中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第二名

030421

約瑟夫問題之來去生死間

學校名稱：桃園市立中壢國民中學

作者：	指導老師：
國二 劉軒齊	蔡牧航

關鍵詞：約瑟夫問題、進位法轉換、數列

壹、摘要

在約瑟夫問題中，假設有 n 人排成環狀，順時針編號 1 到 n 號，從頭開始，以保留、殺掉、保留、殺掉……的方式，到最後一號時直接繼續繞圓並保持規律，找出最後的存活者。而本研究將繞圓的順序改變，把原本應持續轉繞下去的殺人順序，到剩餘的人中最大號和最小號時回頭反方向旋轉。持續此規律，並延伸至留一殺 s 及反序殺留(殺 s 留一)，尋找總人數 n 和最後存活者 f[n]的規律。

貳、研究動機

數學課時老師提到了數列，但我也只似懂非懂，其實並不怎麼瞭解其運用。於是我便上網尋找數列，無意間發現約瑟夫問題，並閱讀了許多人研究約瑟夫問題的報告，其中有許多令人好奇的點，於是我便開始研究它。經研究並更改其原本的條件後，利用不同的旋繞順序求出最後存活的人，並觀察其規律。

參、研究目的

一、尋找留一殺一與留一殺二最後存活者的規律

二、透過留一殺一與留一殺二兩個層面利用總人數 n 來找出最後的存活者 f[n]

三、利用留一殺一與留一殺二的結果推到留一殺 s

四、利用進位法找出經過留一殺 s 殺完後所得的存活者

五、討論留 s 殺一與留一殺 s 的差別

肆、文獻探討

做本研究之前，我先參考了一些別人的文獻資料：

屆數	組別	作品名稱	研究方法	得獎情形
39	國小組	公主如何救王子	列舉數據推算解法	第二名
43	高中組	九死一生	電腦窮舉	無
44	高中組	我要活下去	數值分析	佳作
45	國中組	魔數	等差數列	無
45	國小組	老師無法解決的難題	留α殺β	佳作
56	國中組	生死一「數」間	留一殺一探討	佳作

表一:文獻資料

其中，生死一「數」間對我而言最具參考價值，也朝著那個方向研究。

生死一「數」間中曾提及，在環狀約瑟夫問題中，從第一人開始留一個殺一個，保持此規律並持續轉繞，可以透過公式求出最後存活者。他們首先利用短距離間的數字，一個一個殺或保留 ，並利用函數來表示總人數及最後存活者的關係。

他們發現，1；1→3；1→3→5→7；1→3→5→7→9→11→13→15…(皆為奇數，且為前一個數的存活者加 2 所得)，但如果 F(x)＞x，則會發現會重新回到那個圓。 例如：當 F(7)＝7 時，依規律得 F(8)＝9＞8，故修正為 F(8)＝1。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F(x)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15

表二：總人數為 1~15 最後的存活者

當 x＝2^{2n}(n＝0, 1, 2, 3 …)時，由下表的數值中可觀察出 F(x)＝1。

x	1	2	4	8	16	32
F(x)	1	1	1	1	1	1

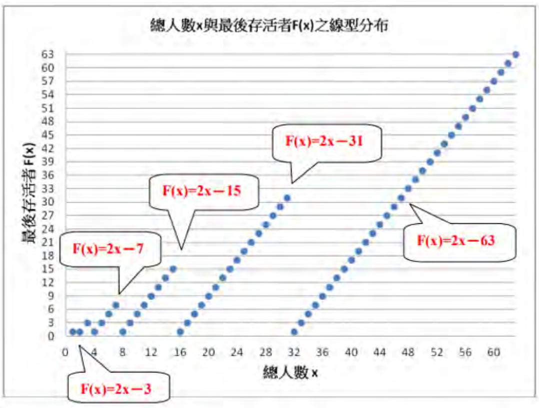
表三：當 x＝1, 2, 4, 8, 16, 32 時，最後存活者 F(x)的值

當 x＝2^n-1 (n＝1, 2, 3 …)時，由下表數值中可觀察出 F(x)＝x。

x	1	3	7	15	31	63
F(x)	1	3	7	15	31	63

表四：當 x＝1, 3, 7, 15, 31, 63 時，最後存活者 F(x)的值

當 2^{2n} ≤x＜2^{2n+1} (n＝1, 2, 3 …)時，透過前面所及規律分析如圖 1，發現 F(x)會形成 平行的線性分布圖形，根據其規律，推論出線型方程式為：F(x)＝2x－2^{2n+1}＋1。



圖一：總人數與存活者之線型分布

透過上面所提及之規律，我覺得若將約瑟夫問題原本持續繞圈的規律改變，或許最後的存活者也和次方的排列組合有關，於是我便在研究中，實驗次方的概念能否幫助找出最後的存活者。

伍、研究過程及方法

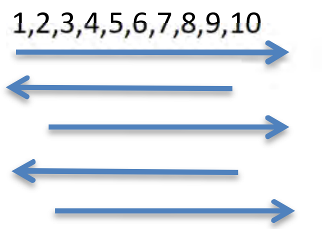
研究期間，分成了不少階段，以及不同的突破，下表是我研究進度概要：

時間	進展
106 年 3 月	發現約瑟夫問題，並開始研究生死一「數」間
106 年 5 月	發現留一殺一規律(使用區間)
107 年 1 月	發現留一殺二規律，並開始使用進位法
107 年 3 月	推廣至留一殺 s
107 年 5 月	證明留一殺 s 的規則，並找出反序殺留的規律
107 年 6 月	嘗試尋找留二殺一的規律

表五:研究進度概要

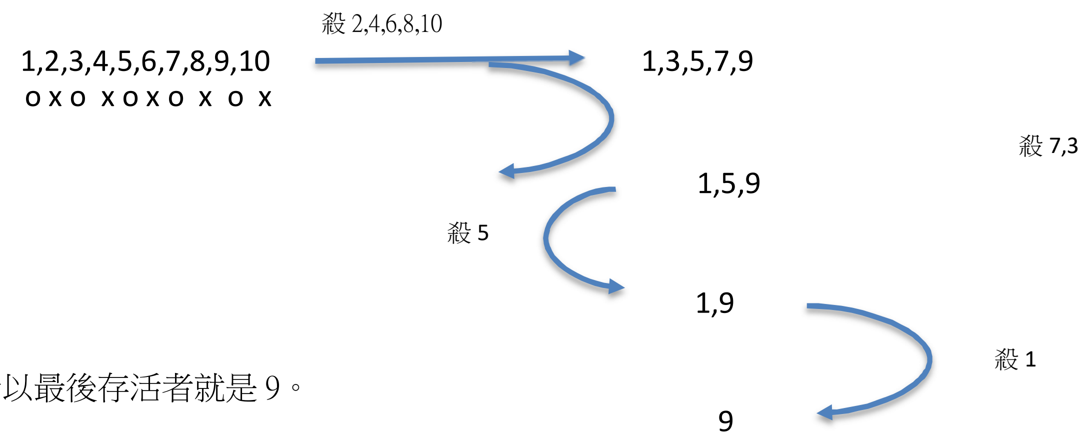
一、留一殺一

約瑟夫問題的過程： 假設總人數為 n 人時，排成環狀，順時針編號 1 到 n 號，從頭開始，以保留、殺掉、保留、殺掉……的方式，但我加入了一個變因，就是每當到剩下所有人中的最後一號反過方向進行；回到最前面的那個人亦是如此反過方向，比如當總人數為 10 人，流程如下圖:



過程依照這樣子去運行，順序就會是
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,9,……

加上保留、殺掉、保留、殺掉的判斷



所以最後存活者就是 9。

運用這種規律反覆來回殺人，反覆進行直到只剩一人，我將最後存活下來的人編號記為 f[n]。尋找其規律：

在此先將各符號加以定義，以便後續研究：

符號	用意
n	總人數
f[n]	當總人數為 n 所求得最後的存活者

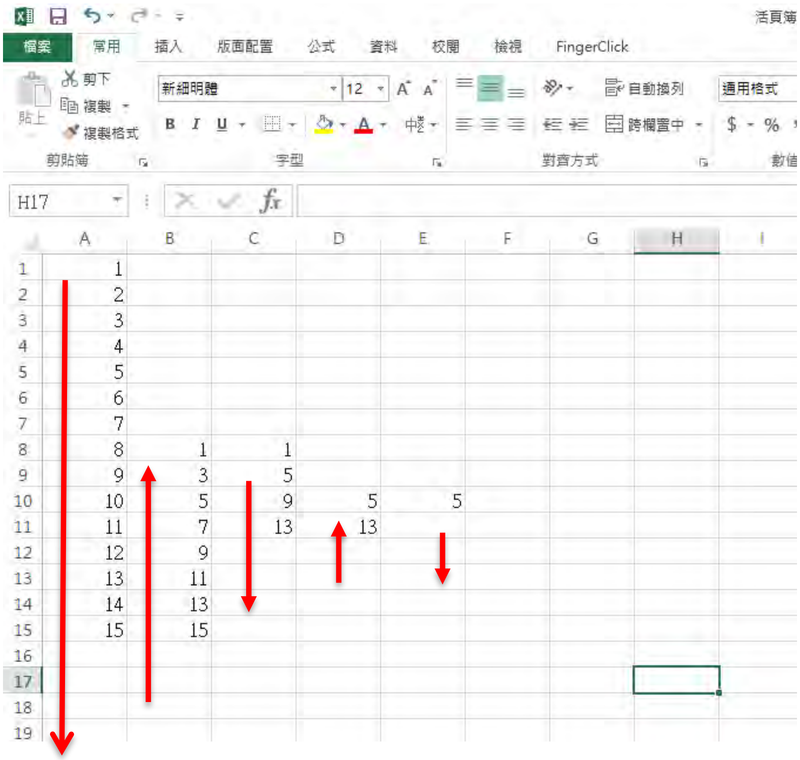
表六:符號定義表

並將範圍定在總人數為 32 個人，發現有些許規律：

總人數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
存活者	1	1	3	3	1	1	3	3	9	9	11	11	9	9	11	11
總人數	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
存活者	1	1	3	3	1	1	3	3	9	9	11	11	9	9	11	11

表七： 當總人數為 1~32 最後的存活者

首先先慢慢用「留一個殺一個」的方式，一個人一個人劃掉，碰到最後一人或第一人時再反方向運行，尋找最後存活者，但這個方式實在太慢了，到越後面會算的越吃力，也越容易出錯，於是我改成使用 Excel 幫助，運用其可延伸等差數列的性質來協助計算，如下圖：



圖二:利用 Excel 尋找存活者

而我發現，全部數字皆是兩兩一組，也就是說假設總人數 17 存活者為 1，總人數再多一個也不影響最後的存活者，所以可得知當總人數為偶數(以 n 表示)，最後存活者就會與 n-1 個總人數相同，同時也不斷來回重複 1、3、9、11 這幾個數字，於是我便繼續擴大範圍尋找：

總人數	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
存活者	33	33	35	35	33	33	35	35	41	41	43	43	41	41	43	43
總人數	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
存活者	33	33	35	35	33	33	35	35	41	41	43	43	41	41	43	43

表八： 當總人數為 33~64 最後的存活者

在此先將 32 個數定為一個區間，以進行後面討論：

總人數	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
存活者	1	1	3	3	1	1	3	3	9	9	11	11	9	9	11	11
總人數	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
存活者	1	1	3	3	1	1	3	3	9	9	11	11	9	9	11	11
總人數	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112
存活者	33	33	35	35	33	33	35	35	41	41	43	43	41	41	43	43
總人數	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
存活者	33	33	35	35	33	33	35	35	41	41	43	43	41	41	43	43

表九：當總人數為 65~128 最後的存活者

總人數	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
存活者	129	129	131	131	129	129	131	131	137	137	139	139	137	137	139	139
總人數	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
存活者	129	129	131	131	129	129	131	131	137	137	139	139	137	137	139	139
總人數	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176
存活者	161	161	163	163	161	161	163	163	169	169	171	171	169	169	171	171
總人數	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
存活者	161	161	163	163	161	161	163	163	169	169	171	171	169	169	171	171

表十：當總人數為 129~192 最後的存活者

總人數	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208
存活者	129	129	131	131	129	129	131	131	137	137	139	139	137	137	139	139
總人數	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
存活者	129	129	131	131	129	129	131	131	137	137	139	139	137	137	139	139
總人數	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	238	240
存活者	161	161	163	163	161	161	163	163	169	169	171	171	169	169	171	171
總人數	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256
存活者	161	161	163	163	161	161	163	163	169	169	171	171	169	169	171	171

表十一：當總人數為 193~256 最後的存活者

總人數	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272
存活者	1	1	3	3	1	1	3	3	9	9	11	11	9	9	11	11
總人數	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288
存活者	1	1	3	3	1	1	3	3	9	9	11	11	9	9	11	11
總人數	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304
存活者	33	33	35	35	33	33	35	35	41	41	43	43	41	41	43	43
總人數	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	400
存活者	33	33	35	35	33	33	35	35	41	41	43	43	41	41	43	43

表十二：當總人數為 257~400 最後的存活者

觀察這些區間的第一個數，有時出現 1，有時出現新數字，有時反覆出現同一個數字。

於是我把由 32 個數字組成的小區間加以排列，如下表十三，一號區間就是指 n=1~32 的狀況，二號區間則是 33~64，三號區間是 65~96，以此類推：

區間次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	…
區間代碼	1	2	1	2	3	4	3	4	1	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	…
區間代色																					…

表十三：區間示意圖

從色塊中我們可看出兩個區間會相鄰並排兩次，例如區間 1~4，於是我將這 1 到 4 號區間組成一個更大的區間，即一個區間含 128 個數。再就這些大區間研究其規律：

區間次	1~4	5~8	9~12	13~16	17~20	21~24	25~28	29~32
區間代色								

區間次	33~36	37~40	41~44	45~48	49~52	53~56	57~60	61~64
區間代色								

區間次	65~68	69~72	73~76	77~80	81~84	85~88	89~92	93~96
區間代色								

區間次	97~100	101~104	105~108	109~112	113~116	117~120	121~124	125~128
區間代色								

表十四~表十七：區間示意圖(1~128 號區間)

從上面資料發現，2 的奇數次方號區間的第一個數的存活者會出現 1，相反的，2 的偶數次方號區間的第一個數則會出現新數字，所以先從甚麼時候出現 1，甚麼時候出現新數字開始研究。

根據生死一「數」間的研究顯示，當總人數 n＝2^{2m}(m＝0, 1, 2, 3 ⋯)時，最後的存活者 f[n]＝1，將此規則套用於上表中的數值並不適用，於是先從上面數字表中挑出 f[n]=1 的 n 值。

n	1	5	17	21	65	69	81	85	257	261	273	277
f[n]	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

表十八：使 f[n] ＝1 的 n 值

上表中的 1、5、17、65、257 皆是2^m+1且 m 為偶數。

另一方面，生死一「數」間也提及，當總人數 n＝2^m-1(m＝0, 1, 2, 3 ⋯)時，最後的存活者 f[n]＝n，於是我仿上面方法挑出 f[n]=n 的 n 值：

n	3	9	11	33	35	41	43	129	131	137	139	161	163	169	171
f[n]	3	9	11	33	35	41	43	129	131	137	139	161	163	169	171

表十九：使 f[n] ＝n 的 n 值

上表中的 3、9、33、129 皆為2^m+1且 m 為奇數，所以當 n=2^m+1且 m 為奇數，f[n]=n

接著便回到區間裡開始研究區間內的各數字：

由上表中的數據發現，真正將存活者的號碼提高的只有「2 的奇數次方數」,如 f[161]=161，f[169]=169。而當總人數加上「2 的偶數次方數」，則不會影響其總人數，如 f[129]=129，f[193]=129。所以我發現可以先利用「二進位法」拆解總人數，例如：假設總人數為 145，145=2^7+2^4+1，因為碰到「2 的偶數次方數」就會回到前一個「2 的偶數次方區間」，所以真正將存活者的號碼提高的只有「2 的奇數次方數」，因此只需保留唯一的「二的奇數次方數」的「2^7」和 1，即2^7+1，存活者為 129。

由上面例子可得知，當總人數為 n 且總人數為$1+2a_1+2^2a_2+2^3a_3+2^4a_4\ldots\ldots+2^ma_m$ ($a_k\in\{0,1\}$)時：

- m 為奇數，f[n]=$1+2a_1+2^3a_3+2^5a_5\ldots\ldots+2^ma_m$
- m 為偶數，f[n]=$1+2a_1+2^3a_3+2^5a_5\ldots\ldots+2^{m-1}a_{m-1}$

二、留一殺二

比照留一殺一的方式，先慢慢從較小的 n 值開始慢慢照著留→殺→殺→留→殺→殺→留......的規律運行，並在碰到剩餘人中最前號及最後號時反向操作，先將範圍定在 1~100，整理出下表格：

總人數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
存活者	1	1	1	4	1	4	7	4	7	1
總人數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
存活者	7	1	13	1	13	7	13	7	1	7
總人數	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
存活者	1	13	1	13	7	13	7	28	7	28
總人數	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
存活者	13	28	13	34	13	34	1	34	1	40
總人數	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
存活者	1	40	7	40	7	28	7	28	13	28
總人數	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
存活者	13	34	13	34	55	34	55	40	55	40
總人數	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
存活者	61	40	61	28	61	28	67	28	67	34
總人數	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
存活者	67	34	55	34	55	40	55	44	61	40
總人數	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
存活者	61	1	61	1	67	1	67	7	67	7
總人數	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
存活者	55	7	55	13	55	13	61	13	61	1

表二十：留一殺二最後存活者(總人數 1~100)

單就表二十，似乎無規律可言，但仔細看可發現會有一組由三個數字所組成的數組穿插其中，中間間隔兩個數字，於是我改變排列方式，排列成三個一組，如表二十一：

N=1~3	1	1	1
N=4~6	4	1	4
N=7~9	7	4	7
N=10~12	1	7	1
N=13~15	13	1	13
N=16~18	7	13	7
N=19~21	1	7	1
N=22~24	13	1	13
N=25~27	7	13	7
N=28~30	28	7	28
N=31~33	13	28	13
N=34~36	34	13	34
N=37~39	1	34	1
N=40~42	40	1	40
N=43~45	7	40	7
N=46~48	28	7	28
N=49~51	13	28	13
N=52~54	34	13	34
N=55~57	55	34	55
N=58~60	40	55	40
N=61~63	61	40	61
N=64~66	28	61	28
N=67~69	67	28	67
N=70~72	34	67	34
N=73~75	55	34	55
N=76~78	40	55	40
N=79~81	61	40	61
N=82~84	1	61	1
N=85~87	67	1	67
N=88~90	7	67	7
N=91~93	55	7	55
N=94~96	13	55	13
N=97~99	61	13	61
100~102	1	61	1
103~105	67	1	67
106~108	7	67	7
109~111	109	7	109
112~114	13	109	13
115~117	115	13	115

118~120	1	115	1
121~123	121	1	121
124~126	7	121	7
127~129	109	7	109
130~132	13	109	13
133~135	115	13	115
136~138	55	115	55
139~141	121	55	121
142~144	61	121	61
145~147	109	61	109
148~150	67	109	67
151~153	115	67	115
154~156	55	115	55
157~159	121	55	121
160~162	61	121	61
163~165	1	61	1
166~168	67	1	67
169~171	7	67	7
172~174	55	7	55
175~177	13	55	13
178~180	61	13	61
181~183	1	61	1
184~186	67	1	67
187~189	7	67	7
190~192	109	7	109
193~195	13	109	13
196~198	115	13	115
199~201	1	115	1
202~204	121	1	121
205~207	7	121	7
208~210	109	7	109
211~213	13	109	13
214~216	115	13	115
217~219	55	115	55
220~222	121	55	121
223~225	61	121	61
226~228	109	61	109
229~231	67	109	67

表二十一： 留一殺二最後存活者(總人數 1~432)

可以發現表二十一中，三個間隔重複的數字的第一項是從 3k+1 (k 為自然數，如表二十一) 開始的，而後的第二項 3k+3 和第三項 3k+5 會與之相同，所以以下僅討論總人數為 3k+1 的狀況。

而這個數組還會連續重複三次，再由這九個數字組成一個更大的區間，如 1、7、13 組成一個區間，並且重複了三次(所有正整數只分成 3k+1、3k+3、3k+5 三類，而這裡已經忽略了 3k+3 和 3k+5，所以僅討論 3k+1)，所以這個區間共包含九個數字，再去研究這些大區間的排列方式(但這些區間式穿插排列的)：

總人數	區間所含 f[n]值			區間代色					備註
N=1	1	7	13						$N=3^0$
N=28	28	34	40						$N=3^3+1$
N=55	55	61	67						
N=82	1	7	13						$N=3^4+1$
N=109	109	115	121						
N=136	55	61	67						
N=163	1	7	13						
N=190	109	115	121						
N=217	55	61	67						
N=244	244	250	256						$N=3^5+1$
N=271	109	115	121						
N=298	298	304	310						
N=325	1	7	13						
N=352	352	358	364						
N=379	55	61	67						
N=406	244	250	256						
N=433	109	115	121						
N=460	298	304	310						
N=487	487	493	499						
N=514	352	358	364						
N=541	541	547	553						
N=568	244	250	256						
N=595	595	601	607						
N=622	298	304	310						
N=649	487	493	499						
N=676	352	358	364						
N=703	541	547	553						

表二十二：不同區間排列表

N=1						
N=244						
N=487						
N=730						
N=973						
N=1216						
N=1459						
N=1702						
N=1945						
N=2188						
N=2431						
N=2674						
N=2917						
N=3160						
N=3403						
N=3646						
N=3889						
N=4132						
N=4375						
N=4618						
N=4861						
N=5104						
N=5347						
N=5590						
N=5833						
N=6076						
N=6319						
N=6562						
N=6805						
N=7048						
N=7291						
N=7534						
N=7777						
N=8020						
N=8263						
N=8506						
N=8749						
N=8992						
N=9235						
N=9478						
N=9721						
N=9964						
N=10207						
N=10450						

表二十三：區間設色表(擴大檢視)

整理至表二十三，略可看出各數字與區間的排列，都能排出相像的圖形，於是我開始研究其圖形所對應的數字彼此之間的關係：

觀察表二十三，一列一列看，每當碰到三的奇數次方數加一，下一個行列會往右跳，而碰到三的偶數次方數，下一個行列則會往左跳回。

這樣的形式跟留一殺一的狀況很類似，只是數字變成三個一組，於是我改成試著用三進位法的方式整理看看：

首先先隨便拿一個數做實驗，假設現在的 n 值為 484，對應上表二十一的存活者是 304，以下對此兩數進行轉換，變成三進位表示法：

$484\xrightarrow{除三}161$ 餘 $1\xrightarrow{161\ 除三}53$ 餘 $2\xrightarrow{53\ 除三}17$ 餘 $2\xrightarrow{17\ 除三}5$ 餘 $2\xrightarrow{5\ 除三}1$ 餘 2

{{161}1} →{{53}21}→{{17}221}→{52221}→{122221}

$304\xrightarrow{除三}101$ 餘 $1\xrightarrow{101\ 除三}33$ 餘 $2\xrightarrow{33\ 除三}11$ 餘 $0\xrightarrow{11\ 除三}3$ 餘 $2\xrightarrow{3\ 除三}1$ 餘 0

{{101}1} →{{33}21}→{{11}021}→{32021}→{102021}

比較兩者最後用三進位表示的結果，發現從右數起的第三和第五個數字變為零，表示三的二次項和四次項不見了，這和上面提及的碰到三的奇數次方往右跳，偶數次方往左跳相呼應，也和原本留一殺一用二進位取捨數字的方式相似，為求正確，在此多做幾組 n 與 f[n]值以證明此規律：

拿 n=703，f[n]=541 為例：

$703\xrightarrow{除三}234$ 餘 $1\xrightarrow{234\ 除三}78$ 餘 $0\xrightarrow{78\ 除三}26$ 餘 $0\xrightarrow{26\ 除三}8$ 餘 $2\xrightarrow{8\ 除三}2$ 餘 2

{{234}1} → {{78}01}→ {{26}001}→ {82001}→ {222001}

$541\xrightarrow{除三}180$ 餘 $1\xrightarrow{180\ 除三}60$ 餘 $0\xrightarrow{60\ 除三}20$ 餘 $0\xrightarrow{20\ 除三}6$ 餘 $0\xrightarrow{6\ 除三}2$ 餘 0

{{180}1} → {{60}01}→ {{20}001}→ {60001}→ {202001}

541 是當總人數為 703 的時候的存活者，在三的奇數次方項保留了 703 的 2 個三的五次及 2 個三的三次，並刪去了三的二次及四次項。

再舉 n=217，f[n]=55 為例：

217→{22001}

55→{2001}(成立)

由上可見，透過轉換為三進位法可以進一步刪去不會讓他前進的三次方數，也就可以找出最後的存活者。

但實驗了更多數，發現了這個算法的一些瑕疵，比如：

n=622={212001}，f[n]=298=102001，照剛剛所發現的規律，存活者不是應該會變成{202001}嗎?表示先前的方式有所問題，為解決這個困難，我重新回去看表二十二：

總人數	區間所含 f(n)值			區間代色					備註
N=1	1	7	13						$N = 3^0$
N=28	28	34	40						$N = 3^3 + 1$
N=55	55	61	67						
N=82	1	7	13						$N = 3^4 + 1$
N=109	109	115	121						
N=136	55	61	67						
N=163	1	7	13						
N=190	109	115	121						
N=217	55	61	67						
N=244	244	250	256						$N = 3^5 + 1$
N=271	109	115	121						
N=298	298	304	310						
N=325	1	7	13						
N=352	352	358	364						
N=379	55	61	67						
N=406	244	250	256						
N=433	109	115	121						
N=460	298	304	310						
N=487	487	493	499						
N=514	352	358	364						
N=541	541	547	553						
N=568	244	250	256						
N=595	595	601	607						
N=622	298	304	310						
N=649	487	493	499						
N=676	352	358	364						
N=703	541	547	553						

其實這是我們把它間格抽離出來的結果，但注意這一個區間是 27，如果只有一個 27，它就會跳到其他的區間，這樣我們將它做三進位表示以鎖定區間就沒有意義了，484 和 703 之所以能成功，是因為它們中間次的係數皆為 2，如同表中，如果多兩個 27 或多四個 27，它仍然會維持在那個區間，所以要想辦法讓它中間項的係數皆變為偶數(3^0除外)，為達到這個需求，這裡需要改變原本的三進位制，將每一位係數的最大上限擴增至可以超過 3。

舉一個例子，設 n=622，622={212001}因為 3 的四次方項的係數為 1，需要把它改為偶數，所以從前面的五次方借位，即{142001}，不過，現在換成五次方的係數為 1，要從哪裡借位?這時又要回到表二十二觀察，以簡單的 81 為例：

82={10001}，但存活者一樣是 82；244 也一樣，244={100001}，而 244 的存活者也是 244，表示最前面(即最大次項)的係數的奇與偶並不影響區間跳動，僅作為借位用，若不需借位就直接保留。所以整理到{142001}已經整理完畢了，再來就是要把偶數次方刪去，現在之所以能刪是因為已經將這個數鎖定在這個區間了，不會跳至其他區間，奇數次方的保留也是一樣的道理，最後結果即為{102001}，換算為十進位即為 298(成立)。

為求精確一樣再多做幾組嘗試：

n=568，f[n]=244

568={210001}→{140001}→{100001}=244(成立)

n=676，f[n]=352

676={221001}→{214001}→{144001}→{104001}=352(成立)

總結上面的做法，可列出找出存活者的步驟：

(一) 轉換為 3k+1

(二) 轉換為三進位

(三) 轉換係數為偶數(不含首位及末位數)

(四) 刪去偶數次方

(五) 再轉換為十進位，即為答案

在此示範找出總人數為 1002 人時最後的存活者：

(一) 轉換為 3k+1：1002=$3\times333+3$，f[$3\times333+3$]= f[$3\times333+1$]，所以 f[1002]=f[1000]

(二) 轉換為三進位：1000={1101001}

(三) 轉換係數為偶數：{1101001}→{1031001}→{1024001}

(四) 刪去偶數次方：{1024001}→{4001}

(五) 再轉換為十進位，即為答案： {4001}=109

回頭檢視留一殺一結論，發現與留一殺二其實有所關連，也可以將留一殺一的結論寫成同樣模式：

(一) 轉換為 2k+1

(二) 轉換為二進位

(三) 刪去偶數次方

(四) 再轉換為十進位，即為答案

三、留一殺 s

而做到這裡，發現也許可以利用進位法進一步推廣到留一殺 s，於是我便繼續往下嘗試留一殺三。

同樣先照著留一殺二那樣子排列，而這次改成四個一組：

總人數	存活者	存活者	存活者	存活者
1~4	1	1	1	1
5~8	5	1	1	5
9~12	9	1	5	9
13~16	13	5	9	13
17~20	1	9	13	1
21~24	21	13	1	21
25~28	25	1	21	25
29~32	13	21	25	13
33~36	1	25	13	1
37~40	37	13	1	37
41~44	25	1	37	25
45~	13	37	25	13
49~	1	25	13	1
53~	37	13	1	37
57~	25	1	37	25
61~	13	37	25	13
65~	65	25	13	65
69~	37	13	65	37
73~	25	65	37	25
77~	77	37	25	77
81~	1	25	77	1
85~	37	77	1	37
89~	89	1	37	89
93~	13	37	89	13
97~	1	89	13	1
101~	101	13	1	101
105~	25	1	101	25
109~	13	101	25	13
113~	65	25	13	65

表二十四:留一殺三排列

首先觀察表內相同數字排列狀況，先看到 1、5、9 的排列有所規律，發現是利用間隔等差的方式排列重複四次，而公差為 3；再回頭檢視留一殺一及留一殺二，留一殺一同一個數字間隔為 1 出現兩次，而留一殺二間隔差 2，重複出現三次。統整以上結果，可歸納出當利用留一殺 s 的方式殺人時，會呈現以下公式：

$f[(s+1)m+1]= f[(s+1)m+1+s]= f[(s+1)m+1+2s]= f[(s+1)m+1+3s]=\ldots\ldots=f[(s+1)m+1+s^2]$

但這樣要想辦法將原本的數轉換為它真正所在的區間，比如說 108、111、114 存活者為 9，要將 108、111、114 轉換為 105，方法如下：

108=(3+1)26+1+3

111=(3+1)27+1+2

114=(3+1)28+1+1

但它們所在的區間其實都是與 105 相同的，105=(3+1)26+1，所以當使用留一殺 s 進行時，需先將它按下列公式轉換：

$$n \div (s+1) = m \cdots\cdots (1+p) \qquad (0 < p \leq s)$$

$f[n]=f[(s+1)m+1+p]= f[(s+1)(m-(s-p))+1]=f[(s+1)(m-s+p)+1]$

設 k=(m-s+p)

所以當使用留一殺 s 的方式進行時，首先的第一步就是將它轉換為 f[(s+1)k+1]。

再來就是找出接下來的步驟，參考留一殺一和留一殺二的方式，分別是轉換為二進位與三進位，以此類推留一殺三應該是要把它轉換為四進位來觀察，所以由此可知，當使用留一殺 s 的方式進行時，第二步就是把它轉換為(s+1)進位。

留一殺一的第三步是直接刪去偶數次方，但留一殺二的第三步是要先將它所有次項的所有係數轉換為偶數（除了首位和末位）。

因認為留一殺三的過程並不會比留一殺二還要簡單，所以先做總人數與其對應的存活者的比較（以總人數為 113，存活者為 65 為例）：分別轉換為四進位 113={1301}，65={1001}是直接將 3 個二次項刪去，但我並不覺得會那麼簡單，所以再繼續嘗試其他數字：
109={1231}，13={31}

在這裡果然出現了異於之前的差異，用留一殺二的整理係數成偶數當然不適用，於是我仔細研究{1231}、{31}這兩數的差異，末兩位的係數相同，所以在整理時應該並沒有改變末兩位，回頭檢視留一殺一與留一殺二的的規則，都是刪去偶數次方，{1231}的偶數次方項的係數是 2，但三次項係數的 1 又為甚麼會無緣無故地被刪去？

於是我重新回歸到留一殺二的借位問題，若一個奇數次方項的係數被刪去，就表示是被後面那一位借位走了，若是這樣的話，就表示原本的{1231}可能變成了{631}，因為三次項被二次項借位走了，整理到這裡，同時也發現了除了末位的係數 1 以外，一次項與二次項的係數也都變成了 3 的倍數，這不就與留一殺二的整理係數成偶數(2 的倍數)一樣嗎?這時再將偶

數次方項係數的 6 刪去，就變成了{31}，即為 13。

為了印證這個假設，我又多做了幾組數字以求正確：

f[81]=1，81={1101}，1={1}

{1101}={501}，因為首項是否為 3 的倍數並不影響答案，所以整理到此即可，刪去二次項的係數 5 之後便是答案 1。

再舉 f[401]=1 的情況為例，先將它轉換為四進位：

401={12101}，1={1}

{12101}={11501}={10901}，因為借一位後還無法讓二次項的係數變為三的倍數，所以有時需要借兩次為才能滿足需求。

推論到此後，可歸納出當使用留一殺 s 進行時，第三步是讓它的所有剌方向的係數全部轉為 s 的倍數，而第四步就是將它的偶數次方項刪去(2^0除外)。

第五步就是把它轉換回十進位。

到這裡可以歸納出尋找利用留一殺 s 進行後的結果：

(一) 將總人數轉換為(s+1)k1

(二) 轉換為(s+1)進位

(三) 轉換係數為 s 的倍數(不含首位及末位數)

(四) 刪去偶數次方

(五) 再轉換為十進位，即為答案

這裡一樣示範當用留一殺 s 進行時尋找存活者的方法，以總人數為 606 人，並且使用留一殺五進行：

(一) 將總人數轉換為(s+1)k+1：f[606]=f[601]

(二) 轉換為(s+1)進位：將 601 轉換為六進位為{2441}

(三) 轉換係數為 s 的倍數(不含首位及末位數)：

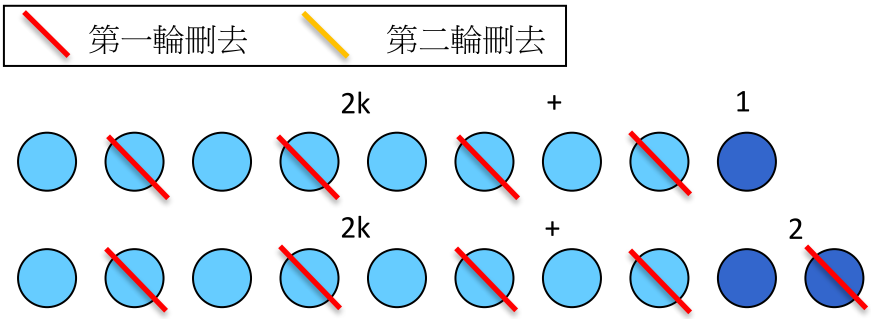
{2441}={23{10}1}={{15}{10}1}

(四) 刪去偶數次方：{{15}{10}1}→{{10}1}

(五) 再轉換為十進位，即為答案：{{10}1}={141}=61

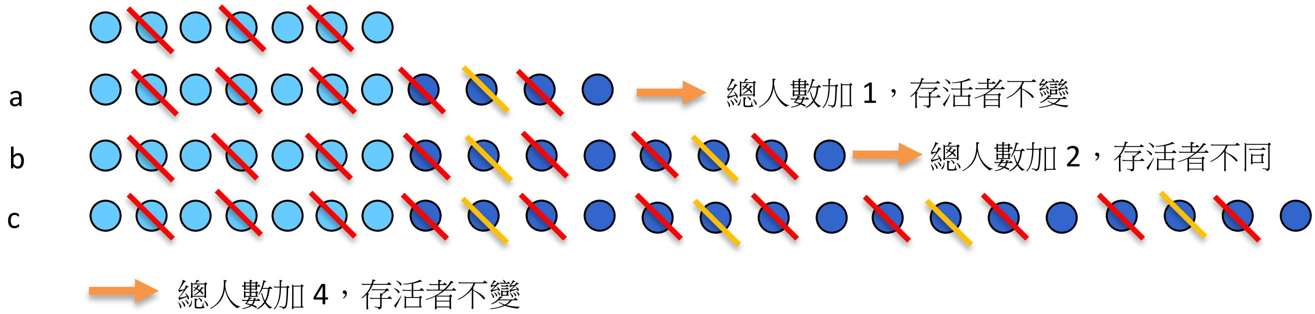
四、證明

首先證明以留一殺一進行時，第一步能將總人數轉換為奇數(即 2k+1)的原因。比較總人數為 2k+1 及 2k+2 的結果：



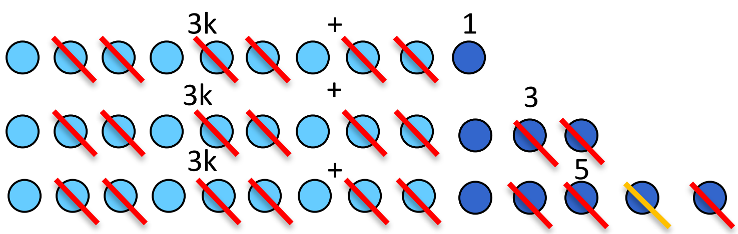
可以發現到兩者留下的結果是相同的。

再來是要證明總人數 n 與總人數$n+2^{2m}$及總人數$n+2^{2m-1}$的存活者的差異：



由上往下看下來，可以發現，總人數加 4 時，殺一輪後會餘下 1 人；而加 8 人時，會餘下 2 人；加 16 人時，則會留下 4 人。可以發現，狀況 a 時，殺過一輪後只會餘下 1 人，所以不影響存活者；狀況 b 時，殺過一輪則會留下 2 人，不符合奇數加 1 的原則，所以會改變最後存活者；而狀況 c 時，會餘下 4 人，和狀況 a 相同，因狀況 a 不會改變存活者，所以狀況 c 也不改變存活者。以此類推，加上任何偶數次方的數，都不影響存活者；相反的，加上任何奇數次方數，就都會改變最後的存活者。

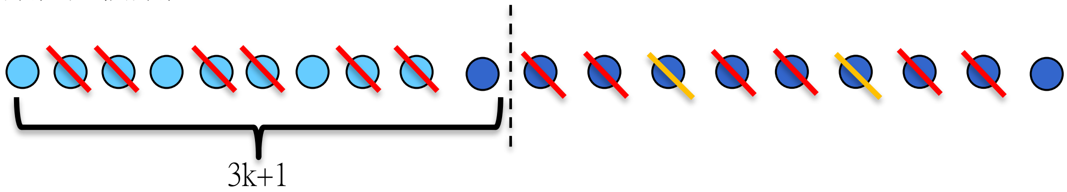
再來證明留一殺二之所以能轉換為 3k+1 的原因：



最後都只餘下 1 人，所以存活者不變。

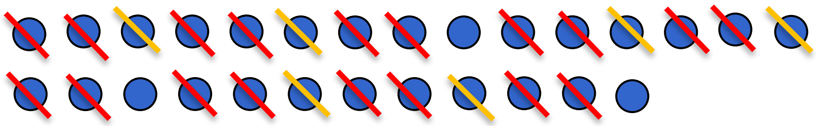
接著是說明 3k+1 加上奇數個與偶數個3^{2m}與3^{2m-1}差別：

奇數個與偶數個3^{2m}：



若只加上 1 個 9，除了前面的 3k+1 之外，僅剩下 1 個人，所以無法與原本的 3k+1 存活者相同，但若變成偶數個(2 或 4 個)就會餘下兩個或四個人，存活者就會與 3k+1 相同。

奇數個與偶數個3^{2m-1}的差別(前面 3k+1 部分省略)：

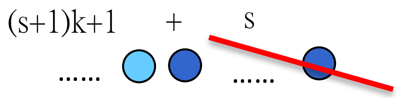


刪去後可發現會剩餘 3 個人，回到原本的表去看，有規律的地方只存在於兩兩相間的 3k+1，所以若只有加上單獨一個 3，就無法形成規律。

N=1~3	1	1	1
N=4~6	4	1	4
N=7~9	7	4	7
N=10~12	1	7	1
N=13~15	13	1	13
N=16~18	7	13	7
N=19~21	1	7	1
N=22~24	13	1	13
N=25~27	7	13	7
N=28~30	28	7	28
N=31~33	13	28	13
N=34~36	34	13	34
N=37~39	1	34	1
N=40~42	40	1	40
N=43~45	7	40	7
N=46~48	28	7	28
N=49~51	13	28	13
N=52~54	34	13	34

最後是留一殺 s 的部分。

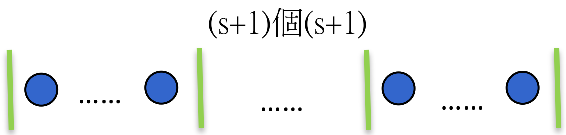
首先證明能轉換為(s+1)k+1 的原因。



過了(s+1)k+1 之後，剩下的 s 個人會先留下 1 個人，再殺掉 s-1 個人，回來同時剛好再把留下那個人一起殺掉，剛好殺了 s 個人，所以加上 s 個人並不會影響最後的存活者。

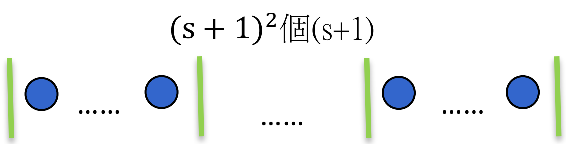
而能夠將 s 個$(s+1)^{2m}$刪去或留下 s 個$(s+1)^{2m-1}$的原因如下：

下圖表示的是(s+1)k+1+$(s+1)^2$中的$(s+1)^2$：



當使用留一殺 s 時，一個綠框框裡面的數就只剩下一個人，所以以加上$(s+1)^2$個人為例，殺完一輪後剩 s+1 個人，回過頭來殺 s 個人，最後就只剩下 1 人，所以如上必須加上 s 個人，存活者才會不變，所以必須要有 s 個$(s+1)^{2m}$才能達成與(s+1)k+1 相同的條件。

接著是留下 s 個$(s+1)^{2m-1}$的原因，以總人數加上$(s+1)^3$為例：



一樣每一區間會留下 1 個，殺 s 個，所以總人數加上$(s+1)^3$之後並刪去第一輪後會剩下$(s+1)^2$個人，回來時會在刪去 s (s+1)人，保留(s+1)人，，因為總人數加上(s+1)人並不能使存活者維持不變，所以不能將$(s+1)^{2m-1}$刪去。

五、反序殺留

接著我要將先留再殺的順序改為先殺再留，探討後續的規律，但其實反序殺留十分簡單，其實與先留再殺的差別只在於存存活者的位置的不同，而區間的概念則是一樣的。

因為先殺再留的存活者是在殺完 s 個人後，才留下那一人，而總人數 n=(s+1)m+1+p 可以像前面留一殺 s 的部份一樣先轉換為(s+1)k+1，然後只要在轉換時把 s 先預留下來，就可以套用於殺 s 留一上了，所以可以只要將第一步驟的整理成(s+1)k+1 轉變為整理成(s+1)k+1+s (因為留下的那一個人變到後面 s 個人之後) ，所以可以利用以下的公式去做轉換：

$$f[n]=f[(s+1)m+1+p]= f[(s+1)(m-(s-p))+1+s]=f[(s+1)(m-s+p)+1+s]$$

轉換為(s+1)k+1+s 之後，因為他的存活者會比總人數為(s+1)k+1 時多 s 個人，所以可以將它減 s 以變為(s+1)k+1 並利用進位法找出最後的存活者，再把減去的 s 加回來，就是最後的答案，造成這樣的原因就是因為留的人位置不同(相差 s)，所以說最後存活者所在位置也不同，所以要進行以上這些轉換。

舉個例子，如當總人數為 1950 人，要利用殺三留一去找出最後的存活者：

- $f[1950]= f[(3+1)487+1+1]= f[4(487-(3-1))+1+3]=f[4\times485+1+3]=f[1944]$
- 1944-3=1941(為了套用先留再殺的進位法步驟)
- f[1941]=613(利用留一殺 s 的步驟找出存活者)
- 613+3=616(再把 s 加回來就是答案)

陸、比較

本研究改變繞圓順序，在研究方式與結果上面也與原本約瑟夫問題有所差異，在此將本研究的留一殺 s 與葉佩雯的老師無法解決的難題做比較。在他的研究中，繞圓方式一樣是規律持續順時針繞圓，而推廣到殺 α 留 β ，所以先關注他的殺 α 留一所使用的方法及過程。

他所研究的過程中，所使用的方法是將所有人數分成 c+ α G 類，如殺三留一中可以將總人數分成 1+3G、2+3G、3+3G 三類，所以與本研究中的的第一步驟分成(s+1)有相同之處，只不過他是將每一類分開討論，而我是將每一類全部轉換為(s+1)k+1，以便做後續討論。

而且他在殺 s 留一的部分分成 s 類討論，而我則是將留一殺 s 分成(s+1)類，其中，他將原本的約瑟夫問題分成的那 s 類是不同的數列，而不是像本研究來回約瑟夫問題一樣整理到

(s+1)類會出現完全相同的數列，所以也無法將用本研究的方法對原本的約瑟夫問題去做直接的轉換。

再來因為他是持續繞圓的情況，所以最後的存活者會隨著總人數增加而一起增加相同的量，並且循著這個規則找出最後的公式。

而本研究與他的研究不同的地方是，因為是來回反向殺人，所以可能會在一次來回之後，將一個範圍內的數全部消去，也就是像上述的加上s個$(s+1)^2$不影響總人數的原理相同；而本研究的創新則是在有別於其他約瑟夫問題研究中使用程式或一般式去討論這個問題，我將反向轉繞的規則利用了進位法的轉換及刪去，並發現了區間的概念，找出了不同的規律及演算法。

因為他所提出的一般式是適用於持續轉繞的約瑟夫問題，而我的進位法刪去個別次方係數的概念專屬來回約瑟夫問題，因為來回約瑟夫問題在來回之間把偶數次方數刪去的特性，所以本研究所提出利用次方及進位法概念解來回約瑟夫問題的方法對原本持續轉繞約瑟夫問題無法套用。

柒、結論

一、將上面的規律整理後，發現留一殺一時，可帶入公式以利用總人數求出最後的存活者，將總人數當成 n，存活者為 f[n]：

(一) 若 n 為偶數，則 f[n]=f[n-1]

(二) 若 n 為奇數，總人數為 2k+1 時：

- n 為奇數，f[n]=n
- n 為偶數，f[n]=1

(三) 總人數為$1+2a_1+2^2a_2+2^3a_3+2^4a_4\ldots\ldots+2^m a_m$ ($a_j\in\{0,1\}$)時：

- m 為奇數，f[n]= $1+2a_1+2^3a_3+2^5a_5\ldots\ldots+2^m a_m$
- m 為偶數，f[n]= $1+2a_1+2^3a_3+2^5a_5\ldots\ldots+2^{m-1}a_{m-1}$

二、留一殺一的結論也可以寫成：

(一) 轉換為 2k+1

(二) 轉換為二進位

(三) 刪去偶數次方

(四) 再轉換為十進位，即為答案

三、當使用留一殺二進行，總人數為 n，存活者為 f[n]，須按照下列步驟以求存活者：

(一) 轉換為 3k+1

(二) 轉換為三進位

(三) 轉換係數為偶數(不含首位及末位數)

(四) 刪去偶數次方

(五) 再轉換為十進位，即為答案

四、當使用留一殺 s 的方式進行時，總人數為 n，存活者為 f[n]，須按照下列步驟以求存活者：

(一)將總人數轉換為(s+1)k+1

(二)轉換為(s+1)進位

(三)轉換係數為 s 的倍數(不含首位及末位數)

(四)刪去偶數次方

(五)再轉換為十進位，即為答案

五、當使用殺 s 留一進行時，總人數為 n，存活者為 f[n]，須按照下列步驟以求存活者：

(一)將總人數轉換為(s+1)k+1+s

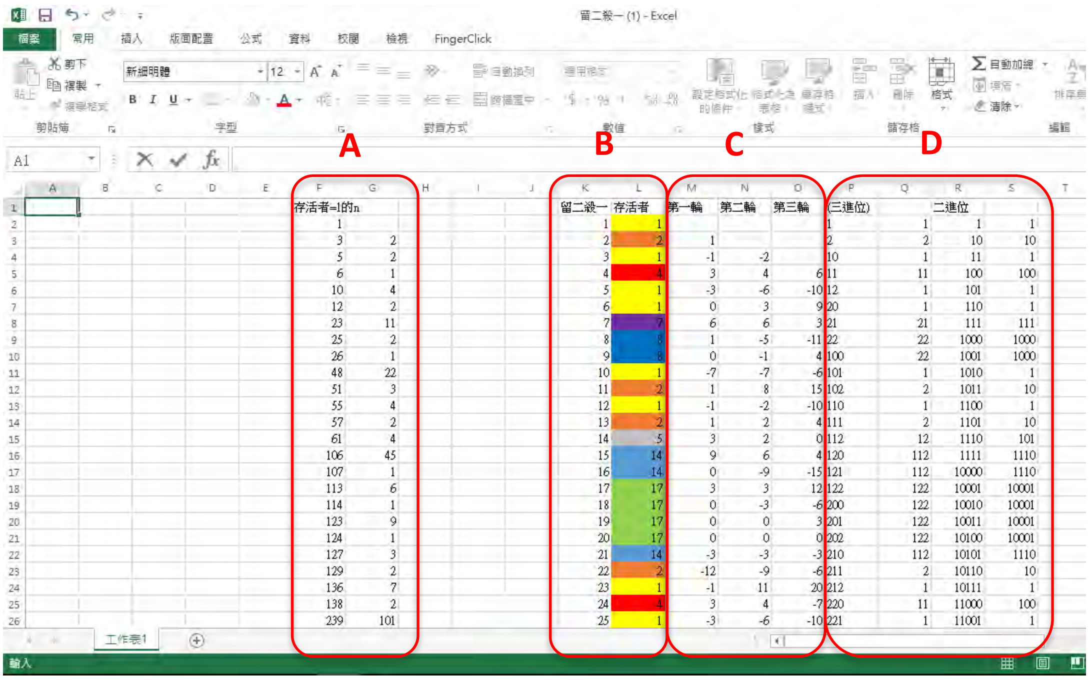
(二) 把 f[(s+1)k+1+s]減 s 變為 f[(s+1)k+1]

(三) 用留一殺 s 的方法找出存活者

(四) 再加回 s，即為答案

捌、延伸的探究

本研究目前只做到留一殺 s 與殺 s 留一，再之後的部分我也有試著往留二殺一的部份去做延伸，但經過一番嘗試，與進位法的關聯甚少，就現階段而言實在無法找出其規律以找出公式並快速尋找出存活者，雖推出了一些可循方向，並且對連續出現的數字做了一些整理及歸納，包括把所有數字分成 s+1 類、尋找是否有階差數列的關係，或者利用顏色把它做區間的整理，挑出相同的數……但都沒有找到一個通用的規律，以利用演算法推出最後的存活者。



存活者=1的n		留二殺一	存活者	第一輪	第二輪	第三輪	(三進位)		二進位	
1		1	1				1	1	1	1
3	2	2	2	1			2	2	10	10
5	2	3	1	-1	-2		10	1	11	1
6	1	4	4	3	4	6	11	11	100	100
10	4	5	1	-3	-6	-10	12	1	101	1
12	2	6	1	0	3	9	20	1	110	1
23	11	7	7	6	6	3	21	21	111	111
25	2	8	8	1	-5	-11	22	22	1000	1000
26	1	9	8	0	-1	4	100	22	1001	1000
48	22	10	1	-7	-7	-6	101	1	1010	1
51	3	11	2	1	8	15	102	2	1011	10
55	4	12	1	-1	-2	-10	110	1	1100	1
57	2	13	2	1	2	4	111	2	1101	10
61	4	14	5	3	2	0	112	12	1110	101
106	45	15	14	9	6	4	120	112	1111	1110
107	1	16	14	0	-9	-15	121	112	10000	1110
113	6	17	17	3	3	12	122	122	10001	10001
114	1	18	17	0	-3	-6	200	122	10010	10001
123	9	19	17	0	0	3	201	122	10011	10001
124	1	20	17	0	0	0	202	122	10100	10001
127	3	21	14	-3	-3	-3	210	112	10101	1110
129	2	22	2	-12	-9	-6	211	2	10110	10
136	7	23	1	-1	11	20	212	1	10111	1
138	2	24	4	3	4	-7	220	11	11000	100
239	101	25	1	-3	-6	-10	221	1	11001	1

一、存活者為 1

曾經試過像尋找留一殺一時的規律一樣挑出當存活者 n=1 時的總人數，看這個數列是否有甚麼關於次方與進位的關係，不過但中間突然從 61 跳到 106，並且前後兩個區間也沒有等差的關係。於是我再把整個數列試著找是否有階差的關係，如 A 部分的右半部，但很明顯沒有如階差數列般的明顯規律，所以又決定往其他方向尋找。

二、區塊圖像的排列

再來我直接把整個數列存活者相同的地方用相同顏色標示，看是否能像探索留一殺二的規律時一樣從圖像與顏色去看出規律，看哪部分的甚麼顏色比較多，不過像 B 部分的中間有連續出現 4 個數的存活者是 17，總人數又是從 17 到 20，實在沒有特別明顯的規律。再回頭看 2 的次方數與 3 的次方數的存活者，依序分別為 1，1，8，14……與 1、8……兩數列完全沒有相干，看似也無法像留一殺 s 的方式一樣快速利用進位法找到存活者。

三、存活者的一輪到三輪階差數列

我也試過將整個數列做階差，而且不只做一次，做了三輪階差，拿後面那一項減去前面那一項，看是否會出現與階差或甚至最原始的進位法有關，很可惜並沒有找到，數列十分凌亂。

四、進位法轉換觀察

又或者直接將整個數列的總人數與存活者變成以進位法表示，我分別嘗試了三進位與二進位，我覺得三進位比較有可能，不過比對總人數的三進位表示法與存活者的三進位表示法，逐一比對，遇到 3 的次方數又特別留意其是否有通用的規律去說明，但一樣沒有一個可行的方向去解釋，更沒有與階差數列的關聯。

從多方面的整理、歸納，及觀察，發現跟原本的留一殺 s 完全不同，也許跟進位法並沒有直接關聯，現階段我也無法說明其規律及推倒出一個步驟去找尋最後的存活者，關於留二殺一明顯較留一殺二複雜許多的關係，我整理出了以下可能：

- 留一殺二是在三個人裡面僅留下一個人，但留二殺一則是在三個人裡面留下了兩個人，留下的人數從 $\frac{1}{3}$ 變成了$\frac{2}{3}$ ，相較下來也會複雜許多。
- 留一殺二因為在過去並回來的時候可以將一個範圍內的所有人刪去，所以可以利用進位法及刪去的概念去做演算，但留二殺一因為留的人永遠比殺的人多，所以不能將一個範圍內的人全部刪去，像留一殺二能將偶數個3^{2m}刪去，而留二殺一就不行，因為總是會剩下那幾個人不能一起被殺掉。

基於以上兩點，可以知道留二殺一的確比留一殺二複雜許多，而也非單純使用進位法的轉換及刪去偶數次方就能輕易找出存活者，一定還需要嘗試更多方式才能夠解決這部分的問題，而很遺憾的本研究無法呈現出來，希望未來能夠將此部分的問題解決。

玖、參考資料

1. 周子揚曾佑美李昱萱(2016)・生死一「數」間・中華民國第 56 屆中小學科學展覽會・取自 https：//activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/56/high.html

2. 葉佩雯(2006) ・約瑟夫數列的最後一章・全國中小學科展・取自 https：//www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=43&a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=10&sid=1838

3.楊皓琮翁郁婷(1999) ・公主如何救王子・全國中小學科展・取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/39/school/39-4-5.pdf

4. 戴于珽(2004) ・我要活下去・全國中小學科展・取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/E/040409.pdf

5. 林豐正詹朱聰林裕翔簡子為(2003) ・九死一生・全國中小學科展・取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/43/pdf/e/040401.pdf

6. 鄒慶叡劉志豪林己豪劉欣宜(2005) ・魔數・全國中小學科展・取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/high/0304/030406.pdf

【評語】030421

考慮排成一圈等待被處決的 n 個人。計數從圓圈中的指定點開始，並沿指定方向圍繞圓圈進行。在跳過指定數量的人之後，執行下一個人。對剩下的人重複該過程，從下一個人開始，朝同一方向跳過相同數量的人，直到只剩下一個人為止。最後剩下的人會被釋放。在給定人數、起點、方向和要跳過的數字後，選擇初始圓圈中的位置以避免被處決，這樣的問題稱為約瑟夫問題。作者考慮了此問題的一個順時針、逆時針來回的版本以及殺留反序的約瑟夫問題。針對這些留 1 殺 s 及反序殺留問題，作者利用次方與進位法的概念給出一些遞迴演算公式，是很不錯的作品。若能應用已知公式進一步推導出一般通式，則作品將更上層樓。

作品海報

摘要

在約瑟夫問題中，假設有 n 人排成環狀，順時針編號 1 到 n 號，從頭開始，以保留、殺掉、保留、殺掉......的方式，到最後一號時直接繼續繞圓並保持規律，找出最後的存活者。而本研究將繞圓的順序改變，把原本應持續轉繞下去的殺人順序，到剩餘的人中最大號和最小號時回頭反方向旋轉。持續此規律，並延伸至留一殺 s 及反序殺留(殺 s 留一)，尋找總人數 n 和最後存活者 f[n]之間的關係。

研究目的

一、　尋找留一殺一與留一殺二最後存活者的規律

二、　透過留一殺一與留一殺二兩個層面利用總人數 n 來找出最後的存活者 f[n]

三、　利用留一殺一與留一殺二的結果推到留一殺 s

四、　利用進位法找出經過留一殺 s 殺完後所得的存活者

五、　討論殺 s 留一與留一殺 s 的差別

研究過程

第一部分　留一殺一

在此先將各符號加以定義，以便後續研究：

n：總人數，f[n]：當總人數為 n 時最後的存活者

如下圖，首先用「留一個殺一個」的方式刪去，碰到最後一人或第一人時再反方向運行尋找最後一人：

總人數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
存活者	1	1	3	3	1	1	3	3	9	9	11	11	9	9	11	11
總人數	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
存活者	1	1	3	3	1	1	3	3	9	9	11	11	9	9	11	11
總人數	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
存活者	33	33	35	35	33	33	35	35	41	41	43	43	41	41	43	43

(一)　全部數字皆是兩兩一組，也就是說假設總人數 65 人(奇數)，存活者為 1 號，總人數再多一個也不影響最後的存活者，所以可得知當總人數為偶數 n 時，最後存活者就會與總人數為 n-1 時相同。

(二)　從上表中挑出 f[n]=1 的 n 值

n	1	5	17	21	65	69	81	85
f[n]	1	1	1	1	1	1	1	1

當 $n=2^m+1$ 且 m 為偶數，f[n]=1

挑出 f[n]=n 的 n 值

n	3	9	11	33	35	41	43	129
f[n]	3	9	11	33	35	41	43	129

當 $n=2^m+1$ 且 m 為奇數，f[n]=n

由上表中的數據發現，真正將存活者的號碼提高的只有「2 的奇數次方數」,而當總人數加上「2 的偶數次方數」時，則不會改變。可以先利用「二進位法」拆解總人數，例如:假設總人數為 145，$145=2^7+2^4+1$，因為碰到「2 的偶數次方數」就會回到前一個「2 的偶數次方區間」，所以真正將存活者的號碼提高的只有「2 的奇數次方數」，因此只需保留唯一的「二的奇數次方數」的「2^7」和 1，即2^7+1，存活者為 129。

由上面例子可得知，當總人數 $n=1+2a_1+2^2a_2+2^3a_3+2^4a_4\ldots\ldots+2^m a_m$ $(a_k\in\{0,1\})$時：

m=2k+1，$f[n]=1+2a_1+2^3a_3+2^5a_5\ldots\ldots+2^m a_m$

m=2k，$f[n]=1+2a_1+2^3a_3+2^5a_5\ldots\ldots+2^{m-1}a_{m-1}$

第二部分　留一殺二

比照留一殺一的方式，改為留→殺→殺→...的規律運行，留 1 個人再殺 2 個人，整理出下表格:

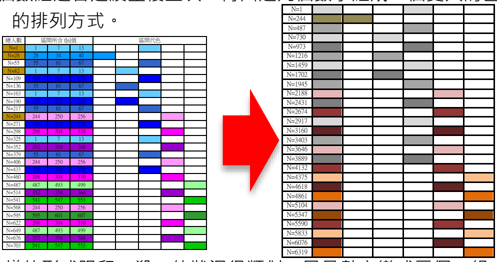
總人數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
存活者	1	1	1	4	1	4	7	4	7	1
總人數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
存活者	7	1	13	1	13	7	13	7	1	7
總人數	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
存活者	1	13	1	13	7	13	7	28	7	28
總人數	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
存活者	13	28	13	34	13	34	1	34	1	40

N=1~3	1	1	1
N=4~6	4	1	4
N=7~9	7	4	7
N=10~12	1	7	1
N=13~15	13	1	13
N=16~18	7	13	7
N=19~21	1	7	1
N=22~24	13	1	13
N=25~27	7	13	7
N=28~30	28	7	28
N=31~33	13	28	13
N=34~36	34	13	34
N=37~39	1	34	1
N=40~42	40	1	40
N=43~45	7	40	7
N=46~48	28	7	28
N=49~51	13	28	13

(一)仔細看可發現有一組由三個數字所組成的數組穿插其中，我們改變排列方式如右表，排列成三個一組。

(二)三個間隔重複的數字的第一項是從 3k+1 開始 (k 為自然數，如右表)，而後的 3k+3 和 3k+5 會與之相同，所以以下僅討論總人數為 3k+1 的狀況。

(三)這個數組還會連續重複三次，再由這九個數字組成一個更大的區間，再研究這些大區間的排列方式。



由左圖可看出個數字與區間的排列狀況，都能排出相像的圖形，研究圖形所對應的數字彼此之間的關係:

1. 碰到三的奇數次方數，下一個行列會往右跳(數字擴大)
2. 碰到三的偶數次方數，下一個行列會往左跳(數字縮小)

這樣的形式跟留一殺一的狀況很類似，只是數字變成三個一組，改用三進位法的方式整理，但有些許不同。

其實這是我們把它間格抽離出來的結果，但注意這一個區間是 27，如果只有一個 27，它就會跳到其他的區間，這樣我們將它做三進位表示以鎖定區間就沒有效果了，484 和 703 之所以能成功，是因為它們中間的係數皆為 2，如同表中如果多兩個 27 或多四個 27，它仍然會維持在那個區間，所以要想辦法讓它在三進位表示法時，中間的位數均為偶數(3^0除外)，才能找到對應的數。

為達成此需求，須改變三進制，將每一係數的最大上限擴增至可以超過 3。

但以 82 為例，82={10001}，存活者卻是 82；244 也一樣，244={100001}，而 244 的存活者也是 244，表示最前面(即最大次項)的係數的奇與偶並不影響區間跳動，不需要整理。

舉一個例子，設 n=622，622={212001}，因為 3 的四次方的係數為 1，需要把它改為偶數，所以從前面的五次方借位，即表示成{142001}，再來就是要把偶數次方刪去，現在之所以能刪是因為已經將這個數鎖定在這個區間了，不會跳至其他區間，奇數次方的保留也是一樣的道理，最後結果即為{102001}，換算為十進位即為 298(成立)，例如:

n=568，f[n]=244：568={210001}→{140001}→{100001}=244(成立)

所以按照下列步驟即可求出存活者:

(1)分類成 3k+1,3k+2,3k+3 三類
(1)轉換為 3k+1
(2)轉換為三進位表示
(4)轉換係數為偶數
(5)刪去偶數次方
(6)再轉換為十進位，即為答案

例如總人數為 1002 人時最後的存活者:

(1)1002=3×333+3(3K+3)
(2)轉變為 1000=333+1(3K+1)
(3)1000={1101001}
(4){1101001}→{1031001}→{1024001}
(5){1024001}→{4001}
(6){4001}=109，即最後的存活者為 109

第三部份 留一殺 s

而做到這裡，發現也許可以利用進位法進一步推廣到留一殺 s，於是我便繼續往下嘗試留一殺三。同樣先照著留一殺二那樣子排列，而這次改成四個一組：

總人數	存活者			
1~4	1	1	1	1
5~8	5	1	1	5
9~12	9	1	5	9
13~16	13	5	9	13
17~20	1	9	13	1
21~24	21	13	1	21
25~28	25	1	21	25
29~32	13	21	25	13
33~36	1	25	13	1
37~40	37	13	1	37
41~44	25	1	37	25

首先觀察表內相同數字排列狀況，先看到 1、5、9、13 的排列是利用間隔等差的方式排列重複四次，而公差為 3；此時再回頭檢視留一殺一及留一殺二，留一殺一同一個數字間隔為 1 出現兩次，而留一殺二間隔差 2，重複出現三次。統整以上結果，可歸納出當利用留一殺 s 的方式殺人時，會呈現以下公式：

$$f[(s+1)m+1]= f[(s+1)m+1+s] =f[(s+1)m+1+2s]$$
$$=f[(s+1)m+1+3s]=......=f[(s+1)m+1+s^2]$$

證明: 

過了(s+1)k+1 之後，若多了一個 s，就直接刪去，再多一個 s，在過去時會先留 1 個人並刪去 s-1 個人，回來再多殺一個人就剛好殺滿 s 人並且完全刪去，以此類推。

但這樣要想辦法將原本的數轉換為它真正所在的區間，比如說 108、111、114 存活者為 9，要將 108、111、114 轉換為 105，方法如下：

108=(3+1)26+1+3； 111=(3+1)27+1+2； 114=(3+1)28+1+1

但它們的存活者其實都是與 105 相同的，105=(3+1)26+1，所以當使用留一殺 s 進行時，需先將它按下列公式轉換：

f[n]=f[(s+1)m+1+p] =f{[s+1][m-(s-p)]+1}= f{(s+1) (m-s+p)+1} ，$(n \div (s+1) = m \cdots\cdots (1+p) \qquad (0 < p \leq s))$

所以當使用留一殺 s 的方式進行時，首先的第一步就是將它轉換為 f[(s+1)m+1]。

再來參考留一殺一和留一殺二的方式，分別是轉換為二進位與三進位，以此類推留一殺三應該是要把它轉換為四進位來觀察，所以可歸納出當使用留一殺 s 的方式進行時，第二步就是把它轉換為(s+1)進位。

因認為留一殺三的過程並不會像留一殺一那樣簡單，可能也要整理進位法，所以先做總人數與其對應的存活者的比較（以 f[113]=65 為例）： 分別轉換為四進位：113={1301}，65={1001}

是直接將 3 個二次刪去，但我不覺得那麼簡單，所以再繼續嘗試其他組： 109={1231}，13={31}

在這裡果然出現了異於之前的差異，於是我仔細研究{1231}、{31}這兩數的差異：末兩位的係數相同，所以在整理時應該並沒有改變末兩位。再回頭檢視留一殺一與留一殺二的規則，都是刪去偶數次方，{1231}的偶數次方項的係數是 2，但三次項係數的 1 又為甚麼會無緣無故地被刪去？

於是我重新回歸到留一殺二的借位問題，若一個奇數次方項的係數被刪去，就表示是被後面那一位借位走了，若是這樣的話，就表示原本的{1231}可能變成了{631}，因為三次項被二次項借位走了，整理到這裡，同時也發現了除了末位的係數 1 以外，一次項與二次項的係數也都變成了 3 的倍數，這不就與留一殺二的整理係數成偶數(2 的倍數)一樣嗎?這時再將偶數次方項係數的 6 刪去，就變成了{31}，即為 13。

推論到此後，可歸納出當使用留一殺 s 進行時，第三步是讓它的所有次方項的係數全部轉為 s 的倍數，而第四步就是將它的偶數次方項刪去(2^0除外)。

證明：下圖表示的是(s+1)k+1+$(s+1)^2$中的$(s+1)^2$：

(s+1)個(s+1)

當使用留一殺 s 時，一個綠框框裡面的數就只剩下一個人，所以以加上$(s+1)^2$個人為例，殺完一輪後剩 s+1 個人，回過頭來殺 s 個人，最後就只剩下 1 人，所以如上必須加上 s 個人，存活者才會不變，所以必須要有 s 個$(s+1)^{2m}$才能達成與(s+1)k+1 相同的條件。

接著是留下 s 個$(s+1)^{2m-1}$的原因，以總人數加上$(s+1)^3$為例：

$(s+1)^2$個(s+1)

一樣每一區間會留下 1 個，殺 s 個，所以總人數加上$(s+1)^3$之後並刪去第一輪後會剩下$(s+1)^2$個人，回來時會在刪去 s (s+1)人，保留(s+1)人，，因為總人數加上(s+1)人並不能使存活者維持不變，所以不能將$(s+1)^{2m-1}$刪去。

第五步就是把它轉換回十進位。

到這裡可以歸納出尋找利用留一殺 s 進行後的結果：

(1)分類成(s+1)m+1, (s+1)m+2, (s+1)m+3......(s+1)m+(s+1)數類
(2)將總人數轉換為(s+1)k+1
(3)轉換為(s+1)進位
(4)轉換係數為 s 的倍數(不含首位及末位數)
(5)刪去偶數次方
(6)再轉換為十進位，即為答案

留二殺一的延伸的探究

本研究目前只做到留一殺 s 與殺 s 留一，再之後的部分我也有試著往留二殺一的部份去做延伸，但經過一番嘗試，與進位法的關聯甚少，就現階段而言實在無法找出其規律以找出公式並快速尋找出存活者，雖推出了一些可循方向，但都沒有找到一個通用的規律，以利用演算法推出最後的存活者。

A：存活者為 1　B：區塊圖像的排列　C：存活者的階差數列　D：進位法轉換觀察

存活者=1 的 n		留二殺一	存活者	第一輪	第二輪	第三輪	(三進位)		(二進位)	
1		1	1				1	1	1	1
3	2	2	2	1			2	2	10	10
5	2	3	1	-1	-2		10	1	11	1
6	1	4	4	3	4	6	11	11	100	100
10	4	5	1	-3	-6	-10	12	1	101	1
12	2	6	1	0	3	9	20	1	110	1
23	11	7	7	6	6	3	21	21	111	111
25	2	8	8	1	-5	-11	22	22	1000	1000
26	1	9	8	0	-1	4	100	22	1001	1000
48	22	10	1	-7	-7	-6	101	1	1010	1
51	3	11	2	1	8	15	102	2	1011	10
55	4	12	1	-1	-2	-10	110	1	1100	1
57	2	13	2	1	2	4	111	2	1101	10
61	4	14	5	3	2	0	112	12	1110	101
106	45	15	14	9	6	4	120	112	1111	1110
107	1	16	14	0	-9	-15	121	112	10000	1110
113	6	17	17	3	3	12	122	122	10001	10001
114	1	18	17	0	-3	-6	200	122	10010	10001
123	9	19	17	0	0	3	201	122	10011	10001
124	1	20	17	0	0	0	202	122	10100	10001
127	3	21	14	-3	-3	-3	210	112	10101	1110
129	2	22	2	-12	-3	-6	211	2	10110	10
136	7	23	1	-1	11	20	212	1	10111	1
138	2	24	4	3	4	-7	220	11	11000	100
239	101	25	1	-3	-6	-10	221	1	11001	1

第四部份　反序殺留

接著我要將先留再殺的順序改為先殺再留，探討後續的規律，但其實反序殺留十分簡單，其實與先留再殺的差別只在於存存活者的位置的不同，而區間的概念則是一樣的。

因為先殺再留的存活者是在殺完 s 個人後，才留下那一人，而總人數 n=(s+1)m+1+p 可以像前面留一殺 s 的部份一樣先轉換為(s+1)k+1，然後只要在轉換時把 s 先預留下來，就可以套用於殺 s 留一上了，所以可以只要將第一步驟的整理成(s+1)k+1 轉變為整理成(s+1)k+1+s　(因為留下的那一個人變到後面 s 個人之後)　，所以可以利用以下的公式去做轉換：　f[n]=f[(s+1)m+1+p]= f[(s+1)(m-(s-p))+1+s]=f[(s+1)(m-s+p)+1+s]

轉換為(s+1)k+1+s 之後，因為他的存活者會比總人數為(s+1)k+1 時多 s 個人，所以可以將它減 s 以變為(s+1)k+1 並利用進位法找出最後的存活者，再把減去的 s 加回來，就是最後的答案，造成這樣的原因就是因為留的人位置不同(相差 s)，所以說最後存活者所在位置也不同，所以要進行以上這些轉換。

舉個例子，如當總人數為 1950 人，要利用殺三留一去找出最後的存活者：

- f[1950]= f[(3+1)487+1+1]= f[4(487-(3-1))+1+3]=f[4×485+1+3]=f[1944]
- 1944-3=1941(為了套用先留再殺的進位法步驟)
- f[1941]=613(利用留一殺 s 的步驟找出存活者)
- 613+3=616(再把 s 加回來就是答案)

比較

本研究改變繞圓順序，在研究方式與結果上面也與原本約瑟夫問題有所差異，在此將本研究的留一殺 s 與葉佩雯老師無法解決的難題做比較。在他的研究中，繞圓方式一樣是規律持續順時針繞圓，而推廣到殺α留β，所以先關注他的殺α留一所使用的方法及過程。

他所研究的過程中，所使用的方法是將所有人數分成 c+αG 類，如殺三留一中可以將總人數分成 1+3G、2+3G、3+3G 三類，所以與本研究中的的第一步驟分成(s+1)有相同之處，只不過他是將每一類分開討論，而我是將每一類全部轉換為(s+1)k+1，以便做後續討論。

再來因為他是持續繞圓的情況，所以最後的存活者會隨著總人數增加而一起增加相同的量，並且循著這個規則找出最後的公式。而本研究與他的研究不同的地方是，因為是來回反向殺人，所以可能會在一次來回之後，將一個範圍內的數全部消去，也就是像上述的加上 s 個$(s+1)^2$不影響總人數的原理相同；而本研究的創新則是在有別於其他約瑟夫問題研究中使用程式或一般式去討論這個問題，我將反向轉繞的規則利用了進位法的轉換及刪去，並發現了區間的概念，找出了不同的規律及演算法。因為他所提出的一般式是適用於持續轉繞的約瑟夫問題，而我的進位法刪去個別次方係數的概念專屬來回約瑟夫問題，因為來回約瑟夫問題在來回之間把偶數次方數刪去的特性，所以本研究所提出利用次方及進位法概念解來回約瑟夫問題的方法對原本持續轉繞約瑟夫問題無法套用。

結論

一、將上面的規律整理後，發現**留一殺一**時，可帶入函數的公式以利用總人數求出最後的存活者，將總人數當成 n，存活者為 f[n]:

(1)分類成 2k+1 與 2k+2 兩類

(2)若 n 為偶數，則 f[n]= f[n-1]

(3)若 n 為奇數，總人數為 2^k+1 時：　k 為奇數，f[n]= n ┃ k 為偶數，f[n]=1

(4)總人數 n=$1+2a_1+2^2a_2+2^3a_3+2^4a_4\ldots\ldots+2^na_m$ ($a_k\in\{0,1\}$)時：

m=2k+1，f[n]= $1+2a_1+2^3a_3+2^5a_5\ldots\ldots+2^ma_m$ ┃ m=2k，f[n]= $1+2a_1+2^3a_3+2^5a_5\ldots\ldots+2^{m-1}a_{m-1}$

二、若規則為**留一殺二**，總人數為 n，存活者為 f[n]，按照下列步驟以求存活者:

(1)分類成 3k+1,3k+2,3k+3 三類	(4)轉換係數為偶數
(2)轉換為 3k+1	(5)刪去偶數次方
(3)轉換為三進位表示	(6)再轉換為十進位，即為答案

三、當使用**留一殺 s** 的方式進行時，總人數為 n，存活者為 f[n]，須按照下列步驟以求存活者：

(1)分類成(s+1)m+1, (s+1)m+2, (s+1)m+3, ... , (s+1)m+(s+1)數類	(4)轉換係數為 s 的倍數(不含首位及末位數)
(2)將總人數轉換為(s+1)k+1	(5)刪去偶數次方
(3)轉換為(s+1)進位	(6)再轉換為十進位，即為答案

參考資料

1.周子揚曾佑美李昱萱(2016)•生死一「數」間•全國中小學科展•取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/56/high.html

2.葉佩雯(2006) •約瑟夫數列的最後一章•全國中小學科展•取自 https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=43&a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=10&sid=1838

3.楊晧琮翁郁婷(1999) •公主如何救王子•全國中小學科展•取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/39/school/39-4-5.pdf

4.戴于珽(2004) •我要活下去•全國中小學科展•取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/E/040409.pdf

5.林豐正詹朱聰林裕翔簡子為(2003) •九死一生•全國中小學科展•取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/43/pdf/e/040401.pdf

6.鄒慶叡劉志豪林己豪劉欣宜(2005) •魔數•全國中小學科展•取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/high/0304/030406.pdf

7.葉佩雯(2005) •老師無法解決的難題•全國中小學科展•取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/elementary/0804/080418.pdf