

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

030420

心有千千結

學校名稱：臺中市立光正國民中學

作者： 國三 林志翰 國三 陳玉珊 國三 何岳樺	指導老師： 江明達 許淑娟
-----------------------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：繩結、全等、相似形

摘要

本研究主要在探討打繩結時，繩子會縮短多少長度的問題。我們透過繩結在纏繞處的結構，來探究打繩結時繩子長度會縮減的原因，以及找出能計算繩子長度會縮減多少的公式。研究過程中發現，圓繩和扁平繩的單結，在纏繞處分別會產生纏繞圓和正五邊形的結構，我們藉此找到了估算繩子損失長度的數學公式。最後再將圓繩在打結處會如何縮短長度的數學性質，應用到其他不同的繩結上，完成了圓繩可以在其他繩結上估算損失長度的公式。

壹、研究動機

上童軍課練習打繩結時，我們發現：如果打繩結的時候太過於接近繩子的末端，有時候繩子的一端會有不夠長的現象，因而沒有辦法順利完成繩結；如果繩子的一邊留得太長，又會產生浪費繩子的現象。這樣的困擾引發了我們想要進行探究的興趣，經過一連串實驗操作之後，我們將所要探討的主題集中在兩個問題上面：

- 一、 大家都知道打繩結時會造成長度的縮減，我們想要探究這樣的長度損失，究竟是由甚麼樣的因素所造成的？
- 二、 能不能找到一種估算的方法，讓我們除了透過實際測量之外，也能利用計算的方法，估算出打繩結時，繩子最後會損失多少長度？

目前研究團隊所找到有關繩結的研究資料，他們探討的重點幾乎都著重在繩結的種類、繩結的結構轉換、打繩結的方法…等等的探討；對於打繩結為何造成長度縮減的這個主題，我們搜尋文獻資料後，發現之前並沒有類似的研究作品，所以我們決定對這個面向的繩結問題進行研究。

貳、研究目的

- 一、 探究打繩結時，造成繩子會縮短的因素。
- 二、 找出打繩結時，能夠算出繩子縮短長度的公式。
- 三、 找出構成繩結的基本組合方式。

參、研究設備及器材

圓繩、扁平繩、紙、筆、尺、計算機、電腦

肆、研究過程

本研究透過實際的繩結實驗來探究繩子之所以會縮短的因素；再經過團隊討論後歸納成數學公式，並透過實際的測量來驗證公式的可行性。本研究的研究架構如圖 4-1 所示。



圖 4-1 研究架構圖

伍、研究結果

因為單結是最基本的一個的繩結，所以我們的研究先從確認單結的結構開始。此外，單結也是所有繩結中最容易學習、最容易完成，也是體積最小的結。團隊希望先從單結這裡得到一些具體可行的研究方向！

一、 單結的結構(圓繩)



圖 5-1 單結的組成

從上面單結的分解動作來看，單結似乎是由一個纏繞繩子的動作、和一個穿過繩圈的動作組合而成。不過，團隊很快就發現，這樣的分析模式無助於理解繩子為何會縮短。於是我們嘗試將繩子拉緊，看看這樣產生的現象，是否能夠提供更多研究的切入點。

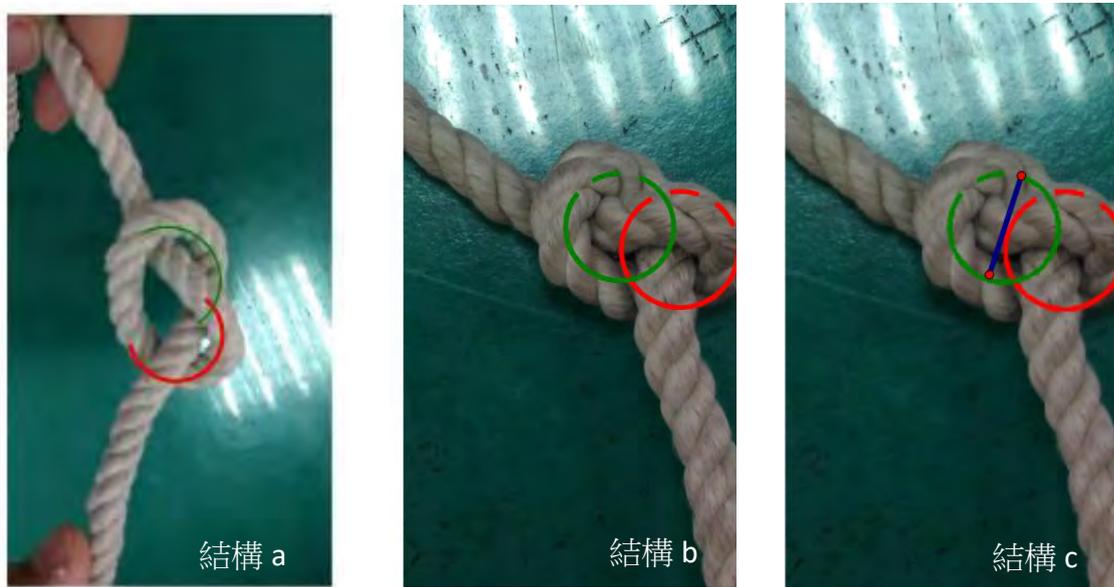


圖 5-2 圓繩單結在纏繞處的結構

如圖 5-2 的結構 a 所示，在一個半拉緊的單結中，我們發現繩子之所以會縮短，應該是在纏繞處形成了「圓」的結構；也就是說，打單結所損失的繩子長度應該和「圓周長」有所關聯。

另外，如圖 5-2 的結構 b 所示，在更為拉緊的單結中，可以清楚的看到，單結在纏繞處損失了二個圓周的長度。

最後，從圖 5-2 的結構 c 所示，設原來繩子的直徑長 = d ，那麼在纏繞處形成的圓，其直徑 $D=2d$ 。

也就是說，設圓繩的直徑為 d ，
則打一個單結所損失的繩子長度 = $(2d\pi)*2=4d\pi$ 。

為了驗證上面的假設是否成立，我們用了四種不同材質的圓繩來做實驗，透過多次實際測量來驗證公式的可靠程度。實驗的數據、測量、和計算的結果如表一所示：

表一 不同材質圓繩測量值與計算值的誤差

繩子種類	纏繞圓 直徑 2d	繩子原來 的長度	用公式算 出的繩長	實際測量 出的長度	誤差量	誤差 百分比
	0.9	51.2	45.5	46.1	0.6	1.3%
	0.4	83.1	80.5	79.8	-0.7	-0.8%
	0.5	34.0	30.8	31.2	0.4	1.3%
	0.6	278.5	274.7	272.9	1.8	0.7%

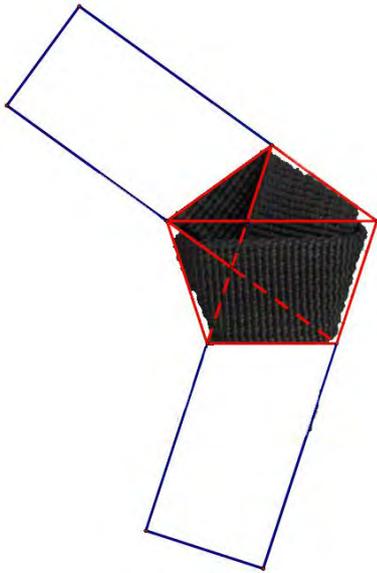
為了讓測量的誤差有效的降低，我們採用多次測量求平均值的方法來進行估算。從表 1 可以得知，所有的誤差部分皆在 5% 以下。如果再考量到實際測量所產生的誤差，我們所推論的公式應該是可以被接受的！

二、 單結的結構(扁平繩)

研究團隊找到了圓繩單結的估算公式之後，接下來要探究的是扁平繩單結。一開始，我們想把圓繩的研究結果套用在扁平繩上面，所以花了一些時間在猜測扁平繩該如何定義纏繞圓的半徑？如何修改圓繩單結的公式？…等等。後來發現，扁平繩單結並沒有辦法找到對應於圓繩直徑的長度，於是我們決定重新開始尋找規則。當我們實際動手製作扁平繩單結時發現，扁平繩單結在未拉緊時，纏繞處竟然會形成令人驚喜的熟悉形狀-----類似正五邊形的結構。



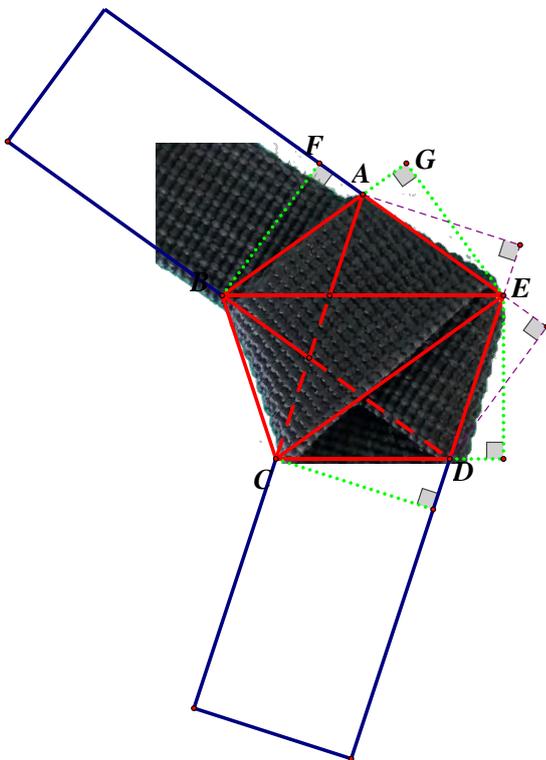
圖 5-3 扁平繩單結在纏繞處的結構



團隊的女生一眼就看出，纏繞處形成的圖形結構，和他們摺紙星星時所產生的形狀相同。研究團隊很高興發現了這個現象，雖然我們都知道摺紙會形成五邊形這個現象，卻沒有想到單結也能和摺紙星星產生關連，更不用說去了解它背後的原理。底下我們嘗試運用了平日數學課所學的方法以及邏輯證明概念，證明扁平繩子在未拉緊前，纏繞處形成的圖形是正五邊形。

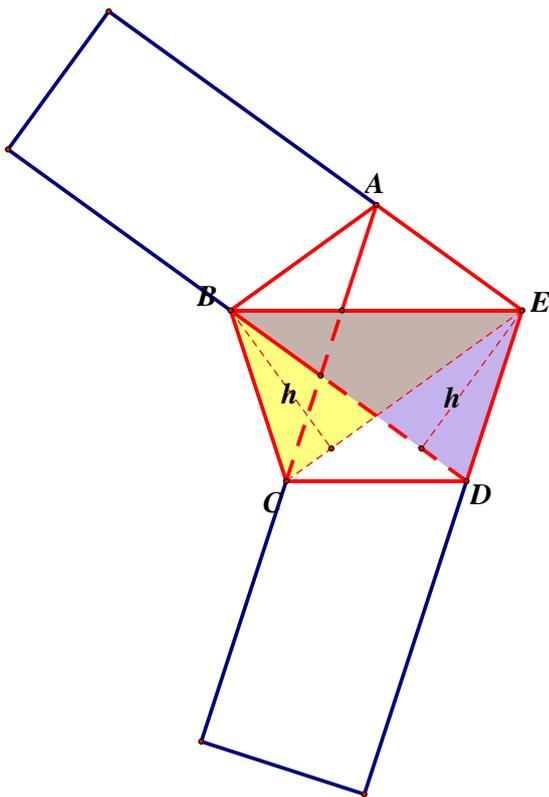
圖 5-4 扁平繩單結與正五邊形

(一)、證明纏繞處的圖形為正五邊形



\because 繩子是等寬的
 $\therefore \overline{BF} = \overline{EG} = h$ (繩寬)
 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle AEG$ 中
 $\angle AFB = \angle AGE = 90^\circ$
 $\angle BAF = \angle EAG$ (對頂角)
 $\overline{BF} = \overline{EG} = h$
 $\therefore \triangle ABF \cong \triangle AEG$
 故 $\overline{BA} = \overline{AE}$
 同理可以證出
 $\overline{BA} = \overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DC} \dots \dots (1)$

圖 5-5 扁平繩單結纏繞處為正五邊形證明 1



在梯形BCDE中(同一繩子上下兩邊平行)

$$\therefore \triangle BCE = \triangle BDE$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \overline{CE} \times h = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times h$$

$$\text{故 } \overline{CE} = \overline{BD}$$

$\Rightarrow BCDE$ 為等腰梯形

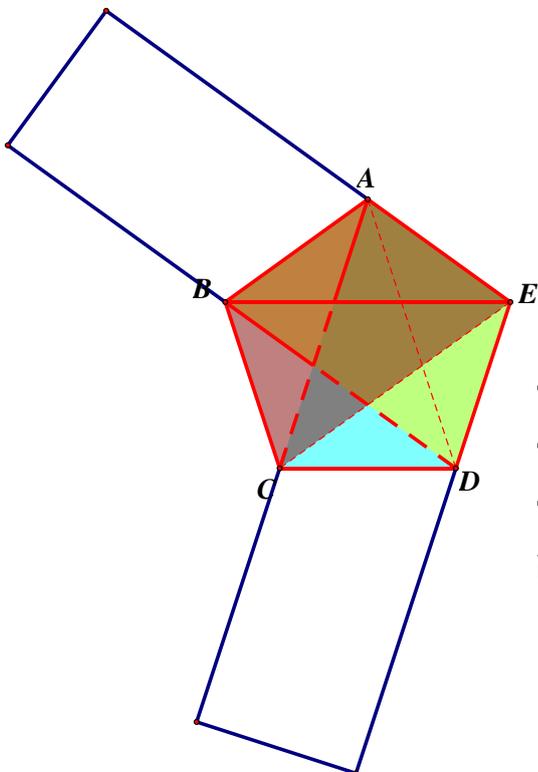
$$\text{即 } \overline{CB} = \overline{ED} \dots \dots \dots (2)$$

由(1)(2)可知

五邊形 $ABCDE$

$$\overline{BA} = \overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DC} = \overline{CB} \dots \dots \dots (*)$$

圖 5-6 扁平繩單結纏繞處為正五邊形證明 2



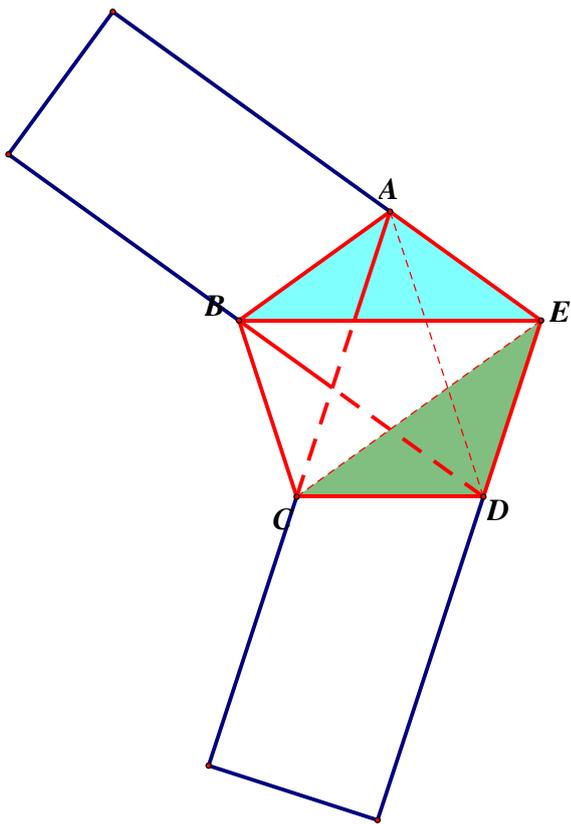
$$\therefore ABDE \text{ 是等腰梯形 } \Rightarrow \angle A = \angle E$$

$$\therefore AECD \text{ 是等腰梯形 } \Rightarrow \angle E = \angle D$$

$$\therefore BCDE \text{ 是等腰梯形 } \Rightarrow \angle D = \angle C$$

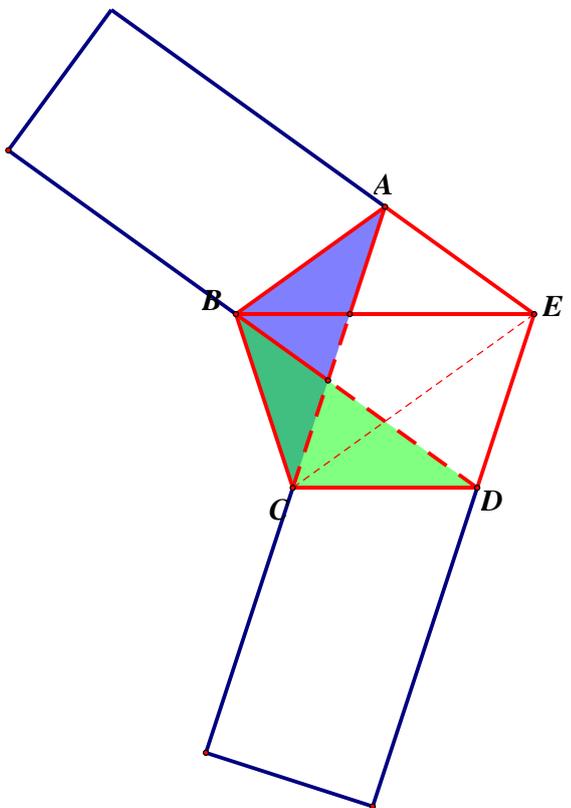
$$\text{故 } \angle A = \angle C = \angle D = \angle E \dots \dots \dots (3)$$

圖 5-7 扁平繩單結纏繞處為正五邊形證明 3



在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 中
 $\angle BAE = \angle CDE$
 $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{CD} = \overline{DE}$
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDE$
 故 $\overline{BE} = \overline{CE}$
 又 $ABCE$ 、 $BCDE$ 為等腰梯形
 $\Rightarrow \overline{BE} = \overline{AC}$ 、 $\overline{CE} = \overline{BD}$
 $\therefore \overline{AC} = \overline{BD}$

圖 5-8 扁平繩單結纏繞處為正五邊形證明 4



在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 中
 $\overline{AB} = \overline{CD}$
 $\overline{BC} = \overline{BC}$
 $\overline{AC} = \overline{BD}$
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBC$
 故 $\angle B = \angle C$(4)
 由(3)(4)可知
 五邊形 $ABCDE$
 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$(**)
 由(**)(**)可知
 五邊形 $ABCDE$ 為正五邊形

圖 5-9 扁平繩單結纏繞處為正五邊形證明 5

(二)、扁平繩在纏繞處縮短的長度

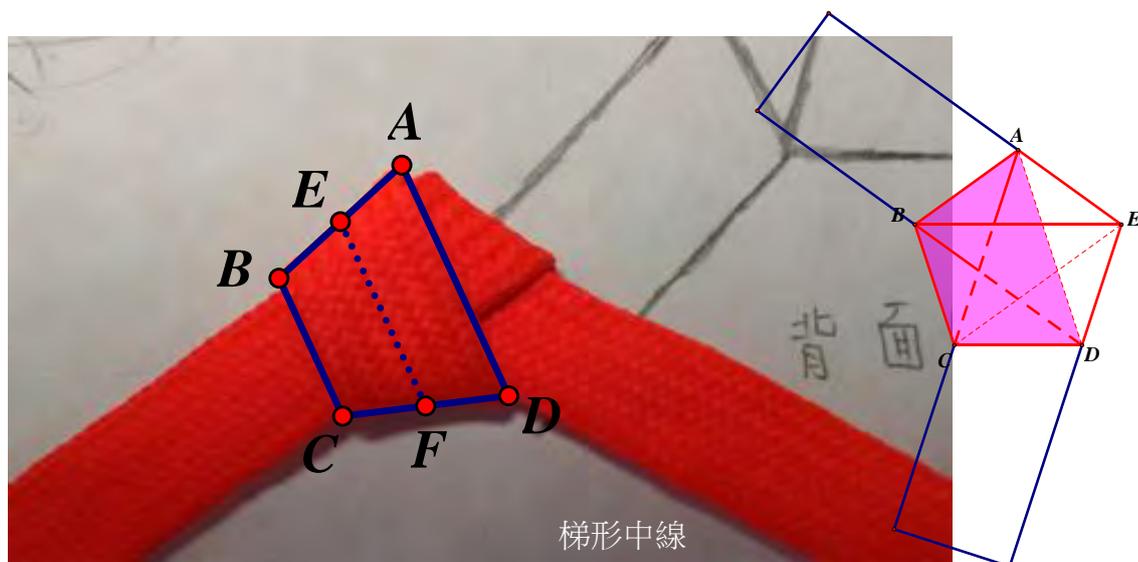


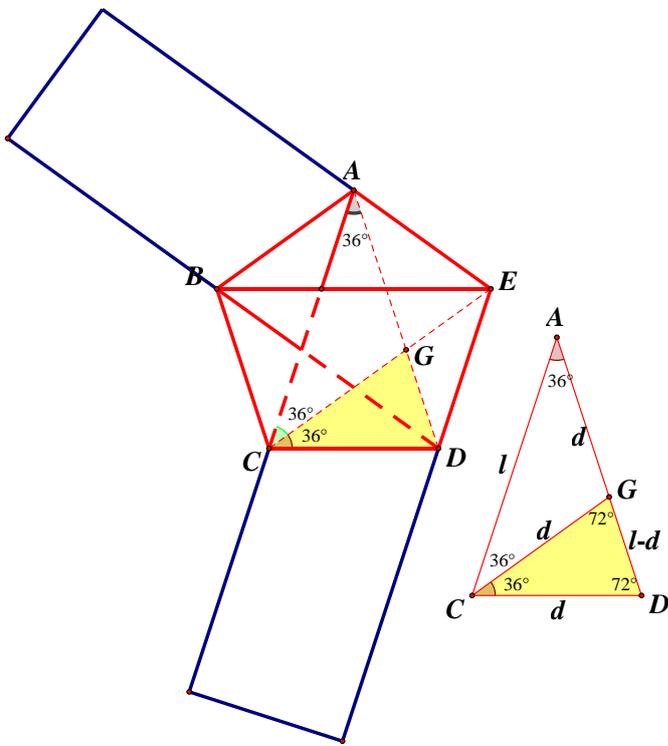
圖 5-10 扁平繩單結在纏繞處損失的長度

確認了扁平繩子在纏繞處所形成的圖形確實是正五邊形之後，我們開始探究這時繩子所損失的長度該如何表示？

從圖 5-10 中發現到，扁平繩的單結在纏繞處部分，正反兩面的結構是相同的，主要是四個等腰梯形的纏繞構造。考量到其中 2 個梯形是繩子的長度，因此在纏繞處繩子縮短的部分應該是正反 2 個等腰梯形的長度。

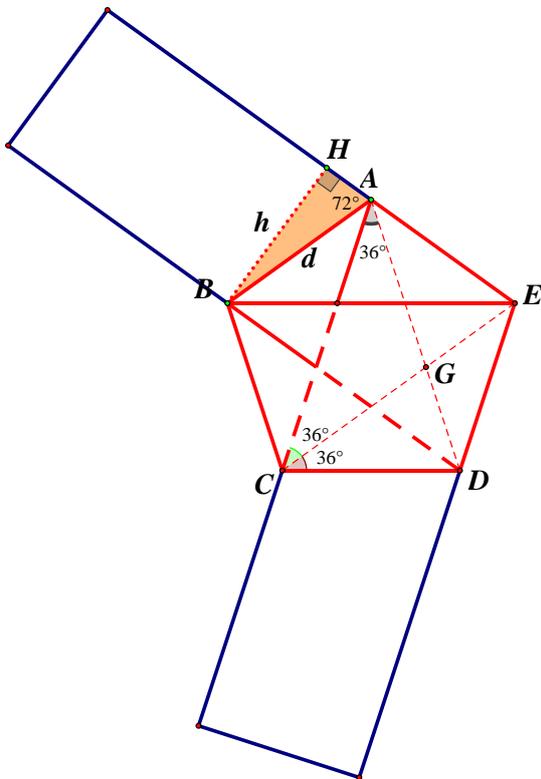
如果用梯形中線 \overline{EF} 的長度來代表梯形的長度，那麼扁平繩子在纏繞處部分縮短的長度為 $2 \times \overline{EF}$ 。

實驗來到了這裡，原本研究團隊認為只能透過測量的方式來計算縮短的繩長。然而和老師討論過後，老師說：其實可以透過正五邊形中相似三角形的性質，找出梯形上、下底之間的比例；如果再引入三角函數的基本概念，就可以找出梯形中線 \overline{EF} 和繩子寬度 h 之間的關係式！這樣一來，要計算扁平繩單結在纏繞處縮短的長度，就只要測量繩子的寬度就可以了，也可以降低實驗過程中的誤差。底下是一些更進一步的計算、發現和研究的結果。



在正五邊形 $ABCDE$ 中，所有對角線等長
 $\therefore \overline{AC} = \overline{BD} = \overline{CE} = \overline{DA} = \overline{EB}$
 在 $\triangle ACD$ 中，設 $\overline{AC} = \overline{AD} = l$ ， $\overline{CD} = d$
 則 $\overline{AG} = \overline{CG} = \overline{CD} = d$ $\overline{DG} = l - d$
 $\therefore \triangle ACD \sim \triangle CDG$
 $\therefore \frac{d}{l} = \frac{l-d}{d}$
 $\Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{l}{d} - \frac{d}{d}$
 即 $\frac{d}{l} = \frac{l}{d} - 1$
 令 $\frac{l}{d} = x$ ，則
 $\frac{1}{x} = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$
 $\frac{l}{d} = x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (負不合)

圖 5-11 正五邊形對角線和邊長的關係



作 $\overline{BH} \perp \overline{AE}$ 於 H 點，設 $\overline{BH} = h$
 在直角 $\triangle ABH$ 中
 $\therefore \angle BAH = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
 $\therefore \frac{h}{d} = \sin 72^\circ$
 $\Rightarrow d = \frac{h}{\sin 72^\circ} = h \times \csc 72^\circ$

圖 5-12 扁平繩單結在纏繞處形成的正五邊形的邊長和繩寬的關係

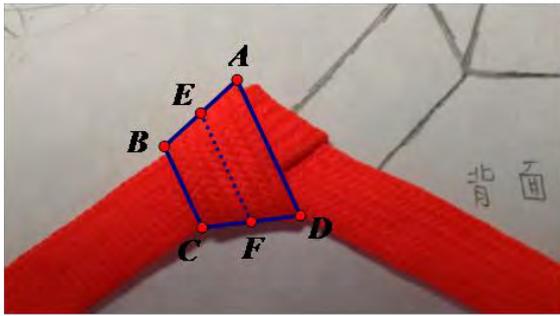


圖 5-13 扁平繩單結在纏繞處損失長度和繩寬的公式

由上面的證明

$$\begin{aligned} \therefore \frac{l}{d} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad d = h \times \csc 72^\circ \\ \therefore \overline{EF} &= \frac{l+d}{2} = \frac{1}{2} \times d \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(3+\sqrt{5}) \times d}{4} \\ &= \frac{(3+\sqrt{5}) \times h}{4} \times \csc 72^\circ \end{aligned}$$

1. 除此之外，研究團隊發現扁平繩子在摺疊處會產生包覆的現象，如圖 5-14。也就是說，扁平繩的單結，在纏繞處所形成的其實是一個立體的結構。因此，扁平繩子在摺疊處所包覆的繩子厚度應該也要列入繩子所損失的長度中。



圖 5-14 扁平繩在纏繞處的立體結構

2. 將扁平繩子的單結，在纏繞處所形成的正五邊形進行 1~5 的編號，如圖 5-15。檢視這正五邊形後發現，正五邊形的結構在 2、4 這二個邊並沒有產生摺疊的動作，因此不需要修正厚度誤差；然而，正五邊形結構在 1、3、5 這三個邊都有包覆的現象的產生。



圖 5-15 扁平繩單結每一邊的包覆現象

3. 將扁平繩子的單結稍微鬆開後，可以清楚的看到：扁平繩在編號 1 這個邊的折疊動作，讓它包覆了黃色這一段繩子(1 倍厚度)；扁平繩在編號 3 這個邊的折疊動作，讓它包覆了黃色和藍色這二段繩子(2 倍厚度)；扁平繩在編號 5 這個邊的折疊動作，讓它包覆了藍色這一段繩子(1 倍厚度)。因此，扁平繩子單結在摺疊處的包覆現象共產生 4 倍繩子厚度的長度損失。



圖 5-16 扁平繩單結的包覆厚度分析

綜合以上的討論，

設扁平繩的寬度為 h ，厚度為 k ，則打一個單結時所損失繩子的長度為：

$$2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)\csc 72^\circ \times h + 4k$$
$$= 2.753h + 4k$$



圖 5-17 扁平繩單結拉緊後在纏繞處產生的現象

此外，研究團隊發現，當我們將扁平繩子拉緊之後，纏繞處的四個梯形結構中，其中兩個梯形會被拉緊而縮到另兩個梯形的下方；還有，拉緊後纏繞處的繩子會產生摺疊的現象，但是梯形原本的結構並沒有太大的變化。只是，此時正五邊形中，有三個邊的邊長似乎隨著繩子的摺疊，寬度變成原來的 $\frac{1}{2}$ 。

得到了繩子縮短的公式之後，我們將公式套用在扁平繩子上進行實驗。為了驗證上面推導、歸納的數學公式是否成立？我們用橘色、黑色二條不同寬度的扁平繩來進行實際操作。透過實際測量和公式計算，求出兩者之間的誤差大小，再計算誤差的百分比。表二是實驗的實際測量數據和所計算出來的結果。

橘色繩子原來長度為 192.3，黑色繩子原來長度為 101.0。

表 二 不同材質扁平繩測量值與計算值的誤差

繩子種類	繩子寬度	繩子厚度	用公式算出的繩長	實際測量出的長度	誤差量	誤差百分比
	1.1 (未拉緊)	0.14	188.7	188.2	0.5	0.3%
	0.55 (拉緊)	0.14	190.2	189.3	0.9	0.5%
	1.8 (未拉緊)	0.18	95.3	94.9	-0.4	-0.4%
	0.9 (拉緊)	0.18	97.8	97.5	-0.3	-0.3%

三、 不同繩結產生的現象

處理完單結的性質之後，我們想把這些性質直接應用到其他的繩結上使用。然而，經過實驗後發現，不同的繩結製作方法、產生的結構和單結不一樣，無法直接套用單結的規則，研究團隊認為必須對之前的發現做一些檢視和修正！

以圓形繩子的單結來說，再一次重新檢視單結的組成之後，我們發現之所以在纏繞處會產生圓形節點的現象，主要取決於 2 個動作，如圖 5-18。



圖 5-18 繩結的基本組成方式

(一) 繞：當繩子繞過其他繩子一圈時，在被纏繞的繩子上會形成圓形的節點。

1. 當繩子繞過另一段繩子一圈時，這時所損失的繩子長度為 $2d\pi$ 。



圖 5-19 繞另外一段繩子

2. 當繩子繞過另外二段繩子一圈時，這時所損失的繩子長度為 $3d\pi$ 。



圖 5-20 繞另外兩段繩子

3. 當繩子繞過另外三段繩子一圈時，這時所損失的繩子長度為 $4d\pi$ 。



圖 5-21 繞另外三段繩子

、
、
、
、
、
、
、

4. 當繩子繞過另外的 n 段繩子一圈時，這時所損失的繩子長度為 $(n+1)d\pi$ 。

(二) 穿：當繩子穿過一個繩圈拉出時，這繩圈被拉緊時也會形成圓形的節點。

1. 當打結的動作中出現”**穿**”的動作時，這時所損失的繩子長度為 $2d\pi$ 。



圖 5-22 穿過繩圈

(三) 接下來要驗證這裡的公式，也可以應用在前面的單結上。仔細檢視打單結時的動作，其過程中會出現一個繞另一段繩子一圈的動作和一個穿的動作；按照此處的規則計算，此時損失的繩長應該 = $2d\pi + 2d\pi = 4d\pi$ 。這數值和之前發現的結果相符合。因此，此處的計算規則可以用來解釋和計算，打單結時繩子縮短的長度！

底下我們針對八字結、平結、接繩結這三個繩結的打結過程進行探討，看看這些打繩結的動作中，包含了多少個繞和穿的動作。再利用修正後的規則計算出損失的長度，最後透過實際測量的數據來進行驗證。

1. **八字結**：有兩個繞的動作、一個穿的動作。

損失的繩長： $2*2d\pi + 2d\pi = 6d\pi$

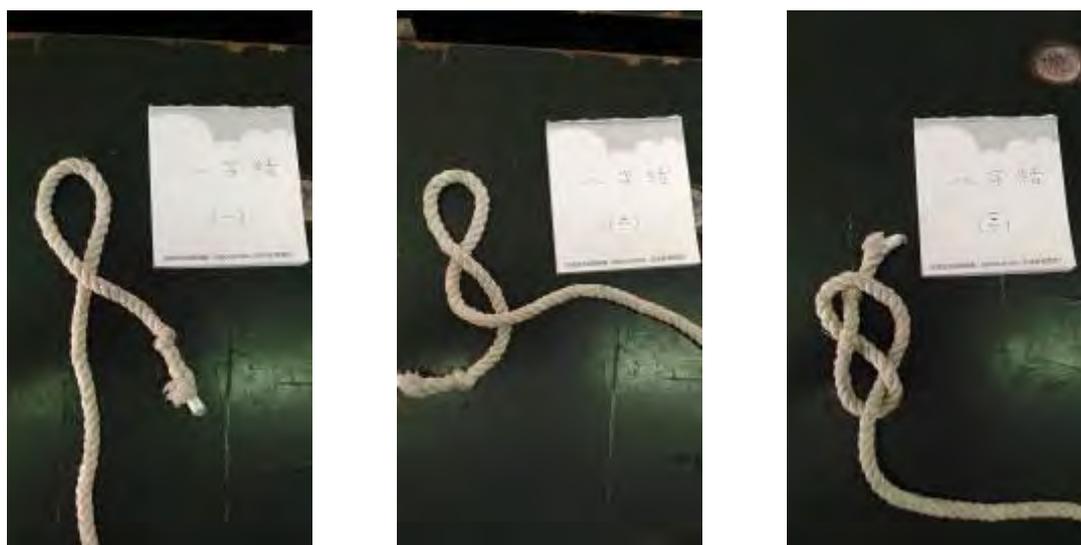


圖 5- 23 八字結的組成和結構

2. **平結**：有三個繞的動作、兩個穿的動作。

損失的繩長： $3*2d\pi + 2*2d\pi = 10d\pi$



圖 5- 24 平結的組成和結構

3. 接繩結：有一個繞的動作、二個穿的動作。其中這個繞的動作中，被纏繞的繩子有兩條，因此這次繞的動作所損失的繩子長度為 $3d\pi$ ；而二個穿的動作損失繩長為 $4d\pi$ 。整體來看，結繩結損失的繩子長度為： $3d\pi + 4d\pi = 7d\pi$



圖 5-25 接繩結的組成和結構

我們把新的結論運用在八字結、平結、以及接繩結上面，然後透過實際測量來驗證公式，得到表三的結果：

表 三 不同材質圓繩在不同種類繩結的測量值與計算值誤差

繩子種類	2d	繩子原來的長度	用公式算出的繩長	實際測量出的長度	誤差量	誤差百分比
八字結(童軍繩)	0.6	278.5	272.8	271.5	1.3	0.5%
八字結(小圓繩)	0.9	51.2	42.7	42.9	-0.2	-0.5%
平結(童軍繩)	0.6	278.5	269.1	274.0	-4.9	-1.8%
平結(小圓繩)	0.9	51.2	37.1	37.9	0.8	2.1%
接繩結(童軍繩)	0.6	278.5	271.9	269.1	2.8	1.0%
接繩結(小圓繩)	0.9	51.2	41.3	40.8	0.5	1.2%

陸、討論

一、對於利用公式所計算出來的繩子長度與實際測量值之間的誤差，研究團隊經過討論之後，認為誤差可能出現的原因有：

(一)、圓繩的部分：

繩子的材質、繩子的彈性、繩結的鬆緊度、打繩結時施力的大小這些變因都會導致測量時產生誤差。

(二)、扁平繩的部分：

扁平繩子拉緊之後，纏繞處的繩子會產生摺疊的現象，如圖 6-1。而且正五邊形會有一定的變形，直接套用公式會有誤差產生。



圖 6-1 扁平繩單結拉緊後纏繞處的變形

二、扁平繩運用在其他繩結部份的研究：隨著繩結的不同，打繩結的動作變多，這使的扁平繩在纏繞處形成的幾何結構變的複雜，研究團隊並未能找到可以適用於扁平繩的一般化計算公式。因此，如何對扁平繩的這部分進行更進一步的推導，應該是未來可以深入研究的地方。

柒、結論

透過一系列的觀察和實驗過程，我們終於完成了預定的目標。實際進行打結操作時，發現造成繩子會縮短長度的主要因素是在纏繞處的摺疊和包覆現象。另外，繩子材質、繩子的彈性、繩結的種類、繩結在纏繞處的鬆緊度…等因素也會對長度的縮短造成影響。

如果我們將研究問題聚焦在如何計算這個損失的長度？研究團隊發現：使用圓繩來打單結時，纏繞處會形成互相纏繞的圓形結構，此時繩子長度縮減的計算會和圓的周長產生連結。如果使用扁平繩來打單結時，纏繞處會形成正五邊形的結構，此時繩子長度縮減的計算會和扁平繩的繩寬與厚度產生關連。

另外，仔細研究繩結的組成方式後發現，繞和穿這兩個動作是完成一個繩結的基本操作。透過這樣的發現，我們可以將圓繩的研究結果延伸到不同種類的繩結上面。

底下是研究團隊所發現的一些有趣的數學性質！

一、 圓繩單結中繩子縮短的因素與計算公式：

如果圓繩的直徑長 = d ，那麼纏繞點的圓，其直徑應該等於 $2d$ 。也就是說，打單結所損失的繩子長度 = $(2d\pi)*2 = 4d\pi$ 。

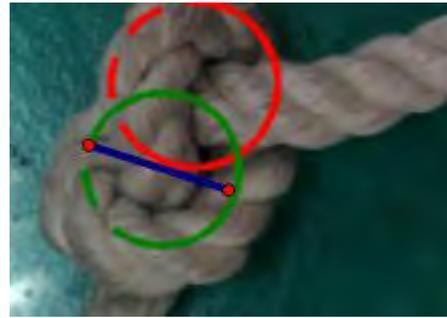


圖 7-1 圓形單結中繩子縮短的因素

二、 扁平繩單結在纏繞處的結構：

扁平繩子在未拉緊前，纏繞處會形成的圖形是正五邊形，而且這個正五邊形的對角線和邊長的比值為黃金分割率。

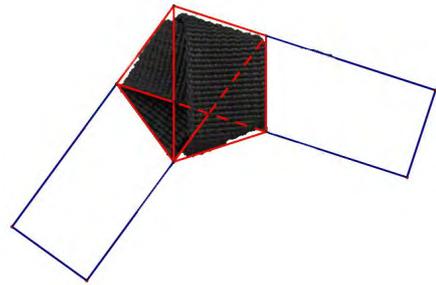
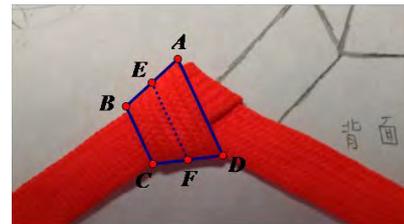


圖 7-2 扁平繩單結的結構

三、 扁平繩單結中繩子縮短的因素與計算公式：

如果用 \overline{EF} 的長度來代表梯形的長度， h 代表扁平繩子的寬度。那麼，扁平繩子在纏繞處部分縮短的長度為 $2 \times \overline{EF}$ 。



$$\therefore \overline{EF} = \frac{(3 + \sqrt{5}) \times h}{4} \times \csc 72^\circ$$

圖 7-3 扁平繩單結中繩子縮短的計算公式

設扁平繩的寬度為 h ，厚度為 k ，則打一個單節時所損失繩子的長度為：

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4} \right) \csc 72^\circ \times h + 4k \\ & = \underline{2.753h + 4k} \end{aligned}$$



圖 7-4 纏繞處的厚度修正

四、 繩結的基本組成方式(圓繩)：

研究後發現，圓繩在纏繞處會產生圓形節點的現象，主要取決於下面兩個打結的基本動作：

(一)繞：當繩子繞過另外一段繩子時，會形成圓形的結構。

(二)穿：當繩子穿過一個繩圈並拉出時，這繩圈被拉緊時也會形成圓形的結構。



換句話說，使用圓繩打繩結時，長度縮短的計算公式為：

當打結的動作出現繞的動作，而且繩子是繞過另外的 n 段繩子一圈時，這時所損失的繩子長度為

$$(n+1)d\pi$$

當打結的動作出現穿的動作時，這時所損失的繩子長度為 $2d\pi$ 。

圖 7-5 繩結的基本組成方式

捌、參考資料

- 一、 康軒文教事業(2016)。《國中數學課本第三冊》。台北市：作者。
- 二、 康軒文教事業(2016)。《國中數學課本第四冊》。台北市：作者。
- 三、 康軒文教事業(2016)。《國中數學課本第五冊》。台北市：作者。

【評語】 030420

探討在給定的繩子上打結，對繩子的長度產生的影響。針對一般的圓繩、扁平繩對不同繩結的長度變化作了分析。一個非常具有實用性的問題。從隨處可見的生活現象出發，把問題轉換成數學問題並試著解答，想法很好，值得嘉許。如果能更深入考慮各種情形，將使得整個作品內容更豐富。

摘要

本研究主要在探討打繩結時，繩子會縮短多少長度的問題。我們透過繩結在纏繞處的結構，來探究打繩結時繩子長度會縮減的原因，以及找出能計算繩子長度會縮減多少的公式。研究過程中發現，圓繩和扁平繩的單結，在纏繞處分別會產生纏繞圓和正五邊形的結構，我們藉此找到了估算繩子損失長度的數學公式。最後再將圓繩在打結處會如何縮短長度的數學性質，應用到其他不同的繩結上，完成了圓繩可以在其他繩結上估算損失長度的公式。

壹、研究動機

觀察一：原本一樣長



觀察二：打繩結後變短



觀察三：剩餘處太短，無法再打一個繩結



問題一：是否能利用繩結上產生的結構，探究長度的損失

問題二：能否找到一個方法，估算打繩結時所損失的長度

貳、研究目的

- 一. 找出構成繩結的基本組合方式
- 二. 探究打繩結時，造成繩子縮短的原因
- 三. 找出打繩結時，能夠算出繩子縮短的公式

參、研究設備及器材

- 一. 圓繩(童軍繩...)
- 二. 扁繩(鞋帶...)
- 三. 紙
- 四. 筆
- 五. 尺
- 六. 計算機
- 七. 電腦



伍、研究結果

一、單結：圓繩

(一) 圓繩單結的結構



纏繞

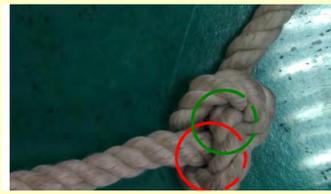


穿

(二) 造成圓繩縮短的原因



圓的結構
兩個圓周長



繩子直徑d
纏繞圓直徑
 $D=2d$

(三) 圓繩縮短的預測公式

$$\text{一個單結所損失的繩子長度} = (2d\pi) \times 2 = 4d\pi$$

(四) 實測驗證

繩子種類				
纏繞圓直徑(2d)	0.9	0.4	0.5	0.6
繩子原來的長度	51.2	83.1	34.0	278.5
用公式算出的繩長	45.5	80.5	30.8	274.7
實際測量出的長度	46.1	79.8	31.2	272.9
誤差量	0.6	-0.7	0.4	-1.8
誤差百分比	1.3%	-0.8%	1.3%	-0.7%

肆、研究架構

心有千千結

單結

其它繩結

圓繩

扁繩

繞、穿

圓周長

正五邊形

計算繞穿

實測驗證

實測驗證

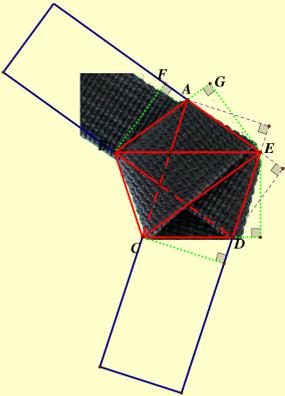
實測驗證

二、單結：扁繩

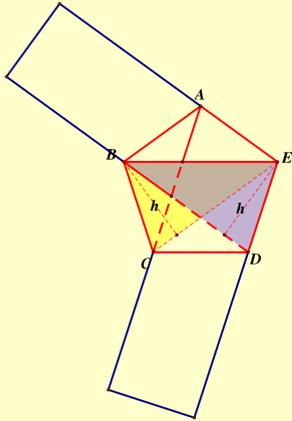
(一) 扁繩單結的結構：正五邊形



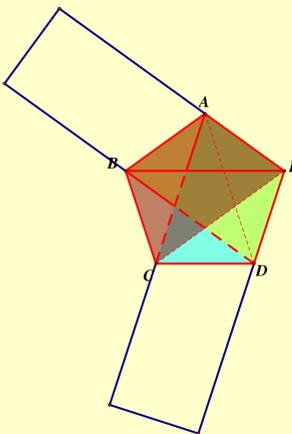
(二) 證明纏繞處的圖形為正五邊形



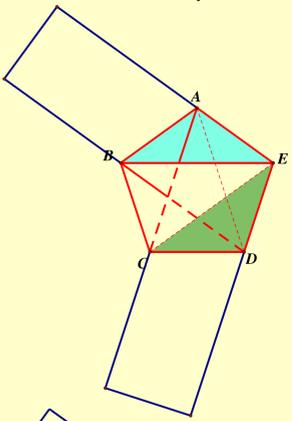
∵ 繩子是等寬的
 ∴ $\overline{BF} = \overline{EG} = h$ (繩寬)
 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle AEG$ 中
 $\angle AFB = \angle AGE = 90^\circ$
 $\angle BAF = \angle EAG$ (對頂角)
 $\overline{BF} = \overline{EG} = h$
 ∴ $\triangle ABF \cong \triangle AEG$
 故 $\overline{BA} = \overline{AE}$
 同理可以證出
 $\overline{BA} = \overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DC} \dots \dots (1)$



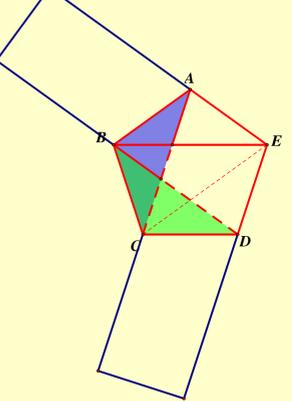
在梯形 $BCDE$ 中 (同一繩子上下兩邊平行)
 ∴ $\triangle BCE \cong \triangle BDE$
 $\therefore \frac{1}{2} \times \overline{CE} \times h = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times h$
 故 $\overline{CE} = \overline{BD}$
 $\Rightarrow BCDE$ 為等腰梯形
 即 $\overline{CB} = \overline{ED} \dots \dots (2)$
 由(1)(2)可知
 五邊形 $ABCDE$
 $\overline{BA} = \overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DC} = \overline{CB} \dots \dots (*)$



∵ $ABDE$ 是等腰梯形 $\Rightarrow \angle A = \angle E$
 ∵ $AEDC$ 是等腰梯形 $\Rightarrow \angle E = \angle D$
 ∵ $BCDE$ 是等腰梯形 $\Rightarrow \angle D = \angle C$
 故 $\angle A = \angle C = \angle D = \angle E \dots \dots (3)$

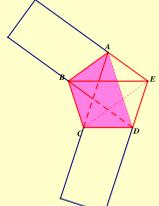
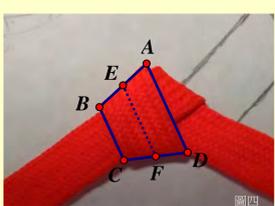


在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 中
 $\angle BAE = \angle CDE$
 $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{CD} = \overline{DE}$
 ∴ $\triangle ABE \cong \triangle CDE$
 故 $\overline{BE} = \overline{CE}$
 又 $ABCE, BCDE$ 為等腰梯形
 $\Rightarrow \overline{BE} = \overline{AC}, \overline{CE} = \overline{BD}$
 ∴ $\overline{AC} = \overline{BD}$

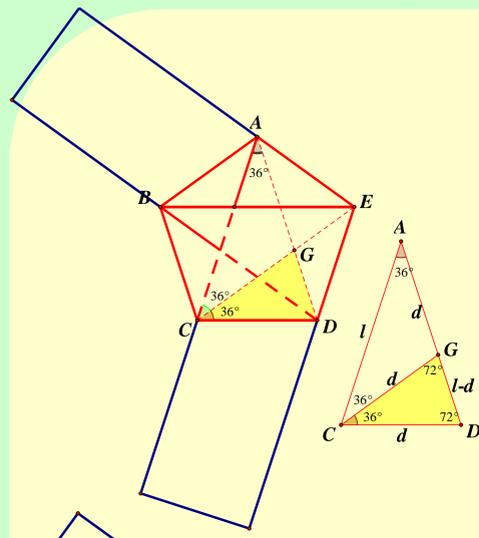


在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDC$ 中
 $\overline{AB} = \overline{CD}$
 $\overline{BC} = \overline{BC}$
 $\overline{AC} = \overline{BD}$
 ∴ $\triangle ABC \cong \triangle BDC$
 故 $\angle B = \angle C \dots \dots (4)$
 由(3)(4)可知
 五邊形 $ABCDE$
 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E \dots \dots (**)$
 由(*)(**)可知
 五邊形 $ABCDE$ 為正五邊形

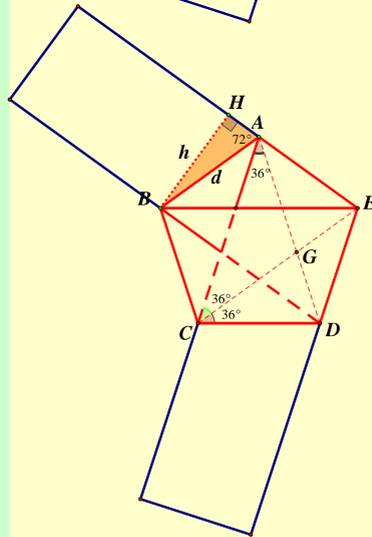
(三) 計算扁平繩在纏繞處縮短的長度



纏繞處部分縮短的長度為 $2EF$



在正五邊形 $ABCDE$ 中，所有對角線等長
 $\therefore \overline{AC} = \overline{BD} = \overline{CE} = \overline{DA} = \overline{EB}$
 在 $\triangle ACD$ 中，設 $\overline{AC} = \overline{AD} = l, \overline{CD} = d$
 則 $\overline{AG} = \overline{CG} = \overline{GD} = d, \overline{DG} = l - d$
 $\therefore \triangle ACD \sim \triangle CDG$
 $\therefore \frac{d}{l} = \frac{l-d}{d}$
 $\Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{l}{d} - \frac{d}{d}$
 即 $\frac{d}{l} = \frac{l}{d} - 1$
 令 $\frac{l}{d} = x$ ，則
 $\frac{1}{x} = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$
 $\frac{l}{d} = x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (負不合)



作 $\overline{BH} \perp \overline{AE}$ 於 H 點，設 $\overline{BH} = h$
 在直角 $\triangle ABH$ 中
 $\therefore \angle BAH = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
 $\therefore \frac{h}{d} = \sin 72^\circ$
 $\Rightarrow d = \frac{h}{\sin 72^\circ} = h \times \csc 72^\circ$



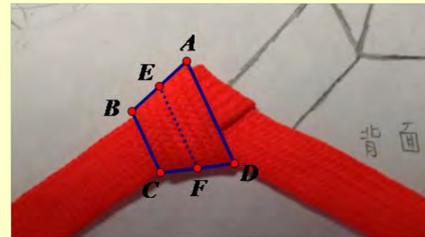
由上面的證明

$$\therefore \frac{l}{d} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, d = h \times \csc 72^\circ$$

$$\therefore \overline{EF} = \frac{l+d}{2} = \frac{1}{2} \times d \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \right)$$

$$= \frac{(3 + \sqrt{5}) \times d}{4}$$

$$= \frac{(3 + \sqrt{5}) \times h}{4} \times \csc 72^\circ$$



編號1：包1層
 編號3：包2層
 編號5：包1層

(四) 扁平繩縮短的預測公式

設扁平繩的寬度為 h ，厚度為 k ，則扁平繩打一個單結時所損失繩子的長度為：

$$2 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4} \right) \csc 72^\circ \times h + 4k$$

$$= 2.753h + 4k$$



扁平繩子拉緊會產生摺疊的現象，正五邊形中，有三個邊的的邊長似乎隨著繩子的摺疊，寬度變成原來的 $1/2$

(五) 實測驗證

繩子種類				
繩子寬度	1.1 (未拉緊)	0.55 (拉緊)	1.8 (未拉緊)	0.9 (拉緊)
繩子厚度	0.14	0.14	0.18	0.18
繩子原來的長度	192.3	192.3	101.0	101.0
用公式算出的繩長	188.7	190.2	95.3	97.8
實際測量出的長度	188.2	189.3	94.9	97.5
誤差量	-0.5	-0.9	-0.4	-0.3
誤差百分比	-0.3%	-0.5%	-0.4%	-0.3%

三、不同繩結產生的現象(圓繩)

(一) 繩結的結構與縮短公式

結構	繞			穿
	一段	二段	三段	
圖示				
損失的繩子長度	$2d\pi$	$3d\pi$	$4d\pi$	$2d\pi$
	$(n+1)d\pi$			

(二) 單結與其他繩結的結構及公式

繩結種類	單結	八字結	平結	接繩結
圖示				
結構	1繞 1穿	2繞 1穿	3繞 2穿	1繞(二段) 2穿
公式	$4d\pi$	$6d\pi$	$10d\pi$	$7d\pi$

(三) 實測驗證

繩子	童軍繩			小圓繩		
	八字結	平結	接繩結	八字結	平結	接繩結
d	0.3			0.45		
繩子原來的長度	278.5			51.2		
用公式算出的繩長	272.8	269.1	271.9	42.7	37.1	41.3
實際測量出的長度	271.5	274.0	269.1	42.9	37.9	40.8
誤差量	-1.3	4.9	-2.8	0.2	0.8	-0.5
誤差百分比	-0.5%	1.8%	-1.0%	0.5%	2.1%	1.2%

陸、討論

一、造成誤差的原因

(一) 圓繩：

繩子的材質、繩子的彈性、繩結的鬆緊度、打繩結時施力的大小這些變因都會導致測量時產生誤差。

(二) 扁平繩：

扁平繩子拉緊之後，纏繞處的繩子會產生摺疊的現象，造成正五邊形的變形，導致套用公式時會有誤差。

二、扁平繩在其他繩結的應用

隨著繩結的不同，打繩結的動作變多，這使的扁平繩在纏繞處形成的幾何結構變的複雜，研究團隊並未能找到可以適用於扁平繩的一般化計算公式。因此，如何對扁平繩的這部分進行更進一步的推導，是未來可以深入研究的地方。

柒、結論

一、構成繩結的基本組合

研究繩結的組成方式後發現，繞和穿這兩個動作是完成一個繩結的基本操作。

二、造成繩子縮短的原因

造成繩子會縮短長度的主要因素是在纏繞處的摺疊和包覆現象。另外，繩子材質、繩子的彈性、繩結的種類、繩結在纏繞處的鬆緊度……等因素也會對長度的縮短造成影響。

三、估算繩子縮短的公式

(一) 單結：

1. 圓繩，纏繞處會形成互相纏繞的圓形結構，此時繩子長度縮減的計算會和圓的周長有關。打單結所損失的繩子長度：

$$(2d\pi) \times 2 = 4d\pi$$

2. 扁平繩，纏繞處會形成正五邊形的結構，此時繩子長度縮減的計算和扁平繩的繩寬與厚度產生關連。設扁平繩的寬度為 h ，厚度為 k ，則打一個單節所損失繩子的長度為：

$$2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right) \csc 72^\circ \times h + 4k = 2.753h + 4k$$

(二) 其他繩結：

繩結都是由繞和穿這兩個動作組成，當打結的動作出現繞的動作，而且繩子是繞過另外的 n 段繩子一圈時，損失的繩子長度為： $(n+1)d\pi$

當打結的動作出現穿的動作時，損失的繩子長度為： $2d\pi$

捌、參考文獻

1. 康軒文教事業(2016)。《國中數學課本第三冊》。台北市：作者。
2. 康軒文教事業(2016)。《國中數學課本第四冊》。台北市：作者。
3. 康軒文教事業(2016)。《國中數學課本第五冊》。台北市：作者。