中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030419

三角形邊角關係與相似形之探究

學校名稱：花蓮縣立自強國民中學

作者：	指導老師：
國一 張騰達	鄭凱文
國一 鄒政昇	陳禹翔

關鍵詞：相似三角形、反正切函數、基本對稱式

摘要

在本文中主要考慮$\theta_i = \tan^{-1}\frac{1}{i}, i \in N$這些特殊角之間的關係。本文前段主要分別利用相似三角形性質與正切函數和角公式求解一個較大角 θ_k 拆解為數個角的關係式(使用遞迴關係、迭代式、基本對稱式表示)。後段則延伸探討、驗證其相關有趣的結果、應用等，例如：$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \sum_{i=0}^{\infty}\theta_{F_{2i+1}}$，其中 F_i 為費氏數列的第 i 項、Machin formula、$\frac{3\pi}{4} = \sum_{i=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{i^2}$。在本文中，我們利用了弳度取代度度量來描述角度並且使用複數、極式、遞迴數列、矩陣、行列式…等數學工具與 GSP、excel、python 程式等軟體工具，來實作、觀察、整理、歸納、推論與驗證我們的研究。

壹、研究動機

我在升國中一年級的暑假，參加校內舉辦的數學營隊，當時談到一個角度和的問題，引起我的一些想法，首先我想知道這一個題目有沒有其它證明方法？再來，如果是不同角度的話，會有解嗎，解法又是如何？最後我想把題目延伸，如果我把角度和個數增加，希望能找到一個模式去解決這種問題。

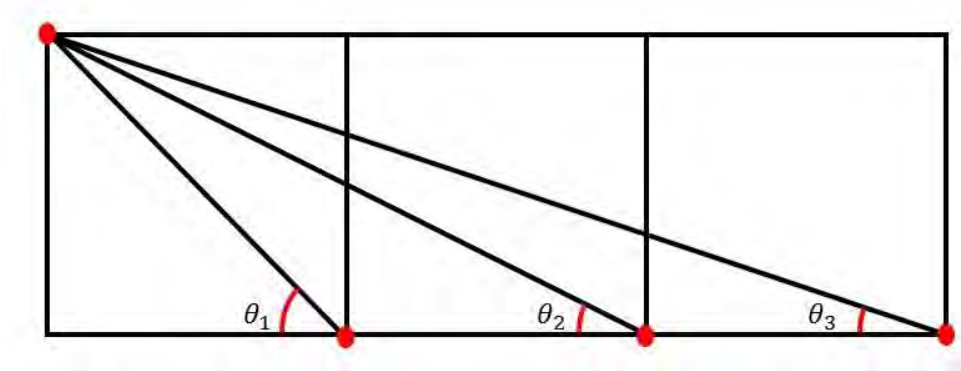


圖 一

這個題目為考慮在圖一中三個並列的正方形與其拉出來的三線段所形成的三個角θ_1、θ_2、θ_3， 其和 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=$？營隊的老師說這一題曾經出現在高中的段考試題，他要我們大膽猜測答案是多少，用眼睛睛看應該是 90 度，後來運算出答案的結果的確是 90 度，課堂上老師用一種解法給我們看，他希望我們自己回家試試看有沒有其他解，也可以用 GSP 軟體來驗證自己的答案對不對，於是我展開了我們的研究。

貳、研究目的

- 探討圖一中 $\theta_1=\theta_2+\theta_3$ 的證明與 $\theta_k=\theta_{x_1}+\theta_{x_2}$ 的解。
- 探討 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$ 與 θ_k 拆成三個角以上的情形。
- 學習相關數學知識與其它延伸討論。
- 學習並利用 GSP 幾何畫板來實作、觀察、歸納。
- 利用 excel 程式與 python 程式操作得到相關研究結果。

參、研究設備及器材

GSP、excel、國中數學教材、高中數學教材、維基百科、數學大觀念[1]等。

肆、研究過程或方法

一、探討這一題的解法有下列幾種：

(一) 用相似三角形來解題（圖 二）

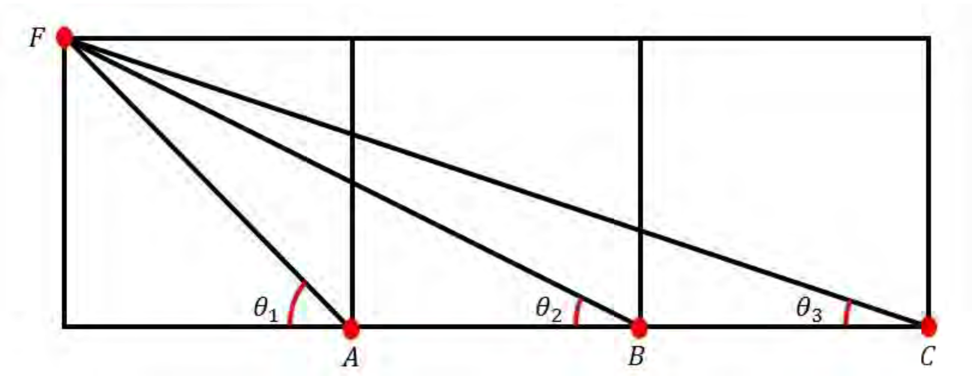


圖 二

證明過程 ：

此圖形為三個正方形組成，因此我們不失一般性假設 $\overline{AB}=1$

再透過畢氏定理將得到下列邊長：

$$\overline{AF}=\sqrt{2}、\ \overline{BF}=\sqrt{5}、\ \overline{AC}=2、\ \overline{CF}=\sqrt{10}$$

對於 △ABF 與 △AFC 的邊長比如下：

1. △ABF：$\overline{AB}:\overline{BF}:\overline{AF}=1:\sqrt{5}:\sqrt{2}$
2. △AFC：$\overline{AF}:\overline{CF}:\overline{AC}=\sqrt{2}:\sqrt{10}:2=1:\sqrt{5}:\sqrt{2}$

經由 1、2 得知 △ABF ∽△AFC（SSS）。

∴ $\theta_3=\angle$AFB與外角定理將得到$\theta_2+\theta_3=\theta_1$ 故得證 $\theta_1=\theta_2+\theta_3$。

(二) 利用輔助作圖與等腰直角三角形來解題（圖 三）

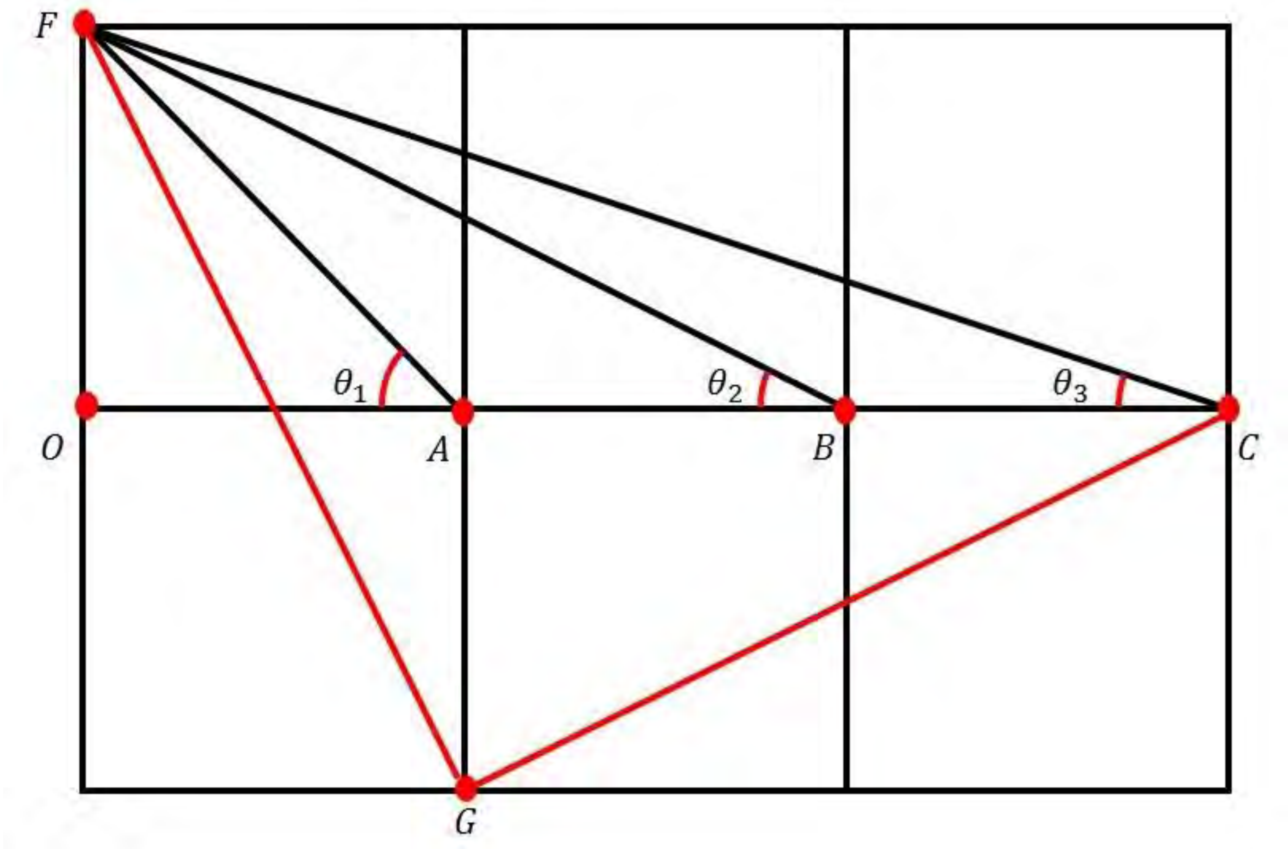


圖 三

證明過程：

先將三個正方形做延伸並連接$\overline{CG}$ 與 $\overline{FG}$ 兩直線如圖三，

此圖形皆為正方形組成，因而不失一般性假設 $\overline{AB}=1$

與畢氏定理將得到下列邊長：

$\overline{FG}=\overline{CG}=\sqrt{5}$ 與 $\overline{CF}=\sqrt{10}$

△ CFG 的邊長比為

$$\overline{FG}:\overline{CG}:\overline{CF} = \sqrt{5}:\sqrt{5}:\sqrt{10} = 1:1:\sqrt{2}$$

∴ △ CFG 為等腰直角三角形，又 △ OBF ≅△ ACG（SSS）

∴ $\theta_2 = \angle\mathrm{OBF} = \angle\mathrm{ACG}$

∴ $\theta_2+\theta_3 = \angle\mathrm{FCG} = \frac{\pi}{4}$

故得證 $\theta_1=\theta_2+\theta_3$。

(三) 引入三角函數與反三角函數

證明過程:

令 $\theta_2=\tan^{-1}\frac{1}{2}$、$\theta_3=\tan^{-1}\frac{1}{3}$

利用正切函數的和角公式 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$\tan(\theta_2+\theta_3)=\frac{\tan\theta_2+\tan\theta_3}{1-\tan\theta_2\tan\theta_3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=1$$

因為 $0<\theta_3<\theta_2<\frac{\pi}{4}$ $\therefore$ $\theta_2+\theta_3=\frac{\pi}{4}$ 故得證 $\theta_1=\theta_2+\theta_3$。

二、探討一個角為其它較小角之和: 相似三角形法

(一) 我們先討論 θ **分成兩個小角**，為了延伸相關的討論，我們證明引理 1:

引理 1: 若 $\angle\mathrm{OAF}=\theta=\tan^{-1}\frac{1}{k},\overline{\mathrm{OF}}=1,\overline{\mathrm{AB}}=m,\overline{AC}=n$且$\angle\mathrm{OAF}=\angle\mathrm{OBF}+\angle\mathrm{OCF}$ (如圖四)，則 $mn=\csc^2\theta=1+k^2$。

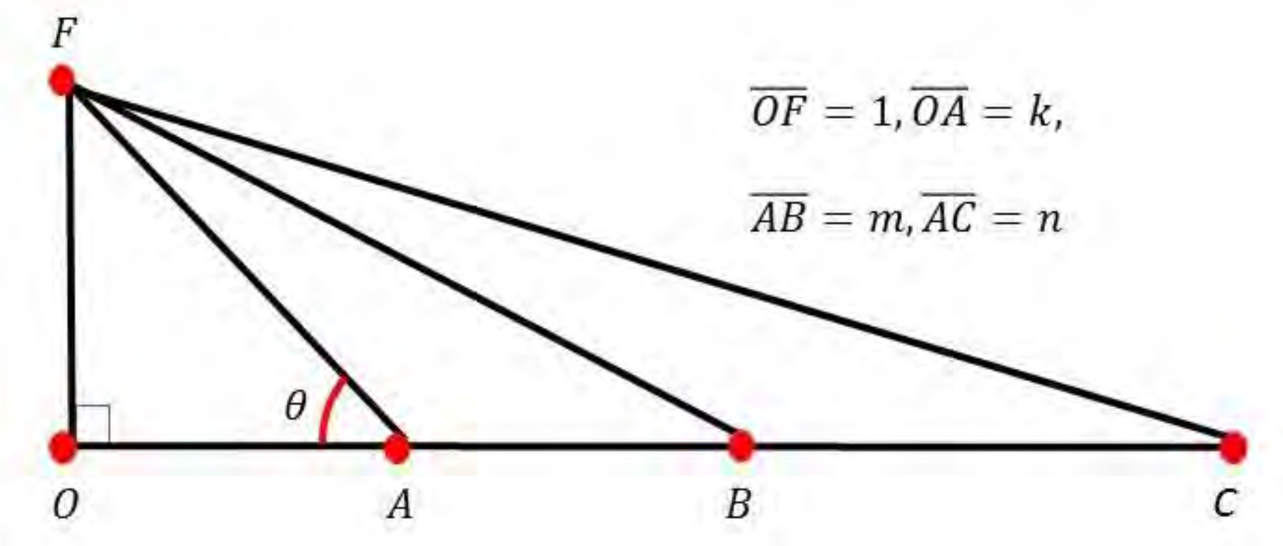


圖 四

證明過程: 若$\angle\mathrm{OAF}=\angle\mathrm{OBF}+\angle\mathrm{OCF}$，我們可以推論 $\triangle\mathrm{ABF}\backsim\triangle\mathrm{AFC}$

因此 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{AF}=\overline{\mathrm{AF}}:\overline{AC}$

也就是 $m:\csc\theta=\csc\theta:n$

或是 $m:\sqrt{1+k^2}=\sqrt{1+k^2}:n$

因此我們可以得到引理 1: $mn=\csc^2\theta=1+k^2$

註 1:雖然我們可以只考慮 $k,m,n\in N$，但事實上引理 1 是對 $k,m,n\in R^+$ 都成立的。

(二) **探討一個角分成三個角:**我們利用相似三角形的方法來處理圖五的情況

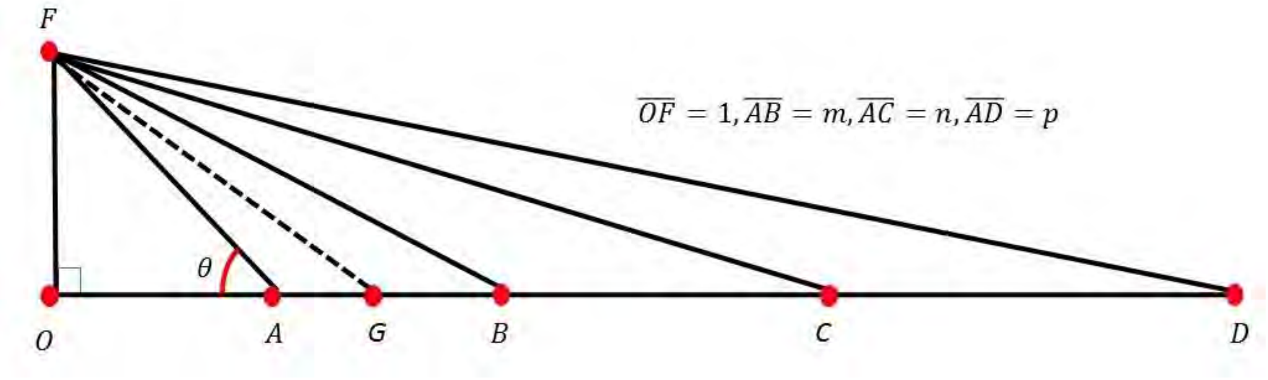


圖 五

如圖五，假設 $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{k},\overline{\mathrm{OF}}=1,\overline{\mathrm{AB}}=m,\overline{AC}=n,\overline{AD}=p$

且 $\angle\mathrm{OAF}=\angle\mathrm{OBF}+\angle\mathrm{OCF}+\angle\mathrm{ODF}$，則$mnp=\csc^2\theta\,(m+n+p+2\cot\theta)$

證明過程:

我們做輔助線 $\overline{FG}$ 使得 $\angle\mathrm{BFG}=\angle\mathrm{BCF}$

也就是說 $\angle\mathrm{OGF}=\angle\mathrm{OBF}+\angle\mathrm{OCF}$

設 $\overline{AG}=u,\angle\mathrm{OGF}=\delta$ 則 $\overline{BG}=m-u,\overline{CG}=n-u$

因為 $\triangle\,\mathrm{GBF}\backsim\triangle\,\mathrm{GFC}$

所以 $(m-u)(n-u)=\csc^2\delta=1+(k+u)^2$ (方程式 1)

又因為 $\angle\mathrm{AFG}=\angle\mathrm{GDF}\Rightarrow\triangle\,\mathrm{AGF}\backsim\triangle\,\mathrm{AFD}$

所以 $up=\csc^2\theta=1+k^2$ (方程式 2)

整理方程式 1 並代入方程式 2 可得

$$mn=(m+n+p+2k)u \qquad \text{(方程式 3)}$$

因為方程式 2，我們可以在方程式 3 中代入 $u=\frac{\csc^2\theta}{p}$ 且 $k=\cot\theta$

$$\Rightarrow mnp=\csc^2\theta\,(m+n+p+2\cot\theta)$$

若 $\theta=\frac{\pi}{4}$，則 $mnp-2(m+n+p)=4$。

註 2:在上述證明過程裡，可以理解成我們使用了兩次的引理 1，分別得到方程式 1、2。

為了能夠利用相似三角形的方法再繼續延伸我們想要探討的問題，引理 2 將對我們的延伸有幫助。

$\boxed{\text{引理 2}}$: 設 $\angle \mathrm{OAF} = \theta$, $\overline{OF} = 1, \overline{OA} = k, \overline{AB} = m, \overline{AC} = n, \overline{AG} = u, \angle \mathrm{OGF} = \angle \mathrm{OBF} + \angle \mathrm{OCF}$

，則 $u = \frac{mn - \csc^2\theta}{m+n+2\cot\theta}$。(如圖六)

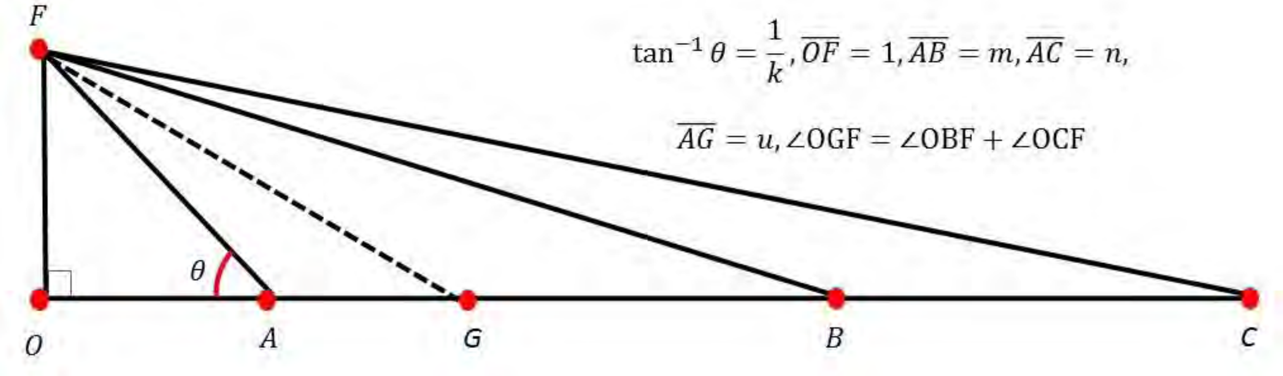


圖 六

證明過程: 因為$\angle \mathrm{OGF} = \angle \mathrm{OBF} + \angle \mathrm{OCF}$ 所以 $\triangle \mathrm{GBF} \backsim \triangle \mathrm{GFC}$

根據引理 1，我們可以得到 $(m-u)(n-u) = 1 + (k+u)^2$

$\Rightarrow mn - (m+n)u = 1 + 2ku + k^2$ 又 $1 + k^2 = \csc^2\theta$ 且 $k = \cot\theta$

$\Rightarrow mn - \csc^2\theta = (m + n + 2\cot\theta)u$

$$\Rightarrow u = \frac{mn - \csc^2\theta}{m + n + 2\cot\theta}$$

註 3:當 $\theta = \frac{\pi}{4}$，則 $u = \frac{mn-2}{m+n+2}$

(三) 有了引理 2，我們可以拆解一個大角為**四個小角**。

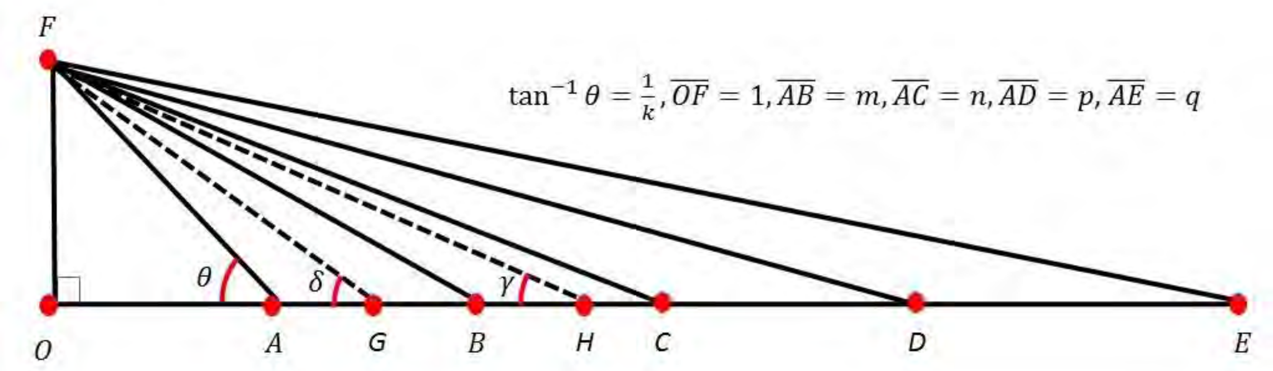


圖 七

如圖七假設 $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{k}, \overline{\mathrm{OF}}=1, \overline{\mathrm{AB}}=m, \overline{AC}=n, \overline{AD}=p, \overline{\mathrm{AE}}=q$

且 $\theta=\angle\mathrm{OAF}=\angle\mathrm{OBF}+\angle\mathrm{OCF}+\angle\mathrm{ODF}+\angle\mathrm{OEF}$

我們做輔助線 $\overline{FG}$ 使得 $\delta=\angle\mathrm{OGF}=\angle\mathrm{OBF}+\angle\mathrm{OCF}$

輔助線 $\overline{FH}$ 使得 $\gamma=\angle\mathrm{OHF}=\angle\mathrm{ODF}+\angle\mathrm{OEF}$

設 $\overline{AG}=u, \overline{AH}=t$

依據引理 2 我們得到 $u=\frac{mn-\csc^2\theta}{m+n+2\cot\theta}$ 和 $t=\frac{pq-\csc^2\theta}{p+q+2\cot\theta}$

又因為 $\theta=\delta+\gamma$ 依據引理 1 $ut=\csc^2\theta$ 且已知 $\cot\theta=k$

$\Rightarrow ut=\csc^2\theta=\left(\frac{mn-\csc^2\theta}{m+n+2\cot\theta}\right)\left(\frac{pq-\csc^2\theta}{p+q+2\cot\theta}\right)$

$\Rightarrow \csc^2\theta=\frac{mnpq-\csc^2\theta(mn+pq)+\csc^4\theta}{(mp+mq+np+nq)+2\cot\theta(m+n+p+q)+4\cot^2\theta}$

移項並整理後得下列關係式:

$$mnpq-\csc^2\theta\,(mn+mp+mq+np+nq+pq)$$

$$=2\cot\theta\csc^2\theta\,(m+n+p+q)+4\cot^2\theta\csc^2\theta-\csc^4\theta$$

若 $\theta=\frac{\pi}{4}$，

則 $mnpq=2(mn+mp+mq+np+nq+pq)+4(m+n+p+q)+4$

(四) **$\boldsymbol{\theta}$ 分成 $\boldsymbol{n}$ 個小角的一般形式:** 我們先定義幾個與 θ 有關的關係式，符號 $F[m_{[\theta\to n]}]$:表示 θ 分成 n 個小角所需滿足的關係式，依據引理 1，我們定義 $f_1(u,v)=uv=\csc^2\theta$ ，依據引理 2，我們定義 $f_2(u,v)=\frac{uv-\csc^2\theta}{u+v+2\cot\theta}$，則我們可以得到定理 1。(示意圖如圖八)

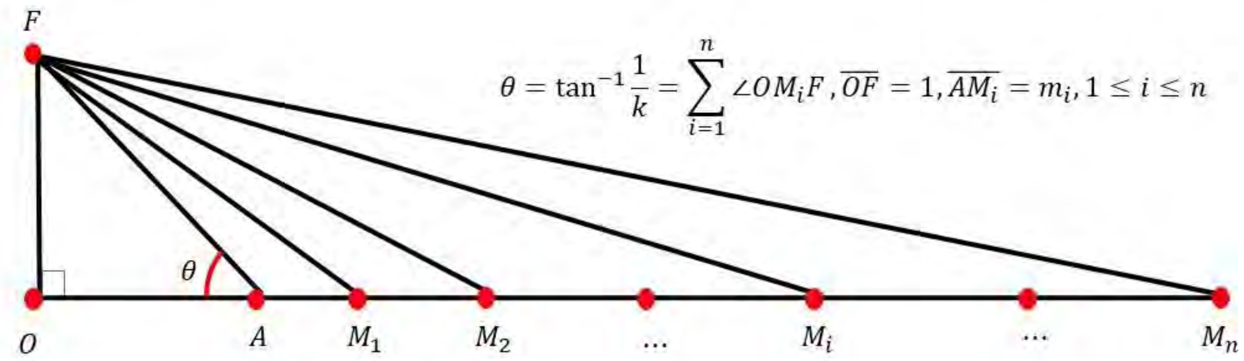


圖 八

為使定理述敘較為簡化，我們不失一般性令 $\overline{AM_i} < \overline{AM_{i+1}}$，$i \in N$ 也就是 $m_i < m_{i+1}$。

定理 1: 若 $n \geq 3$，平面上點 O、A、$M_i, 1 \leq i \leq n$ 共線，且 $\overline{OF} = 1, \overline{AM_i} = m_i, 1 \leq i \leq n,$

$\angle \mathrm{OAF} = \theta = \tan^{-1}\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \angle OM_iF\,, \angle \mathrm{AOF} = \frac{\pi}{2}$，則

$$F[m_{[\theta\to n]}] = f_1(f_2 \cdots f_2(f_2(m_1, m_2), m_3), \cdots, m_{n-1}), m_n) = \csc^2\theta$$

(註 4: 我們可以定 $F\left[m_{[\theta\to 2]}\right] = m_1 m_2 = \csc^2\theta$)

推論 1: $F[m_{[\theta\to 3]}] = f_1(f_2(m_1, m_2), m_3) = \frac{m_1m_2 - \csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta} m_3 = \frac{m_1m_2m_3 - m_3\csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta} = \csc^2\theta$

$$F[m_{[\theta\to 4]}] = f_1(f_2(f_2(m_1, m_2), m_3), m_4) = \frac{\frac{m_1m_2 - \csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta} m_3 - \csc^2\theta}{\frac{m_1m_2 - \csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta} + m_3 + 2\cot\theta} m_4 = \csc^2\theta$$

推論 2: 若 $\theta = \frac{\pi}{4}$，則 $\cot\theta = 1\,, \csc^2\theta = 2,$ 我們可以得到關係式:

$$F\left[m_{\left[\frac{\pi}{4}\to 3\right]}\right] = \frac{m_1m_2m_3 - 2m_3}{m_1 + m_2 + 2} = 2$$

$$\Rightarrow m_1m_2m_3 - 2(m_1 + m_2 + m_3) = 4$$ ，且

$$F\left[m_{\left[\frac{\pi}{4}\to 4\right]}\right] = \frac{\frac{m_1m_2 - 2}{m_1 + m_2 + 2} m_3 - 2}{\frac{m_1m_2 - 2}{m_1 + m_2 + 2} + m_3 + 2} m_4 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{m_1m_2 - 2}{m_1 + m_2 + 2} m_3m_4 - 2m_4 = 2\frac{m_1m_2 - 2}{m_1 + m_2 + 2} + 2m_3 + 4$$

$$\Rightarrow (m_1m_2 - 2)m_3m_4 - 2\mathrm{m}_1m_4 - 2m_2m_4 - 4m_4$$

$$= 2m_1m_2 - 4 + 2m_1m_3 + 2m_2m_3 + 4m_3 + 4m_1 + 4m_2 + 8$$

$$\Rightarrow \mathrm{m}_1m_2m_3m_4 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 4} m_im_j - 4\sum_{i=1}^{4} m_i = 4$$

以上大部分工作是縣級科展之前完成的，接下來在推論 2 中，我們可以觀察 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 分成三個角與四個角的關係式，看起來 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 分成數個角的關係式是可以整理出來的(定理 2)，而且似乎與基本對稱式有相關，所以我們再引入 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 的基本對稱式定義如下:

$$S_0(m_1, m_2, \ldots, m_n) = 1$$

$$S_1(m_1, m_2, \ldots, m_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$S_2(m_1,m_2,\dots,m_n)=m_1m_2+m_1m_3+\cdots+m_{n-1}m_n=\sum_{1\le i<j\le n}^{n} m_i m_j$$

$$S_3(m_1,m_2,\dots,m_n)=m_1m_2m_3+\cdots+m_{n-2}m_{n-1}m_n=\sum_{1\le i<j<s\le n}^{n} m_i m_j\, m_s$$

$$\vdots$$

$$S_n(m_1,m_2,\dots,m_n)=m_1m_2\dots m_n$$

同時為了定理 2 的描述方便，我們定義 $S_{-1}(m_1,\dots,m_n)=S_{-2}(m_1,\dots,m_n)=0, n\ge 2$。

另外，符號 $[x]$：表示不大於 x 的最大整數。

$\boxed{\text{定理 2}}$: 若 $n\ge 2$，平面上點 O、A、$M_i, 1\le i\le n$ 共線，且 $\overline{OF}=1, \overline{AM_i}=m_i, 1\le i\le n,$ $\angle\mathrm{OAF}=\theta=\frac{\pi}{4}=\sum_{i=1}^{n}\angle OM_iF, \angle\mathrm{AOF}=\frac{\pi}{2}$，則 $m_1,m_2,\dots,m_n$ 滿足下列丟番圖方程式:

$$S_n(m_1,m_2,\dots,m_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{[\frac{n+2}{4}]}(-1)^{i+1}\left(2^{2i-1}S_{n+2-4i}(m_1,\dots,m_n)+4^iS_{n+1-4i}(m_1,\dots,m_n)+4^iS_{n-4i}(m_1,\dots,m_n)\right)$$

證明過程: 實際上，定理 2 只是定理 3 的一個推論，雖然也可以用數學歸納法來證明，但其過程與精神與定理 3 相似，因此我們只留下定理 3 的證明。

為了定理 3 結論的描述方便，我們先設定<u>遞迴數列</u> c_n:

$$c_n=c_{n-1}\,2\cot\theta-c_{n-2}\csc^2\theta, n\ge 2,\ \text{且}\ c_0=-1, c_1=0\text{。}$$

而在證明定理 3 之前，讓我們先了解一些基本對稱式的性質，首先我們了解 $S_i(m_1,m_2,\dots,m_n)$ 是指從 $m_1,m_2,\dots,m_n$ 中挑選所有相異 i 個的項相乘後加總，所以我們可以分成挑出來的項有沒有 m_1 來思考，也就是有挑到 m_1 乘上從 $m_2,\dots,m_n$ 挑相異 $i-1$ 個的項相乘加上沒有挑到 m_1 全部從 $m_2,\dots,m_n$ 挑相異 i 個的項相乘，因此當 $i>0$ 時，我們得(方程式 4)

$$S_i(m_1,m_2,\dots,m_n)=S_i(m_2,\dots,m_n)+m_1S_{i-1}(m_2,\dots,m_n)$$

而同樣想法的討論可以再延伸為有沒有挑到 m_1m_2，因此當 $i>1$ 時，我們得到(方程式 5)

$$S_i(m_1,m_2,\dots,m_n)=m_1m_2S_{i-2}(m_3,\dots,m_n)+(m_1+m_2)S_{i-1}(m_3,\dots,m_n)+S_i(m_3,\dots,m_n)$$

接下來我們將利用數學歸納法、前文中所得引理及基本對稱式的性質來證明定理 3。

$\boxed{\text{定理 3}}$: 若 $n \geq 2$，平面上點 O、A、$M_i, 1 \leq i \leq n$ 共線，且 $\overline{OF} = 1, \overline{AM_\iota} = m_i, 1 \leq i \leq n,$

$\angle \mathrm{OAF} = \theta = \tan^{-1}\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \angle OM_iF,\ k \in \mathrm{N}$，則 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 滿足丟番圖方程式:

$$S_n(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \sum_{i=2}^{n} c_i S_{n-i}\,(m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

證明過程: (重述遞迴數列) ($c_n = c_{n-1}\, 2\cot\theta - c_{n-2}\csc^2\theta\,, n \geq 2,$ 且 $c_0 = -1, c_1 = 0$)

(數學歸納法)首先 $n = 2$ 時，$S_2(m_1, m_2) = m_1 m_2 = \csc^2\theta = c_2 S_{2-2}(m_1, m_2)$ 成立

(依據引理 1)

假定任意 $m_1, m_2, \ldots, m_t$ 若滿足定理 3 條件，則

$$S_t(m_1, m_2, \ldots, m_t) = \textstyle\sum_{i=2}^{t} c_i S_{t-i}\,(m_1, m_2, \ldots, m_t)。$$

接下來我們推論 $n = t + 1$ 時，若滿足定理 3 條件，則定理 3 成立，

我們假設$m_1, m_2, \ldots, m_{t+1}$，滿足條件，依據引理 2，我們可以得 $m'_1 = \frac{m_1 m_2 - \csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta}$

，令 $m'_i = m_{i+1}, 2 \leq i \leq t$，顯然 $m'_1, m'_2, \ldots, m'_t$ 滿足定理 3 條件，所以

$S_t(m'_1, m'_2, \ldots, m'_t) = \sum_{i=2}^{t} c_i S_{t-i}\,(m'_1, m'_2, \ldots, m'_t)$。依方程式 4 我們知道$2 \leq i \leq t - 1$

$S_{t-i}(m'_1, m'_2, \ldots, m'_t) = S_{t-i}(m'_2, m'_3, \ldots, m'_t) + m'_1 S_{t-i-1}(m'_2, m'_3, \ldots, m'_t)$ 。所以

$$S_t(m'_1, m'_2, \ldots, m'_t) = c_t + \sum_{i=2}^{t-1} c_i\left(S_{t-i}(m'_2, m'_3, \ldots, m'_t) + m'_1 S_{t-i-1}(m'_2, m'_3, \ldots, m'_t)\right)$$

接下來我們證明上列這個關係式(方程式 6)整理後就是下式

$S_{t+1}(m_1, m_2, \ldots, m_{t+1}) = \sum_{i=2}^{t+1} c_i S_{t+1-i}\,(m_1, m_2, \ldots, m_{t+1})$，也就是定理 3 成立。

我們將$m'_1 = \frac{m_1 m_2 - \csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta}, m'_i = m_{i+1}, 2 \leq i \leq t$ 代回方程式 6 左式可得

$$S_t(m'_1, m_3, \ldots, m_{t+1}) = \frac{m_1 m_2 - \csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta} \cdot m_3 m_4 \ldots m_{t+1}$$

此時乘以分母 $m_1 + m_2 + 2\cot\theta$，左式得到 $(m_1 m_2 - \csc^2\theta) \cdot m_3 m_4 \ldots m_{t+1}$

$$= S_{t+1}(m_1, m_2, \ldots, m_{t+1}) - c_2 m_3 m_4 \ldots m_{t+1}$$

$$= S_{t+1}(m_1, m_2, \ldots, m_{t+1}) - c_2 S_{t-1}(m_3, m_4, \ldots, m_{t+1})$$

我們待會可以將 $-c_2 S_{t-1}(m_3, m_4, \ldots, m_{t+1})$移項右式。而右式則得

$$c_t+\sum_{i=2}^{t-1} c_i\left(S_{t-i}(m_3,\dots,m_{t+1})+\frac{m_1m_2-\csc^2\theta}{m_1+m_2+2\cot\theta}S_{t-i-1}(m_3,\dots,m_{t+1})\right)$$

一樣將上述關係所有項次乘$m_1+m_2+2\cot\theta$對於右式以及 $i=2,\dots,t-1$，我們有

$$c_i(m_1+m_2+2\cot\theta)\,S_{t-i}(m_3,\dots,m_{t+1})+c_i(m_1m_2-\csc^2\theta)S_{t-i-1}(m_3,\dots,m_{t+1})$$

為了合併化簡我們拆成四項來處理，並且考慮 $i=2$ 開始:

第一項 $c_2(m_1+m_2)S_{t-2}(m_3,\dots,m_{t+1})$ 和第二項 $c_2 2\cot\theta\,S_{t-2}(m_3,\dots,m_{t+1})$ 以及

第三項 $c_2m_1m_2S_{t-2-1}(m_3,\dots,m_{t+1})$ 和第四項 $-c_2\csc^2\theta\,S_{t-2-1}(m_3,\dots,m_{t+1})$。

考慮從左式移項右式的$c_2S_{t-1}(m_3,m_4,\dots,m_{t+1})$再合併第一、三項，依方程式 5 得

$$c_2S_{t-1}(m_1,m_2,m_3,\dots,m_{t+1})=c_2S_{t+1-2}(m_1,m_2,m_3,\dots,m_{t+1})$$

因為 $c_n=c_{n-1}\,2\cot\theta-c_{n-2}\csc^2\theta, n\ge 2,$ 且 $c_0=-1, c_1=0$，得$c_3=c_2 2\cot\theta$，

所以第二項 $c_2 2\cot\theta\,S_{t-2}(m_3,\dots,m_{t+1})=c_3S_{t-2}(m_3,\dots,m_{t+1})$

接下來將 $i=3$ 也同樣拆成四項，

第五項 $c_3(m_1+m_2)S_{t-3}(m_3,\dots,m_{t+1})$ 和第六項 $c_3 2\cot\theta\,S_{t-3}(m_3,\dots,m_{t+1})$ 以及

第七項 $c_3m_1m_2S_{t-3-1}(m_3,\dots,m_{t+1})$ 和第八項 $-c_3\csc^2\theta\,S_{t-3-1}(m_3,\dots,m_{t+1})$。

此時合併第二、五、七項，依方程式 5 得 $c_3S_{t+1-3}(m_1,m_2,m_3,\dots,m_{t+1})$。

依係數遞迴關係合併第六、四項得 $c_4S_{t-3}(m_3,\dots,m_{t+1})$，接下來將$i=4$也同樣拆成四項，

第九項 $c_4(m_1+m_2)S_{t-4}(m_3,\dots,m_{t+1})$ 和第 10 項 $c_4 2\cot\theta\,S_{t-4}(m_3,\dots,m_{t+1})$ 以及

第 11 項 $c_4m_1m_2S_{t-4-1}(m_3,\dots,m_{t+1})$ 和第 12 項 $-c_4\csc^2\theta\,S_{t-4-1}(m_3,\dots,m_{t+1})$。

所以合併六、四、九、11 項，依方程式 5 得$c_4S_{t+1-4}(m_1,m_2,m_3,\dots,m_{t+1})$

接下來依續拆四項直至將 $i=t-1$ 也同樣拆成四項，

$c_{t-1}(m_1+m_2)S_1(m_3,\dots,m_{t+1})$ 和 $c_{t-1}2\cot\theta\,S_1(m_3,\dots,m_{t+1})$ 以及

$c_{t-1}m_1m_2S_0(m_3,\dots,m_{t+1})$ 和$-c_{t-1}\csc^2\theta\,S_0(m_3,\dots,m_{t+1})$。同理依方程式 5 我們將得到

$c_{t-1}S_{t+1-(t-1)}(m_1,\dots,m_{t+1})$。此時右式只剩下列五項 $c_t(m_1+m_2)$、$c_t 2\cot\theta$ 、

$-c_{t-2}\csc^2\theta\,S_1(m_3,\dots,m_{t+1})$、$c_{t-1}2\cot\theta\,S_1(m_3,\dots,m_{t+1})$、 $-c_{t-1}\csc^2\theta\,S_0(m_3,\dots,m_{t+1})$ ，

其中三項可合併為$c_tS_{t+1-t}(m_1,\dots,m_{t+1})$，而另二項恰合併為 $c_{t+1}=c_{t+1}S_0(m_1,\dots,m_{t+1})$。

所以$S_{t+1}(m_1,m_2,\dots,m_{t+1})=\sum_{i=2}^{t+1}c_iS_{t+1-i}(m_1,m_2,\dots,m_{t+1})$，故得證。

三、探討一個角為其它較小角之和:三角函數和角公式

(一)　**分成二個角**: 如同第一部分解題證明的探討，我們也可以使用三角函數的和角公式來延伸討論，為使討論更清楚簡易的描述，我們定義 $\theta_i = \tan^{-1}\frac{1}{i}, i \in N$ ，N表示所有正整數所成之集合。

再來我們透過第一部分方法(三)來看看 $\theta_k = \theta_{x_1} + \theta_{x_2}, k < x_1 < x_2$ 的解答

$$\tan(\theta_{x_1} + \theta_{x_2}) = \frac{\tan\theta_{x_1} + \tan\theta_{x_2}}{1 - \tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2}} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{1 - \frac{1}{x_1 x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2 - 1} = \tan\theta_k = \frac{1}{k}$$

$\therefore\ x_1 x_2 - 1 = (x_1 + x_2)k \Rightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2)k + k^2 = 1 + k^2 \Rightarrow$

$$(x_1 - k)(x_2 - k) = 1 + k^2 \text{ 丟番圖方程式}$$

觀察 1: 當給定任意 $k \in N$ 若 $x_1 = k + 1$ ，則根據上述丟番圖方程式 可解得

$$x_2 = 1 + k + k^2 = {x_1}^2 - k$$

因此 $\theta_2 = \theta_3 + \theta_7$、$\theta_3 = \theta_4 + \theta_{13}$、$\theta_5 = \theta_6 + \theta_{31}$、$\theta_6 = \theta_7 + \theta_{43}\cdots$

觀察 2: 這個丟番圖方程式也可以由使用相似三角形性質來得到。

(二)　我們也可以使用正切和角公式兩次，而得到**分成三個小角**的條件。

證明過程: 若 $\tan(\theta_{x_1} + \theta_{x_2} + \theta_{x_3}) = \frac{1}{k}$ ，則

$$\frac{1}{k} = \tan\left((\theta_{x_1} + \theta_{x_2}) + \theta_{x_3}\right) = \frac{\tan(\theta_{x_1} + \theta_{x_2}) + \tan\theta_{x_3}}{1 - \tan(\theta_{x_1} + \theta_{x_2})\tan\theta_{x_3}}$$

$$= \frac{\frac{\tan\theta_{x_1} + \tan\theta_{x_2}}{1 - \tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2}} + \tan\theta_{x_3}}{1 - \frac{\tan\theta_{x_1} + \tan\theta_{x_2}}{1 - \tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2}}\tan\theta_{x_3}}$$

$$= \frac{\tan\theta_{x_1} + \tan\theta_{x_2} + \tan\theta_{x_3} - \tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2}\tan\theta_{x_3}}{1 - (\tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2} + \tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_3} + \tan\theta_{x_2}\tan\theta_{x_3})}$$

$$= \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_1 x_2 x_3}}{1 - \left(\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3}\right)} = \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 1}{x_1 x_2 x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)}$$

給定定值 k可以得到一個三變數的丟番圖方程式:

$$k(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 1) = x_1 x_2 x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)$$

(三) **分成四個角**:若 $\tan\left(\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}+\theta_{x_4}\right)=\frac{1}{k}$ ，則

$$\frac{1}{k}=\tan\left(\left(\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}\right)+\theta_{x_4}\right)=\frac{\tan\left(\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}\right)+\tan\theta_{x_4}}{1-\tan\left(\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}\right)\tan\theta_{x_4}}$$

$$=\frac{\frac{\tan\theta_{x_1}+\tan\theta_{x_2}+\tan\theta_{x_3}-\tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2}\tan\theta_{x_3}}{1-(\tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2}+\tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_3}+\tan\theta_{x_2}\tan\theta_{x_3})}+\tan\theta_{x_4}}{1-\frac{\tan\theta_{x_1}+\tan\theta_{x_2}+\tan\theta_{x_3}-\tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2}\tan\theta_{x_3}}{1-(\tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2}+\tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_3}+\tan\theta_{x_2}\tan\theta_{x_3})}\tan\theta_{x_4}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{4}\tan\theta_{x_i}-\sum_{1\le i<j<s\le 4}^{4}\tan\theta_{x_i}\tan\theta_{x_j}\tan\theta_{x_s}}{1-\sum_{1\le i<j\le 4}^{4}\tan\theta_{x_i}\tan\theta_{x_j}+\tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2}\tan\theta_{x_3}\tan\theta_{x_4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}-\left(\frac{1}{x_1x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_2x_4}+\frac{1}{x_1x_3x_4}+\frac{1}{x_2x_3x_4}\right)}{1-\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_4}+\frac{1}{x_2x_4}+\frac{1}{x_3x_4}\right)+\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}}$$

$$=\frac{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4-(x_1+x_2+x_3+x_4)}{x_1x_2x_3x_4-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4)+1}$$

則給定定值 $k\in N$可以得到一個四變數的丟番圖方程式。

(四) 利用正切函數和角公式來得到 **$\boldsymbol{\theta}$ 分成 $\boldsymbol{n}$ 個小角的一般形式**:根據前文的探討，我們導入三角函數多和角公式來做計算求解，然而為了處理 θ 分為多個相異角這個問題，我們發現更能簡易表達與計算角度和的方式是引入<u>複數</u>與<u>複數極式</u>(註 5:依據評審建議與指導，另外，後來才發現維基百科查得到正切函數的多和角公式[3]，不過使用極式來證明看來更為簡易。)

複數與複數極式的表示:

$$\mathrm{z}=\mathrm{x}+i\mathrm{y}=\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\left(\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}}+i\frac{\mathrm{y}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}}\right)=|\mathrm{z}|(\cos\delta+i\sin\delta)$$

利用複數極式，複數的乘積可表示為:$\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2=|\mathrm{z}_1||\mathrm{z}_2|(\cos(\delta_1+\delta_2)+i\sin(\delta_1+\delta_2))$

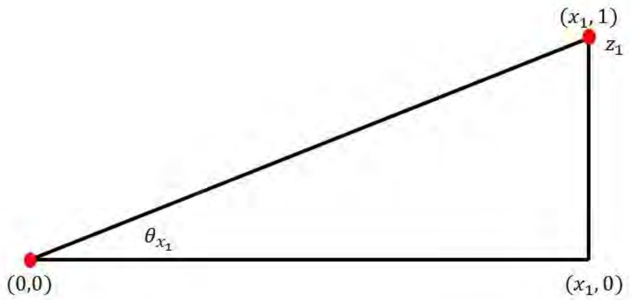


圖 九

我們將三角形(如圖九)放置於複數平面上得: $z_1 = x_1 + i = |z_1|(\cos\theta_{x_1} + i\sin\theta_{x_1})$

同理 $z_2 = x_2 + i$、$z_3 = x_3 + i$

從複數乘積與極式，我們可得:

$(x_1+i)(x_2+i)(x_3+i) = |z_1||z_2||z_3|(\cos(\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}) + i\sin(\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}))$

依據複數運算以及其性質(乘法與實部、虛部)，若 $\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}=\theta_k$，因為

$\cos\theta_k = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ 與 $\sin\theta_k = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，則可以得到三個變數的丟番圖方程式:

$$x_1x_2x_3 - (x_1+x_2+x_3) = k((x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-1)$$

利用複數極式這個良好且合適的工具，

我們可以得到 θ_k 拆成 n 個角的條件(方程式 7):

$$\prod_{j=1}^{n}(x_j+i) = (\prod_{j=1}^{n}|z_j|)\left(\cos(\sum\nolimits_{j=1}^{n}\theta_{x_j}) + i\sin(\sum\nolimits_{j=1}^{n}\theta_{x_j})\right)$$

$$= (\prod_{j=1}^{n}|z_j|)\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} + i\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

依據方程式 7 以及 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的基本對稱式，我們可以得到 θ_k 分成 n 個角的多變數丟番圖方程式。(定理 4)

$\boxed{\text{定理 4}}$: 若 $\theta_k = \sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i}$，則 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 滿足下列丟番圖方程式:

$$\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j S_{n-2j}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = k\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^j S_{n-1-2j}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

推論 3: 若 $\sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i} = \frac{\pi}{4} = \theta_1$，則 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 滿足下列丟番圖方程式:

$$\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j S_{n-2j}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^j S_{n-1-2j}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

四、收斂的無窮級數、其它推廣與未來展望

(一) 在前文中，我們在處理 θ 拆成 n 個角的方法，其實是不斷的重複利用將兩個較小的角合併為一個較大的角這樣的概念。那麼如果反過來呢!我們如果不斷的將一個小的角拆成更小的兩個角呢?

我們已知若 $k < x_1 < x_2, \theta_k = \theta_{x_1} + \theta_{x_2}$若且唯若$(x_1 - k)(x_2 - k) = 1 + k^2$。

並且根據觀察 1，我們知道當$x_1 = k + 1$時，上述式恆有解$x_2 = k^2 + k + 1$

$$\frac{\pi}{2} = \tan^{-1}\frac{1}{1} + \tan^{-1}\frac{1}{1}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{13}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{13} = \tan^{-1}\frac{1}{14} + \tan^{-1}\frac{1}{183}$$

將上述這些式子關係整理一下就可以得到下式:

$$\frac{\pi}{2} = \tan^{-1}\frac{1}{1} + \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{14} + \tan^{-1}\frac{1}{183}$$

在這個拆法中，因為我們每次總是固定拆最小的角，我們觀察

$x_1 = k + 1, x_2 = k^2 + k + 1$ 但x_2並不會留下而是再拆為$x_3 = x_2 + 1 = k^2 + k + 2$與另一個更小的角 x_4，為了不斷拆角我們需要分母之間的關係，也因為拆角的方式固定，我們可以猜測這個關係是有規則的，而假定x_1是被留下的項的足標，那麼下一項的足標將是x_3，因此我們考慮 x_1與 x_3之間的關係，其關係如下:

$$x_3 = k^2 + k + 2 = (k+1)^2 - (k+1) + 2 = x_1^2 - x_1 + 2$$

所以我們定義遞迴數列: $a_1 = 1, a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1} + 2$

則我們可以得到一個收斂到 $\frac{\pi}{2}$ 的無窮級數:

$$\frac{\pi}{2} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + \theta_{14} + \theta_{184} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{a_n}$$

而這樣的無窮級數計算到第四項時與 $\frac{\pi}{2}$ 的誤差就只有$\tan^{-1}\frac{1}{183}$，可以發現這樣是一個收斂速度不錯的級數。

(二) 當然沒有人規定每一次在拆角的時候，只能拆小的那一個角，也沒有規定只能拆成兩個角，在前文中有許多拆角的方式，因此事實上，這樣的拆角是能夠得到許多個收斂到 $\frac{\pi}{2}$ 的無窮級數的。而其中有一種非常特別的也很有趣的;我們考慮費式數列 $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n > 2$。我們使用矩陣來化簡這樣的關係式(這樣的方法是已知且常用的[2]):定義 $F_0 = 0$

$$\begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

依據矩陣乘法及費式數列的關係，可以得到下列式子:

$$\begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2$$

$$\begin{bmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

再計算兩邊矩陣的行列式值，我們可以得到:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

因此當n為奇數時，化簡上式得:

$$1 + F_{2k}F_{2k+2} = F_{2k+1}^2$$

又因為 $F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k} \Rightarrow F_{2k} = F_{2k+2} - F_{2k+1}$

所以 $1 - F_{2k+1}F_{2k+2} = F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}^2 \Rightarrow$

$$\tan(\theta_{F_{2k+1}} + \theta_{F_{2k+2}}) = \frac{F_{2k+1} + F_{2k+2}}{F_{2k+1}F_{2k+2} - 1} = \frac{F_{2k+1} + F_{2k+2}}{F_{2k+2}^2 - F_{2k+1}^2} = \frac{1}{F_{2k+2} - F_{2k+1}} = \frac{1}{F_{2k}}$$

因此我們得到 $\theta_{F_{2k}} = \theta_{F_{2k+1}} + \theta_{F_{2k+2}}$ ，所以

$$\frac{\pi}{2} = \tan^{-1}\frac{1}{1} + \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}\frac{1}{F_1} + \tan^{-1}\frac{1}{F_2} = \tan^{-1}\frac{1}{F_1} + \tan^{-1}\frac{1}{F_3} + \tan^{-1}\frac{1}{F_4}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{F_1} + \tan^{-1}\frac{1}{F_3} + \tan^{-1}\frac{1}{F_5} + \tan^{-1}\frac{1}{F_6} = \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\theta_{F_{2i+1}}$$

註 5:這個結果後來我們查證是已知的。引注資料[5、6]中都有出現。

(三) 在前文裡，因為是延續格子點上的三角形，若是只單純考慮畫出來的那些角度，其實不容易想到同一個角度相加或累加這樣的事情，所以在前文中大都只考慮一個角拆成相異的小角，不過依據在我們相關推論的過程裡，其實並不需要限制相異角這件事情，舉例來說:

$$\tan^{-1}\frac{1}{1}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

那麼我們就能夠得到(引注資料[4]中所提到的哈頓式子，[4]是後來查到的資料):

$$\tan^{-1}\frac{1}{1}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

事實上，在本文稍後所列舉的解答裡就沒有限制相異角這個條件。

而且我們還能延伸其問題為考慮 $\tan^{-1}\frac{1}{1}=\sum_{i=1}^{n}d_i\cdot\tan^{-1}\frac{q_i}{p_i}$ ，像是著名的 Machin 公式 $\tan^{-1}\frac{1}{1}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ 或是類 Machin 公式[4]等。下面我們利用前文結果來呈現 Machin 公式的驗證，也就是 $\theta_1+\theta_{239}=4\theta_5$:

首先，我們令 $\theta=\theta_1+\theta_{239}$，依據前文三、(一)結論，則

$$\tan\theta=\frac{1+239}{1\cdot 239-1}=\frac{240}{238}=\frac{120}{119}$$

同理，依據前文三、(三)

$$\tan(\theta_5+\theta_5+\theta_5+\theta_5)=\frac{4\cdot 5^3-20}{5^4-6\cdot 5^2+1}=\frac{480}{476}=\frac{120}{119}$$

加上 $0<4\theta_5<\frac{\pi}{2}$ 且 $0<\theta_1+\theta_{239}<\frac{\pi}{2}$，因此在其正切函數值相等的條件下 $4\theta_5=\theta_1+\theta_{239}$，換句話說 $\tan^{-1}\frac{1}{1}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$。

而根據[4]中所言，現今仍然有許多學者在找尋類 Machin 公式，而其原因是這樣的公式竟然與圓周率的計算是相關的，Machin 享有很高的數學聲望，因為在 1706 年他就能計算圓周率的值精確到小數後一百位，在三百多年前的時候，這真是一件困難的事情。

(四) 在[6]中，我們特別注意到一個結果 $\sum_{i=0}^{\infty} \tan^{-1}\frac{2}{i^2}=\frac{3\pi}{4}$ 而這個結果是把分子都固定成 2 這個數字，因此我們想試著用我們前文的結果，用不同的方式來驗證一下這個無窮級數收斂到 $\frac{3\pi}{4}$ 。考慮延伸的特殊角$\theta_{p,2}=\tan^{-1}\frac{2}{p}$ $,p\in N$，由前文相似三角形的性質，我們同理可推論: 若 $k<p_1<p_2,\theta_{k,2}=\theta_{p_1,2}+\theta_{p_2,2}$ ，則 $(p_1-k)(p_2-k)=4+k^2$ 。類似前文的手法，此時如果讓 $p_1=k+4$，則恆有解 $p_2=(\frac{k}{2})^2+k+1=(\frac{k}{2}+1)^2$。

因為 $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{2}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{6}$ ，所以我們考慮拆解 $\theta_{4,2}$ 與 $\theta_{6,2}$。

又利用上述關係式且令 $p_1=k+4$ ，則 $\theta_{4,2}=\theta_{(4+4),2}+\theta_{\left(\frac{4}{2}+1\right)^2,2}=\theta_{8,2}+\theta_{3^2,2}$

再拆 $\theta_{8,2}$ ，則 $\theta_{8,2}=\theta_{(8+4),2}+\theta_{\left(\frac{8}{2}+1\right)^2,2}=\theta_{12,2}+\theta_{5^2,2}$ ，再拆 $\theta_{12,2}$ ，依此類推可得 $\theta_{4,2}=\sum_{i=1}^{\infty}\theta_{(2i+1)^2,2}$ 也就是 $\tan^{-1}\frac{2}{4}=\sum_{i=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{(2i+1)^2}$ 。

同理 $\tan^{-1}\frac{2}{6}=\sum_{i=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{(2i+2)^2}$ 。

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{2}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{6}=\sum_{i=3}^{\infty}\theta_{i^2,2}$$

又因為 $\tan^{-1}\frac{2}{1^2}+\tan^{-1}\frac{2}{2^2}=\tan^{-1}\frac{2}{1}+\tan^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$ 所以我們可以得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\theta_{i^2,2}=\sum_{i=0}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{i^2}=\frac{3\pi}{4}$$

其實我們也許發現了更多，我們可以不斷重複利用 $\theta_{k,2}=\theta_{p_1,2}+\theta_{p_2,2}$ 且總是假定 $p_1=k+4$，則 $j\in N$，

$$\tan^{-1}\frac{2}{4j}=\sum_{j=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{(2j+1)^2}$$

$$\tan^{-1}\frac{2}{4j+2}=\sum_{j=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{(2j+2)^2}$$

（五）未來展望:我們也可以試著考慮更廣義的特殊角 $\theta_{p,q} = \tan^{-1}\frac{q}{p}\ , p, q \in N$。

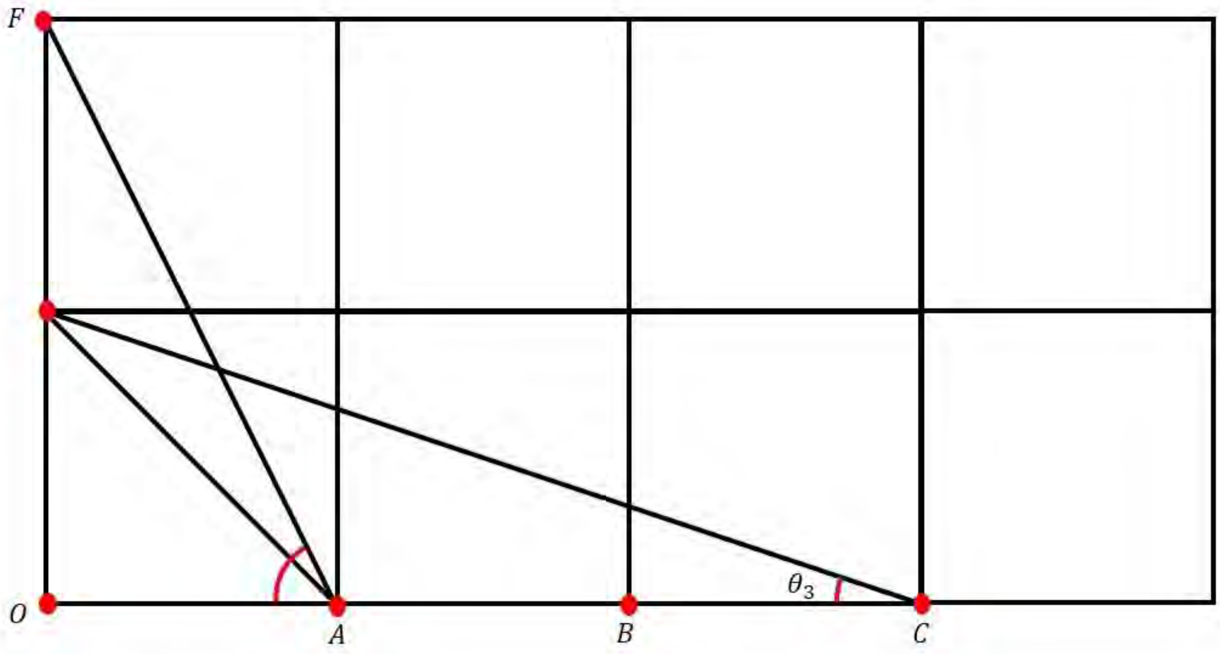


圖 十

在圖十中$\angle \mathrm{OAF} = \tan^{-1}\frac{2}{1} = \tan^{-1}\frac{1}{1} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \theta_1 + \theta_3$。而當我們知道反正切函數與費氏數列有 $\sum_{i=0}^{\infty}\theta_{F_{2i+1}} = \frac{\pi}{2}$ 這樣的關係後，我們覺得這樣的結果真是超乎我們的想像，也因此進行學術文獻的查詢，發現這個結果真的有出現在文獻上[5、6]，而這篇文章中，亦還有另一個讓我們關注的結果 $\sum_{i=0}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{i^2} = \frac{3\pi}{4}$，我們試著用我們的方法重證這個結果。 這些超乎我們預期之外的發現都是我們在縣級科展後覺得非常高興的事情，也許在不久的未來我們也能發現新的關係呢!此外，我們也對 $\sum_{i=0}^{\infty}\theta_{F_{2i}}$ 這個收斂的無窮級數收斂到什麼值，也感到興趣。(註 6:當然文獻[5、6]中大部分是我們不懂的)

五、實作、觀察與 excel 及 python 程式

(一) 在科展研究過裡中，我們為了了解一個角 θ 拆成 n 個角的可能性，我們利用了 GSP 這個幾何畫板來協助我們做觀察。截取實作畫面舉例說明(圖十一):

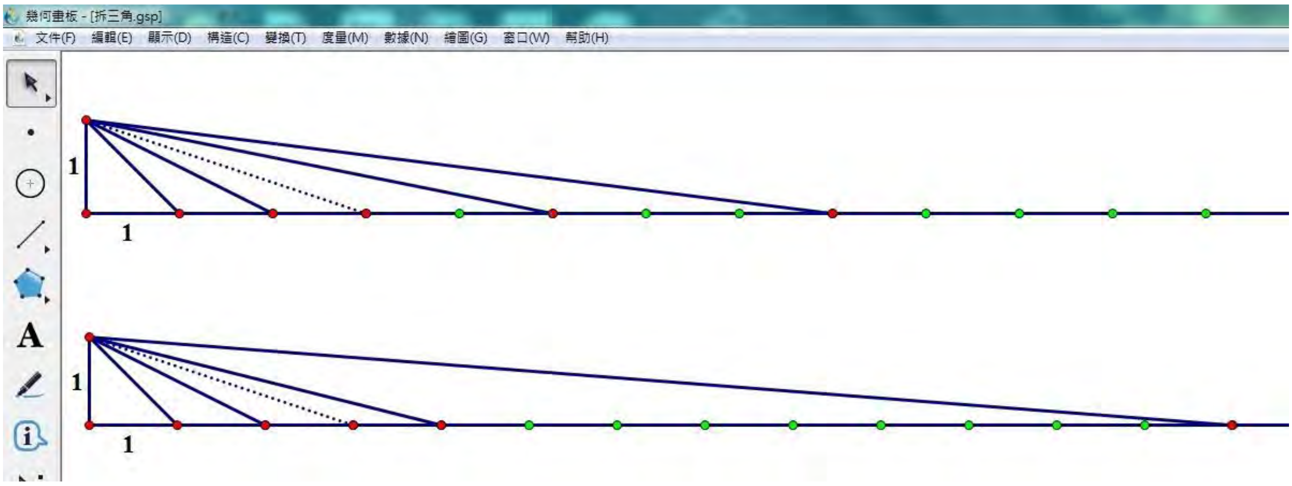


圖 十一

圖十一內上圖: $\theta_1 = \theta_2 + \theta_5 + \theta_8$ ，圖十一內下圖: $\theta_1 = \theta_2 + \theta_4 + \theta_{13}$ 。

而確定解的存在性之後，就促使我們轉向拆解角度的幾何或算式證明，圖十一內其實就是固定了 θ_1 與 θ_2 而去拆解 $\theta_3 = \tan^{-1}\frac{1}{3}$，而在這實作的圖中也留下了我們證明主要利用相似三角形的想法。

(二) 關於定理 2 的觀察

$S_2(m_1, m_2) = 2S_0(m_1, m_2)$ 這是 $\frac{\pi}{4}$ 分成兩個角的關係式

$S_3(m_1, m_2, m_3) = 2S_1(m_1, m_2, m_3) + 4S_0(m_1, m_2, m_3)$ 這是 $\frac{\pi}{4}$ 分成三個角的關係式

依序為 $\frac{\pi}{4}$ 分成四、五、六個角的關係式

$$S_4(m_1, m_2, \cdots, m_4) = 2S_2(m_1, m_2, \cdots, m_4) + 4S_1(m_1, m_2, \cdots, m_4) + 4S_0(m_1, m_2, \cdots, m_4)$$

$$S_5(m_1, m_2, \cdots, m_5) = 2S_3(m_1, m_2, \cdots, m_5) + 4S_2(m_1, m_2, \cdots, m_5) + 4S_1(m_1, m_2, \cdots, m_5)$$

$$S_6(m_1, \cdots, m_6) = 2S_4(m_1, \cdots, m_6) + 4S_3(m_1, \cdots, m_6) + 4S_2(m_1, \cdots, m_6) - 8S_0(m_1, \cdots, m_6)$$

接下來是 $\frac{\pi}{4}$ 分成七、八個角的關係式

$$S_7(m_1, \cdots, m_7) = 2S_5(m_1, \cdots, m_7) + 4S_4(m_1, \cdots, m_7) + 4S_3(m_1, \cdots, m_7)$$
$$-8S_1(m_1, \cdots, m_7) - 16S_0(m_1, \cdots, m_7)$$

$$S_8(m_1,\cdots,m_8)=2S_6(m_1,\cdots,m_8)+4S_5(m_1,\cdots,m_8)+4S_4(m_1,\cdots,m_8)$$
$$-8S_2(m_1,\cdots,m_8)-16S_1(m_1,\cdots,m_8)-16S_0(m_1,\cdots,m_8)$$

(三) 下列我們列舉出所有θ_1拆成三個角與四個角的所有解(不限相異角):

x_1	x_2	x_3
2	4	13
2	5	8
3	3	7

$$\frac{\pi}{4}=\theta_1=\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
2	4	14	183
2	4	15	98
2	4	18	47
2	4	23	30
2	5	9	73
2	5	13	21
2	6	7	68
2	6	8	31
2	7	8	18
3	3	8	57
3	3	9	32
3	3	12	17
3	4	5	47
3	4	7	13
3	5	7	8

$$\frac{\pi}{4}=\theta_1=\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}+\theta_{x_4}$$

(四) 程式碼(python):

下述程式碼將展示了運用對稱式結構將 $\frac{\pi}{4}$ 分成四個角，在分角時，因為我們依據原題的先天條件 $\theta_{x_1} < \theta_{x_2} < \theta_{x_3} < \theta_{x_4}$ 及格子點特性再透過反正切函數的計算來訂定邊長的上下限，最後窮盡各長度組合後得出答案。

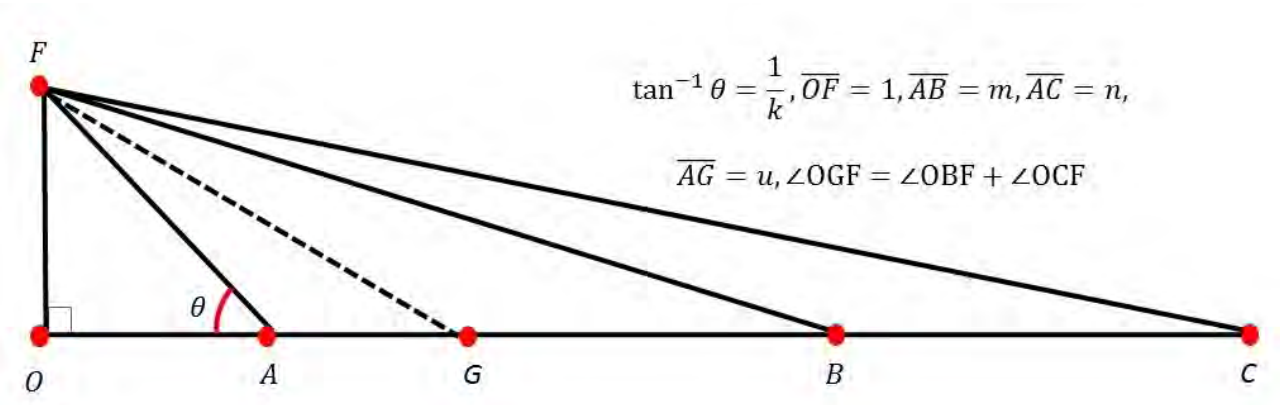
```python
# theta divided into four angle
import math

# defined symmetric equation
def s4(x1,x2,x3,x4):
    return x1*x2*x3*x4
def s3(x1,x2,x3,x4):
    return x1*x2*x3+x1*x2*x4+x1*x3*x4+x2*x3*x4
def s2(x1,x2,x3,x4):
    return x1*x2+x1*x3+x1*x4+x2*x3+x2*x4+x3*x4
def s1(x1,x2,x3,x4):
    return x1+x2+x3+x4

# fix angle pi/4
angle=math.pi/4
for x1 in range(2,1+round(1/math.tan(angle/4))):
    for x2 in range(int(x1+1),1+round(1/math.tan((angle-math.atan(1/x1))/3))):
        if (angle-math.atan(1/x1)-math.atan(1/x2))>0:
            for x3 in range(x2+1,1+round(1/math.tan((angle-math.atan(1/x1)-math.atan(1/x2))/2))):
                if angle-math.atan(1/x1)-math.atan(1/x2)-math.atan(1/x3)>0:
                    x4=round(1/math.tan(angle-math.atan(1/x1)-math.atan(1/x2)-math.atan(1/x3)))
                    if s4(x1,x2,x3,x4)-s2(x1,x2,x3,x4)+1==s3(x1,x2,x3,x4)-s1(x1,x2,x3,x4):
                        print(x1,x2,x3,x4)
```

伍、結論

尋找 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\frac{\pi}{2}$ (或 $\theta_2+\theta_3=\theta_1=\frac{\pi}{4}$)的證明方法是我國一上學期小論文課題中的探討題目，在研究過程裡，除了原先所謂的標準手法，相似三角形外，我還找到了使用輔助線與畢式定理以及引入課程中尚未教導的三角函數的和角公式來證明，當時還使用了 $\sin(\alpha+\beta)$、$\cos(\alpha+\beta)$，不過後來發現三個三角函數的和角公式彼此可以互相推導，因此在本文中就只留下使用正切函數的和角公式，另外也因為後續推導的部分利用正切與反正切的性質描寫起來是較為方便的。此外，在小論文裡尚未使用弳度這個描述角度的工具，也使得寫角度的時候常常需要使用∠OAF、∠OBF、⋯這樣的描述，而在本文中顯然使用了弳度後，除了描寫角度變的更簡易，也使得和角公式成為可行的運算。

本文中，利用平面幾何中相似三角形的性質，能得到引理 2:

引理 2: 在下圖中: $\overline{AG}=\frac{mn-\csc^2\theta}{m+n+2\cot\theta}$。



這個引理講述了，若一個角$\angle\mathrm{OGF}=\angle\mathrm{OBF}+\angle\mathrm{OCF}<\theta$，則$\overline{AG}$的距離可以用$\overline{AB}$、$\overline{AC}$及 θ 來表示，而不斷使用引理 2，以及引理 1(相似三角形的基本性質)的結果，就能夠幫助我們使用迭代式來描寫 θ 分成 n 個角的關係式 $F\left[m_{[\theta\to n]}\right]$(定理 1):

$$f_1(u,v)=uv=\csc^2\theta \text{ (依據引理 1)}; \quad f_2(u,v)=\frac{uv-\csc^2\theta}{u+v+2\cot\theta} \text{ (依據引理 2)}$$

$$F[m_{[\theta\to n]}]=f_1(f_2\cdots f_2(f_2(m_1,m_2),m_3),\cdots,m_{n-1}),m_n)=\csc^2\theta$$

而針對 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$ 及 θ_k 拆成 n 個角的關係式，雖然這樣的迭代式要化簡並不容易(看起來很複雜，尤其相對於正切函數和角公式)，但經過觀察、思考、沈澱想法以及不斷討論，我們最後也能用數學歸納法以及 $m_1,m_2,\ldots,m_n$ 的基本對稱式來證明與描述其關係，並證明它們

滿足特定的多變數丟番圖方程式(定理 2、3): $(c_0 = -1, c_1 = 0, c_n = 2\cot\theta\, c_{n-1} - \csc^2\theta\, c_{n-2})$

$\boxed{\text{定理 3}}$: 若 $n \geq 2$，平面上點 O、A、$M_i, 1 \leq i \leq n$ 共線，且 $\overline{OF} = 1, \overline{AM_i} = m_i, 1 \leq i \leq n,$

$\angle\mathrm{OAF} = \theta = \tan^{-1}\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \angle OM_iF,\ k \in \mathrm{N}$，則 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 滿足丟番圖方程式:

$$S_n(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \sum_{i=2}^{n} c_i S_{n-i}$$

而若 $k = 1$ (定理 2)，則其關係式為: $S_n(m_1, m_2, \ldots, m_n) =$

$$\sum_{i=1}^{[\frac{n+2}{4}]} (-1)^{i+1}(2^{2i-1}S_{n+2-4i}(m_1, \ldots, m_n) + 4^i S_{n+1-4i}(m_1, \ldots, m_n) + 4^i S_{n-4i}(m_1, \ldots, m_n))$$

另一方面，使用正切函數多角和角公式，也能幫助我們得到 θ 分成 n 個角的多變數丟番圖方程式，但是在其過程中，我們推廣到四角和角公式後發現變得有些複雜，當時還不知道正切函數的多角和角公式與基本對稱式的關係，直至縣級評審建議以複數極式來處理這個問題後，我們又請老師教導我們有關於複數以及極式表示等相關數學工具，此時要寫下 θ_k 拆成 n 個角的關係式也變得容易許多了(定理 4):

$\boxed{\text{定理 4}}$: 若 $\theta_k = \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i}$，則 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 滿足下列丟番圖方程式:

$$\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^j S_{n-2j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^j S_{n-1-2j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

接下來，我們又反過來利用一個角可以拆成更小的角之和，來找到無窮多個收斂到 $\frac{\pi}{2}$ 的無窮級數，例如: $a_1 = 1, a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1} + 2$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{a_n} = \frac{\pi}{2}$ 以及考慮 F_i 費氏數列第 i 項，則 $\sum_{i=0}^{\infty} \theta_{F_{2i+1}} = \frac{\pi}{2}$ 等，而利用我們得到的結論也能驗證像 Machin 公式 $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$或是文獻中已知的式子 $\sum_{i=0}^{\infty} \tan^{-1}\frac{2}{i^2} = \frac{3\pi}{4}$ 等，在過程裡，我們又學了遞迴數列、無窮級數、矩陣、二階行列式值等數學基礎知識。最後，依據我們所得的關係式並藉由電腦程式的幫助，我們可以得到我們之前想要的解答，此外，我們也留下將來還可以繼續研究的議題，例如研究更廣義的特殊角 $\theta_{p,q} = \tan^{-1}\frac{q}{p}, p, q \in N$之間的關係。最後，回應題目，其實定理 3 是使用邊長來描寫關係式，而定理 4 則是使用角度(徑)，所以真是三角形的邊角關係呢!!

陸、引注資料

[1]、亞瑟・班傑明(2017)。**數學大觀念**。貓頭鷹出版。

[2]、維基百科: 費氏數列。

W 斐波那契數列- 維基百科 ×

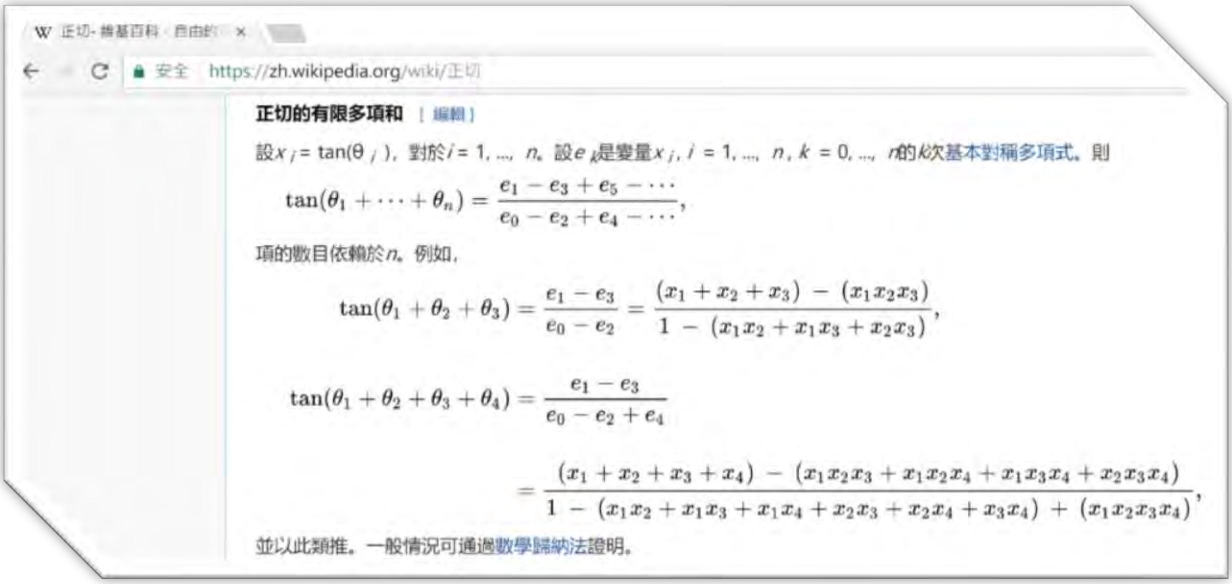
安全 | https://zh.wikipedia.org/wiki/斐波那契数列#構建一個矩陣方程

線性代數解法 [編輯]

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$$

[3]、維基百科: 正切。



W 正切- 維基百科，自由的 ×

安全 | https://zh.wikipedia.org/wiki/正切

正切的有限多項和 [編輯]

設 $x_i = \tan(\theta_i)$，對於 $i = 1, \ldots, n$。設 e_k 是變量 x_i，$i = 1, \ldots, n$，$k = 0, \ldots, n$ 的 k 次基本對稱多項式。則

$$\tan(\theta_1 + \cdots + \theta_n) = \frac{e_1 - e_3 + e_5 - \cdots}{e_0 - e_2 + e_4 - \cdots},$$

項的數目依賴於 n。例如，

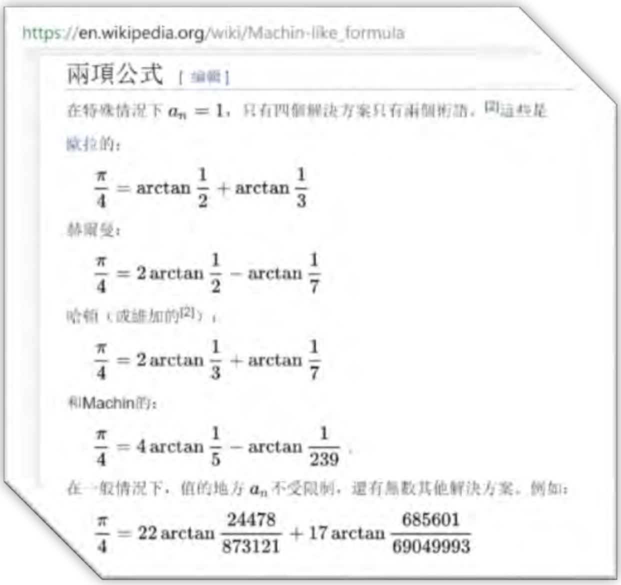
$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{e_1 - e_3}{e_0 - e_2} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1x_2x_3)}{1 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)},$$

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \frac{e_1 - e_3}{e_0 - e_2 + e_4}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)}{1 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + (x_1x_2x_3x_4)},$$

並以此類推。一般情況可通過數學歸納法證明。

[4]、維基百科: Machin-like Formula。



https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula

兩項公式 [編輯]

在特殊情況下 $a_n = 1$，只有四個解決方案只有兩個術語。[3]這些是歐拉的：

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

赫爾曼：

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7}$$

哈頓（或維加的[2]）：

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$$

和Machin的：

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

在一般情況下，值的地方 a_n 不受限制，還有無數其他解決方案。例如：

$$\frac{\pi}{4} = 22\arctan\frac{24478}{873121} + 17\arctan\frac{685601}{69049993}$$

[5]、R. S. Melham and A. G. Shannon, Inverse trigonometric and hyperbolic summation formulas involving generalized Fibonacci numbers, The Fibonacci Quarterly, 33(1):32-40, 1995

Hoggatt and Ruggles [9] produced some summation identities for Fibonacci and Lucas numbers involving the arctan function. Their results are of the same type as the striking result of D. H. Lehmer,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2i+1}}\right) = \frac{\pi}{4}, \qquad (1.6)$$

[6]、R. Frontczak, Further results on arctangent sums with applications to generalized Fibonacci numbers, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 23(1):39-53, 2017

$$\sum_{i=1} \tan^{-1}\left(\frac{2a}{a^2 i^2 - a^2 + 1}\right) = \pi - \tan^{-1}(a).$$

For $a = 1$ we get

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{2}{i^2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

【評語】030419

本作品從一個簡單的幾何問題開始，利用相似三角形的概念，作者發現當一個大角拆解為數個小角的總和時，其線段之間具有自然的遞迴關係且滿足由基本對稱式所形成的方程式。此外，本文也介紹了另外兩種利用正切函數和角公式或複數極式得到的更直接與快速的證明方法。這是有趣的作品，作者數學展現了不錯的研究能力。 可惜的是深度稍嫌不足，若能運用更深入的數學方法，應能得到更完整的結果。

作品海報

摘要

在本文中主要考慮 $\theta_i = \tan^{-1}\frac{1}{i}, i \in N$ 這些特殊角之間的關係。本文前段主要分別利用相似三角形性質與正切函數和角公式求解一個較大角 θ_k 拆解為數個角的關係式(使用遞迴關係、迭代式、基本對稱式表示)。後段則延伸探討、驗證其相關有趣的結果、應用等，例如：$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \sum_{i=1}^{\infty}\theta_{F_{2i+1}}$，其中 F_i 為費氏數列的第i項、Machin formula、$\frac{3\pi}{4} = \sum_{i=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{i^2}$。在本文中，我們利用了弳度取代度度量來描述角度並且使用複數、極式、遞迴數列、矩陣、行列式…等數學工具與GSP、excel、python程式等軟體工具，來實作、觀察、整理、歸納、推論與驗證我們的研究。

壹 研究動機

我在升國中一年級的暑假，參加校內舉辦的數學營隊，當時談到一個角度和的問題，引起我的一些想法，首先我想知道這一個題目有沒有其它證明方法？再來，如果是不同角度的話，會有解嗎，解法又是如何？最後我想把題目延伸，如果我把角度和個數增加，希望能找到一個模式去解決這種問題。

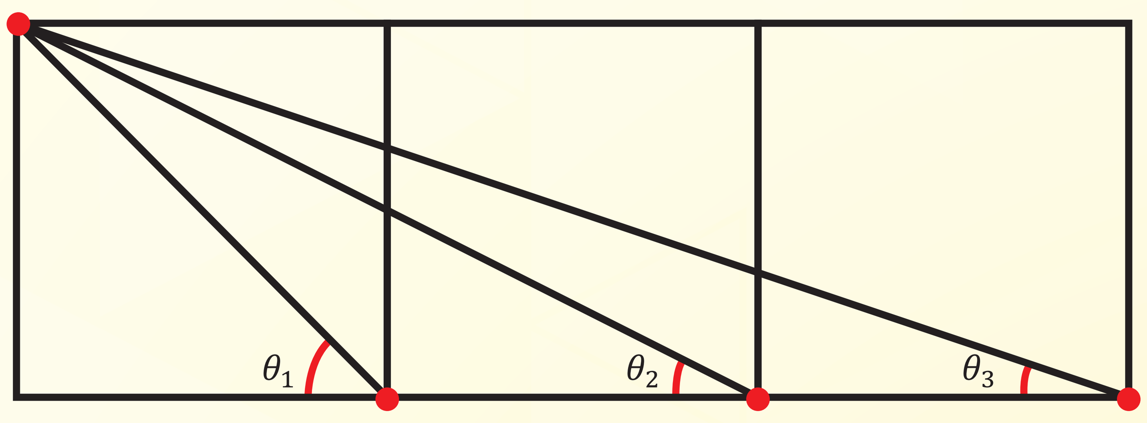


圖 一

這個題目為考慮在圖一中三個並列的正方形與其拉出來的三線段所形成的 θ_1、θ_2、θ_3 三個角，其和 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=?$ 營隊的老師說這一題曾經出現在高中的段考試題，他要我們大膽猜測答案是多少，用眼睛看應該是90度，後來運算出答案的結果的確是90度，課堂上老師用一種解法給我們看，他希望我們自己回家試試看有沒有其他解，也可以用GSP軟體來驗證自己的答案對不對，於是我展開了我們的研究。

貳 研究目的

- 探討圖一中 $\theta_1 = \theta_2 + \theta_3$ 的證明與 $\theta_k = \theta_{x_1} + \theta_{x_2}$ 的解。
- 探討 $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ 與 θ_k 拆成三個角以上的情形。
- 學習相關數學知識與其它延伸討論。
- 學習並利用GSP幾何畫板來實作、觀察、歸納。
- 利用excel程式與python程式操作得到相關研究結果。

參 研究設備及器材

GSP、excel、國中數學教材、高中數學教材、維基百科、數學大觀念[1]等。

肆 研究過程或方法

一、探討 $\theta_1 = \theta_2 + \theta_3$ 的解法：

（一）用相似三角形來解題（圖 二）

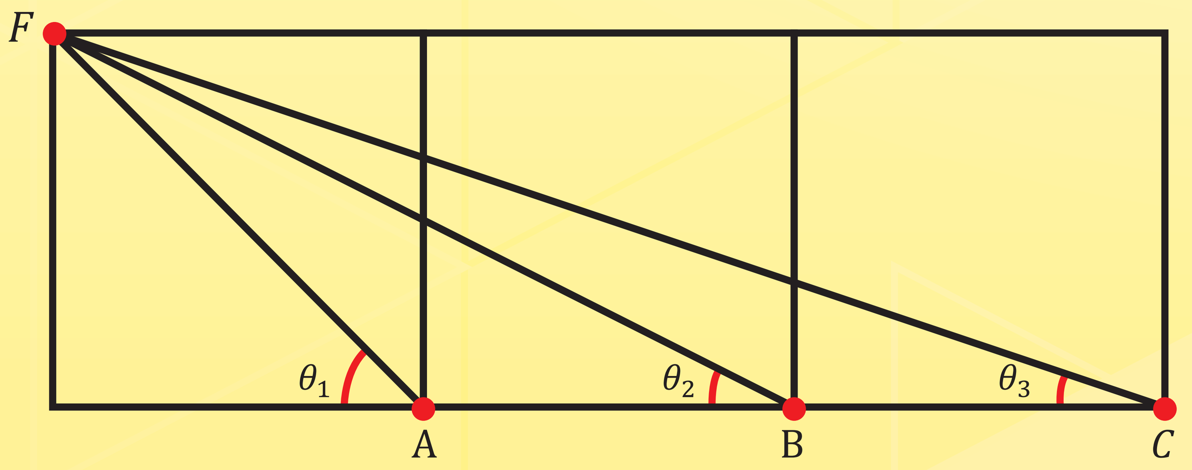


圖 二

（二）利用輔助作圖與等腰直角三角形來解題（圖 三）

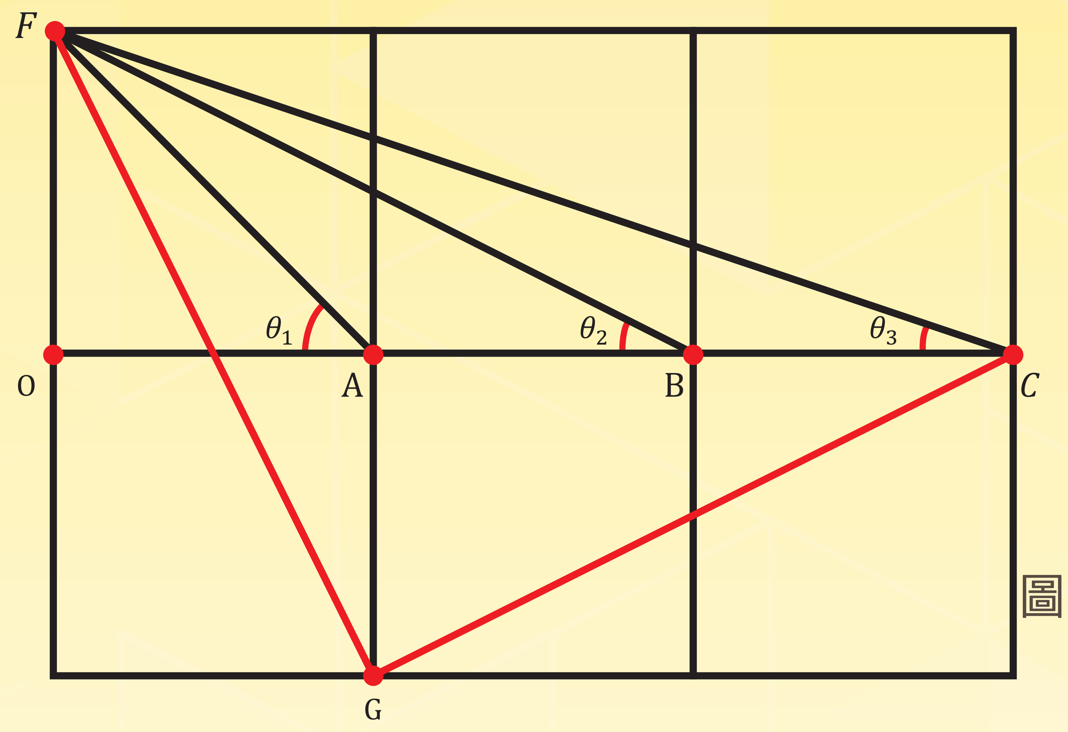


圖 三

（三）引入三角函數與反三角函數。

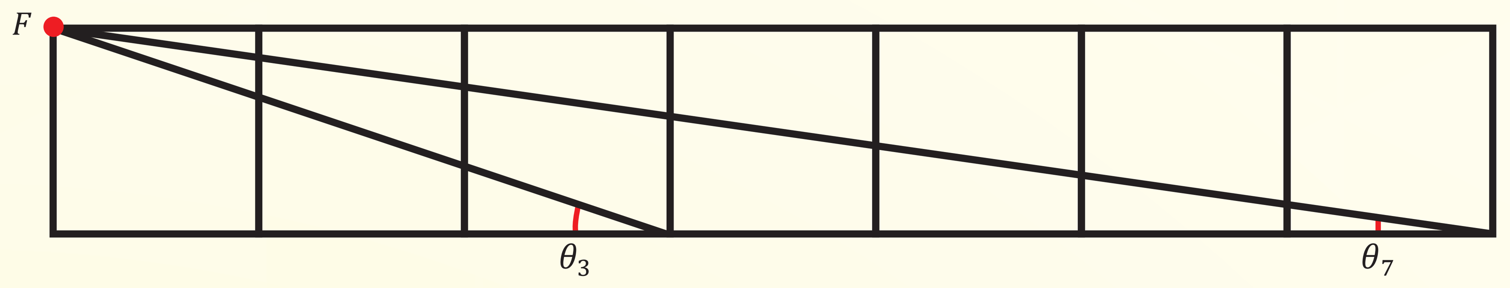
利用正切函數的和角公式來證明。

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

二、探討一個角為其它較小角之和：

接下來我們來延伸相關的討論，

例如：考慮 $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 、$\tan^{-1}\frac{1}{7}$ 的關係等等。



$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=??$

（一）我們先討論 θ 分成兩個小角

引理1：若 $\angle OAF = \theta = \tan^{-1}\frac{1}{k}, \overline{OF}=1, \overline{AB}=m, \overline{AC}=n$ 且 $\angle OAF = \angle OBF + \angle OCF$（如圖四），則 $mn = \csc^2\theta = 1+k^2$ 。

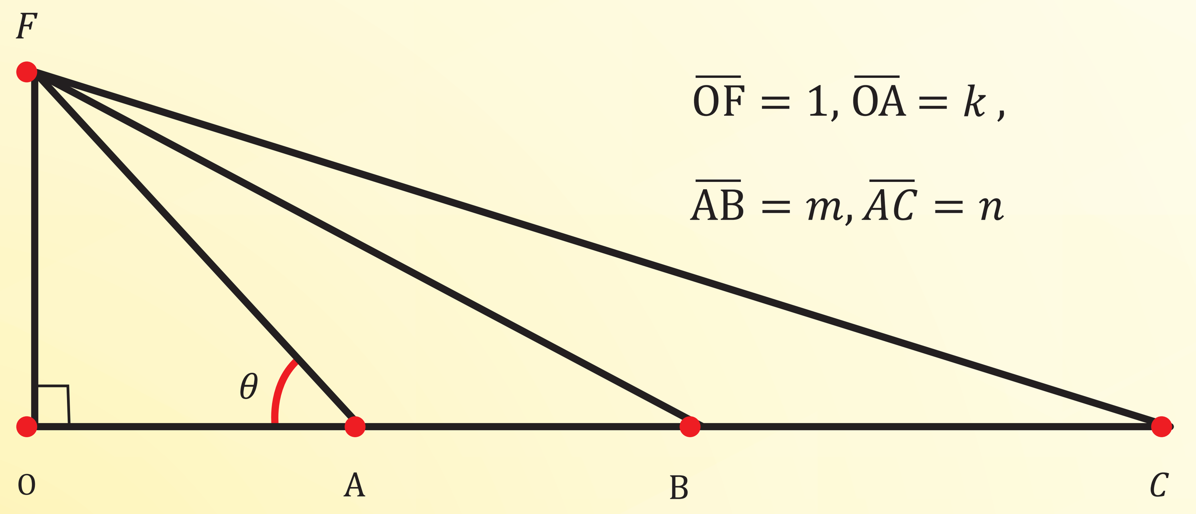


圖 四

為了能夠利用相似三角形的方法再繼續延伸我們想要探討的問題，引理2將對我們的延伸有幫助。

引理2：設 $\angle OAF = \theta, \overline{OF}=1, \overline{OA}=k, \overline{AB}=m, \overline{AC}=n, \overline{AG}=u$, $\angle OGF = \angle OBF + \angle OCF$，則 $u = \frac{mn-\csc^2\theta}{m+n+2\cot\theta}$。(如圖六)

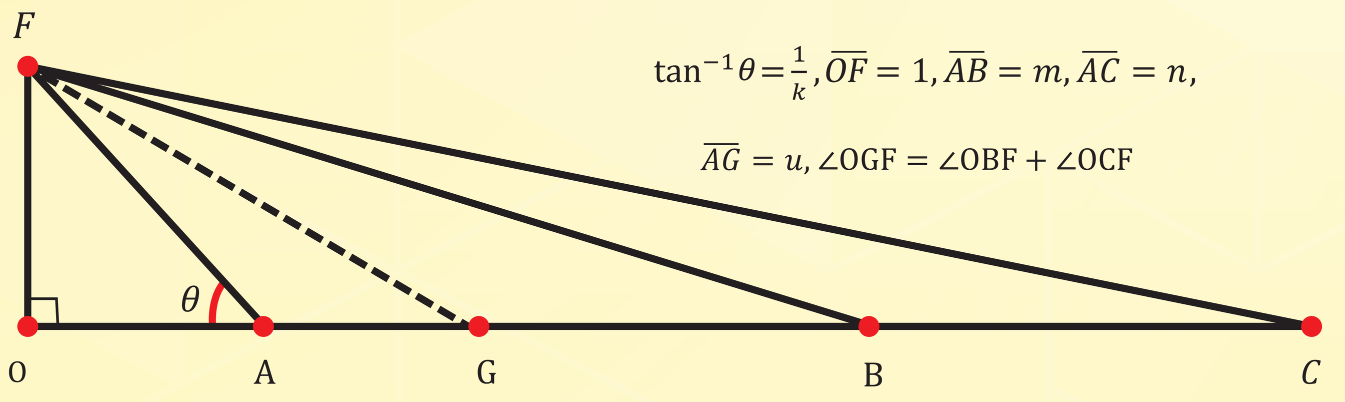


圖 六

（三） θ 分成 n 個小角的一般形式：我們先定義幾個與 θ 有關的關係式，符號 $F[m_{[\theta\to n]}]$：表示 θ 分成 n 個小角所需滿足的關係式，依據引理1，我們定義 $f_1(u,v) = uv = \csc^2\theta$，依據引理2，我們定義 $f_2(u,v) = \frac{uv-\csc^2\theta}{u+v+2\cot\theta}$，則我們可以得到定理1。(示意圖如圖八)

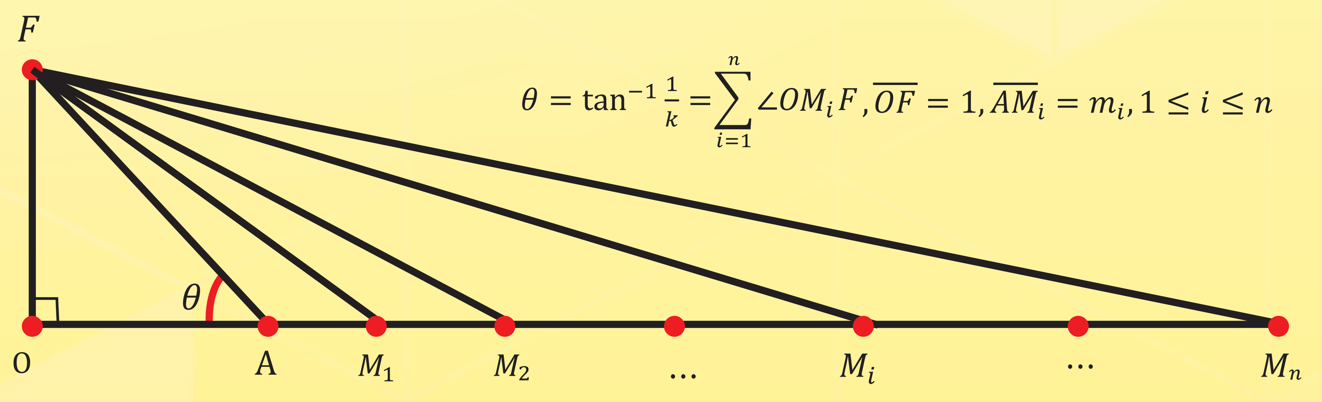


圖 八

為使定理述敘較為簡化，我們不失一般性令 $\overline{AM_i} < \overline{AM_{i+1}}$，$i \in N$
也就是 $m_i < m_{i+1}$。

定理1：若 $n \ge 3$，平面上點 O、A、$M_i, 1 \le i \le n$ 共線，
且 $\overline{OF} = 1, \overline{AM_i} = m_i, 1 \le i \le n,$
$\angle OAF = \theta = \tan^{-1}\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \angle OM_iF$，$\angle AOF = \frac{\pi}{2}$，則
$F[m_{[\theta\to n]}] = f_1(f_2 \cdots f_2(f_2(m_1, m_2), m_3), \cdots, m_{n-1}), m_n) = \csc^2\theta$

(註4：我們可以定 $F[m_{[\theta\to 2]}] = m_1m_2 = \csc^2\theta$)

推論1：

$$F[m_{[\theta\to 3]}] = f_1(f_2(m_1, m_2), m_3) = \frac{m_1m_2 - \csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta} m_3 = \frac{m_1m_2m_3 - m_3\csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta} = \csc^2\theta$$

$$F[m_{[\theta\to 4]}] = f_1(f_2(f_2(m_1, m_2), m_3), m_4) = \frac{\frac{m_1m_2 - \csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta} m_3 - \csc^2\theta}{\frac{m_1m_2 - \csc^2\theta}{m_1 + m_2 + 2\cot\theta} + m_3 + 2\cot\theta} m_4 = \csc^2\theta$$

推論2：若 $\theta = \frac{\pi}{4}$，則 $\cot\theta = 1, \csc^2\theta = 2$，我們可以得到關係式：

$$F\left[m_{[\frac{\pi}{4}\to 3]}\right] = \frac{m_1m_2m_3 - 2m_3}{m_1 + m_2 + 2} = 2$$

$$\Rightarrow m_1m_2m_3 - 2(m_1 + m_2 + m_3) = 4$$

$$F\left[m_{[\frac{\pi}{4}\to 4]}\right] = \frac{\frac{m_1m_2 - 2}{m_1 + m_2 + 2} m_3 - 2}{\frac{m_1m_2 - 2}{m_1 + m_2 + 2} + m_3 + 2} m_4 = 2$$

$$\Rightarrow m_1m_2m_3m_4 - 2\sum_{1\le i<j\le 4} m_im_j - 4\sum_{i=1}^{4} m_i = 4$$

定理2：若 $n \ge 2$，平面上點 O、A、$M_i, 1 \le i \le n$ 共線，
且 $\overline{OF} = 1, \overline{AM_i} = m_i, 1 \le i \le n,$
$\angle OAF = \theta = \frac{\pi}{4} = \sum_{i=1}^{n} \angle OM_iF, \angle AOF = \frac{\pi}{2}$，
則 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 滿足下列丟番圖方程式：
$S_n(m_1, m_2, \ldots, m_n)$

$$= \sum_{i=1}^{[\frac{n+2}{4}]} (-1)^{i+1} (2^{2i-1} S_{n+2-4i}(m_1, \ldots, m_n) + 4^i S_{n+1-4i}(m_1, \ldots, m_n) + 4^i S_{n-4i}(m_1, \ldots, m_n))$$

例：定理2 代入 $n = 7,8$ 可得 $\frac{\pi}{4}$ 分成七、八個角的關係式：

$$S_7(m_1, \cdots, m_7) = 2S_5(m_1, \cdots, m_7) + 4S_4(m_1, \cdots, m_7) + 4S_3(m_1, \cdots, m_7) - 8S_1(m_1, \cdots, m_7) - 16S_0(m_1, \cdots, m_7)$$

$$S_8(m_1, \cdots, m_8) = 2S_6(m_1, \cdots, m_8) + 4S_5(m_1, \cdots, m_8) + 4S_4(m_1, \cdots, m_8) - 8S_2(m_1, \cdots, m_8) - 16S_1(m_1, \cdots, m_8) - 16S_0(m_1, \cdots, m_8)$$

定理3：若 $n \ge 2$，平面上點 O、A、$M_i, 1 \le i \le n$ 共線，
$\angle AOF = \frac{\pi}{2}$ 且 $\overline{OF} = 1, \overline{AM_i} = m_i,$
$1 \le i \le n, \angle OAF = \theta = \tan^{-1}\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \angle OM_iF,$
$k \in N$，$c_n = c_{n-1}\, 2\cot\theta - c_{n-2}\csc^2\theta, n \ge 2,$
且 $c_0 = -1, c_1 = 0$，則 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 滿足丟番圖方程式：

$$S_n(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \sum_{i=2}^{n} c_i S_{n-i}(m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

三、探討一個角為其它較小角之和：三角函數和角公式

(一) 分成二個角：

$$\tan(\theta_{x_1} + \theta_{x_2}) = \frac{\tan\theta_{x_1} + \tan\theta_{x_2}}{1 - \tan\theta_{x_1}\tan\theta_{x_2}} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{1 - \frac{1}{x_1x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2 - 1} = \tan\theta_k = \frac{1}{k}$$

$\therefore\ x_1x_2 - 1 = (x_1 + x_2)k \Rightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2)k + k^2 = 1 + k^2 \Rightarrow$
$(x_1 - k)(x_2 - k) = 1 + k^2$ 丟番圖方程式

(二) 我們也可以使用正切和角公式兩次，而得到分成三個小角的條件。
給定定值 k 可以得到一個三變數的丟番圖方程式：

$$k(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 1) = x_1x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)$$

(三) 利用正切函數和角公式來得到 θ 分成 n 個小角的一般形式：
我們可以得到 θ_k 拆成 n 個角的條件(方程式7)：

$$\prod_{j=1}^{n}(x_j + i) = (\prod_{j=1}^{n}|z_j|)\left(\cos(\sum_{j=1}^{n}\theta_{x_j}) + i\sin(\sum_{j=1}^{n}\theta_{x_j})\right)$$

$$= (\prod_{j=1}^{n}|z_j|)\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} + i\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

依據方程式7以及 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的基本對稱式，我們可以得到 θ_k 分成 n 個角的多變數丟番圖方程式。(定理4)

定理4：若 $\theta_k = \sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i}$，則 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 滿足下列丟番圖方程式：

$$\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j S_{n-2j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^j S_{n-1-2j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

推論3：若 $\sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i} = \frac{\pi}{4} = \theta_1$，則 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 滿足下列丟番圖方程式：

$$\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j S_{n-2j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^j S_{n-1-2j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

四、收斂的無窮級數、其它推廣與未來展望

(一)不斷拆小角，我們可以得到一個收斂到 $\frac{\pi}{2}$ 的無窮級數：

$$\frac{\pi}{2} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + \theta_{14} + \theta_{184} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\theta_{a_n}$$

(二)使用某一種特別的拆角方式也能證明下列這個有趣的結果。
我們考慮**費式數列** $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n > 2$。

$$\frac{\pi}{2} = \tan^{-1}\frac{1}{1} + \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}\frac{1}{F_1} + \tan^{-1}\frac{1}{F_2} = \tan^{-1}\frac{1}{F_1} + \tan^{-1}\frac{1}{F_3} + \tan^{-1}\frac{1}{F_4}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{F_1} + \tan^{-1}\frac{1}{F_3} + \tan^{-1}\frac{1}{F_5} + \tan^{-1}\frac{1}{F_6} = \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\theta_{F_{2i+1}}$$

(三)驗證Machin公式：$\tan^{-1}\frac{1}{1} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} \Rightarrow 4\theta_5 = \theta_1 + \theta_{239}$。
而根據[4]中所言，現今仍然有許多學者在找尋類Machin公式，而其原因是這樣的公式竟然與圓周率的計算是相關的，Machin享有很高的數學聲望，因為在1706年他就能計算圓周率的值精確到小數後一百位，在三百多年前的時候，這真是一件困難的事情。

(四)我們另外證明 $\sum_{i=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{i^2} = \frac{3\pi}{4}$（引注資料6中的一個結果）
此外，我們可以不斷重複利用 $\theta_{k,2} = \theta_{p_1,2} + \theta_{p_2,2}$ 且總是假定，
$p_1 = k + 4$，$k \in N$，得到：

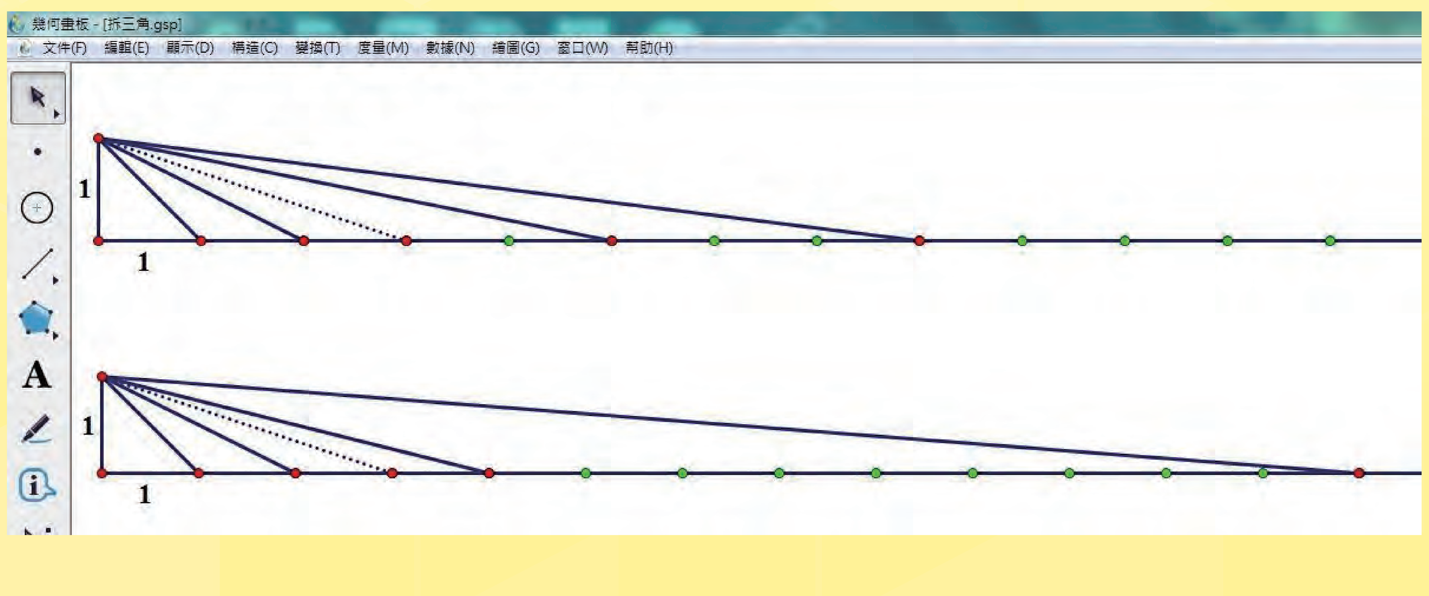
$$\tan^{-1}\frac{2}{4k} = \sum_{j=k}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{(2j+1)^2}$$

$$\tan^{-1}\frac{2}{4k+2} = \sum_{j=k}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{(2j+2)^2}$$

(五)未來我們也可以試著考慮更廣義的特殊角
$\theta_{p,q} = \tan^{-1}\frac{q}{p}, p, q \in N$ 之間的一些關係。

五、實作與觀察

(一)在科展研究過程中，我們為了了解一個角 θ 拆成 n 個角的可能性，我們利用了GSP這個幾何畫板來協助我們做觀察。
截取實作畫面舉例說明(圖十一)：



圖十一

(二)下列我們列舉出所有 θ_1 拆成三個角與四個角的所有解(不限相異角)：

x_1	2	2	3
x_2	4	5	3
x_3	13	8	7

$$\frac{\pi}{4}=\theta_1=\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}$$

x_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
x_2	4	4	4	4	5	5	6	6	7	3	3	3	4	4	5
x_3	14	15	18	23	9	13	7	8	8	8	9	12	5	7	7
x_4	183	98	47	30	73	21	68	31	18	57	32	17	47	13	8

$$\frac{\pi}{4}=\theta_1=\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}+\theta_{x_4}$$

(三)程式碼(python)：

下述程式碼將展示了運用對稱式結構將 $\frac{\pi}{4}$ 分成四個角，在分角時，因為我們依據原題的先天條件 $\theta_{x_1}<\theta_{x_2}<\theta_{x_3}<\theta_{x_4}$ 及格子點特性再透過反正切函數的計算來訂定邊長的上下限，最後窮盡各長度組合後得出答案。

```python
# theta divided into four angle
import math

# defined symmetric equation
def s4(x1,x2,x3,x4):
    return x1*x2*x3*x4
def s3(x1,x2,x3,x4):
    return x1*x2*x3+x1*x2*x4+x1*x3*x4+x2*x3*x4
def s2(x1,x2,x3,x4):
    return x1*x2+x1*x3+x1*x4+x2*x3+x2*x4+x3*x4
def s1(x1,x2,x3,x4):
    return x1+x2+x3+x4

# fix angle pi/4
angle=math.pi/4
for x1 in range(2,1+round(1/math.tan(angle/4))):
    for x2 in range(int(x1+1),1+round(1/math.tan((angle-math.atan(1/x1))/3))):
        if (angle-math.atan(1/x1)-math.atan(1/x2))>0:
            for x3 in range(x2+1,1+round(1/math.tan((angle-math.atan(1/x1)-math.atan(1/x2))/2))):
                if angle-math.atan(1/x1)-math.atan(1/x2)-math.atan(1/x3)>0:
                    x4=round(1/math.tan(angle-math.atan(1/x1)-math.atan(1/x2)-math.atan(1/x3)))
                    if s4(x1,x2,x3,x4)-s2(x1,x2,x3,x4)+1==s3(x1,x2,x3,x4)-s1(x1,x2,x3,x4):
                        print(x1,x2,x3,x4)
```

伍 結論

尋找 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\frac{\pi}{2}$ (或 $\theta_2+\theta_3=\theta_1=\frac{\pi}{4}$)的證明方法是我國一上學期小論文課題中的探討題目，在研究過程裡，除了原先所謂的標準手法，相似三角形外，我還找到了使用輔助線與畢式定理以及引入課程中尚未教導的三角函數的和角公式來證明，當時還使用了 $\sin(\alpha+\beta)$、$\cos(\alpha+\beta)$ 不過後來發現三個三角函數的和角公式彼此可以互相推導，因此在本文中就只留下使用正切函數的和角公式，另外也因為後續推導的部分利用正切與反正切的性質描寫起來是較為方便的。此外，在小論文裡尚未使用弳度這個描述角度的工具，也使得寫角度的時候常常需要使用 ∠OAF、∠OBF、⋯這樣的描述，而在本文中顯然使用了弳度後，除了描寫角度變的更簡易，也使得和角公式成為可行的運算。

本文中，利用平面幾何中相似三角形的性質，能得到引理 2。

這個引理講述了，若一個角 $\angle OGF=\angle OBF+\angle OCF<\theta$，則 $\overline{AG}$ 的距離可以用 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 及 θ 來表示，而不斷使用引理2，以及引理1(相似三角形的基本性質)的結果，就能夠幫助我們使用迭代式來描寫 θ 分成 n 個角的關係式 $F\left[m_{[\theta\to n]}\right]$ (定理1):

$f_1(u,v)=uv=\csc^2\theta$ (依據引理1)；

$f_2(u,v)=\frac{uv-\csc^2\theta}{u+v+2\cot\theta}$ (依據引理2)

$$F[m_{[\theta\to n]}]=f_1(f_2\cdots f_2(f_2(m_1,m_2),m_3),\cdots,m_{n-1}),m_n)\ =\csc^2\theta$$

而針對 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$ 及 θ_k 拆成 n 個角的關係式，雖然這樣的迭代式要化簡並不容易(看起來很複雜，尤其相對於正切函數和角公式)，但經過觀察、思考、沈澱想法以及不斷討論，我們最後也能用數學歸納法以及 $m_1,m_2,\dots,m_n$ 的基本對稱式來證明與描述其關係，並證明它們滿足特定的多變數丟番圖方程式(定理2、3)：

$(c_0=-1,c_1=0,c_n=2\cot\theta\, c_{n-1}-\csc^2\theta\, c_{n-2})$

定理3：若 $n\geq 2$，平面上點 O、A、$M_i,1\leq i\leq n$ 共線，

且 $\overline{OF}=1,\overline{AM_\imath}=m_i,1\leq i\leq n,$

$\angle OAF=\theta=\tan^{-1}\frac{1}{k}=\sum_{i=1}^{n}\angle OM_iF,\ k\in N$，

則 $m_1,m_2,\dots,m_n$ 滿足丟番圖方程式：

$$S_n(m_1,m_2,\dots,m_n)=\sum_{i=2}^{n}c_iS_{n-i}$$

而若 $k=1$ (定理2)，則其關係式為： $S_n(m_1,m_2,\dots,m_n)=$

$$\sum_{i=1}^{[\frac{n+2}{4}]}(-1)^{i+1}(2^{2i-1}S_{n+2-4i}(m_1,\dots,m_n)$$

$$+4^iS_{n+1-4i}(m_1,\dots,m_n)+4^iS_{n-4i}(m_1,\dots,m_n))$$

另一方面，使用正切函數多角和角公式，也能幫助我們得到 θ 分成 n 個角的多變數丟番圖方程式，但是在其過程中，我們推廣到四角和角公式後發現變得有些複雜，當時還不知道正切函數的多角和角公式與基本對稱式的關係，直至縣級評審建議以複數極式來處理這個問題後，我們又請老師教導我們有關於複數以及極式表示等相關數學工具，此時要寫下 θ_k 拆成 n 個角的關係式也變得容易許多了(定理4):

定理4：若 $\theta_k=\sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i}$，則 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 滿足下列丟番圖方程式:

$$\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^jS_{n-2j}(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$=k\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^jS_{n-1-2j}(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

接下來，我們又反過來利用一個角可以拆成更小的角之和，來找到無窮多個收斂到 $\frac{\pi}{2}$ 的無窮級數，例如：$a_1=1,a_n=a_{n-1}^2-a_{n-1}+2$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\theta_{a_n}=\frac{\pi}{2}$ 以及考慮 F_i 費氏數列第 i 項，則 $\sum_{i=0}^{\infty}\theta_{F_{2i+1}}=\frac{\pi}{2}$ 等，而利用我們得到的結論也能驗證像Machin公式 $\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ 或是文獻中已知的式子 $\sum_{i=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2}{i^2}=\frac{3\pi}{4}$ 等，在過程裡，我們又學了遞迴數列、無窮級數、矩陣、二階行列式值等數學基礎知識。最後，依據我們所得的關係式並藉由電腦程式的幫助，我們可以得到我們之前想要的解答，此外，我們也留下將來還可以繼續研究的議題，例如研究更廣義的特殊角 $\theta_{p,q}=\tan^{-1}\frac{q}{p}$,$p,q\in N$ 之間的關係。最後，回應題目，其實定理3是使用邊長來描寫關係式，而定理4則是使用角度(弳)，所以真是三角形的邊角關係呢!!

陸 引注資料

[1]、亞瑟・班傑明(2017)。數學大觀念。貓頭鷹出版。

[2]、維基百科：費氏數列。

[3]、維基百科：正切。

[4]、維基百科：Machin-like Formula。

[5]、R. S. Melham and A. G. Shannon, Inverse trigonometric and hyperbolic summation formulas involving generalized Fibonacci numbers, The Fibonacci Quarterly, 33(1):32-40, 1995

[6]、R. Frontczak, Further results on arctangent sums with applications to generalized Fibonacci numbers, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 23(1):39-53, 2017