中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030422

當圓外切多邊形遇上 *Brianchon* 定理

——*Brianchon* 定理在多邊形上的探討

學校名稱：新竹縣立自強國民中學

作者：	指導老師：
國二 宋瑞傑	鄭芬如
國二 陳奕勛	陳彥伶

關鍵詞：圓外切四邊形、圓的切線段長性質、

全等三角形

摘要

本研究從「圓外切四邊形的兩組對邊和相等」性質開始探討圓外切多邊形的邊長關係，進而發現奇數個邊的圓外切多邊形之邊長與切點所分割出的線段有規律的關係。再從「必有內切圓的三角形中三條角邊連線段交於內部一點將原三角形分割成三個圓外切四邊形」[2]出發，尋找四個邊以上的多邊形會有內切圓存在的條件，最終發現圓外切多邊形的判別條件，特別是在偶數個邊的多邊形中，得到 *Brianchon* 定理在圓外切 n 邊形（n=8、10、12、⋯）上所有對角線會共點的推廣結果，以及塞瓦定理在此種 n 邊形上的推廣結果。

壹、 研究動機

熱愛數學的我們在上專題研究課時，講到了圓外切多邊形。老師介紹了歷屆全國科展得獎作品，當介紹到第 57 屆全國科展中的一個作品，**圓外切四邊形的多「圓」發展**[1]時，聽到作品中有提到一些圓外切多邊形中每個邊長的關係，以及老師又特別介紹有名的圓外切六邊形之三條對角線共點的 *Brianchon* 定理與數學傳播季刊中鄒黎明老師所寫的**「涉及三個內切圓的一個有趣結論」**[2]中三圓外切於一個三角形內部的有趣性質。於是我們問老師：如果把鄒老師所探討的一般三角形推廣到五邊形、七邊形、......等其他奇數邊的非正多邊形，是否內部也會存在一個大內切圓？亦或是幫這些奇數邊的非正多邊形找到能夠判斷內部有內切圓的判別性質，甚至於是偶數邊的非正多邊形。在好奇心的驅使與老師的協助下，我們開始進行研究。

貳、研究目的

我們希望從國中數學第五冊[3]中學到的「圓外切四邊形中兩組對邊和會相等」性質以及仿照鄒黎明老師的作品[2]中「三角形的三條角邊連線段會交於內部一點且分割出三個圓外切四邊形」的作法，將五邊形、七邊形、……等奇數個邊的多邊形內部也分別分割成五個、七個、……等多個圓外切四邊形開始，進一步探討以下的幾何問題：

一、探討圓外切 n 邊形中 n 個邊長的關係。

二、探討五邊形、七邊形、……等奇數個邊 n 邊形中，n 條角邊連線段長度與原 n 邊形邊長的關係。

三、探討四邊形、六邊形、……等偶數個邊 n 邊形中，n 條對邊連線段長度與原 n 邊形邊長的關係。

四、根據第二、三個問題所得到的關係式探討圓外切 n 邊形的判別性質。

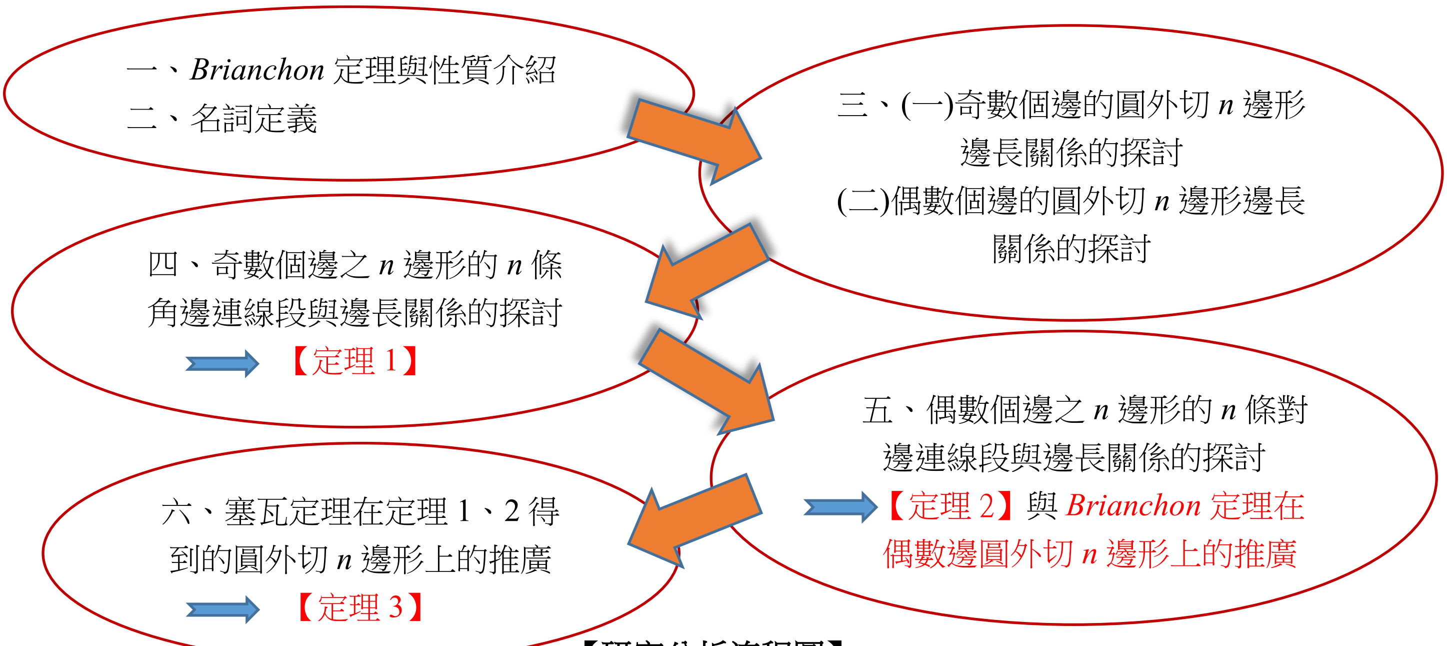
五、探討 *Brianchon* 定理在圓外切 n 邊形上對角線是否共點的推廣性質。

六、探討塞瓦定理在圓外切 n 邊形上的推廣性質。

參、設備及器材

紙、筆、電腦、*GSP* 動態幾何繪圖軟體

肆、 研究過程或方法



【研究分析流程圖】

我們先對已知的 *Brianchon* 定理、性質與鄒黎明老師所寫的一個有趣性質作介紹如下：

一、已知定理與性質：

Brianchon 定理[5]：若六邊形 *ABCDEF* 為圓外切六邊形，則其三條對角線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 共點。如圖 1 所示。

性質 1[3]：如圖 2，圓外切四邊形 *ABCD* 中，相間隔邊長之和 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

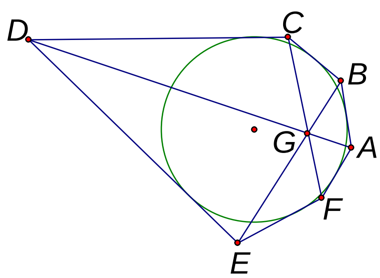


圖 1：圓外切六邊形

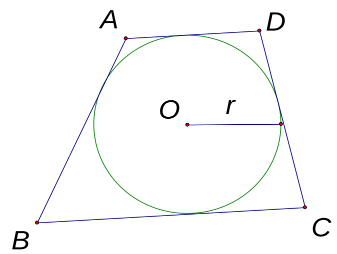


圖 2：圓外切四邊形

性質 2[4]：如圖 2，若一四邊形 *ABCD* 滿足 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ ，則此四邊形為圓外切四邊形

性質 3[2]：$\triangle ABC$ 中，*D*、*E*、*F* 分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 相交於 *Z*, 則存在唯一的點 *Z* 使得四邊形 *AEZF*、四邊形 *BDZF*、四邊形 *CEZD* 都有內切圓。如圖 3 所示。

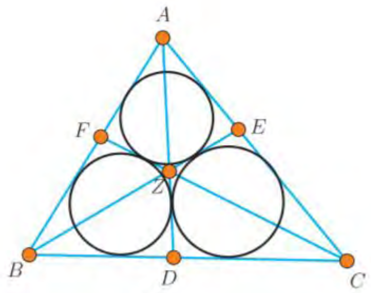


圖 3

基於性質 3 分割三角形成三個圓外切四邊形的原則，本研究根據此分割原則先定義出角邊連線段去分割其他奇數個邊的 *n* 邊形，如五邊形、七邊形、九邊形、……等，分別分割出 *n* 個圓外切四邊形，再以性質 1 為基礎，探討這些角邊連線段與原 *n* 邊形邊長的關係之外，也想利用這些關係研究出原 *n* 邊形具有內切圓的條件。當然偶數個邊之 *n* 邊形也會一併探討。我們用以下的定義來讓接下來的討論更清楚簡潔。

二、名詞定義

定義 1：**角邊連線段**：如圖 4 所示，三角形 ABC 中，D、E、F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 上的一點，則 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BF}$ 、 $\overline{CD}$ 為內角與其對邊上一點所連成的線段，我們稱 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BF}$ 、 $\overline{CD}$ 為角邊連線段。

定義 2[1]：**對邊連線段**：如圖 5 所示，四邊形 $ABCD$ 中，E、F 分別為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 上的點，我們在此稱 $\overline{EF}$ 為對邊連線段。

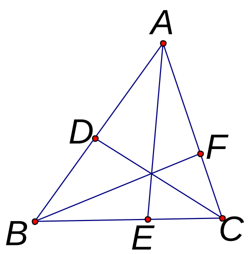


圖 4： $\overline{AE}$ 、 $\overline{BF}$ 、 $\overline{CD}$ 為角邊連線段

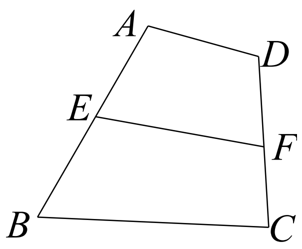


圖 5： $\overline{EF}$ 為對邊連線段

三、首先以性質 1 為基礎，我們探討**奇數個邊**的圓外切五邊形、圓外切七邊形、圓外切九邊形、……等以及**偶數個邊**的圓外切六邊形、圓外切八邊形、圓外切十邊形、……等多邊形之邊長間的規律關係，並統整如下面的性質 4 ~ 7。

(一)奇數個邊的圓外切 n 邊形：(以 n=5、7、9 為例)

1. 圓外切五邊形，如圖 6，

性質 4：五邊形 $ABCDE$ 中，有一個與五個邊均相切的內切圓，切點分別為 F、G、H、I、J。則五邊形 $ABCDE$ 各邊長的關係為

$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{JE}=\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AJ}$ （以切點 J 為分割點）；

$\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AF}=\overline{AE}+\overline{CD}+\overline{BF}$ （以切點 F 為分割點）；

$\overline{CD}+\overline{AE}+\overline{BG}=\overline{AB}+\overline{DE}+\overline{CG}$ （以切點 G 為分割點）；

$\overline{DE}+\overline{AB}+\overline{CH}=\overline{BC}+\overline{AE}+\overline{HD}$ （以切點 H 為分割點）；

$\overline{AE}+\overline{BC}+\overline{ID}=\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{IE}$ （以切點 I 為分割點）

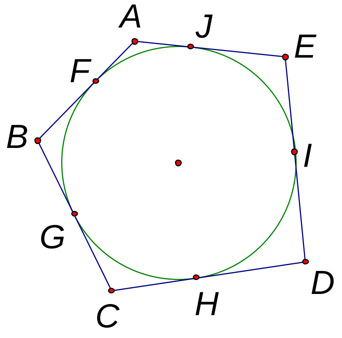


圖 6 圓外切五邊形

2．圓外切七邊形，如圖 7，

> 性質 5：$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GN}=\overline{FG}+\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AN}$（以切點 N 為分割點），其他切點作為分割點的關係式以此類推，共可得到 7 個關係式。

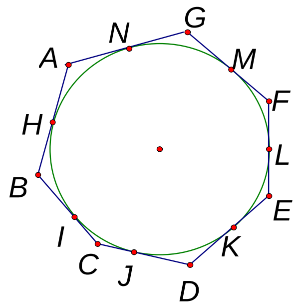


圖 7 圓外切七邊形

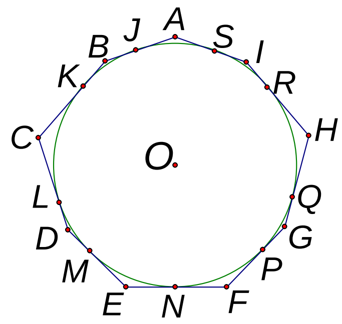


圖 8 圓外切九邊形

3. 圓外切九邊形，如圖 8，

> 性質 6：$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IS}=\overline{HI}+\overline{FG}+\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AS}$（以切點 S 為分割點）
> 其他切點作為分割點的關係式以此類推，共可得到 9 個關係式。

4. 其他奇數個邊的圓外切多邊形的邊長關係，也都是以一個切點將該邊分割成兩段，將原本的奇數個邊看作成偶數個，來求得兩組相間隔邊的邊長和相等之關係式。故每個圓外切 n 邊形，n 為奇數，共可推得 n 個等價的邊長和的關係式。

(二)偶數個邊的圓外切 n 邊形：

因為每個偶數邊的圓外切 n 邊形之邊長關係式只有一個，故取 n=6、8、10 為例並整理如下：

> 性質 7：1. 圓外切六邊形，如圖 9，$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AF}$
>
> 2. 圓外切八邊形，如圖 10，
>
> $$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AH}$$
>
> 3. 圓外切十邊形，如圖 11，
>
> $$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{HI}+\overline{AJ}$$

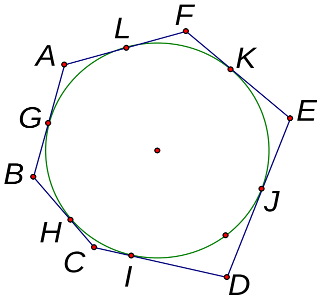


圖 9 圓外切六邊形

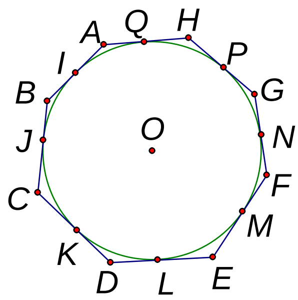


圖 10 圓外切八邊形

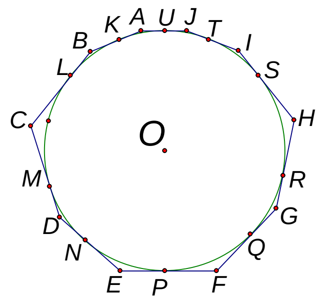


圖 11 圓外切十邊形

由性質 7 我們總結得到：其他偶數個邊的圓外切 n 邊形的邊長關係，也是兩組相間隔邊邊長和會相等的規律關係。

有了圓外切多邊形的邊長關係式（性質 4～7）後，我們開始好奇，這些邊長的關係式是否和圓外切四邊形的判別性質（性質 2）一樣足夠成為判斷圓外切多邊形的條件呢？如果不夠，又有哪些條件必須一起加入才夠呢？於是我們針對在一般性的多邊形中，開始探討由角邊連線段或對邊連線段交於內部一點並分割出 n 個圓外切四邊形後，所有角邊連線段或對邊連線段與原 n 邊形的邊長關係，再進一步尋找圓外切多邊形的判別性質。我們一樣先從奇數個邊的 n 邊形搭配 n 條角邊連線段開始討論。

四、奇數個邊之 n 邊形的 n 條角邊連線段與邊長關係的探討

(一)五邊形：如圖 12，在任意五邊形 $ABCDE$ 中，由 5 個頂點的角邊連線段 $\overline{AH}$ 、 $\overline{BI}$ 、 $\overline{CJ}$ 、 $\overline{DF}$ 、 $\overline{EG}$ 交於內部一點 O，其中四邊形 $AFOJ$、$BGOF$、$CHOG$、$DIOH$、$EJOI$ 皆為圓外切四邊形。由性質 1 我們開始分析說明如下：

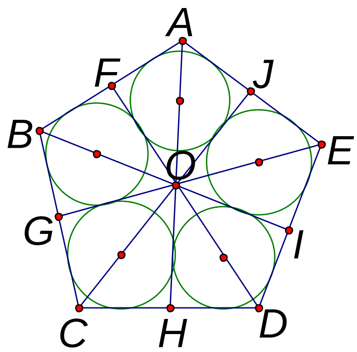


圖 12

說明：1.以 J 為分割點，

$$\overline{AF}+\overline{OJ}=\overline{AJ}+\overline{OF}\cdots\cdots\cdots(1) \qquad \overline{BF}+\overline{OG}=\overline{BG}+\overline{OF}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\overline{CH}+\overline{OG}=\overline{CG}+\overline{OH}\cdots\cdots\cdots(3) \qquad \overline{HD}+\overline{OI}=\overline{DI}+\overline{OH}\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\overline{JE}+\overline{OI}=\overline{IE}+\overline{OJ}\cdots\cdots\cdots(5)$$

則 $(1)+(2)+(3)+(4)+(5)$

$$\Rightarrow \overline{AB}+\overline{CD}+\overline{JE}+2\overline{OG}+2\overline{OI}=\overline{AJ}+2\overline{OF}+2\overline{OH}+\overline{BC}+\overline{DE}$$

$$\therefore\ \overline{OF}+\overline{OH}-(\overline{OG}+\overline{OI})=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EJ}-(\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AJ})}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$ （$\overline{OJ}$ 會消掉）

2.同理以 F 為分割點($\overline{OF}$ 會消掉)

可得到 $\overline{BG}+\overline{OF}=\overline{BF}+\overline{OG}\cdots\cdots\cdots(7)$　　$\overline{CG}+\overline{OH}=\overline{CH}+\overline{OG}\cdots\cdots\cdots(8)$

$\overline{DI}+\overline{OH}=\overline{HD}+\overline{OI}\cdots\cdots\cdots(9)$　　$\overline{IE}+\overline{OJ}=\overline{JE}+\overline{OI}\cdots\cdots\cdots(10)$

$\overline{AF}+\overline{OJ}=\overline{AJ}+\overline{OF}\cdots\cdots\cdots(11)$

則 $(7)+(8)+(9)+(10)+(11)$

$$\Rightarrow \overline{OG}+\overline{OI}-(\overline{OH}+\overline{OJ})=\frac{\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AF}-(\overline{AE}+\overline{CD}+\overline{BF})}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

3.同理分別以 G、H、I 為分割點，可得

$$\overline{OH}+\overline{OJ}-(\overline{OI}+\overline{OF})=\frac{\overline{CD}+\overline{AE}+\overline{BG}-(\overline{AB}+\overline{DE}+\overline{CG})}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\overline{OI}+\overline{OF}-(\overline{OJ}+\overline{OG})=\frac{\overline{DE}+\overline{AB}+\overline{CH}-(\overline{BC}+\overline{AE}+\overline{HD})}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$\overline{OJ}+\overline{OG}-(\overline{OF}+\overline{OH})=\frac{\overline{AE}+\overline{BC}+\overline{DI}-(\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{IE})}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

由以上的分析說明，我們發現五條角邊連線段交於一點 O，此 O 點將五條角邊連線段各別分割成兩段，這些分割完的部分線段長，即 $\overline{OG}$ 、 $\overline{OF}$ 、 $\overline{OH}$ 、 $\overline{OI}$ 、 $\overline{OJ}$ 皆與原五邊形的邊長有關係，且**剛好符合性質 4 中圓外切五邊形五個邊長與切點分割出的諸線段的 5 個關係式。**所以我們猜測，任意五邊形在滿足某些條件之下，應該也可以是一個圓外切五邊形。所以我們得到以下結果。

【引理 1】：如圖 12，在一五邊形 $ABCDE$ 中，5 個頂點的角邊連線段 $\overline{AH}$ 、 $\overline{BI}$ 、 $\overline{CJ}$ 、 $\overline{DF}$ 、 $\overline{EG}$ 交於內部一點 O，其中四邊形 $AFOJ$、$BGOF$、$CHOG$、$DIOH$、$EJOI$ 皆為圓外切四邊形。若滿足下列等式

$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{JE}=\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AJ}$ ； $\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AF}=\overline{AE}+\overline{CD}+\overline{BF}$ ；

$\overline{CD}+\overline{AE}+\overline{BG}=\overline{AB}+\overline{DE}+\overline{CG}$ ； $\overline{DE}+\overline{AB}+\overline{CH}=\overline{BC}+\overline{AE}+\overline{HD}$ ；

$\overline{AE}+\overline{BC}+\overline{DI}=\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{IE}$

則五邊形 $ABCDE$ 內有一個以 O 為圓心的大內切圓，

切點分別為 F、G、H、I、J。

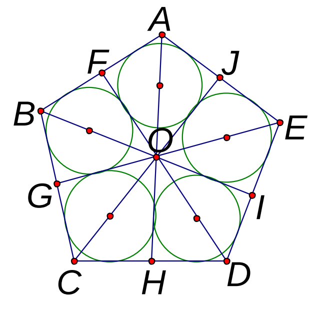


圖 12

證明：由前面分析的結果，(6)式為

$$\overline{OF}+\overline{OH}-(\overline{OG}+\overline{OI})=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{JE}-(\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AJ})}{2}$$

因為滿足條件 $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{JE}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AJ}$

則 (6) 式會變成 $\overline{OF}+\overline{OH}-(\overline{OG}+\overline{OI})=0 \quad \Rightarrow \overline{OF}+\overline{OH}=\overline{OG}+\overline{OI}\cdots\cdots\cdots(16)$

同理，由(12)式 $\overline{OG}+\overline{OI}-(\overline{OH}+\overline{OJ})=\dfrac{\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AF}-(\overline{CD}+\overline{AE}+\overline{BF})}{2}$

因為滿足條件 $\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AF}=\overline{CD}+\overline{AE}+\overline{BF}$ 則 $\overline{OG}+\overline{OI}=\overline{OH}+\overline{OJ}\cdots\cdots\cdots(17)$

同理，由(13)、(14)、(15)也可得到 $\overline{OH}+\overline{OJ}=\overline{OI}+\overline{OF}\cdots\cdots\cdots(18)$、

$\overline{OI}+\overline{OF}=\overline{OJ}+\overline{OG}\cdots\cdots\cdots(19)$、 $\overline{OJ}+\overline{OG}=\overline{OF}+\overline{OH}\cdots\cdots\cdots(20)$

由 (16)、(17)、(18)、(19)、(20) 可得 $\overline{OF}=\overline{OG}=\overline{OH}=\overline{OI}=\overline{OJ}$

若以 O 為圓心，$\overline{OF}$ 為半徑，則可畫一圓 O 為五邊形 $ABCDE$ 的內切圓，切點分別為 F、G、H、I、J。 故得證

在引理 1 的五邊形 $ABCDE$ 中，有五個圓外切四邊形，因為滿足了五個條件而有一個大內切圓在裡面。但就其內部兩兩內切圓的位置關係可能為外切或外離，這兩種位置關係會延伸發展出該五邊形究竟是什麼樣的五邊形，這也是我們想要探究的。於是我們先探討兩兩內切圓外切的情形，也就是相鄰兩圓相切於一點，如下圖 13。

1. 內部 5 個內切圓兩兩**外切**的情形：（k、l、m、n、p 分別為兩兩外切的切點）

因為 F、G、H、I、J 為圓 O 與五邊形 $ABCDE$ 之切點

$\therefore \overline{OF}\perp\overline{AB}$ 、$\overline{OG}\perp\overline{BC}$ 、$\overline{OH}\perp\overline{CD}$ 、$\overline{OI}\perp\overline{DE}$ 、

$\overline{OJ}\perp\overline{AE}$ 又 $\overline{OF}=\overline{OJ}$ （先看其中 $\overline{OF}$ 與 $\overline{OJ}$ ）

由角平分線判別性質可得 $\overline{AO}$ 必為 $\angle BAE$ 之角平分線

又圓 o_1 也是四邊形 $AFOJ$ 之內切圓

$\Rightarrow$ $\overline{Ao_1}$ 也是 $\angle FAJ\left(=\angle BAE\right)$ 之角平分線

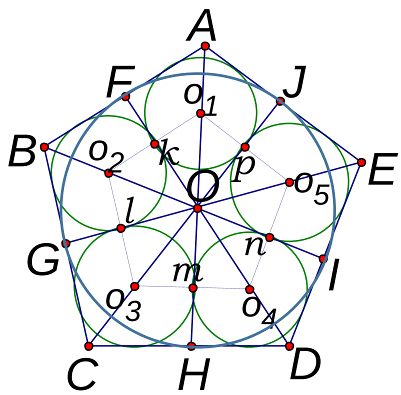


圖 13 五個內切圓兩兩外切的示意圖

$\because$ 一個角只會有一條角平分線，$\therefore \overline{AO}$ 和 $\overline{Ao_1}$ 重合，也就是 o_1 必通過 $\overline{AO}$

同理o_2、o_3、o_4、o_5也會分別通過$\overline{BO}$、$\overline{CO}$、$\overline{DO}$和$\overline{EO}$，將

o_1、o_2、o_3、o_4、o_5連接起來，形成另一個五邊形$o_1o_2o_3o_4o_5$，

又$\because O$為圓o_1外一點，$\overline{Ok}$和$\overline{Op}$為圓o_1的切線

$\therefore \overline{Ok}=\overline{Op}$　同理$\overline{Op}=\overline{On}=\overline{Om}=\overline{Ol}=\overline{Ok}$

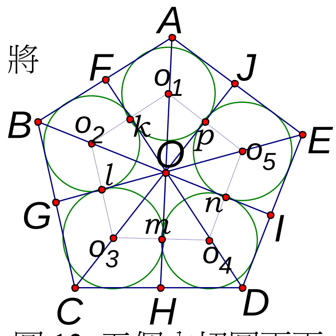


圖 13 五個內切圓兩兩外切的示意圖

故又可以以O為圓心，作五邊形$o_1o_2o_3o_4o_5$的內切圓，切點分別為k、l、m、n、p

$\Rightarrow \overline{Ok}\perp\overline{o_1o_2}$、$\overline{Ol}\perp\overline{o_2o_3}$、$\overline{Om}\perp\overline{o_3o_4}$、$\overline{On}\perp\overline{o_4o_5}$、$\overline{Op}\perp\overline{o_1o_5}$

$\Rightarrow \overline{o_1o_2}//\overline{AB}$、$\overline{o_2o_3}//\overline{BC}$、$\overline{o_3o_4}//\overline{CD}$、$\overline{o_4o_5}//\overline{DE}$、$\overline{o_1o_5}//\overline{AE}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{o_1o_2}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{Oo_1}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{o_1o_5}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{Oo_5}}{\overline{OE}}=\frac{\overline{o_5o_4}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{Oo_4}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{o_4o_3}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{Oo_3}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{o_3o_2}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{Oo_2}}{\overline{OB}}$$

又$\angle o_2o_1o_5=\angle BAE$、$\angle o_3o_2o_1=\angle CBA$、$\angle o_4o_3o_2=\angle DCB$、

$\angle o_5o_4o_3=\angle EDC$、$\angle o_1o_5o_4=\angle AED$（同位角相等）

$\therefore$五邊形$o_1o_2o_3o_4o_5\sim$五邊形$ABCDE$

且五邊形$o_1o_2o_3o_4o_5$中亦有五條角邊連線段$\overline{o_1m}$、$\overline{o_2n}$、$\overline{o_3p}$、$\overline{o_4k}$、$\overline{o_5l}$將此五邊形分割成五個圓外切四邊形o_1kOp、o_2lOk、o_3mOl、o_4nOm與o_5pOn。

我們猜測引理 1 的五邊形$ABCDE$經過上述推理可能為正五邊形，故繼續分析如下：

$\because \overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$分別為$\angle FOJ$、$\angle FOG$、$\angle GOH$、$\angle HOI$和$\angle IOJ$

的角平分線

$\therefore \angle FOA=\angle AOJ$、$\angle FOB=\angle BOG$、$\angle GOC=\angle COH$、$\angle HOD=\angle DOI$、

$\angle IOE=\angle EOJ$

$\therefore \angle FOA=\angle DOH=\angle DOI$、$\angle AOJ=\angle COH=\angle GOC$

$=\angle BOF$ (對頂角相等)　　$=\angle EOJ$ (對頂角相等)

$=\angle BOG$　　$=\angle EOI$

$\therefore \angle FOA=\angle BOF=\angle BOG=\angle GOC=\angle COH=\angle HOD=\angle DOI=\angle IOE=\angle EOJ=\angle JOA$

所以$\angle FOA=180\div 5=36^\circ \Rightarrow \angle o_2o_1O=90-36^\circ=54^\circ=\angle FAO$

同理 $\angle OAJ = 54^{\circ} \Rightarrow \angle BAE = 108^{\circ}$ 　同理 $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = 108^{\circ}$

又可證得 $\Delta AOB \cong \Delta BOC(AAS) \Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$ 　同理 $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$

$\therefore$ 五邊形 $ABCDE$ 為正五邊形

2. 內部 5 個內切圓兩兩**外離**的情形：參考圖 14 之示意圖

因為引理 1 的結果在此五邊形 $ABCDE$ 中仍成立，也就是 $\overline{OF} = \overline{OG} = \overline{OH} = \overline{OI} = \overline{OJ}$，一樣以 O 為圓心，$\overline{OF}$ 為半徑可在五邊形內部作一個內切圓，切點為 F、G、H、I、J。將此五邊形 $ABCDE$ 中 5 個內切圓圓心 o_1、o_2、o_3、o_4、o_5 分別連接起來，其中令 $\overline{o_1o_2}$ 與 $\overline{OF}$ 交於 z_1，$\overline{o_2o_3}$ 與 $\overline{OG}$ 交於 z_2，$\overline{o_3o_4}$ 與 $\overline{OH}$ 交於 z_3，$\overline{o_4o_5}$ 與 $\overline{OI}$ 交於 z_4，$\overline{o_1o_5}$ 與 $\overline{OJ}$ 交於 z_5，且圓 o_1 分別與 $\overline{OF}$、$\overline{OJ}$ 切於 c、s；圓 o_2 分別與 $\overline{OF}$、$\overline{OG}$ 切於 d、f；圓 o_3 分別與 $\overline{OG}$、$\overline{OH}$ 切於 g、j；圓 o_4 分別與 $\overline{OH}$、$\overline{OI}$ 切於 k、n；圓 o_5 分別與 $\overline{OI}$、$\overline{OJ}$ 切於 o、r。

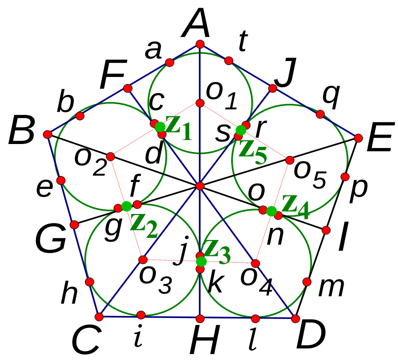


圖 14 五個內切圓兩兩外離的示意圖

$\because \overline{OF} \perp \overline{AB}$、$\overline{OG} \perp \overline{BC}$、$\overline{OH} \perp \overline{CD}$、$\overline{OI} \perp \overline{DE}$、$\overline{OJ} \perp \overline{AE}$

$\therefore \overline{AB} // \overline{o_1c} // \overline{o_2d}$、$\overline{BC} // \overline{o_2f} // \overline{o_3g}$、$\overline{CD} // \overline{o_3j} // \overline{o_4k}$、$\overline{DE} // \overline{o_4n} // \overline{o_5o}$、$\overline{AE} // \overline{o_5r} // \overline{o_1s}$

但是 $\overline{AB} \not\parallel \overline{o_1o_2}$、$\overline{BC} \not\parallel \overline{o_2o_3}$、$\overline{CD} \not\parallel \overline{o_3o_4}$、$\overline{DE} \not\parallel \overline{o_4o_5}$、$\overline{AE} \not\parallel \overline{o_1o_5}$，同外切情形，雖可推得 $\angle BAE = \angle co_1s = 108°$、$\angle ABC = \angle do_2f = 108°$、$\angle BCD = \angle go_3j = 108°$、

$\angle CDE = \angle ko_4n = 108°$、$\angle DEA = \angle oo_5r = 108°$

卻無法推得 2 個五邊形的對應邊成比例 　$\therefore$ 五邊形 $o_1o_2o_3o_4o_5 \not\sim$ 五邊形 $ABCDE$

但同外切情形的證法，仍可證得五邊形 $ABCDE$ 五邊等長，所以 5 個內切圓兩兩外離的情形下，在引理 1 條件下所得之五邊形 $ABCDE$ 不僅為圓外切五邊形也是一個正五邊形，也就是該五邊形也會有外接圓，所以此五邊形 $ABCDE$ 是兼具有內切圓與外接圓的雙心五邊形。接下來繼續討論七邊形的情形。

(二)七邊形：如圖 15，在任意七邊形 $ABCDEFG$ 中，由 7 個頂點的角邊連線段 $\overline{AK}$ 、$\overline{BL}$ 、$\overline{CM}$ 、$\overline{DN}$ 、$\overline{EH}$ 、$\overline{FI}$ 、$\overline{GJ}$ 交於內部一點 O，其中四邊形 $AHON$、$BIOH$、$CJOI$、$DKOJ$、$ELOK$、$FMOL$、$GNOM$ 皆為圓外切四邊形。由性質 1 我們分析說明如下：

說明：1.以 N 為分割點，($\overline{ON}$ 會消掉)

$$\overline{AH}+\overline{ON}=\overline{AN}+\overline{OH}\cdots\cdots\cdots(16) \qquad \overline{BH}+\overline{OI}=\overline{BI}+\overline{OH}\cdots\cdots\cdots(17)$$

$$\overline{CJ}+\overline{OI}=\overline{IC}+\overline{OJ}\cdots\cdots\cdots(18) \qquad \overline{JD}+\overline{OK}=\overline{DK}+\overline{OJ}\cdots\cdots\cdots(19)$$

$$\overline{EL}+\overline{OK}=\overline{EK}+\overline{OL}\cdots\cdots\cdots(20) \qquad \overline{FL}+\overline{OM}=\overline{MF}+\overline{OL}\cdots\cdots\cdots(21)$$

$$\overline{GN}+\overline{OM}=\overline{GM}+\overline{ON}\cdots\cdots\cdots(22)$$

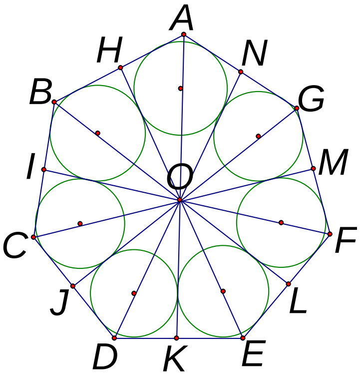


圖 15

則 $(16)+(17)+(18)+(19)+(20)+(21)+(22)$

$$\therefore \overline{OL}+\overline{OH}+\overline{OJ}-(\overline{OK}+\overline{OI}+\overline{OM})=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GN}-(\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AN})}{2}\cdots\cdots\cdots(23)$$

同理，分別以 H、I、J、K、L、M 為分割點，可得另外 6 個關係式為

$$\overline{OI}+\overline{OK}+\overline{OM}-(\overline{OJ}+\overline{OL}+\overline{ON})=\frac{\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AH}-(\overline{AG}+\overline{EF}+\overline{CD}+\overline{BH})}{2}\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$\overline{OL}+\overline{ON}+\overline{OJ}-(\overline{OK}+\overline{OH}+\overline{OM})=\frac{\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{AG}+\overline{BI}-(\overline{AB}+\overline{FG}+\overline{DE}+\overline{IC})}{2}\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\overline{OK}+\overline{OM}+\overline{OH}-(\overline{OL}+\overline{ON}+\overline{OI})=\frac{\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AB}+\overline{CJ}-(\overline{BC}+\overline{AG}+\overline{EF}+\overline{JD})}{2}\cdots\cdots\cdots(26)$$

$$\overline{OL}+\overline{ON}+\overline{OI}-(\overline{OJ}+\overline{OH}+\overline{OM})=\frac{\overline{EF}+\overline{AG}+\overline{BC}+\overline{DK}-(\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{FG}+\overline{EK})}{2}\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$\overline{OM}+\overline{OH}+\overline{OJ}-(\overline{ON}+\overline{OI}+\overline{OK})=\frac{\overline{FG}+\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EL}-(\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AG}+\overline{LF})}{2}\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$\overline{ON}+\overline{OI}+\overline{OK}-(\overline{OH}+\overline{OJ}+\overline{OL})=\frac{\overline{AG}+\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FM}-(\overline{EF}+\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{MG})}{2}\cdots\cdots\cdots(29)$$

同五邊形的分析結果一樣，我們發現七條角邊連線段交於一點 O，此 O 點將七條角邊連線段各別分割成兩段，這些分割完的部分線段長，即 $\overline{OH}$ 、$\overline{OI}$ 、$\overline{OJ}$ 、$\overline{OK}$ 、$\overline{OL}$ 、$\overline{OM}$ 、$\overline{ON}$ 皆與原七邊形的邊長有關係，且**剛好符合性質 5 中圓外切七邊形七個邊長與切點分割出的諸線段所得的 7 個關係式。**所以我們猜測，任意七邊形在滿足某些條件之下，應該也可以是一個圓外切七邊形。所以我們得到以下結果。

【引理 2】：如圖 15，在一七邊形 $ABCDEFG$ 中，7 個頂點的角邊連線段 $\overline{AK}$、$\overline{BL}$、$\overline{CM}$、$\overline{DN}$、$\overline{EH}$、$\overline{FI}$、$\overline{GJ}$ 交於內部一點 O，其中四邊形 $AHON$、$BIOH$、$CJOI$、$DKOJ$、$ELOK$、$FMOL$、$GNOM$ 皆為圓外切四邊形。若滿足下列等式

$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GN}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AN}$；

$\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AH}=\overline{AG}+\overline{EF}+\overline{CD}+\overline{BH}$；

$\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{AG}+\overline{BI}=\overline{AB}+\overline{FG}+\overline{DE}+\overline{IC}$；

$\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AB}+\overline{CJ}=\overline{BC}+\overline{AG}+\overline{EF}+\overline{JD}$；

$\overline{EF}+\overline{AG}+\overline{BC}+\overline{DK}=\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{FG}+\overline{EK}$；

$\overline{FG}+\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EL}=\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AG}+\overline{LF}$；

$\overline{AG}+\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FM}=\overline{EF}+\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{MG}$

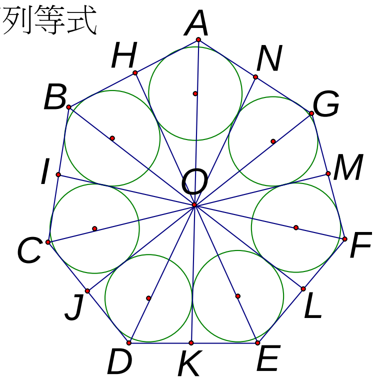


圖 15

則七邊形 $ABCDEFG$ 有一個以 O 為圓心的內切圓，切點分別為 H、I、J、K、L、M、N。

證明：同引理 1(略)

在引理 2 條件的七邊形 $ABCDEFG$ 中，有七個圓外切四邊形的內切圓，因為滿足了七個條件而有一個大內切圓在裡面。但就其內部兩兩內切圓的位置關係可能為外切或外離，這兩種位置關係同引理 1 的五邊形情形一樣，也會得到該七邊形是一個圓外切正七邊形，也是雙心七邊形，此部分的推導說明因為同理故省略。對於其他奇數邊之多邊形如果滿足類似引理 1 或 2 的條件，一樣可以變成一個圓外切正多邊形之雙心多邊形。故我們得到下列定理。

定理 1：在任意 n 邊形中，n 為奇數（$n\geq 5$），n 個頂點的角邊連線段交於內部一點 O，並將原 n 邊形分割成 n 個圓外切四邊形。令 a_p 表示第 p 個邊，且滿足下列等式

$$a_{2k-1}+a_{2k+1}+a_{2k+3}+\cdots+a^{-}_{2k+2t-3}\text{ 之邊長和}$$

$$=a_{2k+2t-4}+a_{2k+2t-6}+a_{2k+2t-8}+\cdots+a^{+}_{2k-2}\text{ 之邊長和}$$

其中 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$；$t=\dfrac{n+1}{2}$，代表等式兩邊的項數；a^{-}_{p} 表示第 p 邊被分割成二段後較靠近 a_{p-1} 那一邊的線段，a^{+}_{p} 則表示較靠近 a_{p+1} 那一邊的線段。a_p 的下標 p 值如果大於 n，則拿 p 除以 n 取其餘數作為新的下標值；如果 p=0 或 n 的倍數，就取 p=n 作為新的下標值。

則此 n 邊形內有一個以 O 為圓心的大內切圓，且此邊數為奇數的 n 邊形為圓外切正 n 邊形，也是雙心 n 邊形。

證明：我們用數學歸納法來證明定理 1 中的關係式(一般式)如下，也就是從邊數 $n=2r-1$，$r\geq 3$，來證明之。

(1) $r=3\Rightarrow n=5$ 時，如圖 16，5 個頂點的角邊連線段交於內部一點 O，並將原五邊形分割成 5 個圓外切四邊形。令 a_p 表示第 p 個邊，且滿足下列 5 個等式：

（$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$；$t=\dfrac{5+1}{2}=3$ ）

$$k=1\ \Rightarrow\quad a_1+a_3+a_5^-\ \text{之邊長和}\ =a_4+a_2+\underset{\underset{a_5^+}{\Downarrow}}{a_0^+}\ \text{之邊長和}$$

$$k=2\ \Rightarrow\quad a_3+a_5+\underset{\underset{a_2^-}{\Downarrow}}{a_7^-}\ \text{之邊長和}\ =\underset{\underset{a_1}{\Downarrow}}{a_6}+a_4+a_2^+\ \text{之邊長和}$$

$$k=3\ \Rightarrow\quad a_5+\underset{\underset{a_2}{\Downarrow}}{a_7}+\underset{\underset{a_4^-}{\Downarrow}}{a_9^-}\ \text{之邊長和}=\underset{\underset{a_3}{\Downarrow}}{a_8}+\underset{\underset{a_1}{\Downarrow}}{a_6}+a_4^+\ \text{之邊長和}$$

$$k=4\ \Rightarrow\quad \underset{\underset{a_2}{\Downarrow}}{a_7}+\underset{\underset{a_4}{\Downarrow}}{a_9}+\underset{\underset{a_1^-}{\Downarrow}}{a_{11}^-}\ \text{之邊長和}=\underset{\underset{a_5}{\Downarrow}}{a_{10}}+\underset{\underset{a_3}{\Downarrow}}{a_8}+\underset{\underset{a_1^+}{\Downarrow}}{a_6^+}\ \text{之邊長和}$$

$$k=5\ \Rightarrow\quad \underset{\underset{a_4}{\Downarrow}}{a_9}+\underset{\underset{a_1}{\Downarrow}}{a_{11}}+\underset{\underset{a_3^-}{\Downarrow}}{a_{13}^-}\ \text{之邊長和}=\underset{\underset{a_2}{\Downarrow}}{a_{12}}+\underset{\underset{a_5}{\Downarrow}}{a_{10}}+\underset{\underset{a_3^+}{\Downarrow}}{a_8^+}\ \text{之邊長和}$$

則由引理1可得證定理1在 $n=5$ 時的結果。

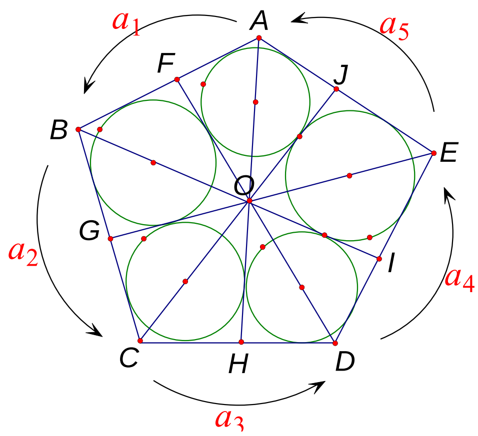


圖 16

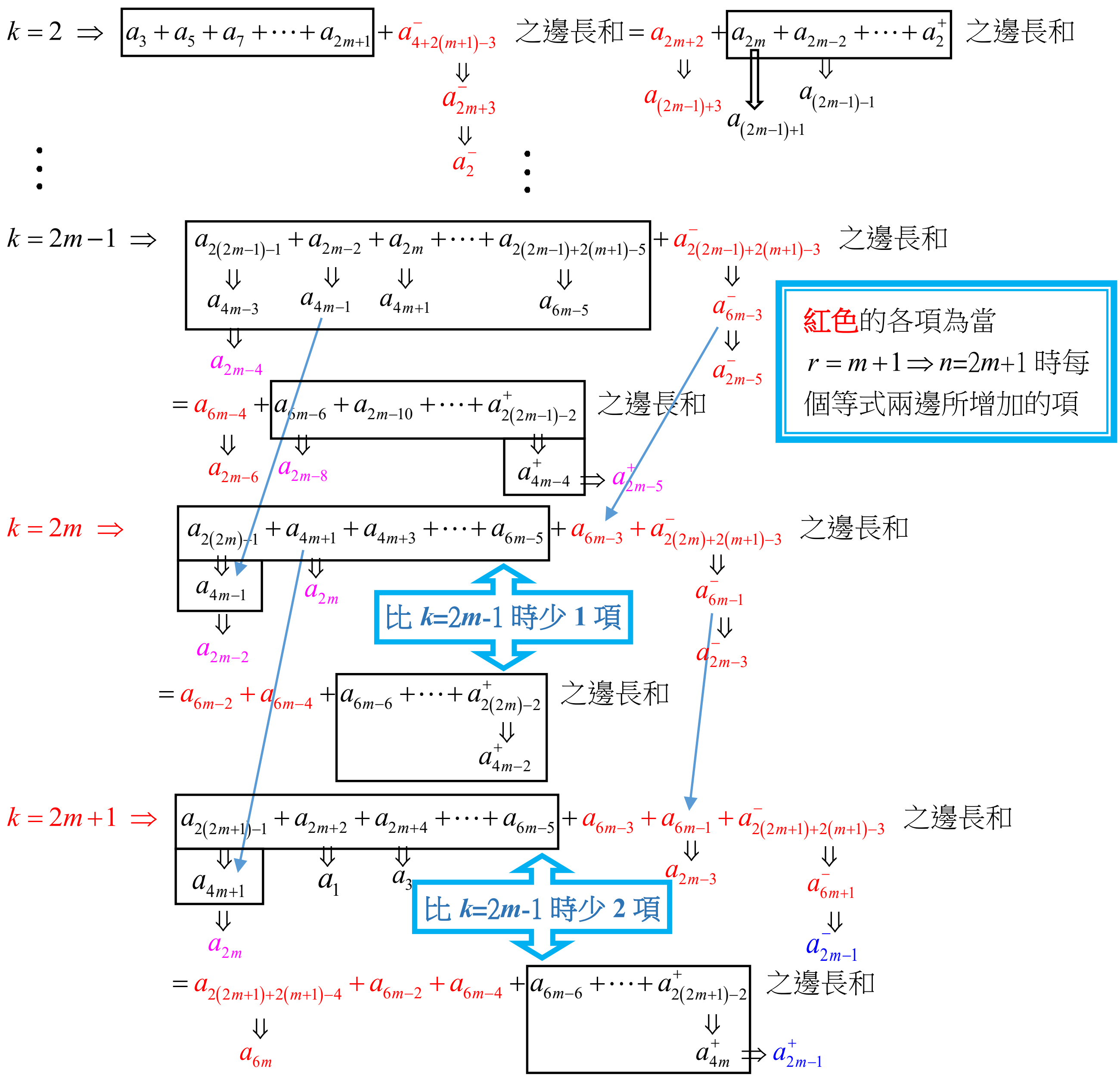
(2)假設 $r=m\Rightarrow n=2m-1$ 時成立，則當 $r=m+1\Rightarrow n=2m+1$ 時，$(2m+1)$ 個頂點的角邊連線段交於內部一點 O，並將原 $(2m+1)$ 邊形分割成 $(2m+1)$ 個圓外切四邊形。令 a_p 表示第 p 個邊，且滿足下列 $(2m+1)$ 個等式：【 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ (2m+1)$；$t=\dfrac{2m+1+1}{2}=m+1$，

左右兩邊項數 t 比 $n=(2m-1)$ 時多 1 項，即等式左邊的最後一項與等式右邊的第一項之下標值都會多 2，且最後會多出兩個條件等式($k=2m$ 與 $k=2m+1$ 時)】

$$k=1\ \Rightarrow\quad \boxed{a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1}}+\underset{\underset{a_{2m+1}^-}{\Downarrow}}{a_{2+2(m+1)-3}^-}\ \text{之邊長和}$$

$$=a_{2m}+\boxed{a_{(2m-1)-1}+a_{(2m-1)-3}+\cdots+\underset{\underset{a_{2m+1}^+}{\Downarrow}}{a_0^+}}\ \text{之邊長和}$$

等式兩邊的**<u>黑色框框</u>**代表假設 $r=m\Rightarrow n=2m-1$ 成立時每個條件等式中的各項，只有在分析最後多出的兩等式($k=2m$ 與 $k=2m+1$ 時)中**<u>黑色框框</u>**裡的項數才會分別少 1 項與 2 項．



則依引理 1、2 的證法同理可證得此 $n=(2m+1)$ 邊形內有一個以 O 為圓心的大內切圓，且此 $(2m+1)$ 邊形為圓外切正 $(2m+1)$ 邊形，也是雙心 $(2m+1)$ 邊形。故數學歸納法得證定理 1 中滿足圓外切正 n 邊形條件一般式的結果。 ■

五、偶數個邊的 n 邊形之 n 條對邊連線段與邊長關係的探討

偶數個邊的 n 邊形無法畫出奇數個邊多邊形的角邊連線段，我們使用名詞定義 2 中的**對邊連線段**來對偶數邊 n 邊形作分割，會有 $\frac{n}{2}$ 條對邊連線段並令其交於內部一點 O，使得內部得到的 n 個四邊形皆為圓外切四邊形。現在我們以四邊形、八邊形為例進行分析探討。

(一)四邊形：如圖 17，在任意四邊形 $ABCD$ 中，由 2 條對邊連線段 $\overline{EG}$ 和 $\overline{HF}$ 交於內部一點 O，其中 4 個四邊形 $AEOH$、$BEOF$、$CFOG$、$DGOH$ 皆為圓外切四邊形。此 O 點也將兩條對邊連線段分別分割成兩段，共得到 $\overline{OE}$、$\overline{OF}$、$\overline{OG}$ 和 $\overline{OH}$ 四個線段。故由性質 1 開始分析說明如下：

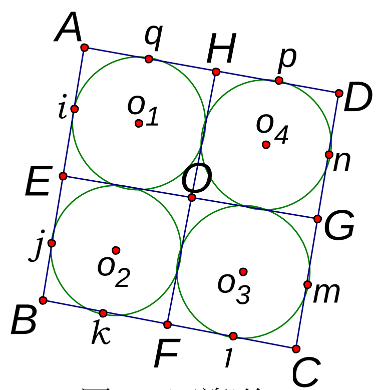


圖 17 四邊形

說明：1. 在四邊形 $AEOH$ 中，$\overline{AE}+\overline{OH}=\overline{AH}+\overline{OE}\cdots\cdots(1)$

在四邊形 $EBFO$ 中，$\overline{EB}+\overline{OF}=\overline{BF}+\overline{OE}\cdots\cdots(2)$

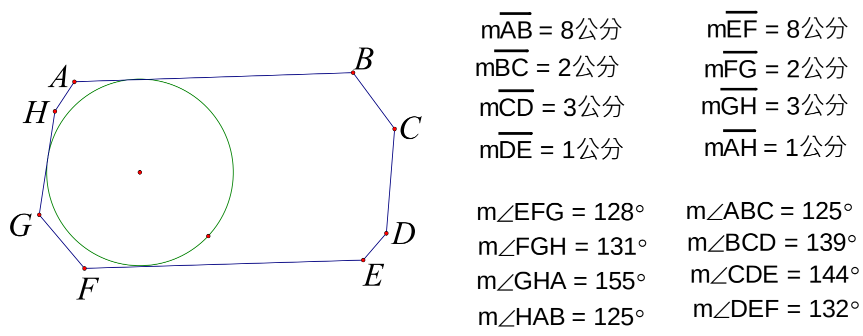
在四邊形 $OFCG$ 中，$\overline{CG}+\overline{OF}=\overline{CF}+\overline{OG}\cdots\cdots(3)$

在四邊形 $OGDH$ 中，$\overline{DG}+\overline{OH}=\overline{HD}+\overline{OG}\cdots\cdots(4)$

$(1)+(2)+(3)+(4)$ 可得 $\overline{AB}+\overline{CD}+2\overline{OF}+2\overline{OH}=\overline{BC}+\overline{AD}+2\overline{OE}+2\overline{OG}$

$$\Rightarrow \overline{OE}+\overline{OG}-\left(\overline{OF}+\overline{OH}\right)=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{BC}+\overline{AD}\right)}{2}\cdots\cdots\cdots(5)$$

推導至此，我們都知道：**若(5)式中的右式$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$成立，則四邊形 *ABCD* 內會有一個大內切圓**，也就是任意四邊形只要滿足 2 組對邊和相等，該四邊形就是圓外切四邊形（性質 2）。但是推廣到其他的偶數邊多邊形，若相間隔邊的邊長和相等（性質 7）卻不足以當作判別圓外切多邊形的條件(如下圖中當作反例的八邊形及其四組對邊長分別相等的數據)，



於是我們把(5)式中的右式$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$當作判別條件之一，此條件使得$(5)$式中的左式$\overline{OE}+\overline{OG}=\overline{OF}+\overline{OH}$也成立，如同分析奇數邊的圓外切多邊形的

判別條件情形一樣，需進一步尋找$\overline{OE}$、$\overline{OG}$、$\overline{OF}$、$\overline{OH}$分別與四個邊長的其他關係式，我們再繼續探討下去。

2.由$(1)+(2)+(3)$可得　$\overline{AB}+\overline{CG}+2\overline{OF}+\overline{OH}=\overline{AH}+\overline{BC}+2\overline{OE}+\overline{OG}\cdots\cdots(6)$

若$\overline{OE}+\overline{OG}=\overline{OF}+\overline{OH}$，則(6)式可變成$\overline{AB}+\overline{CG}+\overline{OF}=\overline{AH}+\overline{BC}+\overline{OE}$

$$\Rightarrow \overline{OE}-\overline{OF}=\overline{AB}+\overline{CG}-\left(\overline{BC}+\overline{AH}\right)\cdots\cdots(7)$$

若$\overline{AB}+\overline{CG}=\overline{BC}+\overline{AH}$，則$\overline{OE}=\overline{OF}$　$\Rightarrow \overline{OG}=\overline{OH}$

3.由$(1)+(2)+(4)$可得　$\overline{AB}+\overline{DG}+2\overline{OH}+\overline{OF}=\overline{AD}+\overline{BF}+2\overline{OE}+\overline{OG}\cdots\cdots(8)$

若$\overline{OE}+\overline{OG}=\overline{OF}+\overline{OH}$，則(8)式可變成　$\overline{AB}+\overline{DG}+\overline{OH}=\overline{AD}+\overline{BF}+\overline{OE}$

$$\Rightarrow \overline{OE}-\overline{OH}=\overline{AB}+\overline{DG}-\left(\overline{AD}+\overline{BF}\right)\cdots\cdots(9)$$

若$\overline{AB}+\overline{DG}=\overline{AD}+\overline{BF}$，則$\overline{OE}=\overline{OH}$　$\Rightarrow \overline{OG}=\overline{OH}=\overline{OE}=\overline{OF}$

此時若以 O 為圓心，$\overline{OE}$ 為半徑可作一圓 O 為四邊形 $ABCD$ 的內切圓，切點為 E、F、G、H。我們總結上面的分析條件並得到如下的引理 3：

【引理 3】：如圖 17，在一四邊形 $ABCD$ 中，2 條對邊連線段$\overline{EG}$、$\overline{HF}$交於內部一點 O，其中四邊形 $AEOH$、$BEOF$、$CFOG$、$DGOH$ 皆為圓外切四邊形。若依序滿足下列等式

(1)　$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$　；

(2)　$\overline{AB}+\overline{DG}=\overline{AD}+\overline{BF}$　；

　　$\overline{BC}+\overline{AH}=\overline{AB}+\overline{CG}$

則四邊形 $ABCD$ 內有一個以 O 為圓心的大內切圓，切點分別為 E、F、G、H。

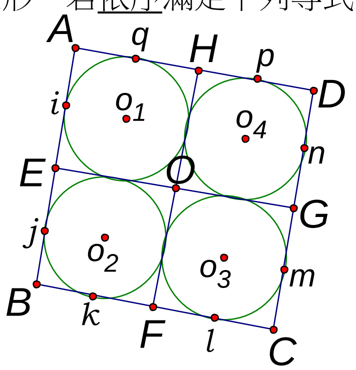


圖 17　四邊形

證明：略(如第 15-16 頁的分析說明)

在引理 3 的四邊形 $ABCD$ 中，有四個圓外切四邊形的內切圓，因為滿足了三個條件而有一個大內切圓在裡面。同分析奇數個邊的多邊形一樣，就其內部兩兩內切圓的位置關係可能

為外切或外離，這兩種位置關係會延伸發展出該四邊形究竟是什麼樣的四邊形，也是我們需要探究的。於是我們先探討兩兩內切圓外切的情形，也就是相鄰兩圓相切於一點，也就是外切點 r、s、t、u，如圖 18。

1. 內部 4 個內切圓兩兩**外切**的情形：

同引理 1、2 及定理 1 對奇數個邊的多邊形之探討過程一樣，可以得到四邊形 $o_1o_2o_3o_4 \sim$ 四邊形 $ABCD$ 且因為此相似的關係，四邊形 $o_1o_2o_3o_4$ 中亦有二條對邊連線段 $\overline{rt}$ 、 $\overline{su}$ 將此四邊形分割成四個圓外切四邊形 o_1rOu 、o_2sOr 、o_3tOs 與 o_4uOt 。

不同於前面的奇數邊圓外切多邊形，我們進一步討論四邊形 $ABCD$ 內部四個圓心 o_1 、o_2 、o_3 、o_4 與 O 及 A、B、C、D 四頂點的共線問題。在前面已分析得到 A、o_1、O 三點共線；B、o_2、O 三點共線；C、o_3、O 三點共線；D、o_4、O 三點共線

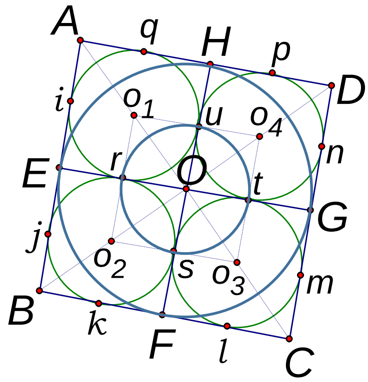


圖 18 四個內切圓兩兩外切的示意圖

先看圓 o_1 與圓 o_3 ，因為 $\overline{Oo_1}$ 是 $\angle EOH$ 的角平分線、$\overline{Oo_3}$ 是 $\angle FOG$ 的角平分線

$\therefore \angle o_1Ou = \angle o_1Or$ 、 $\angle o_3Os = \angle o_3Ot$ 又 $\angle EOH = \angle FOG$（對頂角相等）

$\Rightarrow 2\angle o_1Ou = 2\angle o_3Os \quad \therefore \angle o_1Ou = \angle o_1Or = \angle o_3Os = \angle o_3Ot$

$\Rightarrow \angle o_1Or + \angle EOF + \angle o_3Os = \angle o_1Or + \angle EOF + \angle o_1Ou = 180°$

$\Rightarrow o_1$ 、O、o_3 三點共線 $\Rightarrow$ A、o_1、O、o_3 、C 五點共線

也就是 $\overline{AC}$ 為通過內切圓圓心 O 的對角線

同理也可證得 $\overline{BD}$ 也是通過內切圓圓心 O 的另一條對角線，且兩條對角線互相垂直，但無法推導得到 $\angle EOH = \angle EOF$ 或 $\angle EOH = \angle HOG$ ，也就是兩條對邊連線段 $\overline{EG}$ 和 $\overline{HF}$ 不一定會互相垂直。

但就四邊形 $ABCD$ 本身，可以推得 $\Delta ABO \cong \Delta ADO(ASA) \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AD}$

同理 $\Delta ABO \cong \Delta CBO(AAS) \Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$

$\Delta BCO \cong \Delta DCO(AAS) \Rightarrow \overline{BC} = \overline{CD}$

$$\Delta CDO \cong \Delta ADO(AAS) \Rightarrow \overline{CD} = \overline{AD}$$

所以四邊形 $ABCD$ 雖不是正方形卻是四邊相等的菱形。故引理 3 的條件下得到的四邊形 $ABCD$ 為一個圓外切菱形。但是這兩條對角線交於一點的情形似乎和 *Brianchon* 定理中圓外切六邊形退化成圓外切四邊形[6]時，其對角線會相交於內部一點的結果相呼應。研究至此，我們很歡喜雀躍有這樣的巧合出現，也想繼續探討其他沒有被討論過的圓外切八邊形、十邊形或更多偶數邊多邊形在滿足類似引理 3 條件下是否仍具有所有對角線會相交於內部一點的情形。

2. 內部 4 個內切圓兩兩**外離**的情形：參考圖 19 之示意圖

因為引理 3 的結果在此四邊形 $ABCD$ 中仍成立。

將此四邊形 $ABCD$ 中 4 個內切圓圓心 o_1 、o_2 、o_3 、o_4 分別連接起來，其中令 $\overline{o_1o_2}$ 與 $\overline{OE}$ 交於 z_1 ，$\overline{o_2o_3}$ 與 $\overline{OF}$ 交於 z_2 ，$\overline{o_3o_4}$ 與 $\overline{OG}$ 交於 z_3 ，$\overline{o_4o_1}$ 與 $\overline{OH}$ 交於 z_4 ，且圓 o_1 分別與 $\overline{OE}$ 、$\overline{OH}$ 切於 t、r；圓 o_2 分別與 $\overline{OE}$ 、$\overline{OF}$ 切於 u、v；圓 o_3 分別與 $\overline{OF}$ 、$\overline{OG}$ 切於 w、x；

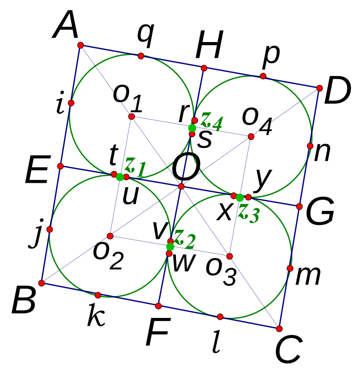


圖 19 四個內切圓兩兩外離的示意圖

圓 o_4 分別與 $\overline{OG}$ 、$\overline{OH}$ 切於 y、s。同引理 1、2 及定理 1 對奇數個邊的多邊形之探討過程一樣，可以得到四邊形 $o_1o_2o_3o_4 \curlywedge$ 四邊形 $ABCD$，且四邊形 $ABCD$ 的四個內角皆不會是相等的直角。又可得到 A、o_1、O、o_3、C 五點共線與 B、o_2、O、o_4、D 五點共線的結果。即是 4 個內切圓兩兩外離的情形下，四邊形 $ABCD$ 的兩條對角線仍會交於內部一點。但就四邊形 $ABCD$ 本身，雖不是正方形卻是四邊相等的菱形。故同外切情形一樣，在引理 3 條件下的四邊形 $ABCD$ 是一個圓外切菱形。

(二)八邊形：如圖 20，同四邊形的分析推導過程，我們得到下面的結果：

【引理 4】如圖 20，在一八邊形 $ABCDEFGH$ 中 $\overline{IM}$ 、$\overline{JN}$ 、 $\overline{KP}$ 、 $\overline{LQ}$ 為四組對邊連線段並交於內點一點 O，將原八邊形分割成八個圓外切四邊形 $AIOQ$、$BJOI$、$CKOJ$、$DLOK$、$EMOL$、$FNOM$、$GPON$、$HQOP$。若此八邊形 $ABCDEFGH$ 依序滿足下列條件

(1) $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AH}$ ；

(2) $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{PG}=\overline{FG}+\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AQ}$ ；

$\overline{AH}+\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FN}=\overline{EF}+\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{PH}$ ；

$\overline{GH}+\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EM}=\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AH}+\overline{NG}$ ；

$\overline{FG}+\overline{AH}+\overline{BC}+\overline{DL}=\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{HG}+\overline{FM}$ ；

$\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{AB}+\overline{CK}=\overline{BC}+\overline{AH}+\overline{FG}+\overline{LE}$ ；

$\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AH}+\overline{BJ}=\overline{AB}+\overline{GH}+\overline{EF}+\overline{KD}$

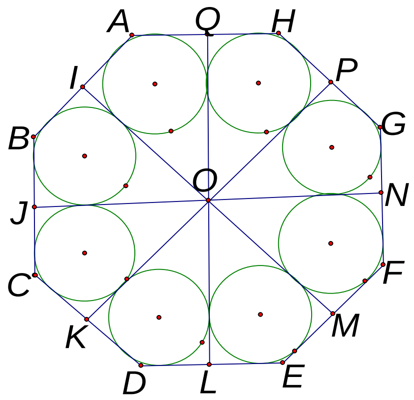


圖 20 八邊形

則此八邊形 $ABCDEFGH$ 為圓外切八邊形，八個切點為 I、J、K、L、M、N、P、Q。

證明：1. 在四邊形 $AIOQ$ 中，$\overline{AI}+\overline{OQ}=\overline{AQ}+\overline{OI}\cdots\cdots\cdots(1)$

在四邊形 $BJOI$ 中，$\overline{IB}+\overline{OJ}=\overline{OI}+\overline{BJ}\cdots\cdots\cdots(2)$

在四邊形 $CKOJ$ 中，$\overline{OJ}+\overline{CK}=\overline{CJ}+\overline{OK}\cdots\cdots\cdots(3)$

在四邊形 $DLOK$ 中，$\overline{KD}+\overline{OL}=\overline{OK}+\overline{DL}\cdots\cdots\cdots(4)$

在四邊形 $EMOL$ 中，$\overline{OL}+\overline{EM}=\overline{LE}+\overline{OM}\cdots\cdots\cdots(5)$

在四邊形 $FNOM$ 中，$\overline{MF}+\overline{ON}=\overline{OM}+\overline{FN}\cdots\cdots\cdots(6)$

在四邊形 $GPON$ 中，$\overline{ON}+\overline{PG}=\overline{NG}+\overline{OP}\cdots\cdots\cdots(7)$

在四邊形 $HQOP$ 中，$\overline{PH}+\overline{OQ}=\overline{OP}+\overline{QH}\cdots\cdots\cdots(8)$

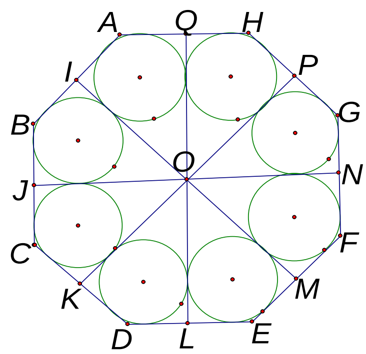


圖 20 八邊形

$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)\Rightarrow$

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}+2\overline{OJ}+2\overline{OL}+2\overline{ON}+2\overline{OQ}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AH}+2\overline{OI}+2\overline{OK}+2\overline{OM}+2\overline{OP}$$

$\because \overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AH}$

$\therefore \overline{OI}+\overline{OK}+\overline{OM}+\overline{OP}=\overline{OJ}+\overline{OL}+\overline{ON}+\overline{OQ}\cdots\cdots\cdots(9)$

2. 由$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)$可得

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{PG}+\overline{OQ}+2\overline{OJ}+2\overline{OL}+2\overline{ON}$$

$$=\overline{FG}+\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AQ}+2\overline{OI}+2\overline{OK}+2\overline{OM}+\overline{OP}$$

由(9)式可得 $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{PG}+\overline{OJ}+\overline{OL}+\overline{ON}=\overline{FG}+\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AQ}+\overline{OI}+\overline{OK}+\overline{OM}$

$$\Rightarrow \overline{OI}+\overline{OK}+\overline{OM}-(\overline{OJ}+\overline{OL}+\overline{ON})=\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{PG}-(\overline{FG}+\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AQ})$$

$\because \overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{PG}=\overline{FG}+\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AQ}$ $\quad\therefore \overline{OI}+\overline{OK}+\overline{OM}=\overline{OJ}+\overline{OL}+\overline{ON}$

又 $\overline{OI}+\overline{OK}+\overline{OM}+\overline{OP}=\overline{OJ}+\overline{OL}+\overline{ON}+\overline{OQ} \Rightarrow \overline{OP}=\overline{OQ}\cdots\cdots\cdots(10)$

3. 同 2 的證法由$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(8)$可得

$$\overline{OJ}+\overline{OL}+\overline{OQ}-(\overline{OI}+\overline{OK}+\overline{OM})=\overline{AH}+\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FN}-(\overline{EF}+\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{PH})$$

$\because \overline{AH}+\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FN}=\overline{EF}+\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{PH}$ $\quad\therefore \overline{OJ}+\overline{OL}+\overline{OQ}=\overline{OI}+\overline{OK}+\overline{OM}\cdots\cdots(11)$

又 $\overline{OI}+\overline{OK}+\overline{OM}+\overline{OP}=\overline{OJ}+\overline{OL}+\overline{OQ}+\overline{ON} \Rightarrow \overline{OP}=\overline{ON}\cdots\cdots\cdots(12)$

4. 由$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(7)+(8)$搭配 (9)式 及

$\overline{GH}+\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EM}=\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AH}+\overline{NG}$ 可得 $\overline{OM}=\overline{ON}\cdots\cdots(13)$

5. 由$(1)+(2)+(3)+(4)+(6)+(7)+(8)$搭配 (9)式 及

$\overline{FG}+\overline{AH}+\overline{BC}+\overline{DL}=\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{HG}+\overline{FM}$ 可得 $\overline{OL}=\overline{OM}\cdots\cdots(14)$

6. 由$(1)+(2)+(3)+(5)+(6)+(7)+(8)$搭配 (9)式 及

$\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{AB}+\overline{CK}=\overline{BC}+\overline{AH}+\overline{FG}+\overline{LE}$ 可得 $\overline{OI}=\overline{OJ}\cdots\cdots(15)$

7. 由$(1)+(2)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)$搭配 (9)式 及

$\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AH}+\overline{BJ}=\overline{AB}+\overline{GH}+\overline{EF}+\overline{KD}$ 可得 $\overline{OQ}=\overline{OI}\cdots\cdots\cdots(16)$

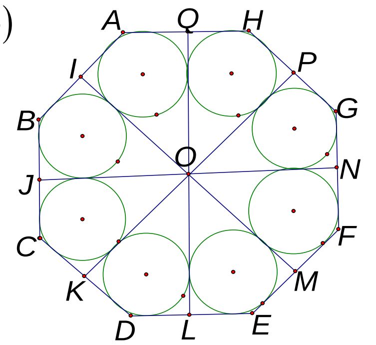


圖 20 八邊形

由(11) 、(14) 、(16)式可得 $\overline{OJ}=\overline{OK}\cdots\cdots\cdots(17)$

由(9)式及(10) 、(13) 、(17)式可得 $\overline{OI}=\overline{OL}\cdots\cdots\cdots(18)$

故$\overline{OQ}=\overline{OP}=\overline{ON}=\overline{OM}=\overline{OL}=\overline{OI}=\overline{OJ}=\overline{OK}$

則可以以 O 為圓心，以$\overline{OQ}$為半徑作一圓 O 和八邊形 $ABCDEFGH$ 相切，切點分別為 I、J、K、L、M、N、P、Q。 故得證 ■

在引理 4 的八邊形 $ABCDEFGH$ 中，有八個圓外切四邊形的內切圓，因為滿足了七個條件而有一個大內切圓在裡面。同分析引理 3 的四邊形一樣，就其內部兩兩內切圓的位置關係可能為外切或外離，這兩種位置關係會延伸發展出該八邊形究竟是什麼樣的八邊形，也是我們要進一步探究的。於是我們先探討兩兩內切圓外切的情形，也就是相鄰兩圓相切於一點，也就是外切點 r、s、t、u、v、w、x、y，如圖 21。

1. 內部 8 個內切圓兩兩**外切**的情形：

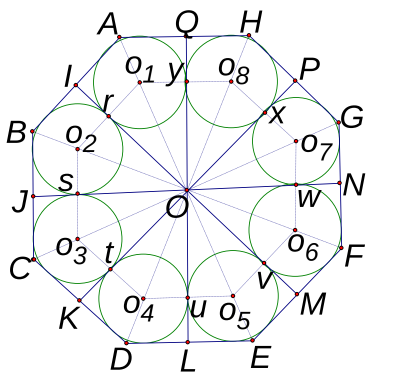


圖 21 八個內切圓兩兩外切的示意圖

同四邊形內部兩兩內切圓外切情形的理由，一樣可以證得八邊形$o_1o_2o_3o_4o_5o_6o_7o_8\sim$八邊形 $ABCDEFGH$ 且因為此相似的關係，八邊形$o_1o_2o_3o_4o_5o_6o_7o_8$中亦有四條對邊連線段$\overline{rv}$ 、 $\overline{sw}$ 、$\overline{tx}$ 、 $\overline{uy}$ 將此八邊形分割成八個圓外切四邊形o_1rOy 、o_2sOr 、o_3tOs 、o_4uOt 、o_5vOu 、 o_6wOv 、o_7xOw 與 o_8yOx 。也可進一步推導得到 A、o_1 、O、o_5 、E 五點共線；B、o_2 、O、o_6 、F 五點共線；C、o_3 、O、o_7 、G 五點共線以及 D、o_4 、O、o_8 、H 五點共線，即是該八邊形中四條對角線共點。又因為$\angle IOQ=\angle LOM$ 、$\angle JOI=\angle MON$ 、$\angle KOJ=\angle NOP$ 、 $\angle LOK=\angle POQ$，可得到$\angle BAH=\angle LEM$ 、$\angle ABC=\angle MFN$ 、$\angle BCD=\angle NGP$ 、$\angle CDE=\angle PHQ$，也就是四組對角分別相等；在對邊方面，

$\because\Delta AOQ\cong\Delta EOL$ 、$\Delta HOQ\cong\Delta LOD$ $\Rightarrow$ $\overline{AO}=\overline{EO}$ 、$\overline{HO}=\overline{DO}$，又可進一步得到

$\angle AOH=\angle DOE\Rightarrow\Delta AOH\cong\Delta EOD(SAS)$ $\Rightarrow$ $\overline{AH}=\overline{DE}$ 同理$\overline{AB}=\overline{EF}$ 、$\overline{BC}=\overline{FG}$ 、

$\overline{CD}=\overline{GH}$ ，故四組對邊會相等，仍無法證得八個邊相等。故由引理 4 的條件得到的八邊形 $ABCDEFGH$ 內部內切圓兩兩外切的情形下，該八邊形為圓外切八邊形，且其四條對角線交於內部一點。這就是 *Brianchon* 定理在圓外切八邊形的推廣結果。

2. 內部 8 個內切圓兩兩**外離**的情形：同前面 8 個內切圓兩兩**外切**的情形一樣，原八邊形 $ABCDEFGH$ 的四組對角與對邊分別相等，八個邊卻無法相等，也可推導得到該八邊形 $ABCDEFGH$ 的四條對角線共點。故由引理 4 得到的八邊形 $ABCDEFGH$ 無論是 8 個內切圓兩兩外切或外離，都是四組對角與對邊皆相等且四條對角線交於內部一點的圓外切八邊形，即滿足 *Brianchon* 定理。對於其他如十邊形、…等偶數邊之 n 邊形如果滿足類似引理 3 或 4 的條件，一樣可以變成一個 $\frac{n}{2}$ 組對角及對邊分別相等、$\frac{n}{2}$ 條對角線交於內部一點的圓外切多邊形。故我們統整得到下列定理。

定理 2：在任意 n 邊形中，n 為偶數（$n \ge 4$），$\frac{n}{2}$ 條對邊連線段交於內部一點 O，並將原 n 邊形分割成 n 個圓外切四邊形。令 a_p 表示第 p 個邊，若此 n 邊形依序滿足下列等式：

(1) $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{n-1}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_n$

(2) $a_k+a_{k-2}+a_{k-4}+\cdots+a^{+}_{k-2t+2}$ 之邊長和 $=a_{k-2t+3}+a_{k-2t+5}+a_{k-2t+7}+\cdots+a^{-}_{k+1}$ 之邊長和

其中 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2$；$t=\frac{n}{2}$，代表等式兩邊的項數；$a^{+}_{p}$ 表示第 p 邊被分割成二段後較靠近 a_{p+1} 那一邊的線段，a^{-}_{p} 則表示較靠近 a_{p-1} 那一邊的線段。a_p 的下標 p 值如果 ≤ 0，則自動除以 n 取其正餘數作為新的下標值。

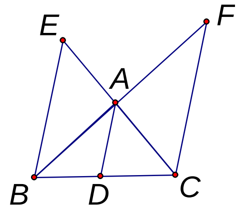
則此 n 邊形內有一個以 O 為圓心的大內切圓，且此邊數為偶數的圓外切 n 邊形之 $\frac{n}{2}$ 條對角線會交於內部一點 O，此點稱為廣義的 *Brianchon* 點。

證明：略(定理中條件之一般式乃利用數學歸納法證明，證明過程與定理 1 相似並記載於實驗日誌中)

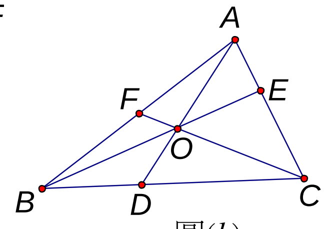
六、塞瓦定理在圓外切多邊形上的推廣

塞瓦定理： 設 D、E、F 分別為 ΔABC 三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 或延長線上的點，且 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 三線平行或共點，如右圖(a)及(b)，則

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$$



圖(a)



圖(b)

在這裡只討論圖(b)共點的情形，且圖(b)中的 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 就是我們定義的角邊連線段。我們推廣到由定理 1 的條件得到的奇數邊圓外切正 n 邊形中，每個邊上的切點必是每邊的中點，故一定滿足塞瓦定理；再進一步推廣到由定理 2 的條件得到的偶數邊圓外切 n 邊形中，每邊上的切點不一定是該邊的中點，但仍可推導得到滿足塞瓦定理的結果，我們將分析推廣的結果敘述如下：

引理 5：如圖 22，從定理 2 的條件所得到的圓外切六邊形 $ABCDEF$ 中，G、H、I、J、K、L 為切點，則

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CI}}{\overline{ID}}\times\frac{\overline{DJ}}{\overline{JE}}\times\frac{\overline{EK}}{\overline{KF}}\times\frac{\overline{FL}}{\overline{LA}}=1$$

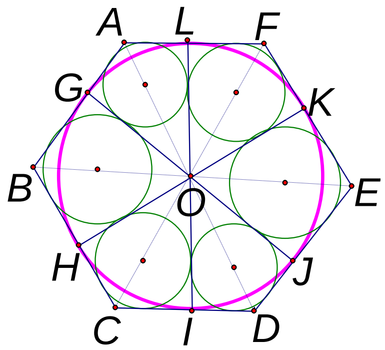


圖 22 由定理 2 所得到的圓外切六邊形

證明：$\because \Delta AOG\cong\Delta AOL\cong\Delta DOI\cong\Delta DOJ$ 、 $\Delta BOG\cong\Delta BOH\cong\Delta EOJ\cong\Delta EOK$ 、 $\Delta COH\cong\Delta COI\cong\Delta FOK\cong\Delta FOL$

$$\therefore \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}}=\frac{\Delta AOG}{\Delta BOG}=\frac{\Delta AOL}{\Delta BOH}=\frac{\Delta AOL}{\Delta EOK}=\frac{\overline{AL}}{\overline{EK}}\cdots\cdots(1)$$

同理
$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}}=\frac{\Delta BOH}{\Delta COH}=\frac{\Delta BOG}{\Delta COI}=\frac{\Delta EOJ}{\Delta FOL}=\frac{\overline{EJ}}{\overline{FL}}\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\overline{CI}}{\overline{ID}}=\frac{\Delta COI}{\Delta DOI}=\frac{\Delta COH}{\Delta DOJ}=\frac{\Delta FOK}{\Delta DOJ}=\frac{\overline{FK}}{\overline{DJ}}\cdots\cdots(3)$$

由(1)、(2)、(3)式可得
$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CI}}{\overline{ID}}\times\frac{\overline{DJ}}{\overline{EJ}}\times\frac{\overline{EK}}{\overline{FK}}\times\frac{\overline{LF}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{EK}}\times\frac{\overline{EJ}}{\overline{FL}}\times\frac{\overline{FK}}{\overline{DJ}}\times\frac{\overline{DJ}}{\overline{EJ}}\times\frac{\overline{EK}}{\overline{FK}}\times\frac{\overline{LF}}{\overline{AL}}$$
$$=1$$
■

此為塞瓦定理在滿足定理 2 條件的偶數邊之圓外切六邊形上的推廣結果，同理可證在定理 2 得到的圓外切八邊形、十邊形、⋯、$n=2k$ 邊形中，一樣可得相同規律的結果，我們最後證出塞瓦定理在定理 2 得到的偶數邊的圓外切 n 邊形之推廣結果，也就是如下的定理 3。

定理 3：如圖 23，從定理 2 的條件所得到的圓外切 n ($n=2k$)邊形 $A_1A_2\cdots A_{2k}$ 中，p_1、p_2、⋯、p_{2k} 為切點，則

$$\frac{\overline{A_1p_1}}{\overline{p_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2p_2}}{\overline{p_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3p_3}}{\overline{p_3A_4}}\times\cdots\cdots\times\frac{\overline{A_{2k}p_{2k}}}{\overline{p_{2k}A_{2k}}}=1$$

證明：$\because \Delta A_1Op_1 \cong \Delta A_1Op_{2k} \cong \Delta A_{k+1}Op_k \cong \Delta A_{k+1}Op_{k+1}$

$\Delta A_2Op_2 \cong \Delta A_2Op_1 \cong \Delta A_{k+2}Op_{k+1} \cong \Delta A_{k+2}Op_{k+2}$

$\Delta A_3Op_3 \cong \Delta A_3Op_2 \cong \Delta A_{k+3}Op_{k+2} \cong \Delta A_{k+3}Op_{k+3}$

$\vdots$

$\Delta A_kOp_k \cong \Delta A_kOp_{k-1} \cong \Delta A_{2k}Op_{2k-1} \cong \Delta A_{2k}Op_{2k}$

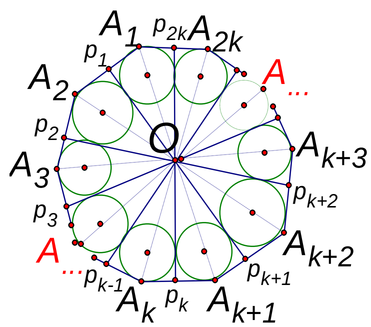


圖 23 由定理 2 得到的圓外切 $2k$ 邊形

$$\therefore \frac{\overline{A_1p_1}}{\overline{p_1A_2}}=\frac{\Delta A_1Op_1}{\Delta p_1OA_2}=\frac{\Delta A_1Op_{2k}}{\Delta A_2Op_2}=\frac{\Delta A_1Op_{2k}}{\Delta A_{k+2}Op_{k+2}}=\frac{\overline{A_1p_{2k}}}{\overline{A_{k+2}p_{k+2}}}$$

$$\frac{\overline{A_2p_2}}{\overline{p_2A_3}}=\frac{\Delta A_2Op_2}{\Delta p_2OA_3}=\frac{\Delta A_2Op_1}{\Delta A_3Op_3}=\frac{\Delta A_{k+2}Op_{k+1}}{\Delta A_{k+3}Op_{k+3}}=\frac{\overline{A_{k+2}p_{k+1}}}{\overline{A_{k+3}p_{k+3}}}$$

$$\frac{\overline{A_3p_3}}{\overline{p_3A_4}}=\frac{\Delta A_3Op_3}{\Delta p_3OA_4}=\frac{\Delta A_3Op_2}{\Delta A_4Op_4}=\frac{\Delta A_{k+3}Op_{k+2}}{\Delta A_{k+4}Op_{k+4}}=\frac{\overline{A_{k+3}p_{k+2}}}{\overline{A_{k+4}p_{k+4}}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\overline{A_kp_k}}{\overline{p_kA_{k+1}}}=\frac{\Delta A_kOp_k}{\Delta p_kOA_{k+1}}=\frac{\Delta A_kOp_{k-1}}{\Delta A_{k+1}Op_{k+1}}=\frac{\Delta A_{2k}Op_{2k-1}}{\Delta A_{k+1}Op_{k+1}}=\frac{\overline{A_{2k}p_{2k-1}}}{\overline{A_{k+1}p_{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A_1p_1}}{\overline{p_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2p_2}}{\overline{p_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3p_3}}{\overline{p_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-1}p_{k-1}}}{\overline{p_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kp_k}}{\overline{p_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}p_{k+1}}}{\overline{p_{k+1}A_{k+2}}}\times\frac{\overline{A_{k+2}p_{k+2}}}{\overline{p_{k+2}A_{k+3}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{2k-2}A_{2k-2}}}{\overline{p_{2k-2}A_{2k-1}}}\times\frac{\overline{A_{2k-1}A_{2k-1}}}{\overline{p_{2k-1}A_{2k}}}\times\frac{\overline{A_{2k}p_{2k}}}{\overline{p_{2k}A_1}}$$

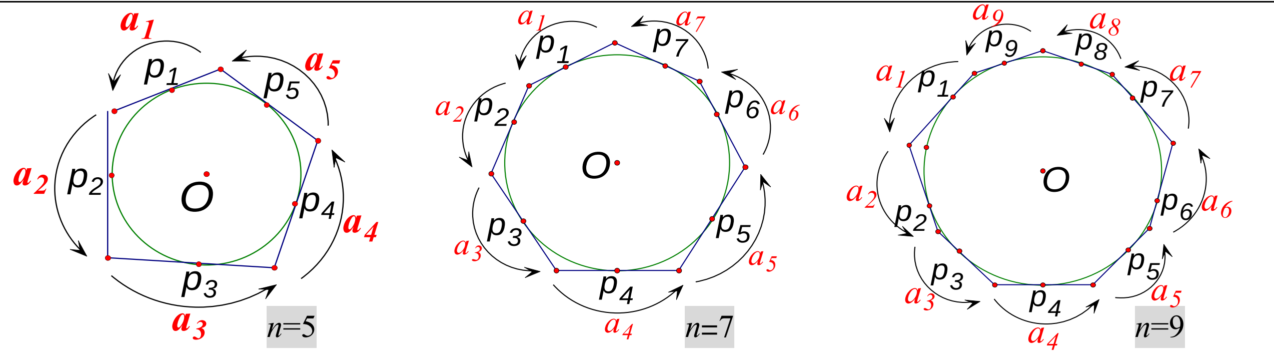
$$=\frac{\overline{A_1p_{2k}}}{\overline{A_{k+2}p_{k+2}}}\times\frac{\overline{A_{k+2}p_{k+1}}}{\overline{A_{k+3}p_{k+3}}}\times\frac{\overline{A_{k+3}p_{k+2}}}{\overline{A_{k+4}p_{k+4}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{2k-1}p_{2k-2}}}{\overline{A_{2k}p_{2k}}}\times\frac{\overline{A_{2k}p_{2k-1}}}{\overline{A_{k+1}p_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}p_{k+1}}}{\overline{p_{k+1}A_{k+2}}}\times\frac{\overline{A_{k+2}p_{k+2}}}{\overline{p_{k+2}A_{k+3}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{2k-1}p_{2k-1}}}{\overline{p_{2k-1}A_{2k}}}\times\frac{\overline{A_{2k}p_{2k}}}{\overline{p_{2k}A_1}}$$

$$=1$$

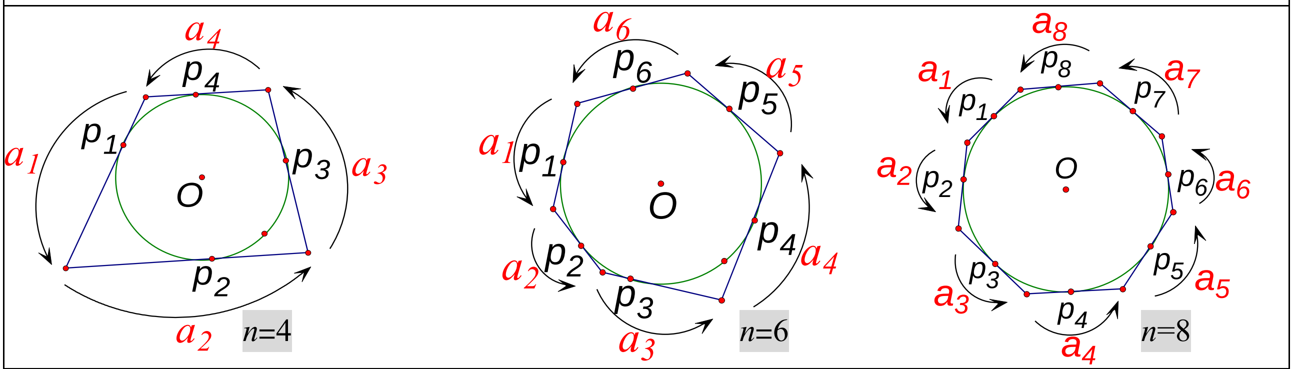
上式中，以藍色虛線區分前半與後半，項數相同的二部分的分子與分母同顏色和形狀的框框會約分抵消掉，最後得到比值為 1 的結果，故得證。 ■

伍、研究結果

一. 圓外切 n 邊形的邊長關係，統整如下：請參考表(一)及表(二)

n=奇數
令 a_p 表示第 p 個邊， $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ ； $t=\dfrac{n+1}{2}$ ，則邊長關係式為 $a_{2k-1}+a_{2k+1}+\cdots+a^{-}_{2k+2t-3}$ **之邊長和** $=a_{2k+2t-4}+a_{2k+2t-6}+\cdots+a^{+}_{2k-2}$ **之邊長和**（以切點 p_{2k-2} 為分割點），共有 n 個關係式


表(一)

n=偶數
令 a_p 表示第 p 個邊， $n=2k$ ，則邊長關係式為 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$ ，k=2、3、4、……


表(二)

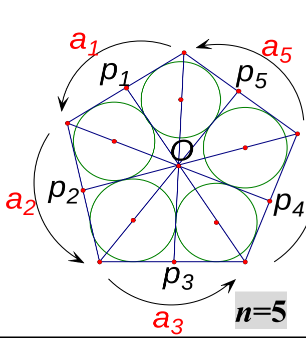
二. 在奇數個邊的 n 邊形中，從 n 個頂點與其對邊作 n 條角邊連線段，使所有的角邊連線段交於內部一點 O，並分割原 n 邊形成 n 個圓外切四邊形，其中 O 點與每邊交點的連線段($\overline{Op_k}$)長和邊長(a_p長)的規律關係，可得 n 個關係式，統整結果如表(三)所示。

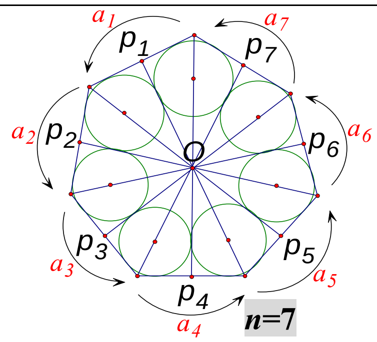
三. 在偶數個邊的 n 邊形中，作 $\frac{n}{2}$ 條對邊連線段，使所有的對邊連線段交於內部一點 O，並分割原 n 邊形成 n 個圓外切四邊形，其中 O 點與每邊交點的連線段($\overline{Op_k}$)長和邊長(a_p 長)的規律關係，可得到統整結果如表(四)所示。

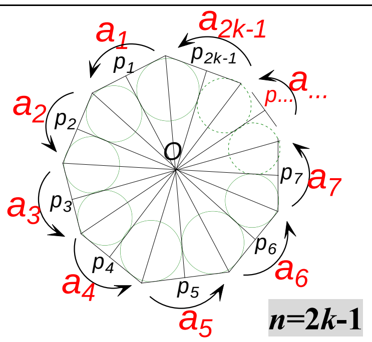
奇數個邊的 n(n 為奇數)邊形角邊連線段與邊長的一般關係式： $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ ； $t=\frac{n+1}{2}$

$\overline{Op_{2k-1}}+\overline{Op_{2k+1}}+\cdots+\overline{Op_{2k+2t-5}}-\left(\overline{Op_{2k+2t-4}}+\overline{Op_{2k+2t-6}}+\cdots+\overline{Op_{2k}}\right)$ **共有 n 個關係式**

$$=\frac{a_{2k-1}+a_{2k+1}+\cdots+a^{-}_{2k+2t-3}\ \text{之邊長和}-\left(a_{2k+2t-4}+a_{2k+2t-6}+\cdots+a^{+}_{2k-2}\ \text{之邊長和}\right)}{2}$$







表(三)

偶數個邊的 n(n 為偶數)邊形角邊連線段與邊長的一般關係式：

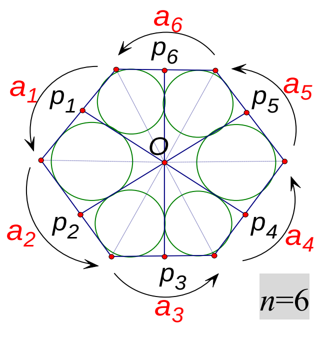
$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2$ ； $t=\frac{n}{2}$ ，**在定理 2 共需 n-2+1=n-1 個關係式**

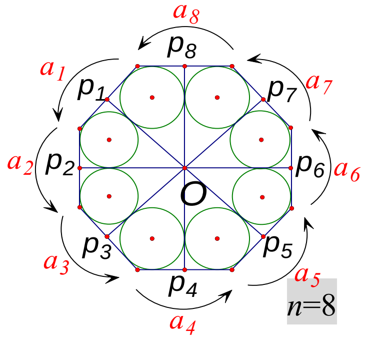
(1) $\overline{Op_1}+\overline{Op_3}+\cdots+\overline{Op_{n-1}}-\left(\overline{Op_2}+\overline{Op_4}+\cdots+\overline{Op_n}\right)$

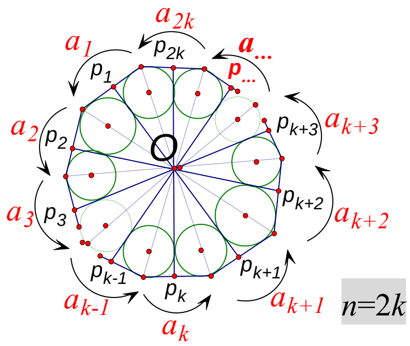
$$=\frac{a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{n-1}\ \text{之邊長和}-\left(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_n\ \text{之邊長和}\right)}{2}$$

(2) $\overline{Op_k}+\overline{Op_{k-2}}+\cdots+\overline{Op_{k-2t+4}}-\left(\overline{Op_{k-2t+3}}+\overline{Op_{k-2t+5}}+\cdots+\overline{Op_{k-1}}\right)$

$$=a_k+a_{k-2}+\cdots+a^{+}_{k-2t+2}\ \text{之邊長和}-\left(a_{k-2t+3}+a_{k-2t+5}+\cdots+a^{-}_{k+1}\ \text{之邊長和}\right)$$







表(四)

四. 有了第二、三點的研究結果，足以得到不論是利用多條角邊連線段或對邊連線段交於內部一點後，形成多個圓外切四邊形的奇數或偶數個邊多邊形，在滿足一些條件下，皆可以在該多邊形內部作出一內切圓與每個邊長均相切。需要滿足的條件如下所示。

(一) **定理 1**：在任意 n 邊形中，n 為奇數（$n \geq 5$），n 個頂點的角邊連線段交於內部一點 O，並將原 n 邊形分割成 n 個圓外切四邊形。令 a_p 表示第 p 個邊，且滿足下列等式

$$a_{2k-1}+a_{2k+1}+a_{2k+3}+\cdots+a_{2k+2t-3}^{-} \text{之邊長和}$$

$$=a_{2k+2t-4}+a_{2k+2t-6}+a_{2k+2t-8}+\cdots+a_{2k-2}^{+} \text{之邊長和}$$

其中 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$；$t=\dfrac{n+1}{2}$，代表等式兩邊的項數；a_p^{-} 表示第 p 邊被分割成二段後較靠近 a_{p-1} 那一邊的線段，a_p^{+} 則表示較靠近 a_{p+1} 那一邊的線段。a_p 的下標 p 值如果大於 n，則拿 p 除以 n 取其餘數作為新的下標值；如果 p=0 或 n 的倍數，就取 p=n 作為新的下標值。則此 n 邊形內有一個以 O 為圓心的大內切圓，且此邊數為奇數的 n 邊形為圓外切正 n 邊形，也是雙心 n 邊形。

(二) **定理 2**：在任意 n 邊形中，n 為偶數（$n \geq 4$），$\dfrac{n}{2}$ 條對邊連線段交於內部一點 O，並將原 n 邊形分割成 n 個圓外切四邊形。令 a_p 表示第 p 個邊，若此 n 邊形<u>依序</u>滿足下列等式：

(1) $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{n-1}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_n$

(2) $a_k+a_{k-2}+a_{k-4}+\cdots+a_{k-2t+2}^{+}$ 之邊長和 $=a_{k-2t+3}+a_{k-2t+5}+a_{k-2t+7}+\cdots+a_{k+1}^{-}$ 之邊長和

其中 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2$；$t=\dfrac{n}{2}$，代表等式兩邊的項數；$a_p^{+}$ 表示第 p 邊被分割成二段後較靠近 a_{p+1} 那一邊的線段，a_p^{-} 則表示較靠近 a_{p-1} 那一邊的線段。

a_p 的下標 p 值如果 ≤ 0，則自動除以 n 取其正餘數作為新的下標值。

則此 n 邊形內有一個以 O 為圓心的大內切圓，且此邊數為偶數的圓外切 n 邊形之 $\dfrac{n}{2}$ 條對角線會交於內部一點 O，此點稱為廣義的 *Brianchon* 點。

陸、討論與結論

一、 如圖 24，每一個具有奇數個邊的圓外切 n 邊形中（n 為奇數），其所有邊長的關係，以切點作為分割點，共有 n 個分割點，所以有 n 個關係式。【性質 4－6】

$a_{2k-1}+a_{2k+1}+\cdots+a^{-}_{2k+2t-3}$ **之邊長和**

$=a_{2k+2t-4}+a_{2k+2t-6}+\cdots+a^{+}_{2k-2}$ **之邊長和**（以切點 p_{2k-2} 為分割點），

令 a_p 表示第 p 個邊，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$；$t=\dfrac{n+1}{2}$

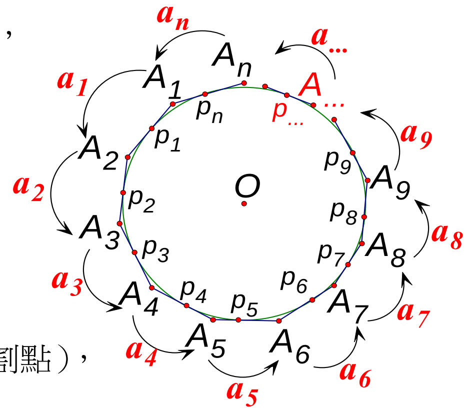


圖 24 奇數個邊的圓外切 n 邊形

此處分割點的意義在於原本奇數個邊的圓外切 n 邊形，將分割點所在的邊分成兩段，視此兩段為新的二邊，使其成為偶數個邊的圓外切 n 邊形，才能使關係式兩邊有一樣多的項數，也符合國中數學第五冊[3]中所學圓外切四邊形邊長關係式的規律性。

二、如圖 25，在一個具有偶數個邊的圓外切 n 邊形中，令 a_p 表示第 p 個邊，其所有邊長的關係如下：

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$，$k$=2、3、4、……

每一個偶數個邊的圓外切 n 邊形都只有一個邊長關係式。【性質 7】

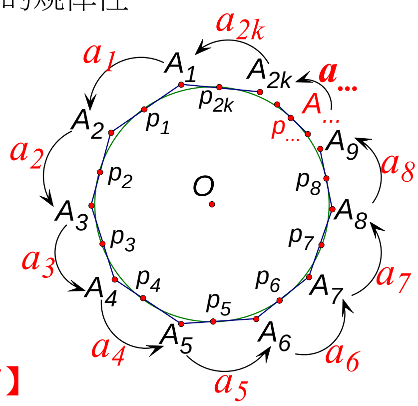


圖 25 圓外切 $n(=2k)$邊形

三、參考文獻資料[2]中三角形內部三條角邊連線段交於一點的作法，推廣到五邊形、七邊形、…等奇數個邊的 n（n=2m-1）邊形中，如圖 26，其中交點 O 將每一條角邊連線段分割成兩段，我們發現 O 點與每邊交點 p_x，x=1、2、……、(2m-1)，會連成 $\overline{Op_x}$，且得到以 $\overline{Op_x}$ 來分割對應到的邊成二段，每次只要一條 $\overline{Op_x}$ 的分割便可將所有 2m-1 個邊變成 2m 個邊，並會產生其他 $\overline{Op_x}$ 與所有 2m 個邊長的關係式如下所示：

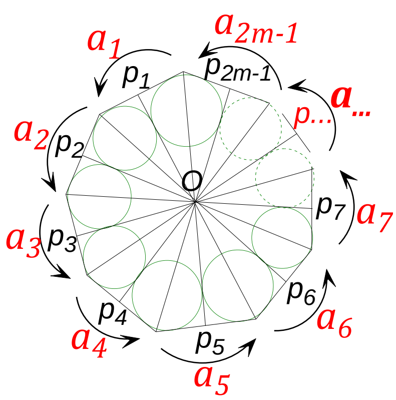


圖 26 n 條角邊連線段交於一點的 2m-1 邊形

$$\overline{Op_{2k-1}}+\overline{Op_{2k+1}}+\cdots+\overline{Op_{2k+2t-5}}-\left(\overline{Op_{2k+2t-4}}+\overline{Op_{2k+2t-6}}+\cdots+\overline{Op_{2k}}\right)$$

$$=\frac{a_{2k-1}+a_{2k+1}+\cdots+a^{-}_{2k+2t-3}\text{ 之邊長和}-\left(a_{2k+2t-4}+a_{2k+2t-6}+\cdots+a^{+}_{2k-2}\text{ 之邊長和}\right)}{2}$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$；$t=\dfrac{n+1}{2}$，共有 $2m$-1 個關係式。例如，五邊形會有 5 個關係式，九邊形會有 9 個關係式，請參考表(三)。

四、將角邊連線段換成對邊連線段，使用在偶數個邊的 n（n=2m）邊形中，使 $\frac{n}{2}$ 條的對邊連線段交於內部一點，如圖 27，則 $\overline{Op_x}$ 與所有邊長的關係式如下：

(1) $\overline{Op_1}+\overline{Op_3}+\cdots+\overline{Op_{n-1}}-\left(\overline{Op_2}+\overline{Op_4}+\cdots+\overline{Op_n}\right)$

$$=\frac{a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{n-1}\text{ 之邊長和}-\left(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_n\text{ 之邊長和}\right)}{2}$$

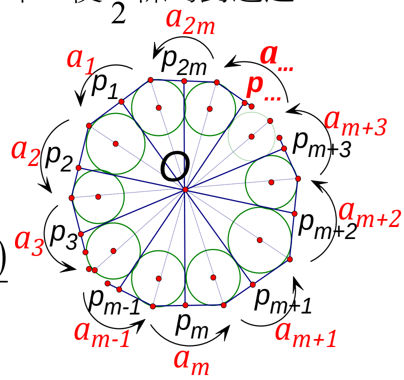


圖 27 m 條對邊連線段交於一點的 $2m$ 邊形

(2) $\overline{Op_k}+\overline{Op_{k-2}}+\cdots+\overline{Op_{k-2t+4}}-\left(\overline{Op_{k-2t+3}}+\overline{Op_{k-2t+5}}+\cdots+\overline{Op_{k-1}}\right)$

$=a_k+a_{k-2}+\cdots+a^{+}_{k-2t+2}$ 之邊長和 $-\left(a_{k-2t+3}+a_{k-2t+5}+\cdots+a^{-}_{k+1}\right.$ 之邊長和$\left.\right)$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2$；$t=\dfrac{n}{2}$，在定理 2 需要 n-2+1=n-1 個關係式，請參考表(四)。

五、由第三點的關係式，我們統整出在奇數個邊的 n 邊形中，如圖 27，只要滿足**定理 1** 中的條件式，該 n 邊形就是一個圓外切正 n 邊形，也是雙心 n 邊形。

六、由第四點的關係式，我們統整出在偶數個邊的 $n(=2m)$ 邊形中，m=2、3、…，如圖 28，只要依序滿足**定理 2** 中第(1)條件與第(2)條件的 n-2 個條件式，該 n 邊形就是一個圓外切 n 邊形。又每個頂點與其對應的小內切圓圓心、O 點、以及對向的頂點及其對應的小內切圓圓心，此五點會共線而成為該 n 邊形的對角線，故該圓外切 n 邊形的 $\frac{n}{2}$ 條對角線交於 O 點，此 O 點就是廣義的 *Brianchon* 點，此為 *Brianchon* 定理在偶數個邊的圓外切 n 邊形之推廣結果。

七、滿足塞瓦定理的三角形之外，我們推廣得到定理 2 所得到的偶數個邊的圓外切 n 邊形中，每個邊上的切點將每邊分割成兩段，則依逆時針方向來看所有邊長被分割成兩段之比值的乘積也會是 1，此為塞瓦定理在偶數邊的圓外切 n 邊形上的推廣結果。【定理 3】

柒、參考資料及其他

1、黃建澄、姚瀚，圓外切四邊形的多【圓】發展，中華民國第 57 屆中小學科展國中組數學科佳作，2017 年 7 月。

2、鄒黎明，【涉及三個內切圓的一個有趣結論】，數學傳播期刊 40 卷 1 期，2016 年 3 月。

3、徐立民等編著，國中數學第五冊，新北市：康軒文教公司，2016 年。

4、笹部真市郎原著，幾何學辭典，九章出版社譯，2003 年。

5、黃家禮編著，幾何明珠，九章出版社，2013 年 8 月。

6、張霈萱，層出不窮的彩蛋有「心」「跡」— 圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討，2016 年臺灣國際科展優勝作品專輯數學科大會一等獎，2016 年 2 月。

7、許喬婷，孟氏定理與西瓦定理在多邊形中的推廣，中華民國第 53 屆中小學科展高中組數學科第二名，2013 年 7 月。

【評語】030422

考慮 n 邊形的頂點到對邊（n 為奇數）或對頂（n 為偶數）的連線，當連線交於一點，且分切出的四邊形都有內切圓的情況下，原多邊形存在內切圓的條件。並分析在此條件下，原多邊形應該具有何種特性。針對這兩個問題給出了部分的結果。作者們由在三角形上的一個結果發想，希望能針對多邊形給出一個類比的結果。巧妙的藉助四邊形內切圓的特性，作者們得出了在滿足給定條件下，多邊形具有內切圓的條件，並討論了此時多邊形具有的特性（n 為奇數時，滿足條件的 n 邊形必為正 n 邊形）。分析的方式頗具巧思，值得嘉獎。比較美中不足的是，由於設定要滿足的條件太多，使得要找到這樣一組共點的線，滿足分切出的四邊形都有內切圓的 n 邊形則其必為正 n 邊形（n 為奇數時）。但此結論對判斷給定的多邊形是否有內切圓的幫助不大。若能跳離原有的條件，找出判斷給定多邊形是否有內切圓一些的準則，則作品將更形豐富。

作品海報

壹、摘要

從必有內切圓的三角形開始，搭配圓外切四邊形的兩組對邊和會相等，我們探討出奇數個邊的圓外切五邊形、七邊形、…、等其邊長與切點將該邊分割出的線段有一定的規律關係；偶數個邊的圓外切六邊形、八邊形、、…、等其邊長的關係式與圓外切四邊形一樣，都是奇數序邊長和會等於偶數序的邊長和。再進一步利用多條角邊連線段交於奇數個邊的多邊形內部一點以及多條對邊連線段交於偶數個邊的多邊形內部一點，分割出多個圓外切四邊形後，找出所有角邊連線段或對邊連線段被交點分割成的小線段們與原多邊形邊長的關係式，推導得到圓外切 n 邊形的判別條件，特別在偶數個邊的多邊形中，得到 ***Brianchon*** 定理與塞瓦定理在圓外切 n 邊形，n=**8**、**10**、…上的推廣結果。

貳、研究動機

來自第 **57** 屆全國科展作品、數學傳播季刊及 ***Brianchon*** 定理：

一、圓外切四邊形的多「圓」發展作品中提到圓外切多邊形每個邊長的關係。

二、鄒黎明老師【涉及三個內切圓的一個有趣結論】中三圓外切於一個三角形內部的有趣性質。

三、圓外切六邊形之三條對角線共點的 ***Brianchon*** 定理。

參、研究過程與方法

一、***Brianchon*** 定理與性質
二、名詞定義

三、(一)奇數個邊的圓外切 n 邊形邊長關係的探討
(二)偶數個邊的圓外切 n 邊形邊長關係的探討

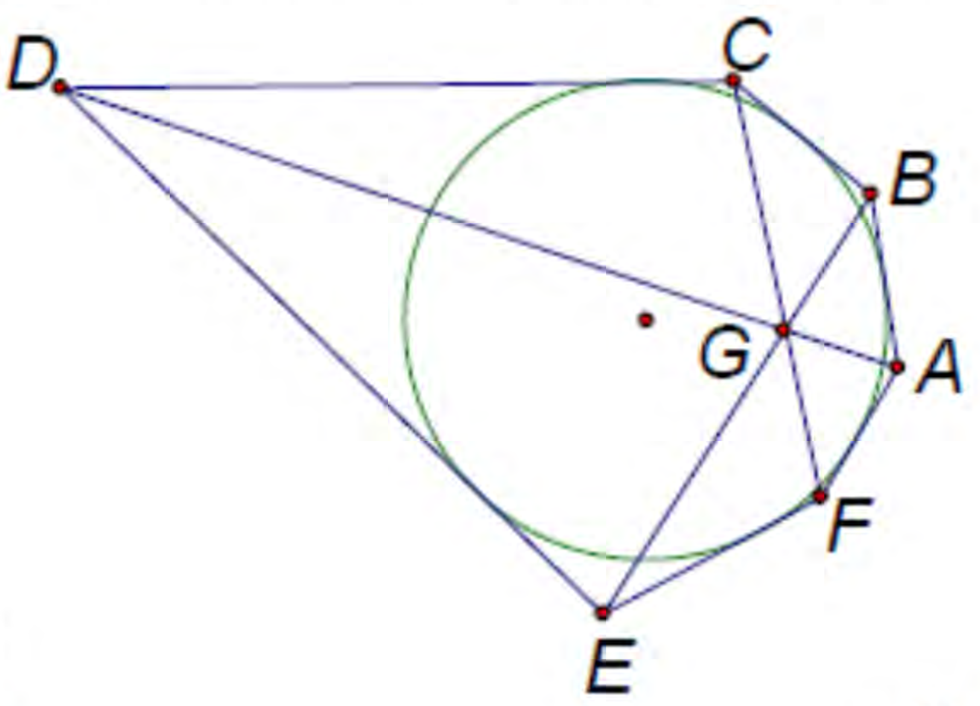
四、奇數個邊之 n 邊形的 n 條角邊連線段與邊長關係的探討➡ 定理 **1**

五、偶數個邊之 n 邊形的 n 條對邊連線段與邊長關係的探討➡ 定理 **2**

六、塞瓦定理在定理 **1**、**2** 得到的圓外切 n 邊形上的推廣 定理 **3**

一、已知定理與性質： ***Brianchon*** 定理、塞瓦定理與性質 **1**、**2**、**3**

二、名詞定義：角邊連線段



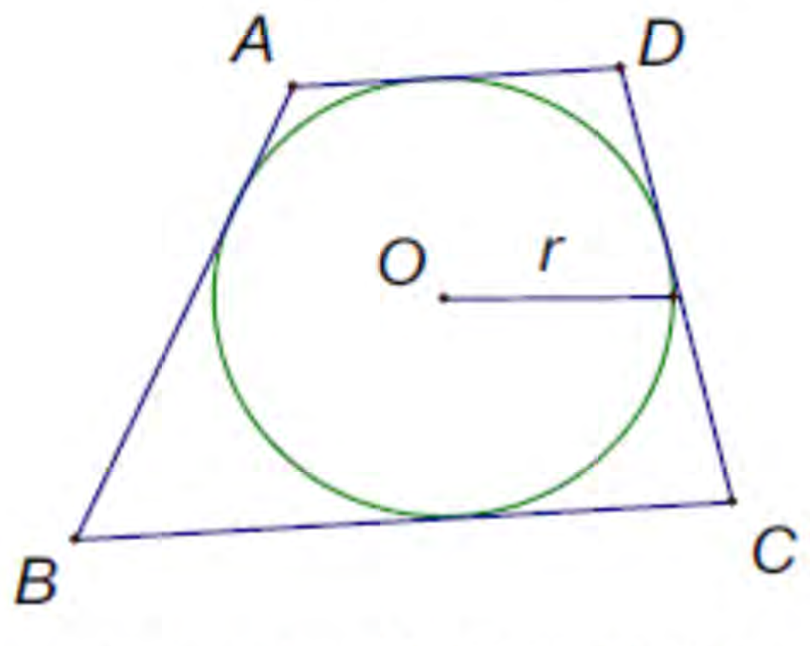


圖 1：圓外切四邊形

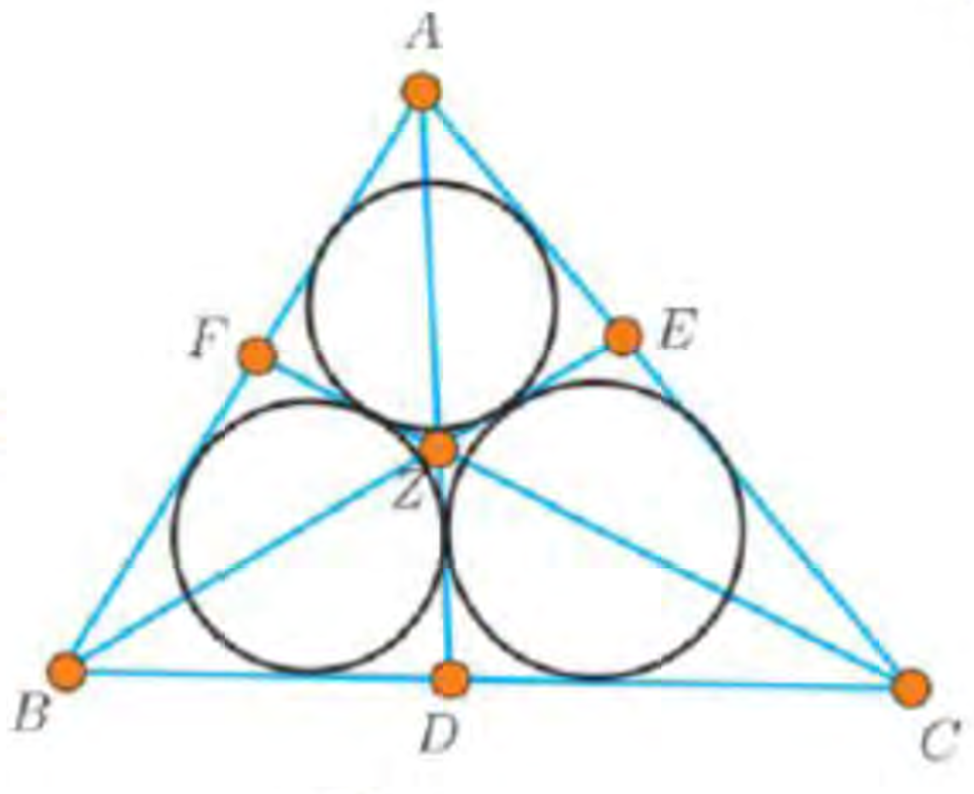


圖 2

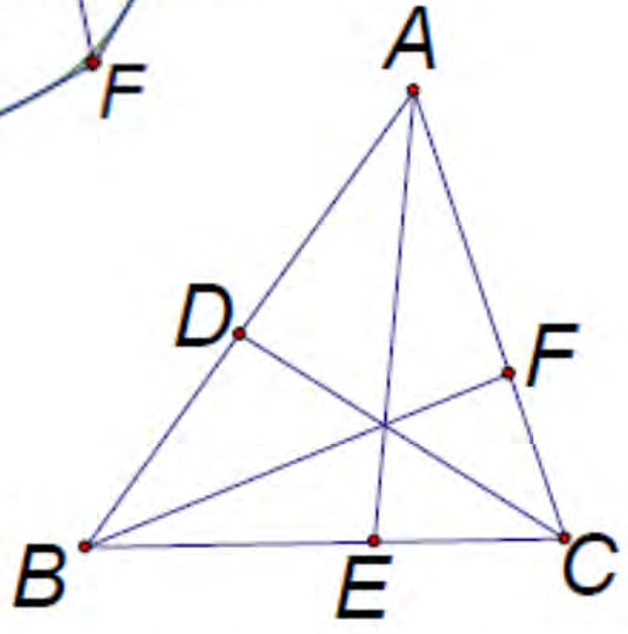


圖 3：$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$為角邊連線段

三、圓外切多邊形中邊長的關係式： **1**、奇數個邊 ***n*** 邊形，如五邊形、七邊形、……； **2**、偶數個邊 ***n*** 邊形，如六邊形、八邊形、……，關係如下。

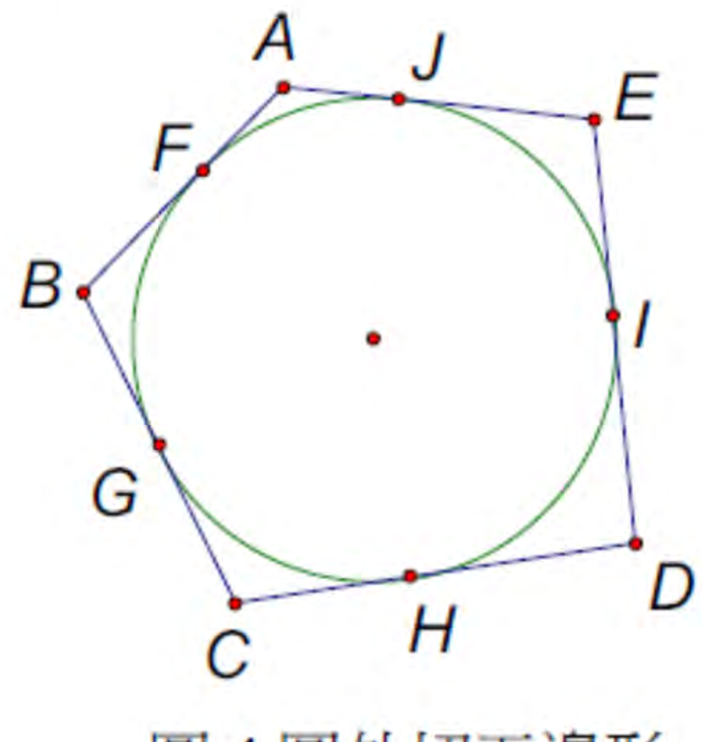


圖 4 圓外切五邊形

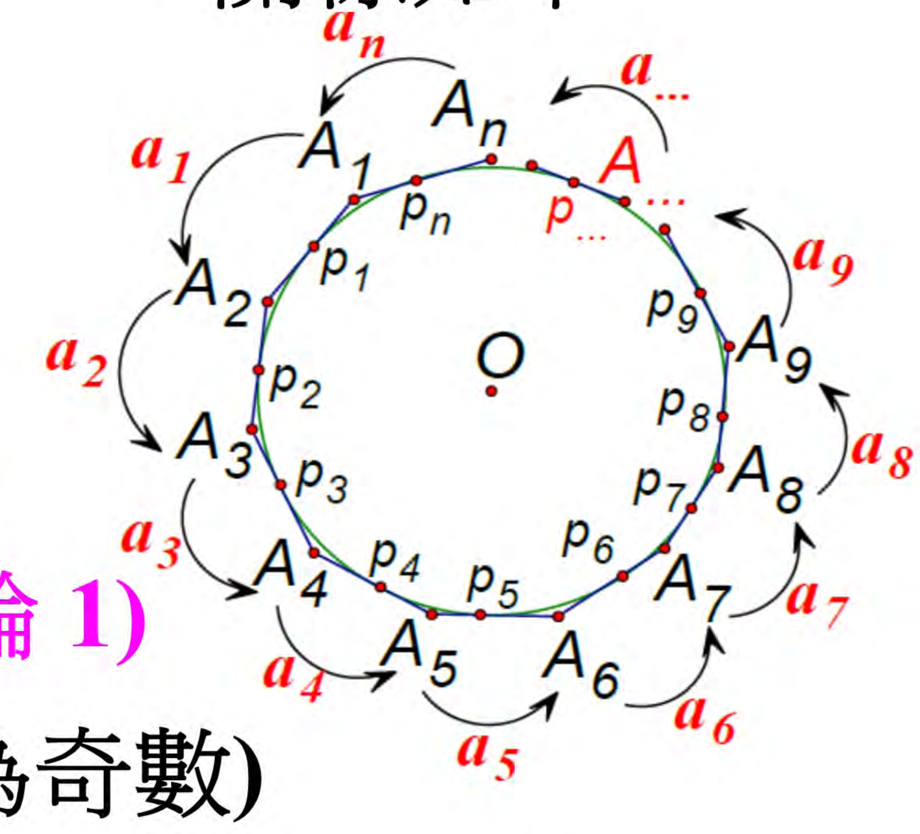
$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{JE}=\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AJ}$$

(以 *J* 為分割點，其他以此類推)

$a_{2k-1}+a_{2k+1}+\cdots+a^{-}_{2k+2t-3}$ 之邊長和

$=a_{2k+2t-4}+a_{2k+2t-6}+\cdots+a^{+}_{2k-2}$ 之邊長和 **(如結論 1)**

(以 p_{2k-2} 為分割點，*k*=1、2、...、*n*，*n* 為奇數)



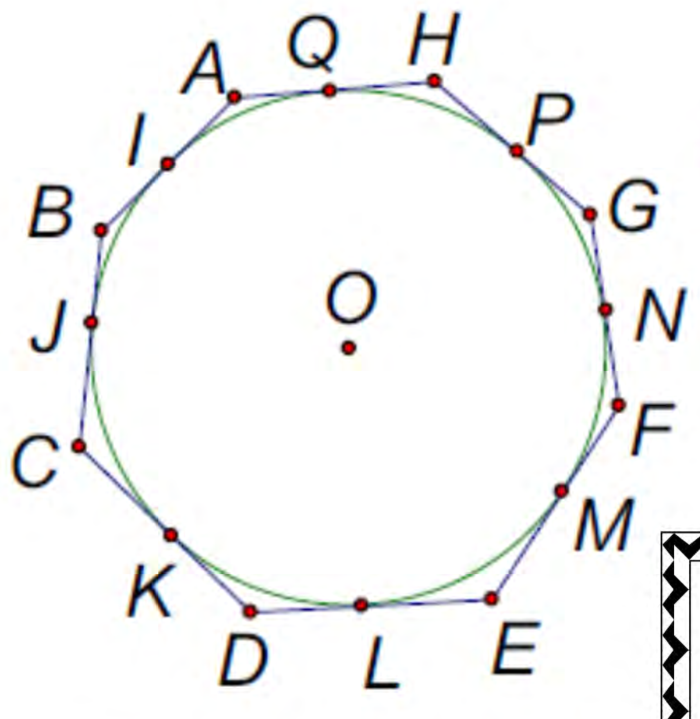
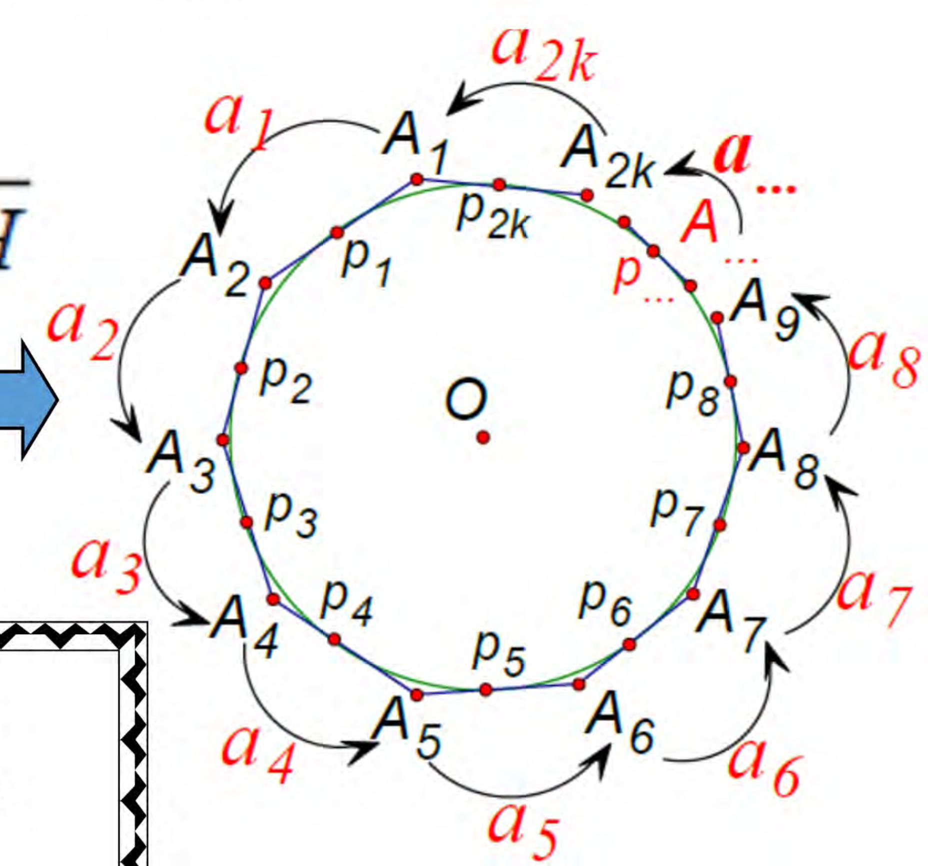


圖 8 圓外切八邊形

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AH}$$

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$$

(如結論 2)



四、以角邊連線段將五邊形(奇數)分割成 **5** 個圓外切四邊形(以 ***J*** 為分割點)，得到

$$\overline{OF}+\overline{OH}-(\overline{OG}+\overline{OI})=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EJ}-(\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{AJ})}{2}$$

將 **2*m*-1** 邊形分割成 **2*m*-1** 個圓外切四邊形(以 p_{2k-2} 為分割點)，得到

$$\overline{Op_{2k-1}}+\overline{Op_{2k+1}}+\cdots+\overline{Op_{2k+2t-5}}-\left(\overline{Op_{2k+2t-4}}+\overline{Op_{2k+2t-6}}+\cdots+\overline{Op_{2k}}\right)$$

$$=\frac{a_{2k-1}+a_{2k+1}+\cdots+a^{-}_{2k+2t-3}\text{ 之邊長和}-\left(a_{2k+2t-4}+a_{2k+2t-6}+\cdots+a^{+}_{2k-2}\text{ 之邊長和}\right)}{2}$$

(如結論 3)

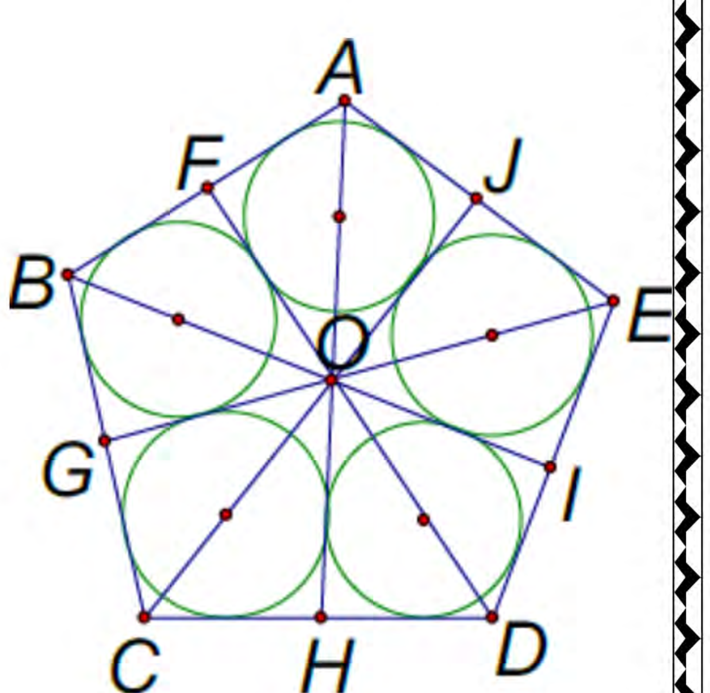
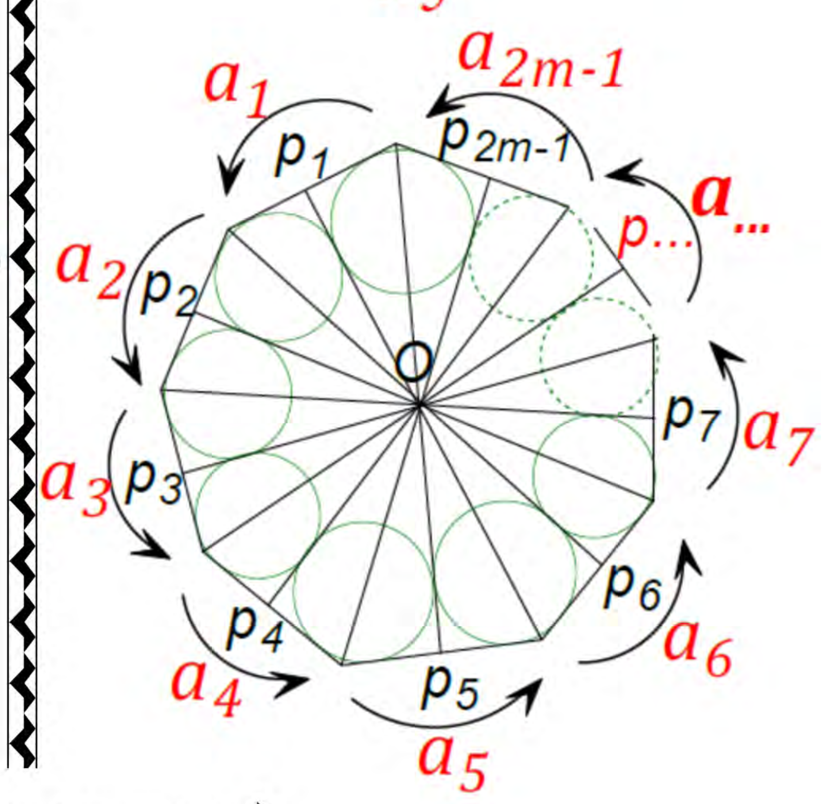


圖 10



定理 1 ：在任意奇數個邊的 ***n*** 邊形中，***n*** 個頂點的角邊連線段交於內部一點 ***O*** 並將原 ***n*** 邊形分割成 ***n*** 個圓外切四邊形。令 a_p 表示第 ***p*** 個邊，且滿足下列等式

$$a_{2k-1}+a_{2k+1}+a_{2k+3}+\cdots+a^{-}_{2k+2t-3}\text{ 之邊長和}$$

$$=a_{2k+2t-4}+a_{2k+2t-6}+a_{2k+2t-8}+\cdots+a^{+}_{2k-2}\text{ 之邊長和}$$

其中 ***k***=**1**、**2**、、...、***n*** ； $t=\dfrac{n+1}{2}$ ，代表等式兩邊的項數

則此 ***n*** 邊形為圓外切正 ***n*** 邊形，也是雙心 ***n*** 邊形。

五、除了利用兩組相間隔邊的邊長和會相等來當條件之外，以對邊連線段將六邊形(偶數)分割成 **6** 個圓外切四邊形(以 ***I***、***J*** 為分割點) 得到

$$\overline{OH}+\overline{OL}-(\overline{OK}+\overline{OG})=\overline{BC}+\overline{AF}+\overline{EJ}-(\overline{EF}+\overline{AB}+\overline{CI})$$

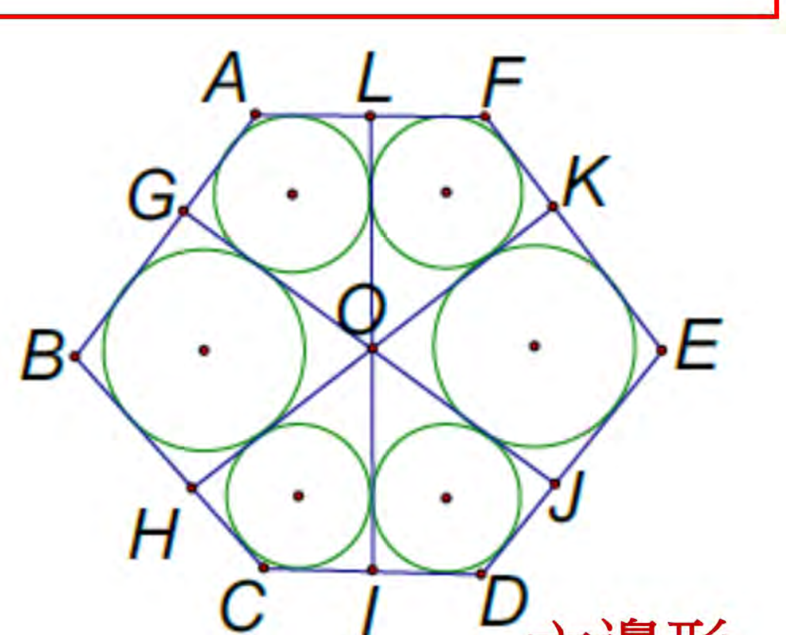
則將 **2*m*** 邊形分割成 **2*m*** 個圓外切四邊形，得到

$$\overline{Op_k}+\overline{Op_{k-2}}+\cdots+\overline{Op_{k-2t+4}}-\left(\overline{Op_{k-2t+3}}+\overline{Op_{k-2t+5}}+\cdots+\overline{Op_{k-1}}\right)$$

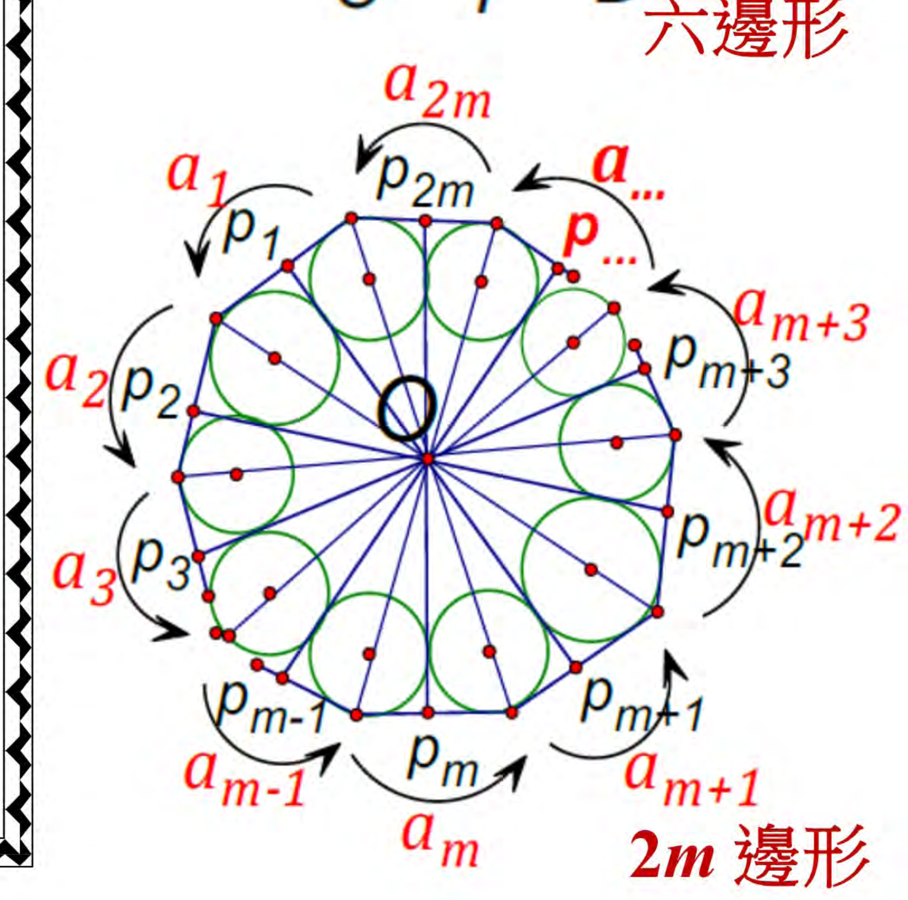
$$=a_k+a_{k-2}+\cdots+a^{+}_{k-2t+2}\text{ 之邊長和}-\left(a_{k-2t+3}+a_{k-2t+5}+\cdots+a^{-}_{k+1}\text{ 之邊長和}\right)$$

k=**1**、**2**、⋯、**2*m*-2**

(如結論 3)



六邊形



2*m* 邊形

定理 2：在任意偶數個邊的 n 邊形中，$\frac{n}{2}$ 條對邊連線段交於內部一點 O 並將原 n 邊形分割成 n 個圓外切四邊形。令 a_p 表示第 p 個邊，且依序滿足下列等式

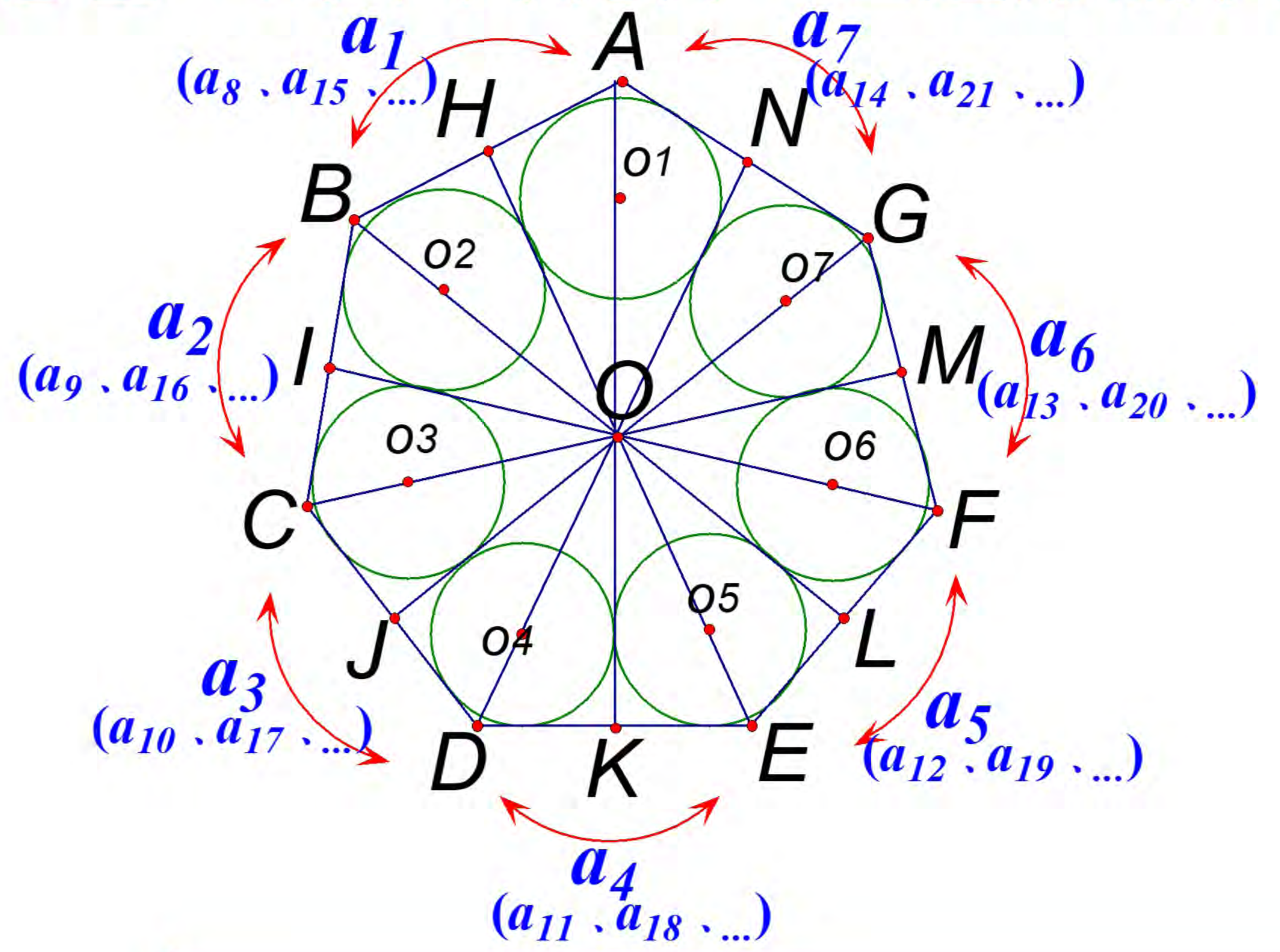
(1) $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{n-1}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_n$

(2) $a_k+a_{k-2}+a_{k-4}+\cdots+a^{+}_{k-2t+2}$ 之邊長和 $=a_{k-2t+3}+a_{k-2t+5}+a_{k-2t+7}+\cdots+a^{-}_{k+1}$ 之邊長和

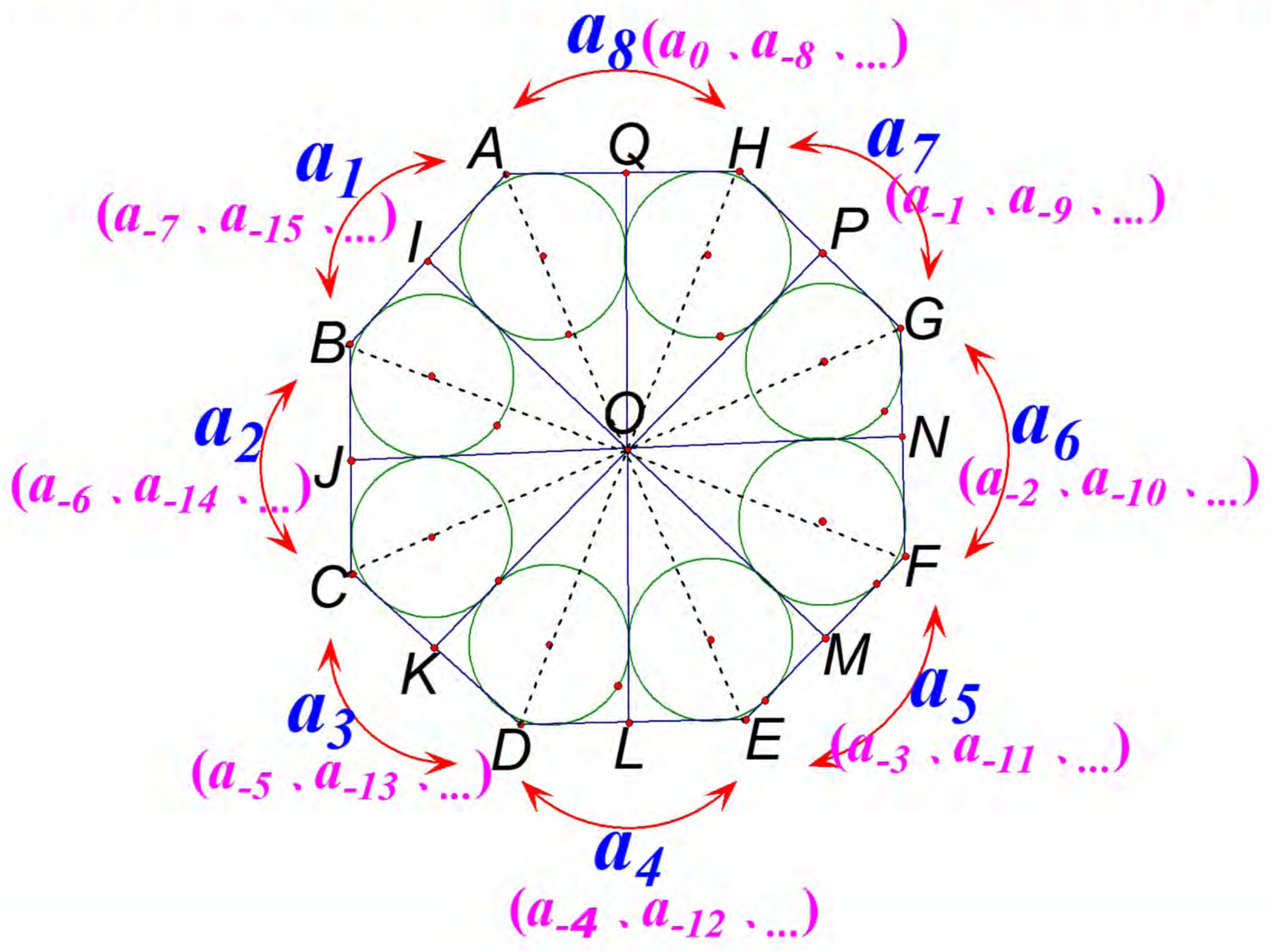
其中 k=1、2、、...、n-2；$t=\frac{n}{2}$，代表等式兩邊的項數

則此 n 邊形為圓外切 n 邊形，且此偶數個邊的圓外切 n 邊形之 $\frac{n}{2}$ 條對角線會交於內部一點，此點稱為廣義的 ***Brianchon*** 點。

定理 1 的舉例說明：七邊形為例

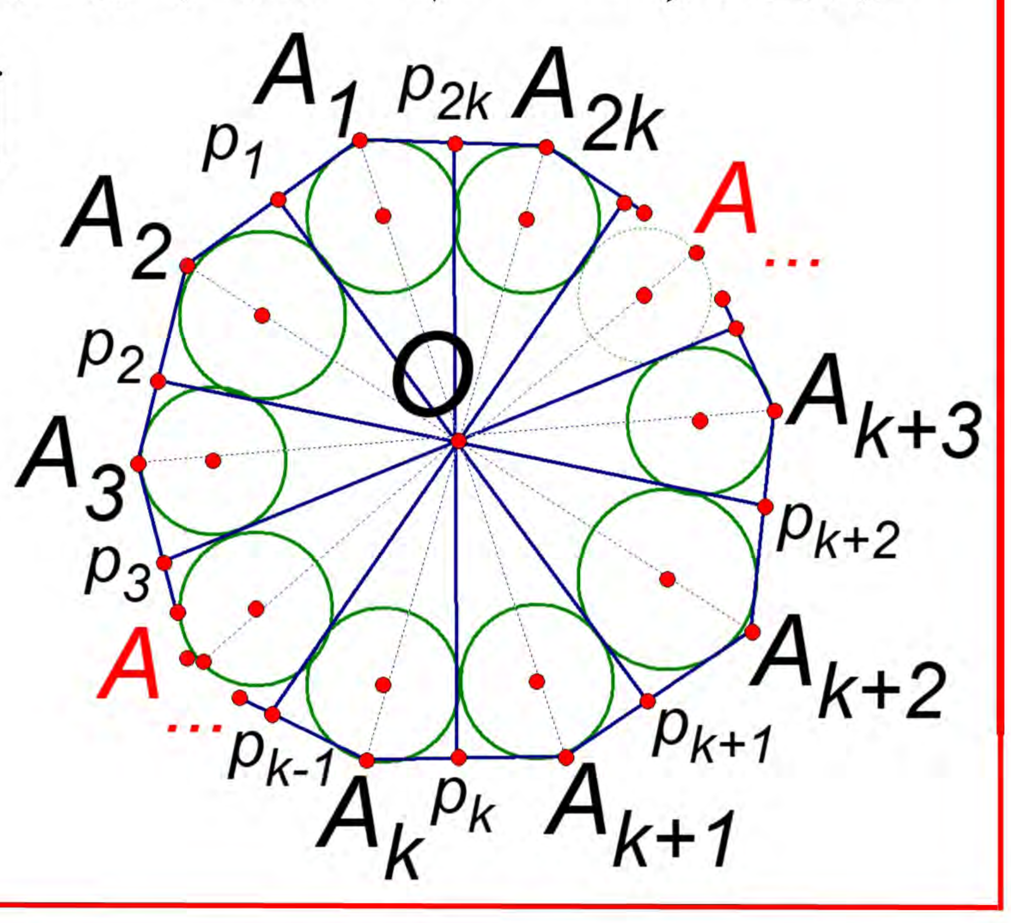


定理 2 的舉例說明：八邊形為例



六、**定理 3**：如右圖，從定理 2 的條件得到的圓外切 $n(n=2k)$邊形 $A_1A_2\cdots A_{2k}$ 中，p_1、p_2、…、p_{2k} 為切點，則

$$\frac{\overline{A_1p_1}}{\overline{p_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2p_2}}{\overline{p_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3p_3}}{\overline{p_3A_4}}\times\cdots\cdots\times\frac{\overline{A_{2k}p_{2k}}}{\overline{p_{2k}A_1}}=1$$



肆、結論

1. 奇數個邊的圓外切 n 邊形之所有邊長與切點分割出的線段有規律關係，如前面中間刊版所列。
2. 偶數個邊的圓外切 n 邊形之邊長關係同圓外切四邊形(性質 1)一樣有相同的規律關係，如前面中間刊版所列。
3. n 邊形中 $\overline{Op_x}$ 與邊長的關係如前面中間刊版所列，也由此關係得到圓外切 n 邊形的判別式。➡【定理 1】與【定理 2】
4. 由定理 1、2 得到的圓外切 n 邊形中，每邊上的切點將每邊分割成二段，所有邊分割成二段之長度比值的乘積為 1 ➡【定理 3】

伍、未來展望

1. 由定理 2 得到的偶數邊圓外切 n 邊形中 n 條對邊連線段交於內部一點 O，此 O 點的唯一性探討。
2. 由定理 1、2 得到的圓外切 n 邊形中，內部所有小內切圓與大內切圓半徑或面積間的關係探討。
3. 在得到定理 3 後，我們發現塞瓦定理在定理 2 得到的圓外切 n 邊形中，以角元形式探討的推廣結果也是未來發展方向之一。