上、對角線七線共點僅出現在 30 的倍數上，且注意到定理三中 $\frac{\sin(a)}{\sin(b)}=\frac{\cos(b)}{\cos(d)}$ 的特殊形式，但我們尚未找到完整的 6 的倍數正偶數邊形對角線交點數計算方法，而我們未來會接續目前觀察到的規律，持續往此方向研究，希望能夠導出包含 6 的倍數的正偶數邊形對角線交點完整公式。

（二） 此外，因為時間關係，我們尚未證明三線共點是否一定只出現在定理四(一正偶數邊形，將三個彼此間隔都為 a 個邊的點依序標示為 P、Q、R。由 P 點(第一個點)連向距離 R 點(第三個點)b 個邊的點 S。由 Q 點連向距離 R 點(第三個點)2b 個邊的點 T。由 R 點(第三個點)連向距離 T 點 b 個邊的點 U。則 $\overline{PS}$、$\overline{QT}$、$\overline{RU}$ 三條線交於同一點)的狀態下，我們將會再花時間寫出完整證明。

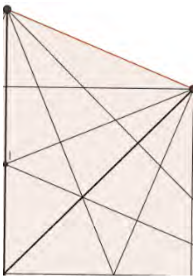
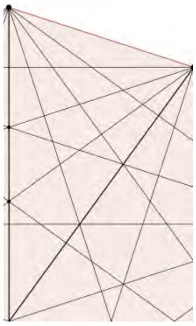
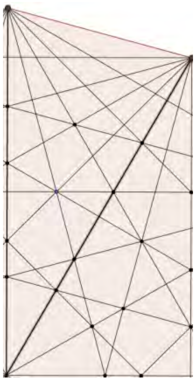
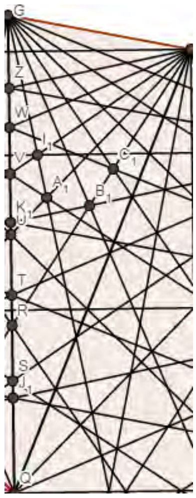
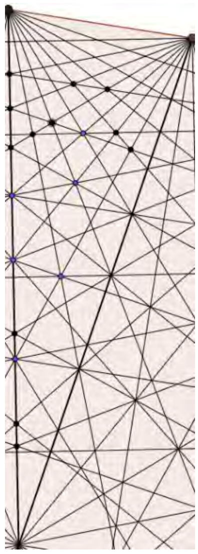
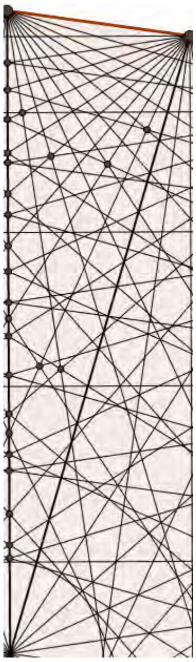
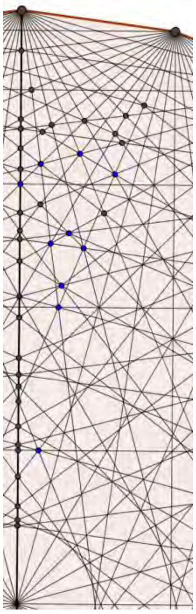
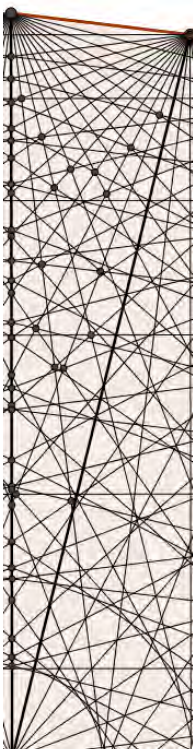
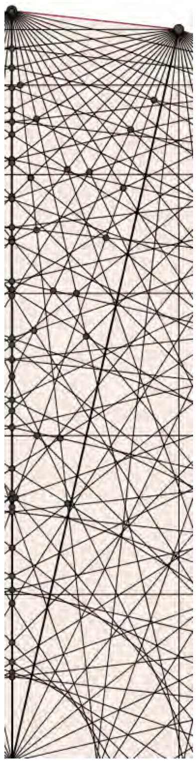
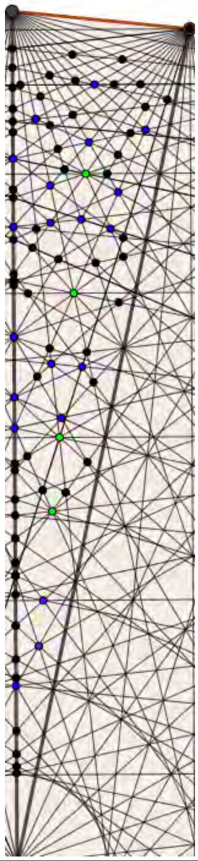


陸、參考資料

高中數學第三冊 第一章 三角 南一書局

柒、附錄

附錄一：我們先計算一條中線上的對角線三線以上交點，再加上兩中線所夾小三角形內的角線三線以上交點，最後乘以正 n 邊形的邊數。

8	10	12	14	16	18
					
20	22	24	26	28	30
					

附錄二：在邊數下輸入任意偶數都能得出中線上所有點的座標

	A	B	C	D	E	H	I
1	邊數	I點	J點	分子內三角函數角度	分母內三角函數角度	座標位置	
2	210	1	2	18/7	6/7	0.999104865	
3		1	3	24/7	12/7	0.998657096	
4		1	4	30/7	18/7	0.998208927	
5		1	5	36/7	24/7	0.997760155	
6		1	6	6/1	30/7	0.997310578	
7		1	7	48/7	36/7	0.996859992	
8		1	8	54/7	6/1	0.99640819	
9		1	9	60/7	48/7	0.995954965	
10		1	10	66/7	54/7	0.995500107	
11		1	11	72/7	60/7	0.995043401	
12		1	12	78/7	66/7	0.994584631	
13		1	13	12/1	72/7	0.994123576	
14		1	14	90/7	78/7	0.99366001	
15		1	15	96/7	12/1	0.993193704	
16		1	16	102/7	90/7	0.992724422	
17		1	17	108/7	96/7	0.992251925	
18		1	18	114/7	102/7	0.991775965	
19		1	19	120/7	108/7	0.991296288	
20		1	20	18/1	114/7	0.990812634	
21		1	21	132/7	120/7	0.990324733	
22		1	22	138/7	18/1	0.989832308	
23		1	23	144/7	132/7	0.989335072	
24		1	24	150/7	138/7	0.988832729	
25		1	25	156/7	144/7	0.98832497	
26		1	26	162/7	150/7	0.987811477	
27		1	27	24/1	156/7	0.987291918	
28		1	28	174/7	162/7	0.986765948	
29		1	29	180/7	24/1	0.986233209	
30		1	30	186/7	174/7	0.985693324	
31		1	31	192/7	180/7	0.985145903	
32		1	32	198/7	186/7	0.984590537	

附錄三:

18 邊形							
1,1	cos20°	2,2	cos40°	3,3	cos60°	4,4	cos80°
1,2	cos30°/cos10°	2,3	cos50°/cos10°	3,4	cos70°/cos10°	4,5	0
1,3	cos40°/cos20°	2,4	cos60°/cos20°	3,5	sin10°/sin70°		
1,4	cos50°/cos30°	2,5	sin20°/sin60°	3,6	0		
1,5	sin30°/sin50°	2,6	sin10°/sin50°				
1,6	sin20°/sin40°	2,7	0				
1,7	sin10°/sin30°						
1,8	0						
24 邊形							
1,1	cos15°	2,2	cos30°	3,3	cos45°	4,4	cos60°
1,2	cos22.5°/cos7.5°	2,3	cos37.5°/cos7.5°	3,4	cos52.5°/cos7.5°	4,5	cos67.5°/cos7.5°
1,3	cos30°/cos15°	2,4	cos45°/cos15°	3,5	cos60°/cos15°	4,6	cos60/sin60+1
1,4	cos37.5°/cos22.5°	2,5	cos52.5°/cos22.5°	3,6	cos45°/sin45°+1	4,7	sin7.5°/sin67.5°
1,5	cos45°/cos30°	2,6	cos30°/sin30°+1	3,7	sin15°/sin60°	4,8	0
1,6	cos15°/sin15°+1	2,7	sin22.5°/sin52.5°	3,8	sin7.5°/sin52.5°		

1,7	sin30°/sin45°	2,8	sin15°/sin45°	3,9	0		
1,8	sin22.5°/sin37.5°	2,9	sin7.5°/sin37.5°				
1,9	sin15°/sin30°	2,10	0				
1,10	sin7.5°/sin22.5°						
1,11	0						
5,5	cos75°						
5,6	cos75°/sin75°+1						
5,7	0						
30 邊形							
1,1	cos12°	2,2	cos24°	3,3	cos36°	4,4	cos48°
1,2	cos18°/cos6°	2,3	cos30°/cos6°	3,4	cos42°/cos6°	4,5	cos54°/cos6°
1,3	cos24°/cos12°	2,4	cos36°/cos12°	3,5	cos48°/cos12°	4,6	cos60°/cos12°
1,4	cos30°/cos18°	2,5	cos42°/cos18°	3,6	cos54°/cos18°	4,7	cos66°/cos18°
1,5	cos36°/cos24°	2,6	cos48°/cos24°	3,7	cos60°/cos24°	4,8	sin18°/sin66°
1,6	cos42°/cos30°	2,7	cos54°/cos30°	3,8	sin24°/sin60°	4,9	sin12°/sin60°
1,7	cos48°/cos36°	2,8	sin30°/sin54°	3,9	sin18°/sin54°	4,10	sin6°/sin54°
1,8	sin36°/sin48°	2,9	sin24°/sin48°	3,10	sin12°/sin48°	4,11	0
1,9	sin30°/sin42°	2,10	sin18°/sin42°	3,11	sin6°/sin42°		
1,10	sin24°/sin36	2,11	sin12°/sin36°	3,12	0		
1,11	sin18°/sin30°	2,12	sin6°/sin30°				
1,12	sin12°/sin24°	2,13	0				
1,13	sin6°/sin18°						
1,14	0						
5,5	cos60°	6,6	cos72°	7,7	cos84°		
5,6	cos66°/cos6°	6,7	cos78°/cos6°	7,8	0		
5,7	cos72/cos12°	6,8	sin6°/sin72°				
5,8	sin12°/sin72°	6,9	0				
5,9	sin6°/sin66°						
5,10	0						
36 邊形							
1,1	cos10°	2,2	cos20°	3,3	cos30°	4,4	cos40°
1,2	cos15°/cos5°	2,3	cos25°/cos5°	3,4	cos35°/cos5°	4,5	cos45°/cos5°
1,3	cos20°/cos10°	2,4	cos30°/cos10°	3,5	cos40°/cos10°	4,6	cos50°/cos10°
1,4	cos25°/cos15°	2,5	cos35°/cos15°	3,6	cos45°/cos15°	4,7	cos55°/cos15°
1,5	cos30°/cos20°	2,6	cos40°/cos20°	3,7	cos50°/cos20°	4,8	cos60°/cos20°
1,6	cos35°/cos25°	2,7	cos45°/cos25°	3,8	cos55°/cos25°	4,9	
1,7	cos40°/cos30°	2,8	cos50°/cos30°	3,9		4,10	sin20°/sin60°
1,8	cos45°/cos35°	2,9		3,10	sin25°/sin55°	4,11	sin15°/sin55°

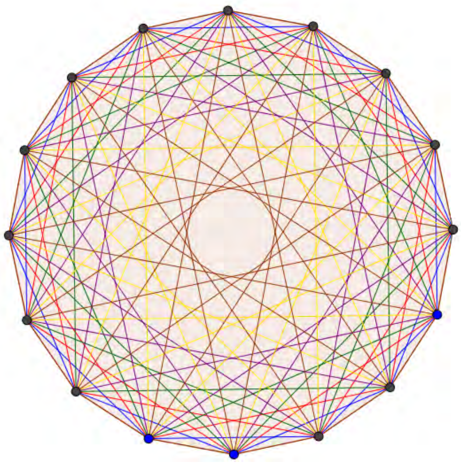
1,9		2,10	sin30°/sin50°	3,11	sin20°/sin50°	4,12	sin10°/sin50°
1,10	sin35°/sin45°	2,11	sin25°/sin45°	3,12	sin15°/sin45°	4,13	sin5°/sin45°
1,11	sin30°/sin40°	2,12	sin20°/sin40°	3,13	sin10°/sin40°	4,14	0
1,12	sin25°/sin35°	2,13	sin15°/sin35°	3,14	sin5°/sin30°		
1,13	sin20°/sin30°	2,14	sin10°/sin30°	3,15	0		
1,14	sin15°/sin25°	2,15	sin5°/sin25°				
1,15	sin10°/sin20°	2,16	0				
1,16	sin5/sin15						
1,17	0						
5,5	cos50°	6,6	cos60	7,7	cos70°	8,8	cos80°
5,6	cos55°/cos5°	6,7	cos65°/cos5°	7,8	cos75°/cos5°	8,9	
5,7	cos60°/cos10°	6,8	cos70°/cos10°	7,9		8,10	0
5,8	cos65°/cos15°	6,9		7,10	sin5°/sin75°	8,8	cos80°
5,9		6,10	sin10°/sin70°	7,11	0	8,9	
5,10	sin15°/sin65°	6,11	sin65°/sin5°				
5,11	sin10°/sin60°	6,12	0				
5,12	sin5°/sin55°						
5,13	0						

60 邊形

1,2	cos9°/ cos3°	2,3	cos15°/ cos3°	3,4	cos21°/ cos3°	4,5	cos27°/ cos3°	5,6	cos33°/ cos3°
1,3	cos12°/ cos6°	2,4	cos18°/ cos6°	3,5	cos24°/ cos6°	4,6	cos30°/ cos6°	5,7	cos36°/ cos6°
1,4	cos15°/ cos9°	2,5	cos21°/ cos9°	3,6	cos27°/ cos9°	4,7	cos33°/ cos9°	5,8	cos39°/ cos9°
1,5	cos18°/ cos12°	2,6	cos24°/ cos12°	3,7	cos30°/ cos12°	4,8	cos36°/ cos12°	5,6	cos42°/ cos12°
1,6	cos21°/ cos15°	2,7	cos27°/ cos15°	3,8	cos33°/ cos15°	4,9	cos39°/ cos15°	5,10	cos45°/ cos15°
1,7	cos24°/ cos18°	2,8	cos30°/ cos18°	3,9	cos36°/ cos18°	4,10	cos42°/ cos18°	5,11	cos48°/ cos18°
1,8	cos27°/ cos21°	2,9	cos33°/ cos21°	3,10	cos39°/ cos21°	4,11	cos45°/ cos21°	5,12	cos 51°/ cos21°
1,9	cos30°/ cos24°	2,10	cos36°/ cos24°	3,11	cos42°/ cos24°	4,12	cos48°/ cos24°	5,13	cos 54°/ cos24°
1,10	cos33°/ cos27°	2,11	cos39°/ cos27°	3,12	cos45°/ cos27°	4,13	cos51°/ cos27°	5,14	cos57°/ cos27°
1,11	cos36°/ cos30°	2,12	cos42°/ cos30°	3,13	cos48°/ cos30°	4,14	cos54°/ cos30°	5,15	cos30°/ sin30°+1
1,12	cos39°/ cos33°	2,13	cos45°/ cos33°	3,14	cos51°/ cos33°	4,15	cos24°/ sin24°+1	5,16	sin27°/ sin57°
1,13	cos42°/ cos36°	2,14	cos48°/ cos36°	3,15	cos18°/ sin18°+1	4,16	sin30°/ sin54°	5,17	sin24°/ sin54°
1,14	cos45°/ cos39°	2,15	cos12°/ sin12°+1	3,16	sin33°/ sin51°	4,17	sin27°/ sin51°	5,18	sin21°/ sin51°
1,15	cos6°/ sin6°+1	2,16	sin36°/ sin48°	3,17	sin30°/ sin48°	4,18	sin24°/ sin48°	5,19	sin18°/ sin48°
1,16	sin39°/ sin45°	2,17	sin33°/ sin45°	3,18	sin27°/ sin45°	4,19	sin21°/ sin45°	5,20	sin5°/ sin45°
1,17	sin36°/ sin42°	2,18	sin30°/ sin42°	3,19	sin24°/ sin42°	4,20	sin18°/ sin42°	5,21	sin12°/ sin42°
1,18	sin33°/ sin39°	2,19	sin27°/ sin39°	3,20	sin21°/ sin39°	4,21	sin15°/ sin39°	5,22	sin9°/ sin39°
1,19	sin30°/ sin36°	2,20	sin24°/ sin36°	3,21	sin18°/ sin36°	4,22	sin12°/ sin36°	5,23	sin6°/ sin36°
1,20	sin27°/ sin33°	2,21	sin21°/ sin33°	3,22	sin15°/ sin33°	4,23	sin9°/ sin33°	5,24	sin3°/ sin33°

1,21	sin24°/ sin30°	2,22	sin18°/ sin30°	3,23	sin12°/ sin30°	4,24	sin6°/ sin30°	5,25	0
1,22	sin21°/ sin27°	2,23	sin15°/ sin27°	3,24	sin9°/ sin27°	4,25	sin3°/ sin27°		
1,23	sin18°/ sin24°	2,24	sin12°/ sin24°	3,25	sin6°/ sin24°	4,26	0		
1,24	sin15°/ sin21°	2,25	sin9°/ sin21°	3,26	sin3°/ sin21°				
1,25	sin12°/ sin18°	2,26	sin6°/ sin18°	3,27	0				
1,26	sin9°/ sin15°	2,27	sin3°/ sin15°						
1,27	sin6°/ sin12°	2,28	0						
1,28	sin3°/ sin9°								
1,19	0								
6,7	cos39°/ cos3°	7,8	cos45°/ cos3°	8,9	cos51°/ cos3°	9,10	cos57°/ cos3°	10,11	cos63°/ cos3°
6,8	cos42°/ cos6°	7,9	cos48°/ cos6°	8,10	cos54°/ cos6°	9,11	cos60°/ cos6°	10,12	cos66°/ cos6°
6,9	cos45°/ cos9°	7,10	cos51°/ cos9°	8,11	cos57°/ cos9°	9,12	cos63°/ cos9°	10,13	cos69°/ cos9°
6,10	cos48°/ cos12°	7,11	cos54°/ cos12°	8,12	cos60°/ cos12°	9,13	cos66°/ cos12°	10,14	cos72°/ cos12°
6,11	cos51°/ cos15°	7,12	cos57°/ cos15°	8,13	cos63°/ cos15°	9,14	cos69°/ cos15°	10,15	cos60°/sin60°+1
6,12	cos54°/ cos18°	7,13	cos60°/ cos18°	8,14	cos6°/ cos18°	9,15	cos54°/sin54°+1	10,16	sin12°/sin72°
6,13	cos57°/ cos21°	7,14	cos63°/ cos21°	8,15	cos48°/ sin48°+1	9,16	sin15°/ sin69°	10,17	sin9°/ sin69°
6,14	cos60°/ cos24°	7,15	cos42°/ sin42°+1	8,16	sin18°/ sin66°	9,17	sin12°/ sin66°	10,18	sin 6°/ sin66°
6,15	cos36°/ sin36°+1	7,16	sin21°/ sin63°	8,17	sin15°/ sin63°	9,18	sin9°/ sin63°	10,19	sin 3°/ sin63°
6,16	sin24°/ sin60°	7,17	sin18°/ sin60°	8,18	sin12°/ sin60°	9,19	sin6°/ sin60°	10,20	0
6,17	sin21°/ sin57°	7,18	sin15°/ sin57°	8,19	sin9°/ sin57°	9,20	sin3°/ sin57°		
6,18	sin18°/ sin 54°	7,19	sin12°/ sin54°	8,20	sin6°/ sin54°	9,21	0		
6,19	sin15°/ sin 51°	7,20	sin9°/ sin51°	8,21	sin3°/ sin51°				
6,20	sin12°/ sin 48°	7,21	sin6°/ sin48°	8,22	0				
6,21	sin9°/ sin 45°	7,22	sin3°/ sin45°						
6,22	sin6°/ sin 42°	7,23	0						
6,23	sin3°/ sin 39°								
6,24	0								
11,12	cos69°/ cos3°	12,13	cos75°/ cos3°	13,14	cos81°/ cos3°	14,15	cos84°/ sin84°+1		
11,13	cos72°/ cos6°	12,14	cos78°/ cos6°	13,15	cos78°/ sin78°+1	14,16	0		
11,14	cos75°/ cos9°	12,15	cos72°/ sin72°+1	13,16	sin3°/ sin81°				
11,15	cos66°/ sin66°+1	12,16	sin6°/ sin78°	13,17	0				
11,16	sin9°/ sin75°	12,17	sin3°/sin75°						
11,17	sin6°/ sin72°	12,18	0						
11,18	sin3°/ sin69°								
11,19	0								

附錄四：我們觀察圖形，將距離頂點不同距離的點連線標上不同顏色，以下方左圖為例：



與距離頂點一個邊的另一頂點連線為淺棕色

與距離頂點兩個邊的另一頂點連線為藍色

與距離頂點三個邊的另一頂點連線為紅色

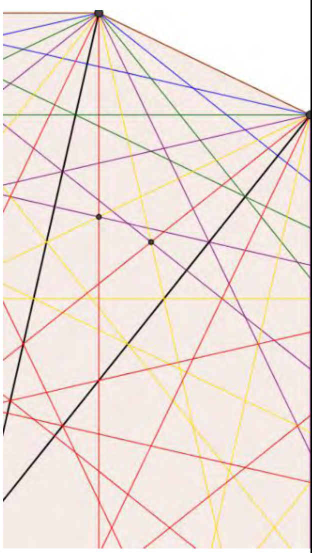
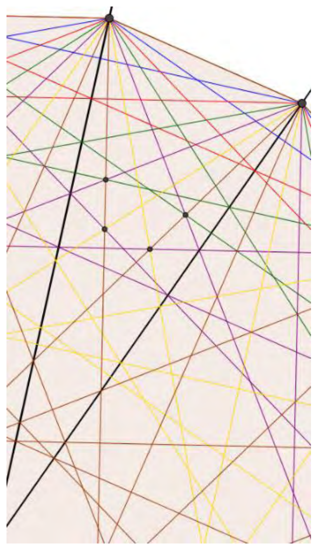
與距離頂點四個邊的另一頂點連線為綠色

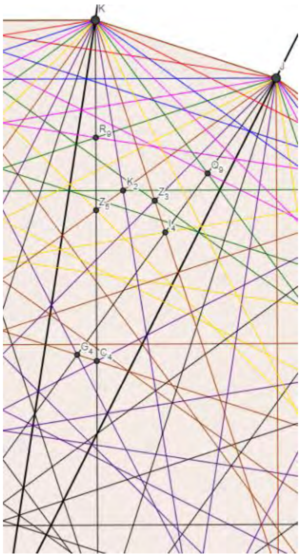
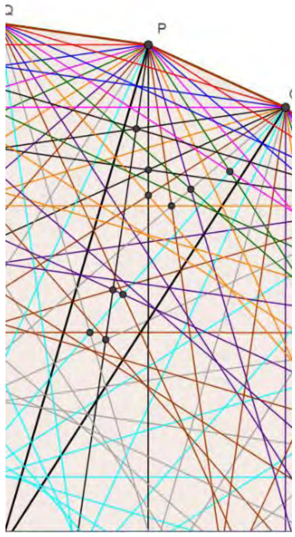
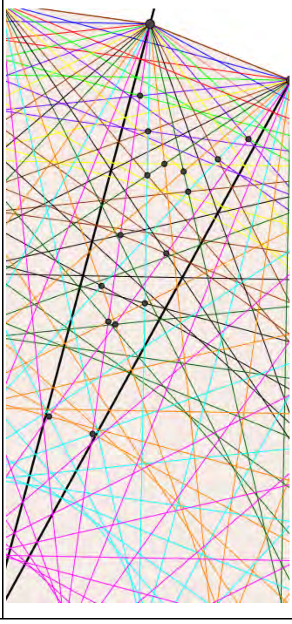
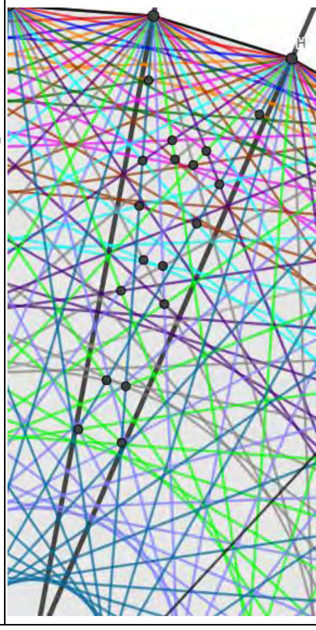
與距離頂點五個邊的另一頂點連線為紫色

與距離頂點六個邊的另一頂點連線為黃色

與距離頂點七個邊的另一頂點連線為棕色

並記錄通過各交點的線段的顏色，我們將圖形用中線分成 n 個小三角形，且發現對角線三線共點會在每個小三角形中對稱的出現兩次，因此我們下表所記錄的點在正 n 邊形中都分別有 2n 個。下圖黑線為中線，黑點為對角線三線共點。

正 14 邊形 6,5,4(紅、黃、紫)		正 16 邊形 7,5,4(棕、紫、綠) 7,6,5(棕、黃、紫)	

正 20 邊形 9,8,7(黑、紫、棕) 9,7,6(黑、棕、黃) 9,5,4(黑、綠、粉) 8,7,5(紫、棕、綠)		正 22 邊形 10,9,8(淡藍、灰、棕) 10,8,7(淡藍、褐、紫) 10,5,4(淡藍、綠、粉) 9,8,6(灰、棕、橘) 9,7,5(灰、紫、綠)	
正 26 邊形 12,11,10(粉、淺藍、橘) 12,10,9(粉、橘、綠) 12,8,7(粉、黑、褐) 12,5,4(粉、紫、淺綠) 11,10,8(淺藍、橘、黑) 11,9,7(淺藍、綠、褐) 11,7,5(淺藍、褐、紫) 10,9,6(橘、綠、黃)		正 28 邊形 12,7,5(淡紫、褐、綠) 13,12,11(藍綠、淡紫、淡綠) 13,11,10(藍綠、淡綠、灰) 13,9,8(藍綠、紫、淡藍) 13,8,7(藍綠、淡藍、褐) 13,5,4(藍綠、綠、橘) 12,11,9(淡紫、淡綠、紫) 12,10,8(淡紫、灰、淡藍) 11,10,7(淡綠、灰、褐) 11,9,6(淡綠、紫、粉)	

【評語】030423

探討正 n 邊形對角線的交點個數。針對 n 為偶數且非 6 的倍數的情況，給出了答案。對於 n 為 6 的倍數可能造成計算上的困難的原因，也作了一些討論。作者們觀察到正 n 邊形，當 n 為偶數且非 6 的倍數時，對角線的交點只可能是兩條對角線、三條對角線的交點，或是中心點。以此為基礎，透過觀察三線交點的規律，成功的給出計算對角線交點數的公式（排除 n 為 6 的倍數的情況）。對於 n 為 6 的倍數可能會對計算造成的影響，也給出了說明。分析不出現在中線上的三對角線共點的情形所使用的技巧簡潔而明瞭，十分難得。比較美中不足的是，沒能清楚說明在所討論的情形中（排除 n 為 6 的倍數的情況），除了中心點外，不可能存在三條以上對角線共點的情況。這部分似乎只仰賴觀察和程式計算的結果。如果能把相關的論述說的更清楚些，整個作品才符合數學論證的嚴謹性。

作品海報

研究目的

一、觀察正偶數邊形對角線多線共點規律

二、尋找正偶數邊形中線上對角線三線共點個數

三、將正偶數邊形中線上對角線交點座標化並利用Excel計算座標位置進行探討

四、正偶數邊形非中線上對角線三線共點探討

五、歸納出公式，算出非6倍數正偶數邊形對角線交點數

觀察正偶數邊形對角線多線共點規律

因為正偶數邊形會有三線以上共點，所以決定先觀察其對角線交點是否有規律，進行了以下探討。

正n邊形	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n=4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=8	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=10	20	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=12	60	12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=14	112	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
n=16	208	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
n=18	216	54	54	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
n=20	480	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
n=22	660	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
n=24	624	104	24	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
n=26	1196	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
n=28	1568	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
n=30	2490	120	180	120	30	0	0	0	0	0	0	0	1

觀察發現一：

根據左圖，我們發現正偶數邊形中

1.在正12邊形以下，除中線外沒有三線以上共點，而正14邊形以上有。

2.除了中心點外，正12邊形時出現了四線共點。

3.除了中心點外，四線、五線共點皆只有出現在正18邊形、正24邊形或正30邊形…(6的倍數)。

4.正30邊形出現了七線共點。

正偶數邊形中線上對角線三線共點個數

觀察後我們決定縮小目標，先從中線(圖形對稱軸)上的點開始觀察，希望能求出中線上的對角線交點公式。如下圖，我們可以把正偶數邊形呈現為以中線(橘線)為對稱軸的對稱模式，所以只要在其中一邊選出2點並與相對的2點交叉連線(藍線)便定會在對稱軸上出現對角線三線共點(綠點)。

但正偶數邊形邊數為6的倍數時，會出現三線以上共點，所以我們將其分開討論，先探討正偶數邊形邊數為非6的倍數時，中線上對角線三線共點數。

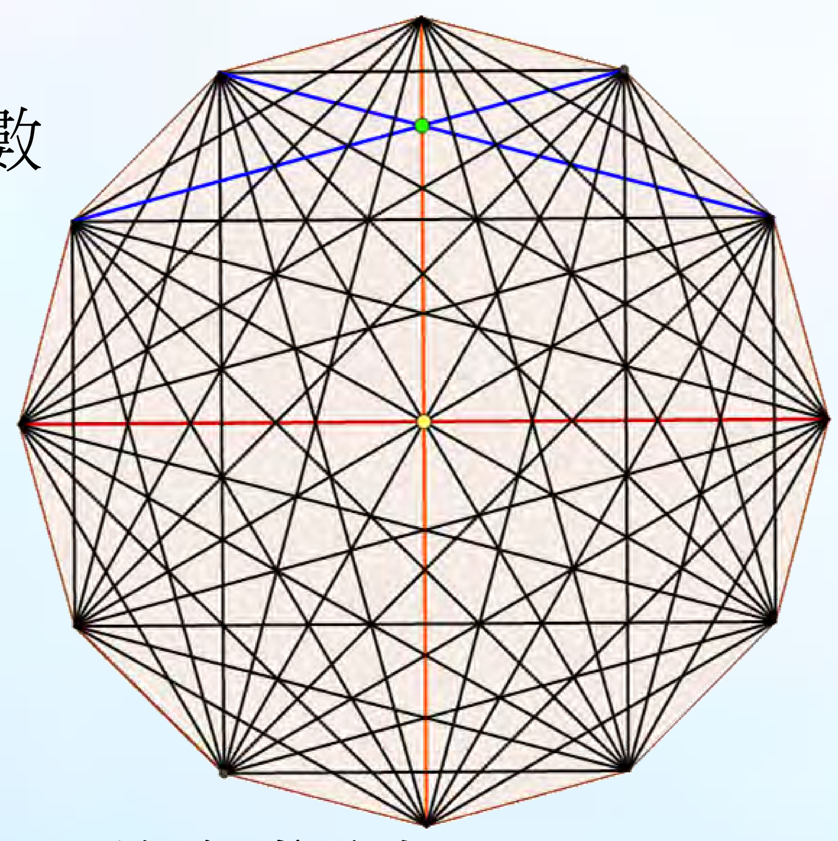
定理一：正偶數 n 邊形邊數為非6的倍數時，中線上對角線三線共點數

If $n=4k+2$：

$$\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2-\frac{n-2}{2}-\frac{n-2}{2}}{2}=\frac{n^2-8n+12}{8}$$

If $n=4k$：

$$\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2-\frac{n-2}{2}-\frac{n-2}{2}+1}{2}=\frac{n^2-8n+16}{8}$$



將正偶數n邊形中線上對角線交點座標化並利用Excel計算座標位置進行探討

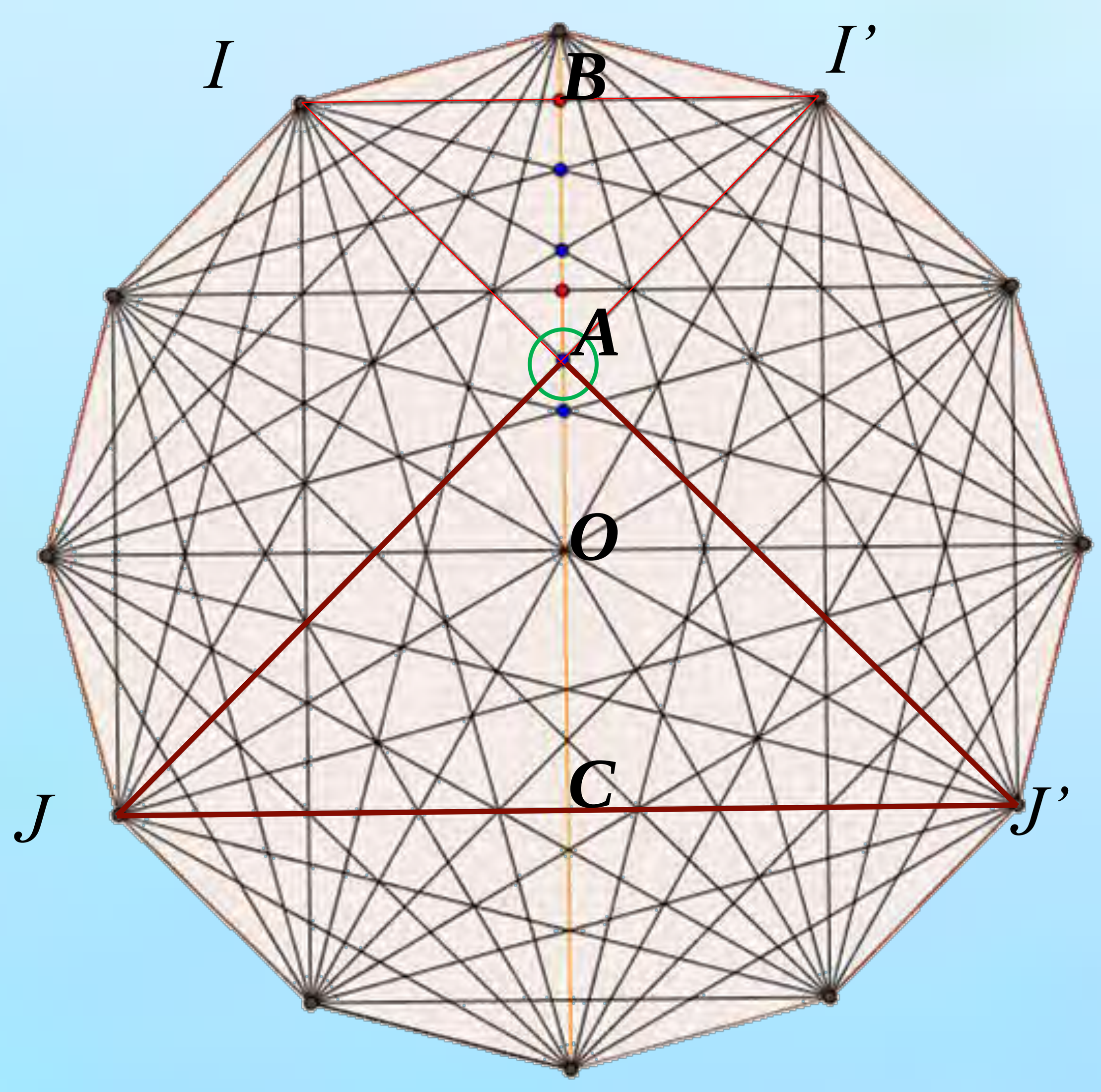
為了更進一步探討中線上的多線共點，我們將圖形座標化，以圖形中心點為原點(下圖O點)，內接於一單位圓，利用三角函數及相似形的概念，算出每一個中線上交點的座標，希望找出哪些線在同位置相交。

定理二：若一正偶數 n 邊形，以圖形中心點為原點，內接於一單位圓，令對角線 $\overline{IJ'}$、$\overline{I'J}$ 的交點 A 在 O 點上方，其中 $1 \le I < \frac{n-2}{4}$，且 $J > I$ 則 A 座標$(0,\overline{AO})$，其中

$$\text{if } J < \frac{n}{4} \text{ 則 } \overline{AO}=\frac{\cos\left(\frac{180^o\times(I+J)}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^o\times(J-I)}{n}\right)}$$

$$\text{if } J > \frac{n}{4} \text{ 則 } \overline{AO}=\frac{\sin\left(180^o\times\left(\left(\frac{n}{2}-J\right)-I\right)\times\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(180^o\times\left(\left(\frac{n}{2}-J\right)+I\right)\times\frac{1}{n}\right)}$$

$$\text{if } J = \frac{n}{4} \text{ 則 } \overline{AO}=\frac{\cos\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)}{\sin\left(\frac{360^o\times I}{n}\right)+1}$$

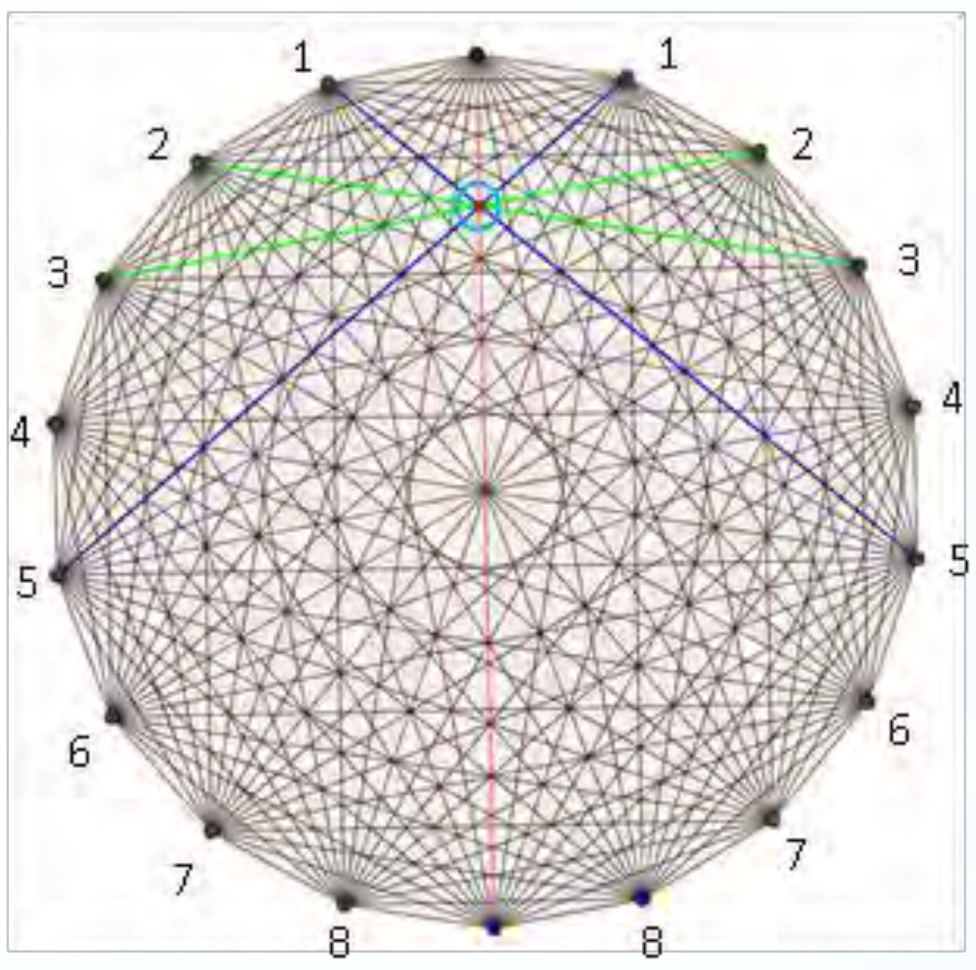


為了方便研究，我們利用Excel寫入中線上三線共點的座標公式來求出各點位置，並利用Excel找出其中線上對角線交點有哪些點的座標相同，以利研究。

觀察了很多Excel表格後，我們發現如下

觀察發現二：

在中線上，除了中心點，五線共點只會出現在6的倍數邊形，七線共點只會出現在30的倍數邊形。在觀察中，並沒有出現超過七線的共點。由於五線共點只會出現在6的倍數邊形上，為了解決中線上五線共點的交點數個數，我們針對6的倍數邊形進行研究。



我們先利用Excel算出6的倍數邊形之交點座標，找出交點坐標位置相同的對角線組，將其標示出，並表格化以利觀察。舉個例子，如右圖，對角線三線共點如<1, 5>(藍色線)、<2, 3>(綠色線)，我們可以發現<1, 5> 、<2, 3>交於同一點，所以<1, 5> 、<2, 3>即為五線共點。

我們將正18、24、30、36邊形中線上五線共點及七線共點整理如下表：

	對角線	與原點距離	對角線	與原點距離			值
18邊形	<1,5>	$\sin30^\circ/\sin50^\circ$	<2,3>	$\cos50^\circ/\cos10^\circ$			0.652703645
	<1,6>	$\sin20^\circ/\sin40^\circ$	<2,4>	$\cos60^\circ/\cos20^\circ$			0.532088886
	<1,7>	$\sin10^\circ/\sin30^\circ$	<3,4>	$\cos70^\circ/\cos10^\circ$			0.347296355
24邊形	<1,9>	$\sin15^\circ/\sin30^\circ$	<3,5>	$\cos60^\circ/\cos15^\circ$			0.51763809
30邊形	<1,9>	$\sin30^\circ/\sin42^\circ$	<3,4>	$\cos42^\circ/\cos6^\circ$			0.747238275
	<2,4>	$\cos36^\circ/\cos12^\circ$	<1,7>	$\cos48^\circ/\cos36^\circ$			0.827090915
	<3,6>	$\cos54^\circ/\cos18^\circ$	<1,11>	$\sin18^\circ/\sin30^\circ$	<2,8>	$\sin30^\circ/\sin54^\circ$	0.618033989
	<4,8>	$\sin18^\circ/\sin66^\circ$	<1,13>	$\sin6^\circ/\sin18^\circ$			0.338261213
	<2,9>	$\sin24^\circ/\sin48^\circ$	<3,7>	$\cos60^\circ/\cos24^\circ$			0.547318139
	<1,12>	$\sin12^\circ/\sin24^\circ$	<4,6>	$\cos60^\circ/\cos12^\circ$			0.511170297
	<6,7>	$\cos78^\circ/\cos6^\circ$	<2,12>	$\sin6^\circ/\sin30^\circ$			0.209056927

觀察發現三：

1.在6的倍數邊形中線上多線共點，我們發現絕大部分是$\frac{\sin(a)}{\sin(b)}=\frac{\cos(c)}{\cos(d)}$的型態，而且如果符合這個型態，必有底下兩個特性：

(1)必有兩個角度相同 $a=d$ or $b=c$

(2)必存在$\sin(30^o)$或$\cos(60^o)$

2.在正30邊形中線上多線共點出現了$\frac{\sin(a)}{\sin(b)}=\frac{\sin(c)}{\sin(d)}$及$\frac{\cos(a)}{\cos(b)}=\frac{\cos(c)}{\cos(d)}$型態，這樣的型態也有兩個角度相同，但不見得有$\sin(30^o)$或$\cos(60^o)$

定理三：若$<I_1, J_1>$、$<I_2, J_2>$與原點距離相等，型態為$\frac{\sin(a)}{\sin(b)}=\frac{\cos(b)}{\cos(d)}$，且$a=30^o$或$d=60^o$

則 當$a=30^o \Rightarrow \begin{cases} d=90^\circ-2b & , \quad 2b<90^\circ \\ d=2b-90^\circ & , \quad 2b>90^\circ \end{cases}$

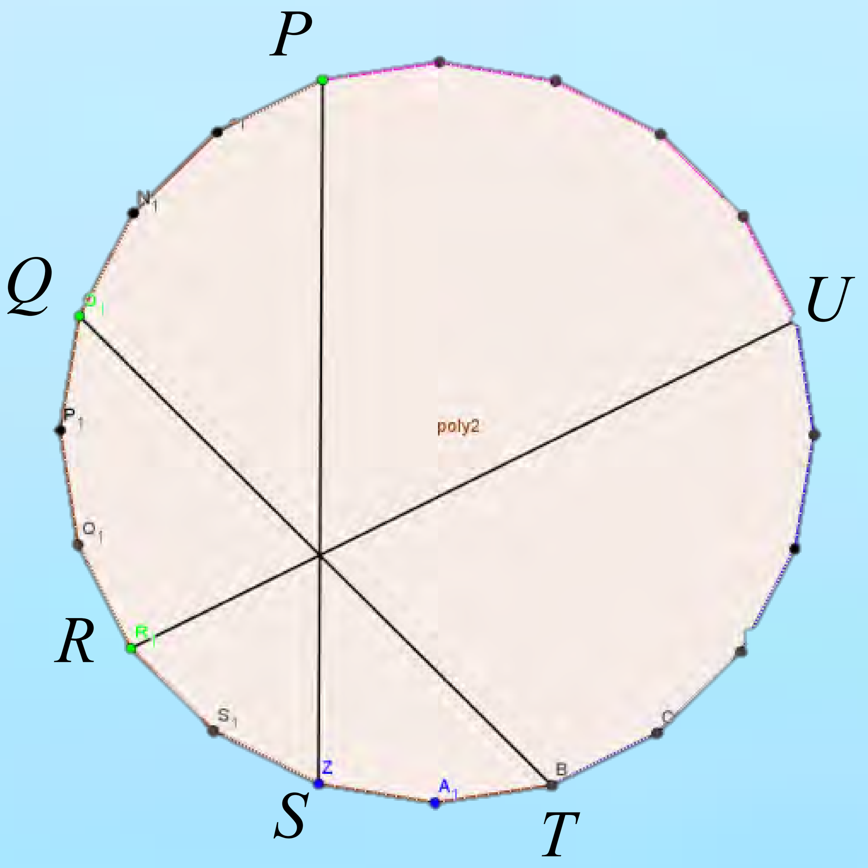
當$d=60^o \Rightarrow \begin{cases} a=90^\circ-2b & , \quad 2b<90^\circ \\ a=2b-90^\circ & , \quad 2b>90^\circ \end{cases}$

由定理三我們可以找出或確定哪兩組線會共點，不需要借助Excel的運算。另外，若結合定理二，就可以找出所有形式。

正偶數邊形非中線上對角線三線共點探討

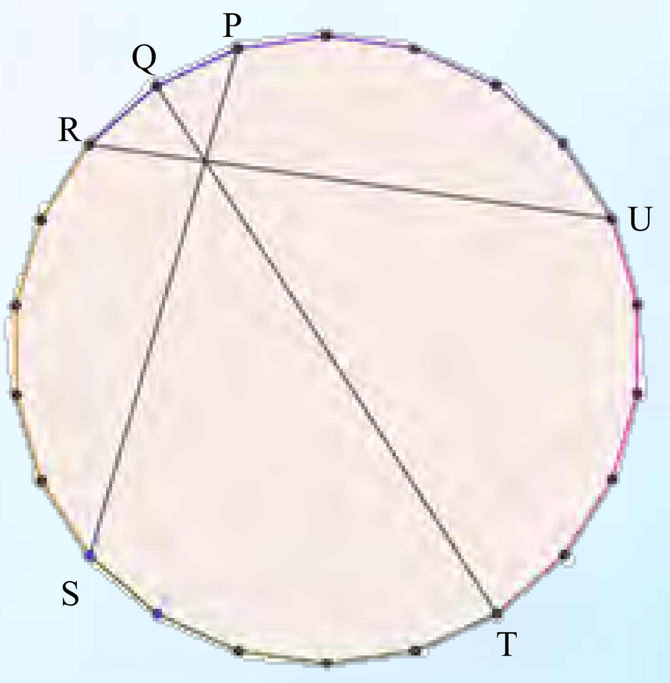
在探討非中線上對角線三線共點時，我們用了很多不同的方法觀察，但一直無法有效觀察到規律，直到我們發現了底下的方法:

找出正偶數邊形對角線三線共點方法：



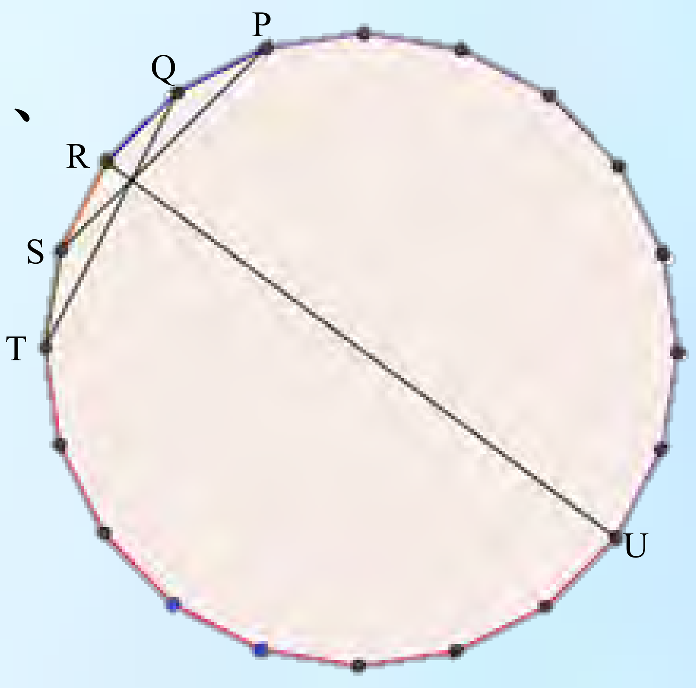
定理四：找出三個彼此間隔都為 a 個邊的點依序標示為 P、Q、R。由 P 點(第一個點)連向距離 R 點(第三個點)b個邊的點 S。由 Q 點連向距離 R 點(第三個點)2b個邊的點 T。由 R 點(第三個點)連向距離T點 $\frac{n-2a-2b}{2}$ 個邊的點 U。$\overline{PS}$、$\overline{QT}$、$\overline{RU}$三條線必定交於同一點。

正偶數邊形對角線外三線共點數的公式



當點P、Q、R 分別間隔1個邊時，在n個邊中就已用去2個邊，還剩n-2個邊，接著 $\overline{PS}$、$\overline{QT}$、$\overline{RU}$ 又將其分為4個部分，那麼S點僅能在最多間隔R點$\left\lceil\frac{n-2}{4}\right\rceil$邊的點上，再往後即會與之前重複。

而當$\overline{RS}$、$\overline{ST}$之距離與$\overline{PQ}$、$\overline{QR}$一樣是相距1個邊時，就會出現對稱情形，因此為中線上的點，所以須減1；相同的當 $\frac{n-2}{4}$為整數時，S所連到的第$\frac{n-2}{4}$個點一樣會在中線上，當 $\frac{n-2}{4}$為分數時則不會有中線上的點之情形，但我們必須取整數，所以我們加上天花板符號再減1。因此當點P、Q、R分別間隔1個邊時S 點的位置可以落在$\left\lceil\frac{n-2}{4}\right\rceil-2$點上。



以同樣的方式分析，可以得到當點 P、Q、R 分別間隔2個邊時，S 點的位置可以落在$\left\lceil\frac{n-4}{4}\right\rceil-3$點上。

當點P、Q、R分別間隔3個邊時，S 點的位置可以落在$\left\lceil\frac{n-6}{4}\right\rceil$-4點上，以此類推直到最大的 j，最後將這些數全部加起來乘以2n，就是所有正偶數n邊形非中線上所有對角線三線共點數。

定理五： 正偶數 n邊形非中線上所有對角線三線共點數，如下：

If $n=4k+2$：$(\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{5}{12})\times 2n$　　　If $n=4k$：$(\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{2}{3})\times 2n$

非6倍數正偶數邊形所有對角線交點公式

非6倍數正偶數n邊形對角線交點僅有二線共點、三線共點及中心點$\frac{n}{2}$線共點，我們知道，任選四個頂點必恰有一對角線交點，但若有三線共點，此三線本應有$C_2^3=3$個交點，也就是每個三線共點就會少2個交點，而中心點少了 $C_2^{\frac{n}{2}}-1$點。我們可以二線共點公式結合**定理一**及**定理五**算出所有交點數。

定理六： 非6倍數正偶數n邊形所有對角線交點數：

If n=4k+2：$C_4^n-\frac{5n^3-45n^2+70n-24}{24}$　If n=4k：$C_4^n-\frac{5n^3-45n^2+106n-24}{24}$

得到了非6倍數正偶數n邊形所有對角線交點數的公式，以及之前正奇數邊形所有對角線交點數的公式後，希望我們的這篇研究對於需要運用到正多邊形對角線交點個數的研究會有幫助。

研究結果

一、正偶數n邊形非6的倍數時，中線上對角線三線共點數

當 n=4k+2：$\frac{n^2-8n+12}{8}$　　　當 n=4k：$\frac{n^2-8n+16}{8}$

二、若一正n邊形，n是偶數，以圖形中心點為原點，內接於一單位圓，令對角線 $\overline{IJ'}$、$\overline{I'J}$的交點A在O點上方，其中$1\le I<\frac{n-2}{4}$，且$J>I$則A座標(0 , $\overline{AO}$)，其中

If $J<\frac{n}{4}$ 則 $\overline{AO}=\frac{\cos\left(\frac{180^\circ\times(I+J)}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ\times(J-I)}{n}\right)}$　If $J>\frac{n}{4}$ 則$\overline{AO}=\frac{\sin\left(180^\circ\times\left((\frac{n}{2}-J)-I\right)\times\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(180^\circ\times\left((\frac{n}{2}-J)+I\right)\times\frac{1}{n}\right)}$　If $J=\frac{n}{4}$ 則$\overline{AO}=\frac{\cos\left(\frac{360^\circ\times I}{n}\right)}{\sin\left(\frac{360^\circ\times I}{n}\right)+1}$

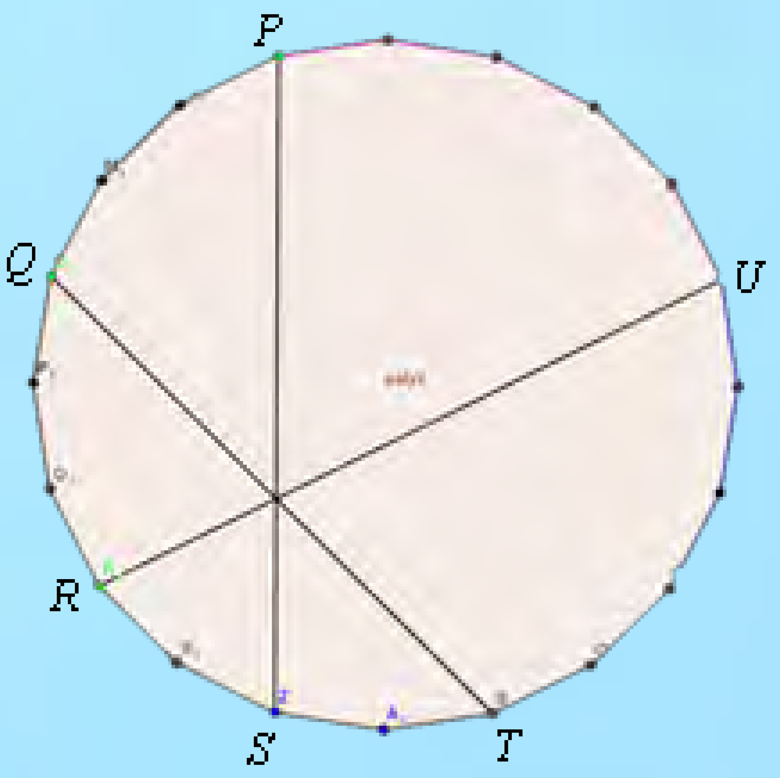
三、觀察中發現，只要出現sin(30°)或cos(60°)，該位置必定會有五線共點，因此我們可以利用這個特性找出兩組跟原點相等的距離，而確定哪幾條線共點。

若$\langle I_1, J_1\rangle$、$\langle I_2, J_2\rangle$與原點距離相等，型態為 $\frac{\sin(a)}{\sin(b)}=\frac{\cos(b)}{\cos(d)}$，且$a$=30°或$d$=60°

則當a=30° $\Rightarrow\begin{cases}d=90^\circ-2b, & 2b<90^\circ\\ d=2b-90^\circ, & 2b>90^\circ\end{cases}$　當d=60° $\Rightarrow\begin{cases}a=90^\circ-2b, & 2b<90^\circ\\ a=2b-90^\circ, & 2b>90^\circ\end{cases}$

四、找出正偶數n邊形對角線三線共點方法：

找出三個彼此間隔都為a個邊的點依序標示為 P、Q、R。 由 P 點(第一個點)連向距離 R 點(第三個點)b個邊的點 S。由 Q 點連向距離 R 點(第三個點)2b個邊的點 T。由 R 點(第三個點)連向距離T點 $\frac{n-2a-2b}{2}$個邊的點U。$\overline{PS}$、$\overline{QT}$、$\overline{RU}$三條線必定交於同一點。



五、正偶數n邊形非中線上所有對角線三線共點數，如下：

If $n=4k+2$：$(\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{5}{12})\times 2n$　If $n=4k$：$(\frac{n^2}{48}-\frac{n}{4}+\frac{2}{3})\times 2n$

六、非6倍數正偶數n邊形所有對角線交點數：

If n=4k+2：$C_4^n-\frac{5n^3-45n^2+70n-24}{24}$

If n=4k：$C_4^n-\frac{5n^3-45n^2+106n-24}{24}$