中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030418

n 進位制反向倍數知多少？！

學校名稱：桃園市立建國國民中學

作者：	指導老師：
國二 張仕揚	莊健暉

關鍵詞：反向倍數、迴文數、n 進位制

摘要

本文透過代數方法先討論驗證 10 進位制反向倍數的性質，進而用其探討方式推廣找出 3 進位制、4 進位制、5 進位制等的反向倍數，從中歸納、假設、驗證 n 進位制反向倍數的性質，如 n 進位制二位數、三位數、四位數一般式、數種反向倍數的基本型與組合型型態、n 進位制四位數反向倍數之判別法等。並推導驗證 n 進位制中，a 倍的反向倍數四位數 10C $\boxed{a}$的$(n，a)$遞迴關係式及與其進位值數列的函數關係。且利用本文推論定理撰寫找出 n 進位制 m 位數反向倍數演算法與程式，及找出二位數與四位數的 n 進位制反向倍數基本型的原型，更是此次研究結果的一大特色。

壹、研究動機

國文課時，老師談到回文的概念，這使我懷疑既然國文中的回文如此有趣，那麼數學中是否也有跟國文一樣的東西呢？經過查詢，找到「迴文數」這個非常奇特的概念與其性質，接著想更進一步去瞭解是否也有著其他更有趣的數與其相關。課堂上在不經意的情形下我將 369 倒敘寫成 963，接著思索 963 是否是 369 的倍數，發現並不是。便繼續試著將所有二位數、三位數的數字都條列出來檢驗，發現除了迴文數才有倍數關係，跟原先預期原數與倒敘書寫的新數字為倍數關係(2 倍以上)應該會有很多個的想法大大不同，而這經驗便是此次科展所討論「反向倍數」的發端。並在討論驗證 10 進位制反向倍數到一段時間後，老師給予我建議去思索 n 進位制的反向倍數是否會如 10 進位制一樣的情形，或有其他的特例產生。在發現 n 進位制中，$\boxed{\text{n-1}}$ 倍的反向倍數四位數 10$\boxed{\text{n-2}}$$\boxed{\text{n-1}}$，其乘以(n 的因數)倍後，也會是反向倍數的基本型。在這驚訝的發現中，開啟了這一段探索未知反向倍數世界的新旅程，讓人既好奇、期待，又怕受傷害。

貳、研究目的

一、找出 10 進位制之反向倍數，並探討其性質。
二、找出 n 進位制之反向倍數。
三、推論 n 進位制之 m 位數反向倍數的一般式。
四、探討驗證 n 進位制之反向倍數的性質。

參、研究器材

紙、筆、電腦

肆、研究步驟與討論

一、名詞定義

定義 1. 因數、倍數

對於a、b、c三個非零整數，若滿足$a \div b = c$，則說a可以被b整除，也得到$a = b \times c$，此時a是b和c的倍數，b和c是a的因數。

定義 2. 反向數

若某正整數的所有位數數字按相反順序重新排列後，所得到的數稱為原數的反向數。

定義 3. 迴文數(palindromic number)

若某正整數的反向數和原數相同，則稱為迴文數。例如：9、33、191、4774、12321 等。

定義 4. 反向倍數(本文探討之反向倍數暫且排除迴文數的情況)

若某正整數的反向數，其位數與原數一樣，且恰好是原數的正整數倍，則稱其為反向倍數。例如：110 的反向數 11，因其反向數的位數為 2 位數，與原數的 3 位數不同，所以 110 沒有反向倍數；2018 的反向數是 8102，8102 並非 2018 的正整數倍，所以 2018 沒有反向倍數。但如 6 的 1 倍是 6，777 的 1 倍是 777；1234321 的 1 倍是 1234321，這種對稱情況 1 倍的反向倍數即是迴文數，太過顯然。**因此在本文反向倍數的尋找與性質探討中，暫且排除迴文數的情況**。**若 A⋯B 為 m 位數，其α倍的反向數為反向倍數，則我們稱 A⋯B 為α倍的反向倍數。**

定義 5. n 進位制

進位制是一種記數方式，亦稱進位計數法或位值計數法。利用這種記數法，可以使用有限種數字符號來表示所有的數值。一種進位制中可以使用的數字符號的數目稱為這種進位制的基數或底數。若一個進位制的基數為 n，即可稱之為 n 進位制。

本文中，除了討論 10 進位制，亦會使用到基數 n>10 之 n 進位制，基於驗算與閱讀的便利，基數 n>10 之 n 進位制可使用數字符號定義為 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、$\boxed{10}$、$\boxed{11}$、$\boxed{12}$、$\boxed{13}$、…、$\boxed{n-2}$、$\boxed{n-1}$。且除 10 進位制外，其他 n 進位制數字表示法中，會將其基數標示於數字的右下角，以利辨別與進位制之數值轉換。例如：8 進位制，10732_8。

二、文獻探討-10 進位制反向倍數探討

從國一下到暑假結束，在探討 10 進位制反向倍數時，已發現四位數、五位數、六位數之反向倍數，也有初步基本型與組合型反向倍數之模型結構雛形，當時尚未閱讀到數學傳播之文獻。以下以文獻作者之探討流程進行撰寫及摘要，但部分證明會與文獻不同，則為我當時驗證之方法。

（一）找出 10 進位制最小的反向倍數

1. 10 進位制中，二、三位數的反向倍數

使用窮舉法逐一檢驗二、三位數是否為反向倍數，扣除個位數是 0 及迴文數，而得出引理 A。

【引理 A】不存在 10 進位制的二、三位數反向倍數。(張進安[1]，引理一、定理二)

2. 10 進位制中，α倍的反向倍數。

在驗證三位數時，發現可以從三位數的首位與末位數字的關係，即可判別是否為反向倍數，因此試著改從原數字的倍數方向著手。ABC× α =CBA，(A≠0，C≠0，$\alpha \in \mathbb{N}$)，因為本文已經暫且排除 1 倍的自我反向倍數(迴文數)，而且如果$\alpha \geq 10$，則 ABC× α會進位成四位數，不可能是 ABC 的反向倍數，所以$\alpha \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$。因此我們只要從這 8 種倍數來討論反向倍數即可。

假設 B⋯A 是 A⋯B 的反向倍數(m 位數)，且 B⋯A 是 A⋯B 的 2 倍，寫成直式如下：

$$\begin{array}{r} A\cdots B \\ \times \quad 2 \\ \hline B\cdots A \end{array}$$

從直式中可以得到以下關係：

(1) 最高位來看，因為 2A 沒有進位，所以 2A<10，且 2A≤B。
A∈{1,2,3,4}，B∈{2,3,4,⋯，9}

(2) 從個位來看，因為 B>A，所以 2B=10q+A，$q \geq 1$，且 A 為偶數。

(3) 因為$2 \times 10 > 2B = 10q + A > 10q$，所以$2 > q$ ，q∈{1}。
即計算 A⋯B 的 2 倍，每位數字乘以 2，進位最多為 1。

由(1)、(2)、(3)得知：A、B 無解

因此可得到 $\boxed{\text{10 進位制中，不存在 2 倍的反向倍數}}$。

接著繼續討論 3、4、5、6、7、8、9 倍的反向倍數，便可得出以下定理與推論。

【引理 B】10 進位制中，不存在 2、3、5、6、7、8 倍的反向倍數。(張進安[1]，引理二、三、四)

【定理 A】10 進位制中，反向倍數必是 1 倍、4 倍或 9 倍。(張進安[1]，定理一)

【推論 A】10 進位制中，反向倍數則必是 2…8×4=8…2 或 1…9×9=9…1 這兩型。(張進安[1]，推論一)

3. 便會發現所討論的反向倍數真的很罕見，接著討論四位數：

(1)令 2CD8×4=8DC2 成立，C∈{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}，D∈{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}。

$$(2000+100C+10D+8)\times 4=8000+400C+40D+32$$

$$8000+400C+40D+32=8000+100D+10C+2$$

$$C=\frac{2D-1}{13}$$

因為 C、D 都是一位數正整數或 0，所以(C，D) =(1，7)為唯一解。

因此，發現 2178×4=8712 是 4 倍的第一個反向倍數。

(2)**同理發現 1089×9=9801 是 9 倍的第一個反向倍數。**

從(1)、(2)可推論出定理 B。

【定理 B】10 進位制中，四位數反向倍數只有兩個:1089 及 2178 的反向數。(張進安[1]，定理三)

（二）找出 10 進位制的五位數反向倍數

依據推論 A，10 進位制中，若存在反向倍數則必是 2…8×4=8…2 或 1…9×9=9…1 這兩型。接著利用它來找五位數的反向倍數。

(1)假設 2CDE8×4=8EDC2 成立，C、D、E 都是一位數正整數或 0。

從萬位數的 20000×4=80000，可知千位數的 4C 明顯沒有進位，所以 C 只能是 0、1 或 2。

① 若 C=0

$$\begin{array}{r} 20DE8 \\ \times\qquad 4 \\ \hline 8ED02 \end{array}$$

則$(10E+8)\times 4\equiv 2 \pmod{100}$

$$40E+32\equiv 2 \pmod{100}$$

$$40E+30\equiv 0 \pmod{100}$$

$$4E+3\equiv 0 \pmod{10}$$

又 E 是一位數正整數或 0，所以 E 無解。

② 若 C=2

$$\begin{array}{r} 22DE8 \\ \times\qquad 4 \\ \hline 8ED22 \end{array}$$

則$(10E+8)\times 4\equiv 22 \pmod{100}$

$$40E+32\equiv 22 \pmod{100}$$

$$40E+10\equiv 0 \pmod{100}$$

$$4E+1\equiv 0 \pmod{10}$$

又 E 是一位數正整數或 0，所以 E 無解。

③ 若 C=1

$$\begin{array}{r} 21DE8 \\ \times\qquad 4 \\ \hline 8ED12 \end{array}$$

則$(10E+8)\times 4\equiv 12 \pmod{100}$

$$40E+32\equiv 12 \pmod{100}$$

$$40E+20\equiv 0 \pmod{100}$$

$$4E+2\equiv 0 \pmod{10}$$

又 E 是一位數正整數或 0 且從千位數分析得知 E≥4×1，所以 E=7。

由①、②、③可得：

$$\begin{array}{r} 21D78 \\ \times\qquad 4 \\ \hline 87D12 \end{array}$$

$$(21000+100D+78)\times 4=87000+100D+12$$

$$84000+400D+312=87000+100D+12$$

$$300D=2700$$

$$D=9$$

檢驗 21978×4=87912 正確無誤。

同理可得**五位數反向倍數只有 21978、10989 的反向數兩個**。在四位數、五位數反向倍數推論中，發現分析千位數與十位數的規律，可得到推論 B。

【推論 B】10 進位制中，反向倍數則必是 21…78×4=87…12 或 10…89×9=98…01 這兩型。(張進安[1]，推論二)

（三）找出 10 進位制的六位數、七位數反向倍數

1. 六位數反向倍數只有 219987、109989 的反向數兩個。七位數反向倍數只有 2199987、1099989 的反向數兩個。
2. 從六位數、七位數反向倍數的分析討論中，懷疑是否在 21 及 78 中間插入任意幾個 9，得 2199⋯9978，或在 10 及 89 中間插入任意幾個 9，得 1099⋯9989，其反向數都是反向倍數。因而論證定理 C

【定理 C】1089、10989、109989、109⋯989 及 2178、21978、219978、219⋯978 的反向數都是 10 進位制反向倍數的基本型。(張進安[1]，定理四)

（四）10 進位制中，m 位數反向倍數的性質

1. 從定理 C 中，利用代數方法的驗證，從四位數 2178、1089 的反向數到七位數的 2199978、1099989 的反向數，基本型反向倍數是唯一滿足條件的反向倍數。但是到了八位數，便會發現將 21782178 串排在一起的反向數也是一個八位數的反向倍數，2178002178 的反向數是十位數的反向倍數，109890010989 的反向數是十二位數的反向倍數。所以八位數的 4 倍反向倍數至少有 21999978 及 21782178 的反向數兩組；9 倍反向倍數至少有 10999989 及 10891089 的反向數兩組。所以可以更進一步的推論如下。

【推論 C】10 進位制中，可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。(張進安[1]，推論三)

因為定理 C 的 m 位數基本型反向倍數不會有進位到(m+1)位數的情形產生，因此也就是說只要把同樣 4 倍或同樣 9 倍的基本型反向倍數加上任意個 0，作成左右對稱的串排，都是原倍數的反向倍數。因此可將 10 進位制中的反向倍數分為下列兩種類型：

(1)基本型：1089、10989、109989、109⋯989 及 2178、21978、219978、219⋯978。

(2)組合型：

①**同樣 4 倍或同樣 9 倍的基本型反向倍數串排**

<u>1089</u>1089、<u>1089</u>1089 1089、<u>1089</u>1089⋯1089 1089

<u>2178</u>2178、<u>2178</u>2178 2178、<u>2178</u>2178⋯2178 2178

<u>10989</u>10989、<u>10989</u>10989⋯10989 10989

②**把同樣 4 倍或同樣 9 倍的基本型反向倍數加上任意個 0，作成左右對稱的串排**

1089<u>0</u>1089、1089<u>00</u>1089、1089<u>0⋯0</u>1089；2178<u>0</u>2178、2178<u>00</u>2178、2178<u>0⋯0</u>2178

10989<u>0</u>10989、10989<u>00</u>10989、10989<u>0⋯0</u>10989

③**混合①、②將同樣 4 倍或同樣 9 倍的組合型反向倍數組合或加上任意個 0，作成左右對稱的串排。**如 10891089<u>000</u>10891089、1089<u>10989</u>1089、21978<u>0</u>2178<u>0</u>21978

2. 從因數分解方向來探討 4 倍或 9 倍的基本型反向倍數

(1) 1089 $= 3^2 \times 11^2$ ； 2178 $=$ 1089$\times$ 2 $= 2 \times 3^2 \times 11^2$

因為 4 倍或 9 倍的基本型反向倍數是在 21 及 78 中間插入任意幾個 9，得 2199⋯9978，或在 10 及 89 中間插入任意幾個 9。又 2178 是 1089 的 2 倍，且

1099⋯9989×2

$=(10\times 10^{m-2}+99\cdots99\times 10^2+89)\times 2$ (中間 99⋯99 恰有 m-4 位)

$=20\times 10^{m-2}+199\cdots998\times 10^2+178$ (中間 99⋯99 恰有 m-5 位)

$=(20+1)\times 10^{m-2}+(99\cdots998+1)\times 10^2+78$

$=21\times 10^{m-2}+99\cdots99\times 10^2+78$ (中間 99⋯99 恰有 m-4 位)

$=2199\cdots9978$

因此我們稱 $\boxed{\text{1089 為 10 進位制反向倍數基本型的原型}}$。接著我們只需討論 1089 所產生的基本型反向倍數性質，便可運用至 2178 所產生的基本型反向倍數。

(2) $1089 = 3^2 \times 11^2$

$10989 = 3^2 \times 11 \times 111$

$109989 = 3^2 \times 11^2 \times 101$

$1099989 = 3^2 \times 11 \times 11111$

$10999989 = 3^2 \times 11^2 \times 10101$

$109999989 = 3^2 \times 11 \times 1111111$

$1099999989 = 3^2 \times 11^2 \times 1010101$

由此可知，在 10 及 89 中間插入奇數個 9 與偶數個 9，其因數分解有其規律性，整理如下：

① 在 10 及 89 中間插入奇數個 9。若 109⋯989 為 m 位數，中間插入的 9 有奇數個，則 109⋯989= $3^2 \times 11 \times 11\cdots1$ (其中 11⋯1 為 m-2 位數)

② 在 10 及 89 中間插入偶數個 9。若 109⋯989 為 m 位數，中間插入的 9 有偶數個，則 109⋯989= $3^2 \times 11^2 \times 101\cdots01$ (其中 101⋯01 為 m-3 位數)

由(1)、(2)可以知道 4 倍或 9 倍的基本型反向倍數可以從因數分解的規律來反推回原數字，但其發現較不如在找出 10 進位制反向倍數$1089 \times 9 = 9801$時那麼有趣。

（五）探討與應用

1. 在文獻中作者採用探討首位與末位數字的關係，即可判別是否為反向倍數。我們將其方法利用到 n 進位制，如下：

n 進位制$(n \geq 2)$

若 m 位數 A⋯B 為a倍的反向倍數$(m \geq 2)$

$\mathbf{A \in \{1,2,3,\dots,n-1\}}$、$\mathbf{B \in \{2,3,4,\dots,n-1\}}$

$\boldsymbol{a \in \{2,3,\dots,n-1\}}$

$$\begin{array}{r} \mathrm{A\cdots B} \\ \times \quad a \\ \hline \mathrm{B\cdots A} \end{array}$$

則 $\begin{cases} Aa \leq B \\ Ba = nq + A \\ na > nq + A > nq \rightarrow a > q \end{cases}$

$\boldsymbol{q \in \{1,2,\dots,a-1\}}$

但在 12 進位制探討首位與末位數字的關係時，m 位數$1\cdots7_{12}$的7_{12}倍滿足上述方法，再使用代數方式去推導其反向倍數時，驗證出是不存在$1\cdots7_{12}$的7_{12}倍反向倍數。

若將上述判別反向倍數的首位與末位數字的關係式，加入探討其進位值，可得推論 1。

n 進位制$(n \geq 2)$

若 m 位數 AX⋯YB 為a倍的反向倍數

A、X、Y $\in \{1,2,3,\dots,n-1\}$

B $\in \{2,3,4,\dots,n-1\}$

$a \in \{2,3,\dots,n-1\}$

$$\begin{array}{lcccccc} \text{進位} & q_{m-1} & q_{m-2} & & q_2 & q_1 & \\ & & \mathrm{A} & \mathrm{X} & \cdots\cdots\cdots & \mathrm{Y} & \mathrm{B} \\ \times & & & & & & a \\ \hline & & \mathrm{B} & \mathrm{Y} & \cdots\cdots\cdots & \mathrm{X} & \mathrm{A} \end{array}$$

則 $\begin{cases} Ba = nq_1 + A \quad\dots\dots\dots(1) \\ Ya + q_1 = nq_2 + X \quad\dots\dots\dots(2) \\ Xa + q_{m-2} = nq_{m-1} + Y \quad\dots\dots\dots(3) \\ Aa + q_{m-1} = B \quad\dots\dots\dots(4) \end{cases}$

由(1)式：$na > Ba = nq_1 + A \rightarrow a > q_1 > 0$

由(2)式：$(n-1)a + a > Ya + q_1 = nq_2 + X$

$\rightarrow a > q_2 \geq 0$

同理可得，$0 \leq q_3$、q_4、⋯、q_{m-2}、$q_{m-1} < a$

$q_1 \in \{1,2,\dots,a-1\}$

q_2、⋯、q_{m-2}、$q_{m-1} \in \{0,1,2,\dots,a-1\}$

【推論 1】n 進位制$(n \geq 2)$，若 m 位數 A⋯B 為a倍的反向倍數$(m \geq 2)$，則其每一位進位值必定小於a。$\mathbf{A \in \{1,2,3,\dots,n-1\}}$，$\mathbf{B \in \{2,3,4,\dots,n-1\}}$，$\boldsymbol{a \in \{2,3,\dots,n-1\}}$

接著，驗證 12 進位制不存在$1\cdots\cdots7_{12}$的7_{12}倍反向倍數。

證明：探討 12 進位制首位與末位數字的關係時，可得 m 位數反向倍數可能是$1\cdots7_{12}$的7_{12}倍。

(1) $17_{12}\times7_{12}\neq71_{12}$，表示二位數沒有反向倍數為$1\cdots\cdots7_{12}$的$7_{12}$倍。

(2) 令三位數$1C7_{12}$為7_{12}倍的反向倍數，可得 C 不存在。
表示三位數沒有反向倍數為$1\cdots\cdots7_{12}$的7_{12}倍。

(3) 令 m 位數$1X\cdots\cdots Y7_{12}$為7_{12}倍的反向倍數。$(m\geq4)$

$$\begin{array}{lcccccc} \text{進位} & q_{m-1} & q_{m-2} & & q_2 & q_1 & \\ & 1 & X & \cdots\cdots\cdots & Y & 7 \\ \times & & & & & 7 \\ \hline & 7 & Y & \cdots\cdots\cdots & X & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 7\times7=12q_1+1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 7Y+q_1=12q_2+X \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ 7X+q_{m-2}=12q_{m-1}+Y \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \\ 7\times1+q_{m-1}=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4) \end{cases}$$

由(1)、(4)得：$q_1=4$，$q_{m-1}=0$ 代入(2)、(3)

$$\begin{cases} 7Y+4=12q_2+X \\ 7X+q_{m-2}=Y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X=\frac{12q_2-7q_{m-2}-4}{48} \\ Y=\frac{84q_2-q_{m-2}-28}{48} \end{cases}$$

當$q_2=5$，$q_{m-2}=8$時，$X=0$，$Y=8$

但從推論 1 知，q_2、$q_{m-2}<7$

因此 12 進位制不存在$1\cdots\cdots7_{12}$的7_{12}倍反向倍數。

因此若採用文獻中只探討首位與末位數字的關係，僅能是一開始篩選 n 進位制反向倍數可能性的方式，並不能如作者那樣直接推斷出定理 A。

2. 在 10 進位制中，2178 ＝ 1089 × 2，我們稱 1089 為 10 進位制反向倍數基本型的原型。因而在後續的 n 進位制反向倍數的探討中，會以找到有類似反向倍數基本型的原型為主要方向之一。

三、n 進位制反向倍數探討

（一）n 進位制反向倍數

n 進位制的表示如定義 5 所示，以 n 為基數的記數系統表示的數字，可使用數字符號定義為 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、$\boxed{10}$、$\boxed{11}$、$\boxed{12}$、$\boxed{13}$、…、$\boxed{n-2}$、$\boxed{n-1}$。其數字之值可轉換成不同進位制的數字進行表示。

例如：$27_{10}=2\times10^1+7\times10^0=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0=11011_2$

1. 2 進位制反向倍數

在 2 進位制中，若要滿足反向倍數的不進位制性質，只有1_2倍的反向倍數，亦即是迴文數。例如：$11011_2\times1_2=11011_2$。因為本文已經暫且排除 1 倍的自我反向倍數(迴文數)，即**在 2 進位制中，沒有基本型反向倍數**。

2. 3 進位制反向倍數

(1)在找出 3 進位制反向倍數時，可採用 10 進位制反向倍數的討論方式，只需討論2_3倍。
假設 $B\cdots A_3$是 $A\cdots B_3$的反向倍數(m 位數)，且 $B\cdots A_3$是 $A\cdots B_3$的2_3倍，我們將其寫成直式如下：(討論中為閱讀方便，將 n 進位制基數表示省略)

$$\begin{array}{rr} & A\cdots B \\ \times & 2 \\ \hline & B\cdots A \end{array}$$

從直式中可以得到以下關係：(討論中為閱讀方便，將 3 進位制基數表示省略)

①最高位來看，因為 2A 沒有進位，所以 2A<3，且 2A≤B。A∈{1}，B∈{2}

②從個位來看，因為 B> A，所以 2B= 3_{10} ×q +A，$q \geq 1$。

③因為$3_{10} \times 2 > 3_{10} \times q + A > 3_{10} \times q$，所以$2 > q$ ，q∈{0,1}。

即計算 $B\cdots A_3$是 $A\cdots B_3$的2_3倍，每位數字乘以2_3，進位最多為1_3

由①、②、③得知：(A，B) = (1，2)

因此可得到 $\boxed{\text{3 進位制中，反向倍數則可能是 } 1\cdots 2_3 \times 2_3 = 2\cdots 1_3}$。

(2) 因為$12_3 \times 2_3 \neq 21_3$，所以 <u>3 進位制不存在二位數反向倍數</u>。

(3) 接著討論三位數：

由(1)，假設$1C2_3 \times 2_3 = 2C1_3$ 成立，C∈{0,1,2}。

因為$(1 \times 3^2 + C \times 3^1 + 2) \times 2 = 2 \times 3^2 + 2C \times 3^1 + 4 > 2 \times 3^2 + C \times 3^1 + 1$，

所以 C 無解。因此，<u>3 進位制不存在三位數反向倍數</u>。

(4) 討論四位數：

由(1)，假設$1CD2_3 \times 2_3 = 2DC1_3$成立，C∈{0,1,2}，D∈{0,1,2}。

因為$(1 \times 3^3 + C \times 3^2 + D \times 3^1 + 2) \times 2 = 2 \times 3^3 + D \times 3^2 + C \times 3^1 + 1$

$$54+18C+6D+4=54+9D+3C+1$$

$$C=D-1$$

所以(C，D) =(0，1)。

檢驗$1012_3 \times 2_3 = 2101_3$。

因此，發現$1012_3 \times 2_3 = 2101_3$為$2_3$倍的第一個反向倍數。

(5) 討論五位數：

由(1)，假設$1CDE2_3 \times 2_3 = 2EDC1_3$成立，C∈{0,1,2}，D∈{0,1,2}，E∈{0,1,2}

$$\begin{array}{r} 1CDE2 \\ \times \quad\quad 2 \\ \hline 2EDC1 \end{array}$$

從直式中可知，千位數的 2C 明顯沒有進位，所以 C 只能是 0、1。

① 若 C=1

$$\begin{array}{r} 11DE2 \\ \times \quad\quad 2 \\ \hline 2ED11 \end{array}$$

則$(E \times 3^1+2) \times 2 \equiv 1 \times 3^1+1 \pmod{3^2}$

$6E+4 \equiv 4 \pmod{3^2}$

$6E \equiv 0 \pmod{3^2}$

$2E \equiv 0 \pmod{3}$

又 E∈{0,1,2}，且 E≥2×1，所以 E 無解。

② 若 C=0

$$\begin{array}{r} 10DE2 \\ \times \quad\quad 2 \\ \hline 2ED01 \end{array}$$

則$(E \times 3^1+2) \times 2 \equiv 1 \pmod{3^2}$

$6E+4 \equiv 1 \pmod{3^2}$

$6E+3 \equiv 0 \pmod{3^2}$

$2E+1 \equiv 0 \pmod{3}$

又 E∈{0,1,2}，所以 E=1。

由①、②可得：

$$\begin{array}{r} 10D12 \\ \times \quad\quad 2 \\ \hline 21D01 \end{array}$$

$$(1 \times 3^4 + D \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 2) \times 2 = 2 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + D \times 3^2 + 1$$

$$162+18D+6+4=162+27+9D+1$$

$$D=2$$

檢驗$10212_3 \times 2_3 = 21201_3$正確無誤。

所以 **3 進位制的五位數反向倍數只有10212_3的反向數**。在五位數反向倍數推論中，發現分析千位數與十位數的規律，可得到推論 2。

【推論 2】3 進位制中，反向倍數則必是 $10\cdots 12_3 \times 2_3 = 21\cdots 01_3$的形式。

(6) 依據推論 2，接著利用它來找六位數的反向倍數。

假設$10CD12_3 \times 2_3 = 21DC01_3$成立，C∈{0,1,2}，D∈{0,1,2}。

$$(1 \times 3^5 + C \times 3^3 + D \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 2) \times 2 = 2 \times 3^5 + 1 \times 3^4 + D \times 3^3 + C \times 3^2 + 1$$

486+54C+18D+6+4=486+81+27D+9C+1

$$C = \frac{D+8}{5}$$

$$\begin{array}{r} 10CD12 \\ \times \quad\quad 2 \\ \hline 21DC01 \end{array}$$

因為 C∈{0,1,2}，D∈{0,1,2}，所以(C，D) =(2，2)為唯一解。

檢驗$102212_3 \times 2_3 = 212201_3$正確無誤。

所以 **3 進位制的六位數反向倍數只有102212_3的反向數**。

(7) 依據推論 2，接著利用它來找七位數的反向倍數。

假設$10CDE12_3 \times 2_3 = 21EDC01_3$成立，C∈{0,1,2}，D∈{0,1,2}，E∈{0,1,2}。

$$\begin{array}{r} 10CDE12 \\ \times \quad\quad\quad 2 \\ \hline 21EDC01 \end{array}$$

$$(1 \times 3^6 + C \times 3^4 + D \times 3^3 + E \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 2) \times 2 = 2 \times 3^6 + 1 \times 3^5 + E \times 3^4 + D \times 3^3 + C \times 3^2 + 1$$

1458+162C+54D+18E+6+4=1458+243+81E+27D+9C+1

$$D = \frac{7E - 17C + 26}{3}$$

因為 C∈{0,1,2}，D∈{0,1,2}，E∈{0,1,2}，又當 C≤1 時，D≥3 不符，所以(C，D，E) =(2，2，2)為唯一解。

檢驗$1022212_3 \times 2_3 = 2122201_3$正確無誤。

所以**七位數反向倍數只有1022212_3的反向數**。

(8) 3 進位制中，從六位數、七位數反向倍數的分析討論，發現在 10 及 12 中間插入任意幾個 2，得$1022\cdots2212_3$的反向數都是反向倍數。這情形與討論 10 進位制時類似，因此提出定理 1。

【定理 1】1012_3、10212_3、102212_3、$1022\cdots2212_3$的反向數是 3 進位制反向倍數的基本型。

證明：1.檢驗1012_3的2_3倍為反向倍數正確無誤。因此僅須證明五位數以上情形即可。

2.假設$102\cdots212_3$為 m 位數，m≥ 5。

因為 $1022\cdots2212_3 \times 2_3$

$=(10_3 \times 3^{m-2} + 22\cdots22_3 \times 3^2 + 1_3 \times 3^1 + 2_3) \times 2_3$ (中間 22⋯22 恰有 m-4 位)

$= 20_3 \times 3^{m-2} + 122\cdots21_3 \times 3^2 + 2_3 \times 3^1 + 11_3$ (中間 22⋯22 恰有 m-5 位)

$=(20_3 + 1_3) \times 3^{m-2} + (22\cdots21_3 + 1_3) \times 3^2 + 0_3 \times 3^1 + 1_3$

$= 21_3 \times 3^{m-2} + 22\cdots22_3 \times 3^2 + 0_3 \times 3^1 + 1_3$ (中間 22⋯22 恰有 m-4 位)

$= 2122\cdots2201_3$

所以$102\cdots212_3$為 m 位數，m≥ 5時，其反向數是反向倍數。

(9) 從定理 1 中，利用代數方法的驗證，從四位數1012_3的反向數到七位數1022212_3的反向數，基本型反向倍數是唯一滿足條件的反向倍數。但是到了八位數，便會發現將10121012_3串排在一起的反向數也是一個八位數的反向倍數，1012010012_3的反向數是十位數的反向倍數，102120010212_3的反向數是十二位數的反向倍數。3 進位制八位數以上的反向倍數與 10 進位制的反向倍數基本型、組合型類似，因此提出以下推論 3。

【推論 3】3 進位制中，可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

3. 4 進位制反向倍數

依照 3 進位制、10 進位制探討檢驗反向倍數的方法，可以得到 4 進位制反向倍數以下討論結果：

(1) 不存在二位數、三位數 4 進位制反向倍數。

※(2) $1023_4 \times 3_4 = 3201_4$為$3_4$倍的第一個 4 進位制反向倍數。

※(3) 1023_4、10323_4、103323_4、$1033\cdots3323_4$的反向數是 4 進位制反向倍數的基本型。

(4) 4 進位制中，八位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

4. 5 進位制反向倍數

5 進位制反向倍數以下討論結果：

※※(1) $13_5 \times 2_5 = 31_5$為2_5倍的第一個 5 進位制反向倍數。

※※(2) 13_5、143_5、1443_5、$144\cdots443_5$的反向數是 5 進位制反向倍數的基本型。

※(3) $1034_5 \times 4_5 = 4301_5$為$4_5$倍的第一個 5 進位制反向倍數。

※(4) 1034_5、10434_5、104434_5、$1044\cdots4434_5$的反向數是 5 進位制反向倍數的基本型。

(5) 5 進位制中，四位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

5. 6 進位制反向倍數

6 進位制反向倍數以下討論結果：

(1) 不存在二位數、三位數 6 進位制反向倍數。

※(2) ①$1045_6 \times 5_6 = 5401_6$為$5_6$倍的第一個 6 進位制反向倍數。
②$2134_6 \times 2_6 = 4312_6$為$2_6$倍的第一個 6 進位制反向倍數。

※(3) 1045_6、10545_6、105545_6、$1055\cdots5545_6$及2134_6、21534_6、215534_6、$2155\cdots5534_6$的反向數都是 6 進位制反向倍數的基本型。

※(4) ① 1045_6是 6 進位制反向倍數基本型的原型。
② $2134_6 = 1045_6 \times 2_6$

(5) 6 進位制中，八位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

6. 7 進位制反向倍數

7 進位制反向倍數以下討論結果：

※※(1) $15_7 \times 3_7 = 51_7$為3_7倍的第一個 7 進位制反向倍數。

※※(2) 15_7、165_7、1665_7、$166\cdots665_7$的反向數是 7 進位制反向倍數的基本型。

※(3) $1056_7 \times 6_7 = 6501_7$為$6_7$倍的第一個 7 進位制反向倍數。

※(4) 1056_7、10656_7、106656_7、$1066\cdots6656_7$的反向數是 7 進位制反向倍數的基本型。

(5) 7 進位制中，四位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

7. 8 進位制反向倍數(m 位數尚未討論結束)

8 進位制反向倍數以下討論結果：

※※(1) $25_8 \times 2_8 = 52_8$為2_8倍的第一個 8 進位制反向倍數。

※※(2) 25_8、275_8、2775_8、$277\cdots775_8$的反向數是 8 進位制反向倍數的基本型。

※※(3) $11165_8 \times 5_8 = 56111_8$為$5_8$倍的 8 進位制反向倍數。

※※(4) 11165_8、112665_8、1127665_8、11277665_8、11176165_8、…為5_8倍的 8 進位制反向倍數。

※(5) ①$1067_8 \times 7_8 = 7601_8$為$7_8$倍的第一個 8 進位制反向倍數。

②$2156_8 \times 3_8 = 6512_8$為$3_8$倍的第一個 8 進位制反向倍數。

※(6) 1067_8、10767_8、107767_8、$1077\cdots7767_8$及2156_8、21756_8、217756_8、$2177\cdots7756_8$的反向數都是 8 進位制反向倍數的基本型。

※(7) ① 1067_8是 8 進位制反向倍數基本型的原型。

② $2156_8 = 1067_8 \times 2_8$

※(8) $1015_8 \times 5_8 = 5101_8$是$5_8$倍的第一個 8 進位制反向倍數。

※(9) 1015_8、102515_8、$102525\cdots252515_8$的反向數是 8 進位制反向倍數的基本型。

(10) 8 進位制中，四位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

8. 9 進位制反向倍數

9 進位制反向倍數以下討論結果：

※※(1) $17_9 \times 4_9 = 71_9$為4_9倍的第一個 9 進位制反向倍數。

※※(2) 17_9、187_9、1887_9、$188\cdots887_9$的反向數是 9 進位制反向倍數的基本型。

※(3) ①$1078_9 \times 8_9 = 8701_9$為$8_9$倍的第一個 9 進位制反向倍數。

②$3256_9 \times 2_9 = 6523_9$為$2_9$倍的第一個 9 進位制反向倍數。

※(4) 1078_9、10878_9、108878_9、$1088\cdots8878_9$及3256_9、32856_9、328856_9、$3288\cdots8856_9$的反向數都是 9 進位制反向倍數的基本型。

※(5) ① 1078_9是 9 進位制反向倍數基本型的原型。

② $3256_9 = 1078_9 \times 3_9$

(6) 9 進位制中，四位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

9. 11 進位制反向倍數(m 位數尚未討論結束)

11 進位制反向倍數以下討論結果：

※※(1) $37_{11} \times 2_{11} = 73_{11}$為$2_{11}$倍的第一個 11 進位制反向倍數。

※※(2) 37_{11}、$3\boxed{10}7_{11}$、$3\boxed{10}\boxed{10}7_{11}$、$3\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}7_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(3) ① $14_{11} \times 3_{11} = 41_{11}$為$3_{11}$倍的第一個 11 進位制反向倍數。

② $28_{11} \times 3_{11} = 82_{11}$為$3_{11}$倍的第二個 11 進位制反向倍數。

※※(4) 14_{11}、154_{11}、1554_{11}、$155\cdots54_{11}$及28_{11}、$2\boxed{10}8_{11}$、$2\boxed{10}\boxed{10}8_{11}$、$2\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}8_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(5) ① 14_{11}是 11 進位制反向倍數基本型的原型。

② $28_{11} = 14_{11} \times 2_{11}$

※※(6) $19_{11} \times 5_{11} = 91_{11}$為$5_{11}$倍的第一個 11 進位制反向倍數。

※※(7) 19_{11}、$1\boxed{10}9_{11}$、$1\boxed{10}\boxed{10}9_{11}$、$1\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}9_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(8) $118_{11} \times 7_{11} = 811_{11}$為$7_{11}$倍的第一個 11 進位制反向倍數。

※※(9) 118_{11}、11918_{11}、1191918_{11}、$119191\cdots91918_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(10) $1298_{11} \times 7_{11} = 8921_{11}$為$7_{11}$倍的 11 進位制反向倍數。

※※(11)1298_{11}、$12\boxed{10}98_{11}$、$12\boxed{10}\boxed{10}98_{11}$、$12\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}98_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(12)$1694_{11}\times 3_{11}=4961_{11}$為$3_{11}$倍的 11 進位制反向倍數。

※※(13)1694_{11}、$16\boxed{10}94_{11}$、$16\boxed{10}\boxed{10}94_{11}$、$16\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}94_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(14)$2968_{11}\times 3_{11}=8692_{11}$為$3_{11}$倍的 11 進位制反向倍數。

※※(15)2968_{11}、296968_{11}、$29696\cdots96968_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※(16)$109\boxed{10}_{11}\times\boxed{10}_{11}=\boxed{10}901_{11}$為$\boxed{10}_{11}$倍的第一個 11 進位制反向倍數。

※(17)$109\boxed{10}_{11}$、$10\boxed{10}9\boxed{10}_{11}$、$10\boxed{10}\boxed{10}9\boxed{10}_{11}$、$10\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}9\boxed{10}_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※(18)11 進位制中，四位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個0串排成更多位數的反向倍數。

10. 12 進位制反向倍數

12 進位制反向倍數以下討論結果：

(1) 不存在二位數、三位數 12 進位制反向倍數。

※(2) ①$10\boxed{10}\boxed{11}_{12}\times\boxed{11}_{12}=\boxed{11}\boxed{10}01_{12}$為$\boxed{11}_{12}$倍的第一個 12 進位制反向倍數。

②$219\boxed{10}_{12}\times 5_{12}=\boxed{10}912_{12}$為$5_{12}$倍的第一個 12 進位制反向倍數。

③$3289_{12}\times 3_{12}=9823_{12}$為$3_{12}$倍的第一個 12 進位制反向倍數。

④$4378_{12}\times 2_{12}=8734_{12}$為$2_{12}$倍的第一個 12 進位制反向倍數。

※(3) $10\boxed{10}\boxed{11}_{12}$、$10\boxed{11}\boxed{10}\boxed{11}_{12}$、$10\boxed{11}\boxed{11}\boxed{10}\boxed{11}_{12}$、$10\boxed{11}\boxed{11}\cdots\boxed{11}\boxed{11}\boxed{10}\boxed{11}_{12}$及
$219\boxed{10}_{12}$、$21\boxed{11}9\boxed{10}_{12}$、$21\boxed{11}\boxed{11}9\boxed{10}_{12}$、$21\boxed{11}\boxed{11}\cdots\boxed{11}\boxed{11}9\boxed{10}_{12}$及
3289_{12}、$32\boxed{11}89_{12}$、$32\boxed{11}\boxed{11}89_{12}$、$32\boxed{11}\boxed{11}\cdots\boxed{11}\boxed{11}89_{12}$及
4378_{12}、$43\boxed{11}78_{12}$、$43\boxed{11}\boxed{11}78_{12}$、$43\boxed{11}\boxed{11}\cdots\boxed{11}\boxed{11}78_{12}$
的反向數都是 12 進位制反向倍數的基本型。

※(4) ① $10\boxed{10}\boxed{11}_{12}$是 12 進位制反向倍數基本型的原型。

② $219\boxed{10}_{12}=10\boxed{10}\boxed{11}_{12}\times 2_{12}$

$3289_{12}=10\boxed{10}\boxed{11}_{12}\times 3_{12}$

$4378_{12}=10\boxed{10}\boxed{11}_{12}\times 4_{12}$

(5) 12 進位制中，八位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個0串排成更多位數的反向倍數。

11. 我們將上面 3~12 進位制的(※)四位數反向倍數整理如下

序號	2 進位制	3 進位制	4 進位制	5 進位制	6 進位制	7 進位制	8 進位制	9 進位制	10 進位制	11 進位制	12 進位制
1		1012	1023	1034	1045	1056	1067	1078	1089	$109\boxed{10}$	$10\boxed{10}\boxed{11}$
2					2134		2156		2178		$219\boxed{10}$
3								3256			3289
4							1015				4378

會發現 3~12 進位制的第 1 列(※)四位數反向倍數的反向數具有規律性，且除了 8 進位制1015_8，其他四位數反向倍數的反向數可能是第 1 列四位數反向倍數基本型的原型的倍數。我們將第 1 列四位數反向倍數的反向數的倍數係列成下表。並將四位數反向倍數的反向數用紅色格標示，迴文數用藍色格標示。

倍數	2 進位制	3 進位制	4 進位制	5 進位制	6 進位制	7 進位制	8 進位制	9 進位制	10 進位制	11 進位制	12 進位制
1		**1012**	**1023**	**1034**	**1045**	**1056**	**1067**	**1078**	**1089**	**109$\boxed{10}$**	**10$\boxed{10}\boxed{11}$**
2		**2101**	**2112**	**2123**	**2134**	**2145**	**2156**	**2167**	**2178**	**2189**	**219$\boxed{10}$**
3			**3201**	**3212**	**3223**	**3234**	**3245**	**3256**	**3267**	**3278**	**3289**
4				**4301**	**4312**	**4323**	**4334**	**4345**	**4356**	**4367**	**4378**
5					**5401**	**5412**	**5423**	**5434**	**5445**	**5456**	**5467**
6						**6501**	**6512**	**6523**	**6534**	**6545**	**6556**
7							**7601**	**7612**	**7623**	**7634**	**7645**
8								**8701**	**8712**	**8723**	**8734**
9									**9801**	**9812**	**9823**
10										**$\boxed{10}$901**	**$\boxed{10}$912**
11											**$\boxed{11}\boxed{10}$01**

從上表中，當我們將迴文數也標示出來後，會發現 12 進位制中，將$10\boxed{10}\boxed{11}_{12}$視為基本型的原型時，其 1 倍、2 倍、3 倍、4 倍、6 倍後的數字的反向數也是反向倍數(含迴文數)，而 1、2、3、4、6 是 12 的因數。檢驗 3~12 進位制的四位數反向倍數也成立。

為能更加確認以上所發現的規律，我們推到 22 進位制，(※)四位數反向倍數的反向數都滿足上述關係。進而可將其規律大膽假設驗證成為 n 進位制反向倍數的性質之一。

（二）n 進位制反向倍數的性質(n> 2)

【定理 2】n 進位制中(n> 2)，四位數$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$為$\boxed{n-1}_n$倍的反向倍數。

證明：假設$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$為 n 進位制的四位數

計算$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n \times \boxed{n-1}_n$的值

$$\begin{array}{ccccc} & 第4位 & 第3位 & 第2位 & 第1位 \\ & 1 & 0 & \boxed{n-2} & \boxed{n-1} \\ \times & & & & \boxed{n-1} \\ \hline \end{array}$$

∵第 1 位數：$(n-1)\times(n-1) = n^2 - 2n + 1 = (n-2)\times n + 1$

∴進$(n-2)$到第 2 位數，第 1 位數為 1

∵第 2 位數：$(n-2)\times(n-1) + (n-2) = n^2 - 2n = (n-2)\times n$

∴進$(n-2)$到第 3 位數，第 2 位數為 0

∵第 3 位數：$0\times(n-1) + (n-2) = n-2$

∴第 3 位數為$(n-2)$

∵第 4 位數：$1\times(n-1) = n-1$

∴第 4 位數為$(n-1)$

所以$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n \times \boxed{n-1}_n = \boxed{n-1}\boxed{n-2}01_n$

因此**四位數$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$為$\boxed{n-1}_n$倍的 n 進位制反向倍數。**

【定理 3】10$\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$、10 $\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$、10 $\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> 2)。

證明：1.檢驗$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$為反向倍數正確無誤。因此僅須證明五位數以上情形即可。

2.假設 10 $\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$為 m 位數，m≥ 5。

計算$10\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n\times\boxed{n-1}_n$

$$\begin{array}{r} 10\,\boxed{\text{n-1}}\cdots\boxed{\text{n-1}}\boxed{\text{n-2}}\boxed{\text{n-1}} \\ \times \qquad\qquad\qquad\qquad \boxed{\text{n-1}} \\ \hline \end{array}$$

∵第 1 位數：$(\mathrm{n}-1)\times(\mathrm{n}-1)=n^2-2n+1=(\mathrm{n}-2)\times\mathrm{n}+1$

∴進$(n-2)$到第 2 位數，第 1 位數為 1

∵第 2 位數：$(\mathrm{n}-2)\times(\mathrm{n}-1)+(\mathrm{n}-2)=n^2-2n=(n-2)\times n$

∴進$(n-2)$到第 3 位數，第 2 位數為 0

∵第 3 位數：$(\mathrm{n}-1)\times(\mathrm{n}-1)+(\mathrm{n}-2)=n^2-n-1=(\mathrm{n}-2)\times n+(n-1)$

∴進$(n-2)$到第 4 位數，第 3 位數為$(n-1)$

接續計算第 4 位數，進$(n-2)$到第 5 位數，第 4 位數為$(n-1)$

依此計算到第(m-2)位數，進$(n-2)$到第(m-1)位數，第(m-2)位數為$(n-1)$

∵計算第(m-1)位數：$0\times(\mathrm{n}-1)+(\mathrm{n}-2)=\mathrm{n}-2$

∴第(m-1)位數為$(n-2)$

∵第 m 位數：$1\times(\mathrm{n}-1)=n-1$

∴第 m 位數為$(n-1)$

所以$10\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n\times\boxed{n-1}_n=\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}01_n$

因此$10\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$的反向數是 n 進位制的反向倍數。

在四位數反向倍數基本型的原型倍數表中，有發現到若 n 進位制基本型原型的倍數的反向數會是反向倍數，則其倍數數字與 n 的因數有關，因此我們大膽假設定理 4 並進行驗證。

【定理 4】四位數$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$為$\boxed{\frac{n}{s}-1}_n$倍的 n 進位制反向倍數(n> 2)。其中 s、$\frac{n}{s}\in\mathbb{N}$，且$2<\frac{n}{s}$ 。

證明：假設$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$為 n 進位制的四位數，其中 s、$\frac{n}{s}\in\mathbb{N}$，且$2<\frac{n}{s}$ 。

計算$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n\times\boxed{\frac{n}{s}-1}_n$的值

$$\begin{array}{r} \boxed{s}\ \boxed{s-1}\ \boxed{n-(s+1)}\ \boxed{n-s} \\ \times \qquad\qquad\qquad\qquad \boxed{\frac{n}{s}-1} \\ \hline \end{array}$$

∵第 1 位數：$(n-s)\times\left(\frac{n}{s}-1\right)=\frac{1}{s}n^2-2n+s=\left(\frac{1}{s}n-2\right)n+s$

∴進$\left(\frac{1}{s}n-2\right)$到第 2 位數，第 1 位數為$s$

∵第 2 位數：$[\mathrm{n}-(s+1)]\times\left(\frac{n}{s}-1\right)+\left(\frac{1}{s}n-2\right)=\frac{1}{s}n^2-2n+s-1$

$$=\left(\frac{1}{s}n-2\right)n+(s-1)$$

∴進$\left(\frac{1}{s}n-2\right)$到第 3 位數，第 2 位數為$(s-1)$

∵第 3 位數：$(s-1)\times\left(\frac{n}{s}-1\right)+\left(\frac{1}{s}n-2\right)=n-s-1=n-(s+1)$

∴第 3 位數為$n-(s+1)$

∵第 4 位數：$s\times\left(\frac{n}{s}-1\right)=n-s$

∴第 4 位數為$n-(s+1)$

所以$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n\times\boxed{\frac{n}{s}-1}_n=\boxed{n-s}\boxed{n-(s+1)}\boxed{s-1}\boxed{s}_n$

因此$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$為$\boxed{\frac{n}{s}-1}_n$倍的 n 進位制反向倍數。

【定理 5】$(\boxed{s}\,\boxed{s-1}\,\boxed{n-(s+1)}\,\boxed{n-s})_n$、$(\boxed{s}\,\boxed{s-1}\,\boxed{n-1}\,\boxed{n-(s+1)}\,\boxed{n-s})_n$、$(\boxed{s}\,\boxed{s-1}\,\boxed{n-1}\,\boxed{n-1}\,\boxed{n-(s+1)}\,\boxed{n-s})_n$、⋯、$(\boxed{s}\,\boxed{s-1}\,\boxed{n-1}\ldots\boxed{n-1}\,\boxed{n-(s+1)}\,\boxed{n-s})_n$的反向數都是$\left(\boxed{\frac{n}{s}-1}\right)_n$倍的 n 進位制反向倍數基本型(n> 2)。其中 s、$\frac{n}{s}\in\mathbb{N}$，且$2<\frac{n}{s}$ 。

證明：如定理 3、定理 4 證明方式，同理可證。

> 從定理 3 知道$(10\boxed{n-2}\,\boxed{n-1})_n$、$(10\,\boxed{n-1}\,\boxed{n-2}\,\boxed{n-1})_n$、$(10\,\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\,\boxed{n-2}\,\boxed{n-1})_n$的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> 2)，也是基本型的原型。
>
> 我們將$(10\boxed{n-2}\,\boxed{n-1})_n\times(\boxed{s})_n=(\boxed{s}\,\boxed{s-1}\,\boxed{n-(s+1)}\,\boxed{n-s})_n$
>
> $(10\,\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\,\boxed{n-2}\,\boxed{n-1})_n\times(\boxed{s})_n=(\boxed{s}\,\boxed{s-1}\,\boxed{n-1}\ldots\boxed{n-1}\,\boxed{n-(s+1)}\,\boxed{n-s})_n$
>
> 因此若 s 為 n 的因數，且$2<\frac{n}{s}$，則可透過定理 3 反向倍數基本型的原型乘以 s 倍，找到另一個反向倍數的基本型。

藉由定理 4、定理 5 可知 n 進位制中，m 位數基本型反向倍數不會有進位到(m+1)位數的情形產生，也就是說只要把同樣倍數的基本型反向倍數加上任意個 0，作成左右對稱的串排，都是原倍數的反向倍數。因此可以進一步的推論如下。

【推論 4】n 進位制中，可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。(n> 2)

在先前討論 3 進位制到 12 進位制時，會發現不一定會有二位數、三位數的反向倍數，因而我們想在試著利用代數式，探討 n 進位制中，若有二位數、三位數的反向倍數，是否能有一般式。進而推論出四位數反向倍數的各位數一般式。

【定理 6】n 進位制中(n> 2)，二位數$\boxed{(n-a)k}\ \boxed{(an-1)k}$為$a$倍的反向倍數。

$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，$k\in\{\frac{1}{a^2-1},\frac{2}{a^2-1},\cdots,\frac{a-1}{a^2-1}\}$

證明：令二位數 AB 為 n 進位制a倍的反向倍數，A∈{1,2,⋯,n-1}，B∈{0,1,2,⋯,n-1}，$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$。

∵ AB $\times a$ = BA，且不為迴文數。

∴ A<B

又 $\mathrm{B}\times a=nq+\mathrm{A}\quad (q\in\{1,2,\ldots,a-1\})$

$\mathrm{A}\times a+q=\mathrm{B}$

可得 $\begin{cases} a\mathrm{B}=nq+\mathrm{A}\ldots\ldots\ldots(1)\\ a\mathrm{A}+q=\mathrm{B}\ldots\ldots\ldots.(2)\end{cases}$

由(2)得 $q=\mathrm{B}-a\mathrm{A}$ ⋯⋯⋯(3)

(3)代入(1)：$aB=n(\mathrm{B}-a\mathrm{A})+\mathrm{A}$

$(an-1)\mathrm{A}=(\mathrm{n}-a)\mathrm{B}$

因此 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=(\mathrm{n}-a):(an-1)$⋯⋯⋯⋯⋯(4)

但∵ $a\in\{2,\cdots,n-1\}$

∴$(\mathrm{n}-a)$、$(an-1)\in\mathbb{N}$，

且$an\geq 2n=n+n>n+1$，$an-1>n$

假設$\mathrm{A}=(\mathrm{n}-a)\mathrm{k}$，$\mathrm{B}=(an-1)\mathrm{k}$，$\mathrm{k}\neq 0$

代入(3)：$q=(a^2-1)\mathrm{k}$ 又 $q\in\{1,2,\cdots,a-1\}$

∴ $k\in\{\frac{1}{a^2-1},\frac{2}{a^2-1},\cdots,\frac{a-1}{a^2-1}\}$

則可得 n **進位制中(n> 2)，二位數$\boxed{(\mathrm{n}-a)\mathrm{k}}\ \boxed{(an-1)\mathrm{k}}$為$a$倍的反向倍數。**

$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，$k\in\{\frac{1}{a^2-1},\frac{2}{a^2-1},\cdots,\frac{a-1}{a^2-1}\}$。

【定理 7】n 進位制中(n> 2)，三位數$\boxed{\frac{nq_1-aq_2}{a^2-1}}\ \boxed{\frac{nq_2-q_1}{a-1}}\ \boxed{\frac{anq_1-q_2}{a^2-1}}$為$a$倍的反向倍數。

$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，q_1、$q_2\in\{1,2,\cdots,a-1\}$。

證明：令存在三位數 ABC 為 n 進位制a倍的反向倍數，A∈{1,2,⋯,n-1}，B、C ∈{0,1,2,⋯,n-1}，$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$。

$\because$ ABC $\times a$ = CBA，且不為迴文數。

$\therefore$ A<C

又 $\mathrm{C}\times a=nq_1+\mathrm{A}\qquad (q_1\in\{1,2,\dots,a-1\})$

$\mathrm{B}\times a+q_1=nq_2+\mathrm{B}\qquad (q_2\in\{0,1,2,\dots,a-1\})$

$\mathrm{A}\times a+q_2=\mathrm{C}$

可得$\begin{cases}a\mathrm{C}=nq_1+\mathrm{A}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)\\ a\mathrm{B}+q_1=nq_2+\mathrm{B}\dots\dots\dots\dots(2)\\ a\mathrm{A}+q_2=\mathrm{C}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)\end{cases}$

由(1)、(3)得 $\begin{cases}nq_1=a\mathrm{C}-\mathrm{A}\dots\dots\dots\dots(4)\\ q_2=\mathrm{C}-a\mathrm{A}\dots\dots\dots\dots(5)\end{cases}$

$\because$ $n>2$，$q_1\in\{1,2,\dots,a-1\}$，$q_2\in\{0,1,2,\dots,a-1\}$

$\therefore$ (5)式 ÷ (4)式成立

$$\frac{q_2}{nq_1}=\frac{\mathrm{C}-a\mathrm{A}}{a\mathrm{C}-\mathrm{A}}$$

狀況 1.

若 $q_2=0$，則$\mathrm{C}-a\mathrm{A}=0\rightarrow \mathrm{A}:\mathrm{C}=1:a$

設 $\mathrm{A}=\mathrm{k}$，$\mathrm{C}=a\mathrm{k}$，$\mathrm{k}\in\mathbb{N}$

則將(1)、(2) 整理可得$\begin{cases}a^2\mathrm{k}=nq_1+\mathrm{k}\\ a\mathrm{B}+q_1=\mathrm{B}\end{cases}\rightarrow a^2\mathrm{k}=n(\mathrm{B}-a\mathrm{B})+\mathrm{k}$

$$\mathrm{B}=\frac{(a^2-1)\mathrm{k}}{n(1-a)}=-\frac{\mathrm{k}(a+1)}{n}$$

$\because$ B、k、n、$a+1$ 均為正整數

$\therefore$ B 無解

狀況 2.

若 $q_2\neq 0$，則$q_2(a\mathrm{C}-\mathrm{A})=nq_1(\mathrm{C}-a\mathrm{A})$

$\rightarrow \mathrm{A}:\mathrm{C}=(nq_1-aq_2):(anq_1-q_2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

但$\because$ $a\in\{2,3,\dots,\mathrm{n}-1\}$，$q_1\in\{1,2,\dots,a-1\}$，$q_2\in\{1,2,\dots,a-1\}$

$\therefore$ (nq_1-aq_2)、$(anq_1-q_2)\in\mathbb{Z}$，

且 $anq_1\geq 2n=n+n>n+q_2$

$anq_1-q_2>n$

假設$\mathrm{A}=(nq_1-aq_2)\mathrm{k}$，$\mathrm{C}=(anq_1-q_2)\mathrm{k}$，$\mathrm{k}\in Q^+$

代入(5)：$\mathrm{k}=\frac{1}{a^2-1}$，得 $\mathrm{A}=\frac{nq_1-aq_2}{a^2-1}$，$\mathrm{C}=\frac{anq_1-q_2}{a^2-1}$

由(2)得$\mathrm{B}=\frac{nq_2-q_1}{a-1}$

所以三位數$\boxed{\frac{nq_1-aq_2}{a^2-1}}\ \boxed{\frac{nq_2-q_1}{a-1}}\ \boxed{\frac{anq_1-q_2}{a^2-1}}$為$a$倍的反向倍數

定理 6 與定理 7 的一般式有助於我們找出及判斷 n 進位制中(n> 2)是否有二位數、三位數的反向倍數。且發現在狀況 1 的討論會得到首尾的數字數值可能會有比例關係，藉此我們更有信心去推導討論 n 進位制中，四位數反向倍數的一般式。

【四位數反向倍數的一般式】

假設存在四位數 ABCD 為 n 進位制a倍的反向倍數，A$\in\{1,2,\dots,\mathrm{n}-1\}$，B、C、D $\in\{0,1,2,\dots,\mathrm{n}-1\}$，$a\in\{2,3,\dots,\mathrm{n}-1\}$。

∵ ABCD $\times a$ = DCBA，且不為迴文數。

∴ A<D

又 $\mathrm{D}\times a=nq_1+\mathrm{A}$　　　$(q_1\in\{1,2,\dots,a-1\})$

$\mathrm{C}\times a+q_1=nq_2+\mathrm{B}$　　$(q_2\in\{0,1,2,\dots,a-1\})$

$\mathrm{B}\times a+q_2=nq_3+\mathrm{C}$　　$(q_3\in\{0,1,2,\dots,a-1\})$

$\mathrm{A}\times a+q_3=\mathrm{D}$

可得 $\begin{cases} a\mathrm{D}=nq_1+\mathrm{A}\dots\dots\dots\dots(1)\\ a\mathrm{C}+q_1=nq_2+\mathrm{B}\dots\dots\dots(2)\\ a\mathrm{B}+q_2=nq_3+\mathrm{C}\dots\dots\dots(3)\\ a\mathrm{A}+q_3=\mathrm{D}\dots\dots\dots\dots(4)\end{cases}$

由(1)、(4)得 $\begin{cases} nq_1=a\mathrm{D}-\mathrm{A}\dots\dots\dots(5)\\ q_3=\mathrm{D}-a\mathrm{A}\dots\dots\dots(6)\end{cases}$

∵ $n>2$，$q_1\in\{1,2,\dots,a-1\}$，$q_3\in\{0,1,2,\dots,a-1\}$

∴ (6)式 ÷ (5)式成立　$\dfrac{q_3}{nq_1}=\dfrac{\mathrm{D}-a\mathrm{A}}{a\mathrm{D}-\mathrm{A}}$

狀況 1.

若 $q_3=0$，則$\mathrm{D}-a\mathrm{A}=0\rightarrow \mathrm{A}:\mathrm{D}=1:a$

設 $\mathrm{A}=\mathrm{k}$，$\mathrm{D}=a\mathrm{k}$，$\mathrm{k}\in\mathbb{N}$

則將(1)、(2)、(3)整理可得 $\begin{cases} a^2\mathrm{k}=nq_1+\mathrm{k}\dots\dots\dots\dots(8)\\ a\mathrm{C}+q_1=nq_2+\mathrm{B}\dots\dots\dots(9)\\ a\mathrm{B}+q_2=\mathrm{C}\dots\dots\dots\dots(10)\end{cases}$

由(8)、(9)、(10)可得$(1-an)\mathrm{B}+(\mathrm{n}-a)\mathrm{C}=\dfrac{(a^2-1)k}{n}$ ·········(11)

$(\mathrm{B},\mathrm{C})=\left(0,\dfrac{(a^2-1)k}{(\mathrm{n}-a)n}\right)$ 與$(\mathrm{B},\mathrm{C})=\left(\dfrac{(a^2-1)k}{(1-\mathrm{n}a)n},0\right)$ 為(11)式的兩組解

所以 $\vec{v}=\left(\dfrac{(a^2-1)k}{(\mathrm{n}a-1)n},\dfrac{(a^2-1)k}{(\mathrm{n}-a)n}\right)=\left((n-a),(an-1)\right)$

因此 $\begin{cases} B=0+(n-a)t\\ C=\dfrac{(a^2-1)k}{(\mathrm{n}-a)n}+(an-1)t\end{cases}$，$t$為實數

從狀況 1.得證 **n 進位制中(n> 2)，若 $q_3=0$，**

四位數$\boxed{k}$ $\boxed{(n-a)t}$ $\boxed{\frac{(a^2-1)k}{(\mathrm{n}-a)n}+(an-1)t}$ $\boxed{ak}$為a倍的反向倍數。

$a\in\{2,3,\dots,\mathrm{n}-1\}$，$k\in\{1,2,\dots,\mathrm{n}-1\}$，$t$為實數。

狀況 2.

若 $q_3\neq 0$，則$q_3(a\mathrm{D}-\mathrm{A})=nq_1(\mathrm{D}-a\mathrm{A})$

$\rightarrow \mathrm{A}:\mathrm{D}=(nq_1-aq_3):(anq_1-q_3)$··············(7)

但∵ $a\in\{2,3,\dots,\mathrm{n}-1\}$，$q_1\in\{1,2,\dots,a-1\}$，$q_3\in\{0,1,2,\dots,a-1\}$

又 (nq_1-aq_3)、$(anq_1-q_3)\in\mathbb{Z}$，

$anq_1\geq 2n=n+n>n+q_3$

$anq_1-q_3>n$

假設$A=(nq_1-aq_3)k$，$D=(anq_1-q_3)k$，$k\neq 0$

代入(6)：$k=\dfrac{1}{a^2-1}$，得 $A=\dfrac{nq_1-aq_3}{a^2-1}$，$D=\dfrac{anq_1-q_3}{a^2-1}$

由(2)、(3)得 $B=\dfrac{anq_3+(n-a)q_2-q_1}{a^2-1}$，$C=\dfrac{nq_3+(an-1)q_2-aq_1}{a^2-1}$

從狀況 2.得證 n 進位制中(n> 2)，若 $q_3\neq 0$，
四位數$\boxed{\frac{nq_1-aq_3}{a^2-1}}\ \boxed{\frac{anq_3+(n-a)q_2-q_1}{a^2-1}}\ \boxed{\frac{nq_3+(an-1)q_2-aq_1}{a^2-1}}\ \boxed{\frac{anq_1-q_3}{a^2-1}}$ 為a倍的反向倍數。
$a\in\{2,3,\dots,n-1\}$，q_1、q_2、$q_3\in\{1,2,\dots,a-1\}$

從四位數反向倍數的一般式討論中，狀況 1 可以驗證定理 8。

【定理 8】n 進位制中(n> 2)，四位數$\boxed{\mathbf{k}}\ \boxed{(n-a)t}\ \boxed{\frac{(a^2-1)k}{(n-a)n}+(an-1)t}\ \boxed{ak}$為$a$倍的反向倍數。
$a\in\{2,3,\dots,n-1\}$，$k\in\{1,2,\dots,n-1\}$，t為實數。

我們將定理 8 的結果來重新檢查尋找 3 進位制~22 進位制的反向倍數，發現確實都滿足(※)四位數反向倍數，且 8 進位制1015_8為5_8倍的反向倍數、15 進位制$102\boxed{1}\boxed{1}_{15}$為$\boxed{1}\boxed{1}_{15}$倍的反向倍數，也都能透過定理 8 在逐一探討中找出。

（三）n 進位制中(n> 2)，四位數的反向倍數判別法

在定理 8 已可知道 **n 進位制中(n> 2)，四位數$\boxed{\mathbf{k}}\ \boxed{(n-a)t}\ \boxed{\frac{(a^2-1)k}{(n-a)n}+(an-1)t}\ \boxed{ak}$為$a$倍的反向倍數**。$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，$k\in\{1,\cdots,n-1\}$，$t$為實數。將其關係式寫成直式計算來觀察：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \boxed{\mathbf{k}} & \boxed{(n-a)t} & \boxed{\frac{(a^2-1)k}{(n-a)n}+(an-1)t} & \boxed{ak} \\
\times & & & & a \\
\hline
 & \boxed{ak} & \boxed{\frac{(a^2-1)k}{(n-a)n}+(an-1)t} & \boxed{(n-a)t} & \boxed{k}
\end{array}
$$

可得到四位數的反向倍數其中一種判別法：

在 n 進位制中(n> 2)，ABCD 為a倍的四位數反向倍數，$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，若$A\times a=D$，則必滿足下面條件：

(1) $A:D=k:ka=1:a$，$k\in\{1,2\cdots,n-1\}$

(2) $a^2k\equiv k\pmod n$

(3) $\begin{cases} B=(n-a)t \\ C=\dfrac{(a^2-1)k}{(n-a)n}+(an-1)t \end{cases}$，$t$為實數，且聯立方程式有解。

（四）n 進位制中(n> 2)，四位數(首位為 1、末位為a)為a倍的反向倍數型式

從定理 8 得知，**n 進位制中(n> 2)，四位數$\boxed{\mathbf{k}}\ \boxed{(n-a)t}\ \boxed{\frac{(a^2-1)k}{(n-a)n}+(an-1)t}\ \boxed{ak}$為$a$倍的反向倍數。$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，$k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，$t$為實數**。而在 8 進位制中，$1015_8$與$1067_8$都滿足定理 8。接著我們開始思考 n 進位制中，四位數(首位為 1、末位為a)為a倍的反向倍數，除了找到 10CD 型式外，是否存在有 11CD、12CD、13CD 等型式。

依據定理 8，n 進位制中，假設 11CD 為a倍的反向倍數，則其一般式為 $1\ 1\ \boxed{\frac{(a^2-1)+n(an-1)}{(n-a)n}}\ \boxed{a}$。其中$\boxed{\frac{(a^2-1)+n(an-1)}{(n-a)n}}$ 為整數。

$$\begin{array}{r|l} & an \\ \hline n^2-an \ ) & an^2 - \quad n + (a^2-1) \\ & an^2 - a^2n \\ \hline & (a^2-1)n + (a^2-1) \end{array}$$

運用多項式直式除法，可知$a^2-1=0$，所以$a=1$，滿足 11CD 型式的a倍的反向倍數為 1111(迴文數)。

同理，假設 12CD 為a倍的反向倍數，則其一般式為 $1\ 2\ \boxed{\frac{(a^2-1)+2n(an-1)}{(n-a)n}}\ \boxed{a}$。其中 $\boxed{\frac{(a^2-1)+2n(an-1)}{(n-a)n}}$ 為整數。

$$\begin{array}{r|l} & 2an \\ \hline n^2-an \ ) & 2an^2 - \quad 2n + (a^2-1) \\ & 2an^2 - 2a^2n \\ \hline & 2(a^2-1)n + (a^2-1) \end{array}$$

運用多項式直式除法，可知$a^2-1=0$，所以$a=1$，滿足 12CD 型式的a倍的反向倍數為 1221(迴文數)。

同理可證，n 進位制中，四位數(首位為 1)為a倍的反向倍數，若其為 1BCD 的型式，B> 0，則必為 1BB1 的迴文數。但在本文的反向倍數不將迴文數納入討論，也就是$a \geq 2$，因此我們得到推論 5。

【推論 5】n 進位制中(n> 2)，四位數(首位為 1、末位為a)為a倍的反向倍數，
必為 $1\,0\ \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}}\ \boxed{a}$ 的型式。$a \in \{2,3,\cdots,n-1\}$

（五）n 進位制中(n> 2)，四位數(首位為 1、末位為a)為a倍的反向倍數，偶數位基本型反向倍數的型式

在討論 3 至 22 進位制的反向倍數中，發現 8 進位制有1015_8、102515_8、10252515_8、$102525\ldots252515_8$的反向數的基本型反向倍數。15 進位制有$102\boxed{11}_{15}$、$103\boxed{11}2\boxed{11}_{15}$、$103\boxed{11}3\boxed{11}2\boxed{11}_{15}$、$103\boxed{11}3\boxed{11}\ldots3\boxed{11}3\boxed{11}2\boxed{11}_{15}$的反向數的基本型反向倍數。並由推論 5 得知，四位數(首位為 1、末位為a)為a倍的反向倍數，必為 10AB 的型式。進而大膽推測 **n 進位制必有 10$\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\ldots\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$的反向數的基本型反向倍數**。在論證過程中，我們得證定理 9。

【定理 9】n 進位制中(n>2)，若 10$\boxed{A}\boxed{B}$的反向數為四位數反向倍數，則 10$\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\ldots\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$的反向數為基本型反向倍數。

證明：假設 **n 進位制中(n> 2)，10$\boxed{A}\boxed{B}$ 的反向數為四位數反向倍數。**

由推論 5 可知，10$\boxed{A}\boxed{B}$可表示為 $1\,0\ \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}}\ \boxed{a}$，$a \in \{2,3,\cdots,n-1\}$。

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}} & \boxed{a} \\ \times & & & \boxed{a} \\ \hline \boxed{a} & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}} & 0 & 1 \end{array}$$

則從直式算式可知：

$$\begin{cases} a^2 = nq_1 + 1 \dots\dots\dots\dots(1) \\ a \times \dfrac{a^2-1}{(n-a)n} + q_1 = nq_2 \dots\dots\dots\dots(2) \\ q_2 = \dfrac{a^2-1}{(n-a)n} \dots\dots\dots\dots\dots\dots(3) \end{cases} \quad (q_1、q_2 \in \{1,2,\dots,a-1\})$$

由(1)可得$q_1 = \dfrac{a^2-1}{n}$

表示在 n 進位制中，$a^2 \equiv 1 \pmod n$，進位$q_1 = \dfrac{a^2-1}{n}$。

$a \times \dfrac{a^2-1}{(n-a)n} + q_1 \equiv 0 \pmod n$，進位$q_2 = \dfrac{a^2-1}{(n-a)n}$。

假設 10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\dots\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$為 m 位數，m> 4，且 m 為偶數。
則 10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\dots\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}\times\boxed{B}$可表示為以下直式：

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
\text{進位} & & & \frac{a^2-1}{(n-a)n} & \frac{a^2-1}{n} & \frac{a^2-1}{(n-a)n} & \frac{a^2-1}{n} & \frac{a^2-1}{(n-a)n} & \frac{a^2-1}{n} & \frac{a^2-1}{(n-a)n} & \frac{a^2-1}{n} & \frac{a^2-1}{(n-a)n} & \frac{a^2-1}{n} & \\
 & & 1 & 0 & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}+1} & \boxed{a} & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}+1} & \boxed{a}\cdots\cdots & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}+1} & \boxed{a} & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}+1} & \boxed{a} & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}} & \boxed{a} \\
\times & & & & & & & & & & & & & \boxed{a} \\
\hline
 & \boxed{a} & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}} & \boxed{a} & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}+1} & \boxed{a} & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}+1} & \cdots\cdots & \boxed{a} & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}+1} & \boxed{a} & \boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}+1} & 0 & 1
\end{array}$$

∵ 第 1 位數 $a \times a = n \times \dfrac{a^2-1}{n} + 1$

∴ 進$\dfrac{a^2-1}{n}$到第 2 位數，第 1 位數為 1

∵ 第 2 位數 $a \times a + \dfrac{a^2-1}{(n-a)n} = n \times \dfrac{a^2-1}{(n-a)n}$

∴ 進$\dfrac{a^2-1}{(n-a)n}$到第 3 位數，第 2 位數為 0

∵ 第 3 位數$a \times a + \dfrac{a^2-1}{(n-a)n} = n \times \dfrac{a^2-1}{n} + 1 + \dfrac{a^2-1}{(n-a)n}$

∴ 進$\dfrac{a^2-1}{n}$到第 4 位數，第 3 位數為$\dfrac{a^2-1}{(n-a)n}+1$

∵ 第 4 位數 $\left(\dfrac{a^2-1}{(n-a)n}+1\right) \times a + \dfrac{a^2-1}{n} = n \times \dfrac{a^2-1}{(n-a)n} + a$

∴ 進$\dfrac{a^2-1}{(n-a)n}$到第 5 位數，第 4 位數為a

依此計算到第(m-5)位數，進$\dfrac{a^2-1}{n}$到第(m-4)位數，第(m-5)位數為$\dfrac{a^2-1}{(n-a)n}+1$。

第(m-4)位數，進$\dfrac{a^2-1}{(n-a)n}$到第(m-3)位數，第(m-4)位數為a。

第(m-3)位數，進$\dfrac{a^2-1}{n}$到第(m-2)位數，第(m-3)位數為$\dfrac{a^2-1}{(n-a)n}+1$。

第(m-2)位數，進$\dfrac{a^2-1}{(n-a)n}$到第(m-1)位數，第(m-2)位數為a。

第(m-1)位數為 $\dfrac{a^2-1}{(n-a)n}$。

第 m 位數為 a。

因此，n 進位制中(n>2)，若 **10$\boxed{A}\boxed{B}$的反向數為四位數反向倍數，則 10$\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}$…$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$的反向數為基本型反向倍數。**

檢驗定理 3，當其為偶數位時，亦滿足定理 9。表示四位數 10 $\boxed{n-2}$ $\boxed{n-1}$為$\boxed{n-1}$倍的反向倍數，其首 2 位數字與末 2 位數字之間加入$\boxed{n-1}$ $\boxed{n-1}$兩個數字數對，亦為一種偶數位基本型反向倍數。

而定理 3 也含奇數位基本型反向倍數，我們將定理 9 四位數 **10$\boxed{A}\boxed{B}$**，10 與 $\boxed{A}\boxed{B}$之間加入的 $\boxed{A+1}\boxed{B}$兩個數字的值相等來觀察。

$$\frac{a^2-1}{(n-a)n}+1=a$$

$$(n+1)a^2-(n^2+n)a+(n^2-1)=0$$

$$[(n+1)a-(n+1)][a-(n-1)]=0$$

$$a=n-1 \text{ 或 } 1 \ (\text{不合，}a>1)$$

當$a=n-1$時，$\boxed{A}=\frac{a^2-1}{(n-a)n}=n-2$，$\boxed{B}=a=n-1$。

便能驗證定理 3 中，10 $\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$為偶數位數字時，為反向倍數的基本型。為奇數位數字時，亦為反向倍數的基本型。

（六）討論 n 進位制中(n> 2)，四位數 10 $\boxed{C}$ $\boxed{a}$ 為a倍的反向倍數的一般解。

接著我們試著以四位數 10 $\boxed{C}$ $\boxed{a}$為a倍的反向倍數形式去推導滿足 n 進位制中，101$\boxed{a}$、102$\boxed{a}$、103$\boxed{a}$等為a倍的反向倍數，其 n 與$\boxed{a}$的值。在推導過程中使用了二元二次方程式去求解，並將其整數解情形整理如下：

1. 滿足 n 進位制中，101$\boxed{a}$反向倍數的解。
   $(n,a)=$ (3，2)、(8，5)、(21，13)、(55，34)、……
   整數解滿足$(n,a)\to(2n+a,n+a)$的規律
2. 滿足 n 進位制中，102$\boxed{a}$反向倍數的解。
   $(n,a)=$ (4，3)、(15，11)、(56，41)、(209，153)、……
   整數解滿足$(n,a)\to(3n+a,2n+a)$的規律
3. 滿足 n 進位制中，103$\boxed{a}$反向倍數的解。
   $(n,a)=$ (5，4)、(24，19)、(115，91)、(551，436)、……
   整數解滿足$(n,a)\to(4n+a,3n+a)$的規律

從上面的整數解規律中，我們可以大膽的試著去論證定理 10 的合理性。

【定理 10】若數列$\{(A_m,B_m)_{m\geq0}\}$滿足：
$A_0=1$，$B_0=1$，$A_{m+1}=(C+1)A_m+B_m$，$B_{m+1}=C\times A_m+B_m$， C ∈{1,2,⋯,n-1}。
$(A_m,B_m)\to(A_{m+1},B_{m+1})=\left((C+1)A_m+B_m,C\times A_m+B_m\right)$。
則 n 進位制中(n> 2)，四位數 10 $\boxed{C}$ $\boxed{a}$為a倍的反向倍數的整數解 $(n,a)=(A_m,B_m)_{m\geq1}$。

證明：從推論 5 得知，**n 進位制中(n> 2)，首位為 1 的四位數的反向倍數，**

必為 10 $\boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}}$ $\boxed{a}$ 反向數型式。a ∈{2,⋯,n-1}，$\frac{a^2-1}{(n-a)n}$ ∈{1,2,⋯,n-1}。

令 $\frac{a^2-1}{(n-a)n}=\mathrm{C}$ ，C ∈{1,2,⋯,n-1}

$Cn^2-Can-a^2=-1$ ………(1)

將$(n,a)\to((C+1)n+a,Cn+a)$取代(1)式中左式的 n 、a

$$\text{左式} = C\big((C+1)n+a\big)^2 - C(Cn+a)\big((C+1)n+a\big) - (Cn+a)^2$$
$$= Cn^2 - Can - a^2$$

因此$\big((C+1)n+a\ ，Cn+a\big)$亦滿足(1)式。

故若數列$\{(A_m\ ，B_m)_{m\geq 0}\}$滿足：

$\boldsymbol{A_0 = 1，B_0 = 1，A_{m+1} = (C+1)A_m + B_m，B_{m+1} = C \times A_m + B_m}$，$\mathbf{C} \in\{1,2,\cdots,\text{n-1}\}$。

$\boldsymbol{(A_m\ ，B_m) \to (A_{m+1}\ ，B_{m+1}) = \big((C+1)A_m + B_m\ ，C \times A_m + B_m\big)}$。

則 n 進位制中(n> 2)，四位數 10$\boxed{\text{C}}$ $\boxed{a}$為$\boldsymbol{a}$倍的反向倍數的整數解$\boldsymbol{(n\ ，a) = (A_m\ ，B_m)_{m\geq 1}}$。

（七）探討二位數反向倍數推廣之基本型

從定理 6 知，n 進位制中(n> 2)，二位數$\boxed{(\text{n}-a)\text{k}}$ $\boxed{(an-1)\text{k}}$為a倍的反向倍數。而我們在先前的 3~12 進位制反向倍數探討中，發現13_5、143_5、1443_5、$144\cdots443_5$的反向數是 5 進位制反向倍數的基本型。15_7、165_7、1665_7、$166\cdots665_7$的反向數是 7 進位制反向倍數的基本型。25_8、275_8、2775_8、$277\cdots775_8$的反向數是 8 進位制反向倍數的基本型。17_9、187_9、1887_9、$188\cdots887_9$的反向數是 9 進位制反向倍數的基本型。37_{11}、$3\boxed{10}7_{11}$、$3\boxed{10}\boxed{10}7_{11}$、$3\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}7_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。$14_{11}$、$154_{11}$、$1554_{11}$、$155\cdots54_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。$28_{11}$、$2\boxed{10}8_{11}$、$2\boxed{10}\boxed{10}8_{11}$、$2\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}8_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。$19_{11}$、$1\boxed{10}9_{11}$、$1\boxed{10}\boxed{10}9_{11}$、$1\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}9_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。因此我們大膽猜測二位數反向倍數推廣的一種基本型為在二位數中間插入若干個(首位數加末位數)數字，即為下列定理 11。另外，在二位數反向倍數的觀察，發現13_5、15_7、17_9、19_{11}、…等的反向數均為反向倍數，因而我們大膽猜測並驗證若 n 進位制中，若 n 為大於 3 的奇數，則必有 1$\boxed{\text{n-2}}$ 的反向倍數基本型，即為下列定理 12。

【定理 11】$\boxed{(\text{n}-a)\text{k}}$ $\boxed{(an-1)\text{k}}$、$\boxed{(\text{n}-a)\text{k}}$ $\boxed{(\text{n}-a)\text{k}+(an-1)\text{k}}$ $\boxed{(an-1)\text{k}}$、$\boxed{(\text{n}-a)\text{k}}$ $\boxed{(\text{n}-a)\text{k}+(an-1)\text{k}}$ …… $\boxed{(\text{n}-a)\text{k}+(an-1)\text{k}}$ $\boxed{(an-1)\text{k}}$的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> 2)。$\boldsymbol{a} \in\{2,3,\cdots,\text{n-1}\}$，$\boldsymbol{k} \in\{\frac{1}{a^2-1},\frac{2}{a^2-1},\cdots,\frac{a-1}{a^2-1}\}$。

證明：1. 從定理 6 知，n 進位制中(n> 2)，二位數$\boxed{(\text{n}-a)\text{k}}$ $\boxed{(an-1)\text{k}}$為a倍的反向倍數。

$a \in\{2,3,\cdots,\text{n-1}\}$，$k \in\{\frac{1}{a^2-1},\frac{2}{a^2-1},\cdots,\frac{a-1}{a^2-1}\}$

$$\text{得知}\begin{cases}(an-1)\text{k}\times a = qn + (\text{n}-a)\text{k} \ldots\ldots.(1)\\(\text{n}-a)\text{k}\times a + q = (an-1)\text{k} \ldots\ldots\ldots.(2)\\q = (a^2-1)\text{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3)\end{cases}$$

2. 假設二位數$\boxed{(\text{n}-a)\text{k}}$ $\boxed{(an-1)\text{k}}$為a倍的反向倍數。$k \in\{\frac{1}{a^2-1},\frac{2}{a^2-1},\cdots,\frac{a-1}{a^2-1}\}$

m 位數$\boldsymbol{\boxed{(\text{n}-a)\text{k}}\ \boxed{(\text{n}-a)\text{k}+(an-1)\text{k}}\ \cdots\cdots\ \boxed{(\text{n}-a)\text{k}+(an-1)\text{k}}\ \boxed{(an-1)\text{k}}}$

將此 m 位數乘以a倍，直式如下。

$$\begin{array}{lcccc}
\text{進位}\ (a^2-1)\text{k} & (a^2-1)\text{k} & & (a^2-1)\text{k} & (a^2-1)\text{k}\\
\boxed{(\text{n}-a)\text{k}} & \boxed{(\text{n}-a)\text{k}+(an-1)\text{k}} & \cdots\cdots & \boxed{(\text{n}-a)\text{k}+(an-1)\text{k}} & \boxed{(an-1)\text{k}}\\
 & & & & \boxed{a}\\
\times & & & & \\
\hline
\boxed{(an-1)\text{k}} & \boxed{(\text{n}-a)\text{k}+(an-1)\text{k}} & \cdots\cdots & \boxed{(\text{n}-a)\text{k}+(an-1)\text{k}} & \boxed{(\text{n}-a)\text{k}}
\end{array}$$

∵ 第 1 位數 $(an-1)\text{k}\times a = qn + (\text{n}-a)\text{k}$，$q = (a^2-1)\text{k}$ (由(1)、(3))

∴ 進$(a^2-1)\text{k}$到第 2 位數，第 1 位數為$(\text{n}-a)\text{k}$

∵ 第 2 位數 $[(n-a)k+(an-1)k]\ \times a\ +(a^2-1)k$

$=\ (a^2-1)k \times n+(n-a)k+(an-1)k$ (由(1)、(2)、(3))

∴ 進$(a^2-1)k$到第 3 位數，第 2 位數為$(n-a)k+(an-1)k$

依此計算到第(m-1)位數，進$(a^2-1)k$到第 m 位數，第(m-1)位數為$(n-a)k+(an-1)k$。

∵ 第 m 位數$(n-a)k\times\ a\ +\ (a^2-1)k=(an-1)k$ (由(2)、(3))

∴ 第 m 位數為$(an-1)k$

因此，$\boxed{(n-a)k}\ \boxed{(an-1)k}$、$\boxed{(n-a)k}\ \boxed{(n-a)k+(an-1)k}\ \boxed{(an-1)k}$、$\boxed{(n-a)k}\ \boxed{(n-a)k+(an-1)k}$ …… $\boxed{(n-a)k+(an-1)k}\ \boxed{(an-1)k}$的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> 2)。$a\in\{2,\cdots,n-1\}$，$k\in\{\frac{1}{a^2-1},\frac{2}{a^2-1},\cdots,\frac{a-1}{a^2-1}\}$。。

【定理 12】n 進位制中，若 n> 3且 n 為奇數，則二位數 1$\boxed{n\text{-}2}$ 為 $\boxed{\frac{n-1}{2}}$倍的反向倍數。

證明： 令$n=2x+1$ ，$x\in\mathbb{N}$ 且 $x>2$

計算 1$\boxed{n\text{-}2}\times\boxed{\frac{n-1}{2}}$ = 1$\boxed{2x\text{-}1}\times\boxed{x}$

$$\begin{array}{rcc} \text{進位} & (x-1) & \\ & 1 & \boxed{2x-1} \\ \times & & \boxed{x} \\ \hline & \boxed{2x-1} & 1 \end{array}$$

∵ 第 1 位數 $(2x-1)\times x=2x^2-x=2x^2-x-1+1$

$=(x-1)(2x+1)+1$，

又$n=2x+1$

∴ 進$(x-1)$到第 2 位數，第 1 位數為1

∵ 第 2 位數 $1\times\ x\ +\ (x-1)=2x-1$

∴ 第 2 位數為 $2x-1$

因此 n 進位制中，若 n> 3且 n 為奇數，則二位數 1$\boxed{n\text{-}2}$ 為 $\boxed{\frac{n-1}{2}}$倍的反向倍數。

四、從四位數 10$\boxed{C}\ \boxed{a}_n\times\boxed{a}_n$的進位值數列觀察

我們試著將目前推論撰寫找出 n 進位制反向倍數的電腦程式演算法，以下為大致流程：

① 輸入(n，m)。n 進位制(n>2)，搜尋 m 位數反向倍數(m≥2)。

② m=2 或 3，運用定理 6、定理 7，計算及輸出二位數、三位數a倍的反向倍數與a值。

③ m≥4 時，使用文獻中探討首位與末位數字的關係與推論 1，篩選出滿足 A⋯B × a =B⋯A。A<B，$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$。得到 A、B、a、q_1、q_{m-1}。

④ 計算篩選出滿足 AX⋯YB 為a倍的反向倍數。得到 X、Y。

$X=\frac{naq_{m-1}-aq_{m-2}+nq_2-q_1}{a^2-1}\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，$Y=\frac{nq_{m-1}-q_{m-2}+naq_2-aq_1}{a^2-1}\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$，

q_2、$q_{m-2}\in\{0,1,2,\cdots,a-1\}$

⑤ 在首兩位 AX 與末兩位 YB 中間插入 m-4 位數字。

⑥ 計算⑤之數字× a ，與其反向數進行比對。

⑦ 輸出滿足⑥比對一致之四位數以上數字(a倍的反向倍數)與a值。

藉由電腦程式的協助，觀察到仍有不少反向倍數的樣態尚未探討到，但在前面使用代數法的經驗中，發現在計算中的進位值是有規律的。進而我們將各進位制反向倍數其進位值數列表列。驚訝的發現進位值數列大多為迴文數且也出現如反向倍數的基本型或組合型模式，這讓我們思索著是否也能利用進位值的數列規律，進而推導出 n 進位制的反向倍數。

在與老師的討論中，首先發現定理 10 中的 10$\boxed{C}\ \boxed{a}_n$與其進位值數列具有函數關係，以下為論證過程。

1. 101$\boxed{a}_n$的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數與其進位值數列關係

運用定理 10. $(n，a)\rightarrow(2n+a，n+a)$ 推導出下表

$(n，a)$	101$\boxed{a}_n\times\boxed{a}_n$ →	進位值數列	進位值數列反向倍數
$(1，1)$			

$(3，2)$	$1012_3 \times 2_3$ →	011	11 × 1 ，2 進位制
$(8，5)$	$1015_8 \times 5_8$ →	013	13 × 2 ，5 進位制
$(21，13)$	$101\boxed{13}_{21} \times \boxed{13}_{21}$ →	018	18 × 5 ，13 進位制
$(55，34)$	$101\boxed{34}_{55} \times \boxed{34}_{55}$ →	$01\boxed{21}$	$1\boxed{21} \times \boxed{13}$ ，34 進位制
$(144，89)$	$101\boxed{89}_{144} \times \boxed{89}_{144}$ $\boxed{a}_n$	$01\boxed{55}$	$1\boxed{55} \times \boxed{34}$ ，89 進位制
…	…	…	…

從表中可以觀察到$(n，a)$的變化與進位值數列及其反向倍數的進位制有顯然的關係，我們將其關係用以下兩個函數關係來表示：

(1) 若 $101\boxed{a}_n$ 的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數，則 $1\boxed{n}_{n+a}$的$\boxed{a}_{n+a}$倍亦為反向倍數。

$f：\ 101\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \rightarrow 1\boxed{n}_{n+a} \times \boxed{a}_{n+a}$

$$\begin{array}{rcc} \text{進位} & & (n-a) \\ & 1 & \boxed{n} \\ & & \boxed{a} \\ \times & & \\ \hline & \boxed{n} & 1 \end{array}$$

證明：令 $101\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n = \boxed{a}101_n$

則$\begin{cases} a^2 = nq + 1 \\ a + q = n \end{cases} \Rightarrow an = n^2 - a^2 + 1$

計算 $1\boxed{n}_{n+a} \times \boxed{a}_{n+a}$ ，直式如右。

∵ 第 1 位數 $n \times a = n^2 - a^2 + 1 = (n-a)(n+a) + 1$

∴ 進$(n-a)$到第 2 位數，第 1 位數為1

∵ 第 2 位數 $1 \times a + (n-a) = n$

∴ 第 2 位數為 n

因此若 $101\boxed{a}_n$ 的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數，則 $1\boxed{n}_{n+a}$的$\boxed{a}_{n+a}$倍亦為反向倍數。

(2) 若 $1\boxed{x}_{x+y}$的$\boxed{y}_{x+y}$倍為反向倍數，則 $101\boxed{x+y}_{2x+y}$ 的$\boxed{x+y}_{2x+y}$倍亦為反向倍數。

$g：\ 1\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \rightarrow 101\boxed{x+y}_{2x+y} \times \boxed{x+y}_{2x+y}$

$$\begin{array}{rcccc} \text{進位} & & 1 & x & \\ & 1 & 0 & 1 & \boxed{x+y} \\ & & & & \boxed{x+y} \\ \times & & & & \\ \hline & \boxed{x+y} & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

證明：令 $1\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} = \boxed{x}1_{x+y}$

則$\begin{cases} xy = (x+y)q + 1 \\ y + q = x \end{cases} \Rightarrow y^2 = x^2 - xy + 1$

計算 $101\boxed{x+y}_{2x+y} \times \boxed{x+y}_{2x+y}$ ，直式如右。

∵ 第 1 位數 $(x+y) \times (x+y) = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + (x^2 - xy + 1)$
$= x(2x+y) + 1$

∴ 進x到第 2 位數，第 1 位數為1

∵ 第 2 位數 $1 \times (x+y) + x = (2x+y)$

∴ 進 1 到第 3 位數，第 2 位數為 0

∵ 第 3 位數 $0 + 1 = 1$

∴ 沒有進位值到第 4 位數，第 3 位數為 1，第 4 位數為$(x+y)$

因此若 $1\boxed{x}_{x+y}$的$\boxed{y}_{x+y}$倍為反向倍數，則 $101\boxed{x+y}_{2x+y}$ 的$\boxed{x+y}_{2x+y}$倍亦為反向倍數。

(3) $f：\ 101\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \rightarrow 1\boxed{n}_{n+a} \times \boxed{a}_{n+a}$

$g：\ 1\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \rightarrow 101\boxed{x+y}_{2x+y} \times \boxed{x+y}_{2x+y}$

$g\,of：\ 101\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \rightarrow 101\boxed{n+a}_{2n+a} \times \boxed{n+a}_{2n+a}$

$g\,of$ 符合定理 10。

2. $102\boxed{a}_n$的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數與其進位值數列關係

運用定理 10. $(n，a) \rightarrow (3n+a，2n+a)$ 推導出下表

$(n，a)$	$102\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n$ →	進位值數列	進位值數列反向倍數
$(1，1)$			
$(4，3)$	$1023_4 \times 3_4$ →	022	22 × 1 ，3 進位制

$(15，11)$	$102\boxed{\mathbf{11}}_{15}\times\boxed{11}_{15}\ \rightarrow$	028	$28\ \times\ 3$ ，11 進位制
$(56，41)$	$102\boxed{\mathbf{41}}_{56}\times\boxed{41}_{56}\ \rightarrow$	$02\boxed{30}$	$2\boxed{30}\ \times\ \boxed{11}$ ，41 進位制
$(209，153)$	$102\boxed{\mathbf{153}}_{209}\times\boxed{153}_{209}\ \rightarrow$	$02\boxed{112}$	$2\boxed{112}\ \times\ \boxed{41}$ ，153 進位制
…	…	…	…

從表中可以觀察到$(n，a)$的變化與進位值數列及其反向倍數的進位制有顯然的關係，我們將其關係用以下兩個函數關係來表示：

(1) 若 $102\boxed{a}_n$ 的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數，則 $2\boxed{2n}_{2n+a}$的$\boxed{a}_{2n+a}$倍亦為反向倍數。

$f：\ 102\boxed{a}_n\times\boxed{a}_n\ \rightarrow\ 2\ \boxed{2n}_{2n+a}\times\boxed{a}_{2n+a}$

$$\begin{array}{rcc} \text{進位} & & (2n-2a) \\ & 2 & \boxed{2n} \\ & & \boxed{a} \\ \times & & \\ \hline & \boxed{2n} & 2 \end{array}$$

證明：令 $102\boxed{a}_n\times\boxed{a}_n=\boxed{a}201_n$

則$\begin{cases} a^2=nq+1 \\ 2a+q=2n \end{cases}\ \Rightarrow\ 2an=2n^2-a^2+1$

計算 $2\boxed{2n}_{2n+a}\times\boxed{a}_{2n+a}$ ，直式如右。

∵ 第 1 位數 $2n\times a=2n^2-a^2+1=2n^2-a^2-(-2n^2+2an+a^2)+2$

$=4n^2-2an-2a^2+2=(2n-2a)(2n+a)+2$

∴ 進$(2n-2a)$到第 2 位數，第 1 位數為2

∵ 第 2 位數 $2\times a+(2n-2a)=2n$

∴ 第 2 位數為 $2n$

因此若 $102\boxed{a}_n$ 的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數，則 $2\boxed{2n}_{2n+a}$的$\boxed{a}_{2n+a}$倍亦為反向倍數。

我們發現若將 $2\boxed{2n}_{2n+a}\div 2_{n+a}=1\boxed{n}_{2n+a}$ ，其$\boxed{a}_{2n+a}$倍也是反向倍數。

計算 $1\boxed{n}_{2n+a}\times\boxed{a}_{2n+a}$ ，直式如右。

$$\begin{array}{rcc} \text{進位} & & (n-a) \\ & 1 & \boxed{n} \\ & & \boxed{a} \\ \times & & \\ \hline & \boxed{n} & 1 \end{array}$$

∵ 第 1 位數 $n\times a=n^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}$

$$=n^2-\frac{1}{2}a^2-\left(-n^2+an+\frac{1}{2}a^2\right)+1$$

$$=2n^2-an-a^2+1=(n-a)(2n+a)+1$$

∴ 進$(n-a)$到第 2 位數，第 1 位數為1

∵ 第 2 位數 $1\times a+(n-a)=n$

∴ 第 2 位數為 n

以上的驗證便能說明在 11 進位制的二位數反向倍數中，28_{11}、14_{11}為3_{11}倍的反向倍數的觀察。如此對於 n 進位制二位數反向倍數的瞭解，又更進了一大步。

(2) 若 $2\boxed{x}_{x+y}$的$\boxed{y}_{x+y}$倍為反向倍數，則 $102\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$ 的$\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$倍亦為反向倍數。

$g：\ 2\boxed{x}_{x+y}\times\boxed{y}_{x+y}\ \rightarrow\ 102\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}\times\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$

$$\begin{array}{rcccc} \text{進位} & & 2 & x & \\ & 1 & 0 & 2 & \boxed{x+y} \\ & & & & \boxed{x+y} \\ \times & & & & \\ \hline & \boxed{x+y} & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

證明：令 $2\boxed{x}_{x+y}\times\boxed{y}_{x+y}=\boxed{x}2_{x+y}$

則$\begin{cases} xy=(x+y)q+2 \\ 2y+q=x \end{cases}\ \Rightarrow\ y^2=\frac{1}{2}x^2-xy+1$

計算 $102\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}\times\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$ ，直式如右。

∵ 第 1 位數 $(x+y)\times(x+y)=x^2+2xy+y^2=x^2+2xy+(\frac{1}{2}x^2-xy+1)$

$$=x\left(\frac{3}{2}x+y\right)+1$$

∴ 進x到第 2 位數，第 1 位數為1

∵ 第 2 位數 $2\times(x+y)+x=2\left(\frac{3}{2}x+y\right)$

∴ 進 2 到第 3 位數，第 2 位數為 0

∵ 第 3 位數 $0+\ 2=2$
∴ 沒有進位值到第 4 位數，第 3 位數為 2，第 4 位數為$(x+y)$

因此若 $2\boxed{x}_{x+y}$的$\boxed{y}_{x+y}$倍為反向倍數，則 $102\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$ 的$\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$倍亦為反向倍數。

(3) f： $102\boxed{a}_{n}\times\boxed{a}_{n}\ \rightarrow\ 2\ \boxed{2n}_{2n+a}\times\boxed{a}_{2n+a}$
g： $2\boxed{x}_{x+y}\times\boxed{y}_{x+y}\ \rightarrow\ 102\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}\times\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$
$g\circ f$： $102\boxed{a}_{n}\times\boxed{a}_{n}\ \rightarrow\ 102\boxed{2n+a}_{3n+a}\times\boxed{2n+a}_{3n+a}$
$g\circ f$ 符合定理 10。

3. $103\boxed{a}_{n}$的$\boxed{a}_{n}$倍為反向倍數與其進位值數列關係

運用定理 10. $(n，a)\rightarrow(4n+a，3n+a)$ 推導出下表

$(n，a)$	$103\boxed{a}_{n}\times\boxed{a}_{n}\ \rightarrow$	進位值數列	進位值數列反向倍數
$(1，1)$			
$(5，4)$	$1034_{5}\times 4_{5}\ \rightarrow$	033	33×1，4 進位制
$(24，19)$	$103\boxed{19}_{24}\times\boxed{19}_{24}\ \rightarrow$	$03\boxed{15}$	$3\boxed{15}\times 4$，19 進位制
$(115，91)$	$103\boxed{91}_{115}\times\boxed{91}_{115}\ \rightarrow$	$03\boxed{72}$	$3\boxed{72}\times\boxed{19}$，91 進位制
$(511，436)$	$103\boxed{436}_{511}\times\boxed{436}_{511}\ \rightarrow$	$03\boxed{345}$	$3\boxed{345}\times\boxed{91}$，436 進位制
…	…	…	…

從表中可以觀察到$(n，a)$的變化與進位值數列及其反向倍數的進位制有顯然的關係，我們將其關係用以下兩個函數關係來表示：

(1) 若 $103\boxed{a}_{n}$ 的$\boxed{a}_{n}$倍為反向倍數，則 $3\boxed{3n}_{3n+a}$的$\boxed{a}_{3n+a}$倍亦為反向倍數。

f： $103\boxed{a}_{n}\times\boxed{a}_{n}\ \rightarrow\ 3\ \boxed{3n}_{3n+a}\times\boxed{a}_{3n+a}$

證明：令 $103\boxed{a}_{n}\times\boxed{a}_{n}=\boxed{a}301_{n}$

則$\begin{cases}a^2=nq+1\\3a+q=3n\end{cases}\Longrightarrow 3an=3n^2-a^2+1$

計算 $3\boxed{3n}_{3n+a}\times\boxed{a}_{3n+a}$，直式如右。

$$\begin{array}{rrr} \text{進位} & (3n-3a) & \\ & 3 & \boxed{3n} \\ & & \boxed{a} \\ \times & & \\ \hline & \boxed{3n} & 3 \end{array}$$

∵ 第 1 位數 $3n\times a=3n^2-a^2+1=3n^2-a^2-2(-3n^2+3an+a^2)+3$
$=9n^2-6an-3a^2+3=(3n-3a)(3n+a)+3$
∴ 進$(3n-3a)$到第 2 位數，第 1 位數為3
∵ 第 2 位數 $3\times a+(3n-3a)=3n$
∴ 第 2 位數為 $3n$

因此若 $103\boxed{a}_{n}$ 的$\boxed{a}_{n}$倍為反向倍數，則 $3\boxed{3n}_{3n+a}$的$\boxed{a}_{3n+a}$倍亦為反向倍數。

我們發現若將 $3\boxed{3n}_{3n+a}\div 3_{3n+a}=1\boxed{n}_{3n+a}$，其$\boxed{a}_{3n+a}$倍也是反向倍數。
計算 $1\boxed{n}_{3n+a}\times\boxed{a}_{3n+a}$，直式如右。

$$\begin{array}{rrr} \text{進位} & (n-a) & \\ & 1 & \boxed{n} \\ & & \boxed{a} \\ \times & & \\ \hline & \boxed{n} & 1 \end{array}$$

∵ 第 1 位數 $n\times a=n^2-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}$
$=n^2-\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}(-3n^2+3an+a^2)+1$
$=3n^2-2an-a^2+1=(n-a)(3n+a)+$
∴ 進$(n-a)$到第 2 位數，第 1 位數為1

∵ 第 2 位數 $1\times a + (n-a) = \mathrm{n}$
∴ 第 2 位數為 n

因此若 $3\boxed{3\mathrm{n}}_{3n+a}$的$\boxed{a}_{3n+a}$倍為反向倍數，則 $1\boxed{\mathrm{n}}_{3n+a}$的$\boxed{a}_{3n+a}$倍亦為反向倍數。

(2) 若 $3\boxed{x}_{x+y}$的$\boxed{y}_{x+y}$倍為反向倍數，則 $103\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$ 的$\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$倍亦為反向倍數。

$$g: \; 3\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \;\rightarrow\; 103\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y} \times \boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$$

證明：令 $3\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} = \boxed{x}3_{x+y}$

則$\begin{cases} xy = (x+y)q + 3 \\ 3y + q = x \end{cases} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3}x^2 - xy + 1$

計算 $103\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y} \times \boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$ ，直式如右。

$$\begin{array}{rcccc} \text{進位} & & 3 & x & \\ & 1 & 0 & 3 & \boxed{x+y} \\ \times & & & & \boxed{x+y} \\ \hline & \boxed{x+y} & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

∵ 第 1 位數 $(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \times (\mathrm{x}+\mathrm{y}) = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + (\frac{1}{3}x^2 - xy + 1)$
$= x\left(\frac{4}{3}x + y\right) + 1$

∴ 進x到第 2 位數，第 1 位數為1

∵ 第 2 位數 $3\times (x+y) + x = 3\left(\frac{4}{3}x + y\right)$

∴ 進 3 到第 3 位數，第 2 位數為 0

∵ 第 3 位數 $0 + 3 = 3$

∴ 沒有進位值到第 4 位數，第 3 位數為 3，第 4 位數為$(x+y)$

因此若 $3\boxed{x}_{x+y}$的$\boxed{y}_{x+y}$倍為反向倍數，則 $103\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$ 的$\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$倍亦為反向倍數。

(3) $f: \; 103\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \;\rightarrow\; 3\boxed{3n}_{3n+a} \times \boxed{a}_{3n+a}$

$g: \; 3\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \;\rightarrow\; 103\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y} \times \boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$

$g \circ f: \; 103\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \;\rightarrow\; 103\boxed{3n+a}_{4n+a} \times \boxed{3n+a}_{4n+a}$

$g \circ f$ 符合定理 10。

4. $10\boxed{C}\ \boxed{a}_n$的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數與其進位值數列關係

$10\boxed{C}\ \boxed{a}_n$的$\boxed{a}_n$倍其進位值數列為$\{0, \boxed{C}, \boxed{Cn}\}$，其$(n，a)$的變化與進位值數列及其反向倍數的進位制，我們可將其關係用以下兩個函數關係來表示：

(1) 若 $10\boxed{C}\ \boxed{a}_n$ 的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數，則 $\boxed{C}\ \boxed{Cn}_{cn+a}$的$\boxed{a}_{cn+a}$倍亦為反向倍數。

$$f: \; 10\boxed{C}\ \boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \;\rightarrow\; \boxed{C}\ \boxed{Cn}_{cn+a} \times \boxed{a}_{cn+a}$$

證明：令 $10\boxed{C}\ \boxed{a}_n \times \boxed{a}_n = \boxed{a}\boxed{C}01_n$

則$\begin{cases} a^2 = nq + 1 \\ Ca + q = Cn \end{cases} \Rightarrow Can = Cn^2 - a^2 + 1$

計算 $\boxed{C}\ \boxed{Cn}_{cn+a} \times \boxed{a}_{cn+a}$ ，直式如右。

$$\begin{array}{rcc} \text{進位} & (Cn-Ca) & \\ & \boxed{C} & \boxed{Cn} \\ \times & & \boxed{a} \\ \hline & \boxed{Cn} & \boxed{C} \end{array}$$

∵ 第 1 位數 $\mathrm{Cn} \times a = Cn^2 - a^2 + 1 = Cn^2 - a^2 - (C-1)(-Cn^2 + Can + a^2) + C$
$= C^2n^2 - (C^2 - C)an - Ca^2 + C = (Cn - Ca)(Cn + a) + C$

∴ 進$(Cn - Ca)$到第 2 位數，第 1 位數為$\boxed{C}$

∵ 第 2 位數 $\mathrm{C} \times a + (Cn - Ca) = Cn$

∴ 第 2 位數為$\boxed{Cn}$

因此若 $10\boxed{C}\ \boxed{a}_n$ 的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數，則 $\boxed{C}\ \boxed{Cn}_{cn+a}$的$\boxed{a}_{cn+a}$倍亦為反向倍數。

藉由前面的推導經驗，我們便可以推廣論證：**若二位數$\boxed{C}\ \boxed{\mathbf{Cn}}_{\,cn+a}$的$\boxed{a}_{\,cn+a}$倍為反向倍數，s 為$\boxed{C}_{\ cn+a}$的因數，則$\boxed{\frac{C}{s}}\ \boxed{\frac{C}{s}\mathbf{n}}_{\,cn+a}$的$\boxed{a}_{\,cn+a}$倍亦為反向倍數。**

證明：令 s、$\frac{C}{s}\in\mathbb{N}$

計算$\boxed{\frac{C}{s}}\ \boxed{\frac{C}{s}n}_{\,cn+a}\times\boxed{a}_{\,cn+a}$，直式如右。

$$\begin{array}{lcc} \text{進位} & \left(\frac{c}{s}n-\frac{c}{s}a\right) & \\ & \boxed{\frac{c}{s}} & \boxed{\frac{c}{s}n} \\ & & \boxed{a} \\ \hline \times & \boxed{\frac{c}{s}n} & \boxed{\frac{c}{s}} \end{array}$$

$\because$ 第 1 位數 $\frac{C}{s}n\times a=\frac{C}{s}n^2-\frac{1}{s}a^2+\frac{1}{s}$

$=\frac{C}{s}n^2-\frac{1}{s}a^2+\frac{1}{s}+\frac{C-1}{s}-\frac{C-1}{s}$

$=\frac{C}{s}n^2-\frac{1}{s}a^2-\frac{C-1}{s}(-Cn^2+Can+a^2)+\frac{C}{s}$

$=\frac{C^2}{s}n^2-\frac{C^2-C}{s}an-\frac{c}{s}a^2+\frac{c}{s}$

$=\left(\frac{c}{s}n-\frac{c}{s}a\right)(Cn+a)+\frac{c}{s}$

$\therefore$ 進$\left(\frac{c}{s}n-\frac{c}{s}a\right)$到第 2 位數，第 1 位數為$\boxed{\frac{C}{s}}$

$\because$ 第 2 位數$\frac{C}{s}\times a+\left(\frac{c}{s}n-\frac{c}{s}a\right)=\frac{C}{s}n$

$\therefore$ 第 2 位數為$\boxed{\frac{C}{s}n}$

因此若二位數$\boxed{C}\ \boxed{\mathbf{Cn}}_{\,cn+a}$的$\boxed{a}_{\,cn+a}$倍為反向倍數，s 為$\boxed{C}_{\ cn+a}$的因數，則$\boxed{\frac{C}{s}}\ \boxed{\frac{C}{s}\mathbf{n}}_{\,cn+a}$的$\boxed{a}_{\,cn+a}$倍亦為反向倍數。

藉由從上述的論證及二位數的一般式，我們更有信心的去推論以下定理。

若二位數$1B_n$為$\boxed{n-mB}_n$倍的反向倍數，則 $\boxed{s}\,\boxed{sB}_{\,n}$亦為$\boxed{n-mB}_n$倍的反向倍數。其中 m、s、$\frac{m}{s}\in\mathbb{N}$

證明：令$1B_n\times\boxed{n-mB}_n=B1_n$，$0\le n-mB\le n-1$

$\begin{cases}B(n-mB)=nq+1\\ (n-mB)+q=B\end{cases}\Rightarrow B(n-mB)=n[B-(n-mB)]+1$，其中$(m+1)B>n$

計算$\boxed{s}\,\boxed{sB}_{\,n}\times\boxed{n-mB}_n$，直式如右。

$$\begin{array}{lcc} \text{進位} & s[(m+1)B-n] & \\ & \boxed{s} & \boxed{sB} \\ & & \boxed{n-mB} \\ \hline \times & \boxed{sB} & \boxed{s} \end{array}$$

m、 s為正整數且 m、s、$\frac{m}{s}\in\mathbb{N}$

$\because$ 第 1 位數 sB $\times(n-mB)$

$=s\{n[B-(n-mB)]+1\}$

$=sn[(m+1)B-n]+s$

$\therefore$ 進$s[(m+1)B-n]$到第 2 位數，第 1 位數為$\boxed{s}$

$\because$ 第 2 位數 $s\times(n-mB)+s[(m+1)B-n]=\boxed{sB}$

$\therefore$ 第 2 位數為$\boxed{sB}$

因此若二位數$1B_n$為$\boxed{n-mB}_n$倍的反向倍數，則 $\boxed{s}\,\boxed{sB}_{\,n}$亦為$\boxed{n-mB}_n$倍的反向倍數。其中 m、s、$\frac{m}{s}\in\mathbb{N}$

藉由定理 6，n 進位制中(n> 2)，二位數$\boxed{(n-a)k}\ \boxed{(an-1)k}$為$a$倍的反向倍數。$a\in\{2,3,\cdots,n\text{-}1\}$，$k\in\{\frac{1}{a^2-1},\frac{2}{a^2-1},\cdots,\frac{a-1}{a^2-1}\}$。**令$\mathbf{1}=(\mathbf{n}-a)\mathbf{k}$，$B=(an-1)\mathbf{k}$，$a=n-mB$，則可推得$B=\frac{an-1}{n-a}$，$m=\frac{(n-a)^2}{an-1}$，**便可得定理 13。

【定理 13】n 進位制中(n> 2)，若二位數$1\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_{\,n}$為$a_n$倍的反向倍數，則 $\boxed{s}\,\boxed{s\left(\frac{an-1}{n-a}\right)}_{\,n}$亦為$a_n$倍的反向倍數。其中 s、$\frac{an-1}{n-a}$、$\frac{(n-a)^2}{an-1}$、$\frac{(n-a)^2}{s(an-1)}\in\mathbb{N}$，s 為$\frac{(n-a)^2}{an-1}$的因數。

而在定理 12，n 進位制中，若 n> 3且 n 為奇數，則 1$\boxed{n\text{-}2}$ 是$\boxed{\frac{n-1}{2}}$倍的反向倍數。若要同時滿足定理 13，則可推出 n=3、5，部分與定理 12 的起始條件不合，因此<u>定理 12 與定理 13 為 n 進位制中，二位數首位為 1 的反向數為反向倍數的判別定理</u>。

從定理 11 與定理 13 知道$1\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n$、$1\boxed{1+\frac{an-1}{n-a}}\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n$、$1\boxed{1+\frac{an-1}{n-a}}\cdots\boxed{1+\frac{an-1}{n-a}}\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n$、的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> **2**)，也是基本型的原型。

我們將$1\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n \times \boxed{s}_n = \boxed{s}\boxed{s(\frac{an-1}{n-a})}_n$

$1\boxed{1+\frac{an-1}{n-a}}\cdots\boxed{1+\frac{an-1}{n-a}}\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n \times \boxed{s}_n = \boxed{s}\boxed{s+s(\frac{an-1}{n-a})}\ldots\boxed{s+s(\frac{an-1}{n-a})}\boxed{s(\frac{an-1}{n-a})}_n$

因此若 s 為$\frac{(n-a)^2}{an-1}$的因數，且s <n，則可透過定理 13 反向倍數基本型的原型乘以 s 倍，找到另一個反向倍數的基本型。

(2) 若$\boxed{C}\boxed{x}_{x+y}$的$\boxed{y}_{x+y}$倍為反向倍數，則 $10\boxed{C}\boxed{x+y}\frac{C+1}{C}x+y$ 的$\boxed{x+y}\frac{C+1}{C}x+y$倍亦為反向倍數。

$g: \boxed{C}\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \rightarrow 10\boxed{C}\boxed{x+y}\frac{C+1}{C}x+y \times \boxed{x+y}\frac{C+1}{C}x+y$

證明：令$\boxed{C}\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} = \boxed{x}\boxed{C}_{x+y}$

則$\begin{cases} xy=(x+y)q+3 \\ Cy+q=x \end{cases} \Rightarrow y^2=\frac{1}{C}x^2-xy+1$

計算 $10\boxed{C}\boxed{x+y}\frac{C+1}{C}x+y \times \boxed{x+y}\frac{C+1}{C}x+y$，直式如右。

進位		C	x	
	1	0	$\boxed{C}$	$\boxed{x+y}$
×				$\boxed{x+y}$
	$\boxed{x+y}$	$\boxed{C}$	0	1

∵ 第 1 位數 $(x+y)\times(x+y) = x^2+2xy+y^2 = x^2+2xy+(\frac{1}{C}x^2-xy+1)$

$= x\left(\frac{C+1}{C}x+y\right)+1$

∴ 進x到第 2 位數，第 1 位數為1

∵ 第 2 位數 $C\times(x+y)+x = C\left(\frac{C+1}{C}x+y\right)$

∴ 進 C 到第 3 位數，第 2 位數為 0

∵ 第 3 位數 $0+C=C$

∴ 沒有進位值到第 4 位數，第 3 位數為 C，第 4 位數為$(x+y)$

因此若$\boxed{C}\boxed{x}_{x+y}$的$\boxed{y}_{x+y}$倍為反向倍數，則 $10\boxed{C}\boxed{x+y}\frac{C+1}{C}x+y$ 的$\boxed{x+y}\frac{C+1}{C}x+y$倍亦為反向倍數。

(3) $f: 10\boxed{C}\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \rightarrow \boxed{C}\boxed{Cn}_{cn+a} \times \boxed{a}_{cn+a}$

$g: \boxed{C}\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \rightarrow 10\boxed{C}\boxed{x+y}\frac{C+1}{C}x+y \times \boxed{x+y}\frac{C+1}{C}x+y$

$g\circ f: 10\boxed{C}\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \rightarrow 10\boxed{C}\boxed{Cn+a}_{(C+1)n+a} \times \boxed{Cn+a}_{(C+1)n+a}$

$g\circ f$ 符合定理 10。

伍、結論

我們將這次研究結論歸納如下：

【推論 1】n 進位制($n\geq 2$)，若 m 位數 A⋯B 為a倍的反向倍數($m\geq 2$)，則其每一位進位值必定小於a。$A\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}$，$B\in\{2,3,4,\ldots,n-1\}$，$a\in\{2,3,\ldots,n-1\}$

【推論 2】3 進位制中，反向倍數則必是 $10\cdots12_3\times 2_3$ =$21\cdots01_3$的形式。

【推論 3】3 進位制中，可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

【推論 4】n 進位制中，可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。(n> 2)

【推論 5】n 進位制中(n> 2)，四位數(首位為 1、末位為a)為a倍的反向倍數，
必為 $10\boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}}\ \boxed{a}$ 的型式。$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$

【定理 1】1012_3、10212_3、102212_3、$1022\cdots2212_3$的反向數是 3 進位制反向倍數的基本型。

【定理 2】n 進位制中(n> 2)，四位數$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$為$\boxed{n-1}_n$倍的反向倍數。

【定理 3】$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$、$10\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$、$10\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> 2)。

【定理 4】四位數$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$為$\boxed{\frac{n}{s}-1}_n$倍的 n 進位制反向倍數(n> 2)。其中 s、$\frac{n}{s}\in\mathbb{N}$，且$2<\frac{n}{s}$ 。

【定理 5】$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$、$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$、$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-1}\boxed{n-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$、$\cdots$、$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-1}\ldots\boxed{n-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$的反向數都是$\boxed{\frac{n}{s}-1}_n$倍的 n 進位制反向倍數基本型(n> 2)。其中 s、$\frac{n}{s}\in\mathbb{N}$，且$2<\frac{n}{s}$ 。

【定理 6】n 進位制中(n> 2)，二位數$\boxed{(n-a)k}\ \boxed{(an-1)k}$為$a$倍的反向倍數。
$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，$k\in\{\frac{1}{a^2-1},\frac{2}{a^2-1},\cdots,\frac{a-1}{a^2-1}\}$。

【定理 7】n 進位制中(n> 2)，三位數$\boxed{\frac{nq_1-aq_2}{a^2-1}}\ \boxed{\frac{nq_2-q_1}{a-1}}\ \boxed{\frac{anq_1-q_2}{a^2-1}}$為$a$倍的反向倍數。
$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，q_1、$q_2\in\{1,2,\cdots,a-1\}$。

【定理 8】n 進位制中(n> 2)，四位數$\boxed{k}\ \boxed{(n-a)t}\ \boxed{\frac{(a^2-1)k}{(n-a)n}+(an-1)t}\ \boxed{ak}$為$a$倍的反向倍數。
$a\in\{2,3,\ldots,n-1\}$，$k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$，t為實數。

【定理 9】n 進位制中(n>2)，若 $10\boxed{A}\boxed{B}$的反向數為四位數反向倍數，則 $10\boxed{A}\boxed{B}$、$10\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$、$10\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$、$10\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\ldots\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$的反向數為基本型反向倍數。

【定理 10】若數列$\{(A_m，B_m)_{m\ge0}\}$滿足：
$A_0=1，B_0=1，A_{m+1}=(C+1)A_m+B_m，B_{m+1}=C\times A_m+B_m$， $C\in\{1,2,\cdots,n-1\}$。
$(A_m，B_m)\to(A_{m+1}，B_{m+1})=\left((C+1)A_m+B_m，C\times A_m+B_m\right)$。
則 n 進位制中(n> 2)，四位數 $10\boxed{C}\ \boxed{a}$為a倍的反向倍數的整數解 $(n，a)=(A_m，B_m)_{m\ge1}$。

【定理 11】$\boxed{(n-a)k}\ \boxed{(an-1)k}$、$\boxed{(n-a)k}\ \boxed{(n-a)k+(an-1)k}\ \boxed{(an-1)k}$、$\boxed{(n-a)k}\ \boxed{(n-a)k+(an-1)k}\ \cdots\cdots\ \boxed{(n-a)k+(an-1)k}\ \boxed{(an-1)k}$的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> 2)。$a\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，$\frac{1}{a^2-1}\le k\le\frac{1}{a+1}$，$(a^2-1)k\in\{1,2,\cdots,a-1\}$。

【定理 12】n 進位制中，若 n> 3且 n 為奇數，則二位數 $1\boxed{n-2}$ 為 $\boxed{\frac{n-1}{2}}$倍的反向倍數。

【定理 13】n 進位制中(n> 2)，若二位數$1\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n$ 為a_n倍的反向倍數，則 $\boxed{s}\boxed{s(\frac{an-1}{n-a})}_n$亦為$a_n$倍的反向倍數。其中 s、$\frac{an-1}{n-a}$、$\frac{(n-a)^2}{an-1}$、$\frac{(n-a)^2}{s(an-1)}\in\mathbb{N}$，s 為$\frac{(n-a)^2}{an-1}$的因數。

【四位數反向倍數的一般式】

若存在四位數 ABCD 為 n 進位制a倍的反向倍數，

$$\mathrm{ABCD}\times a=\mathrm{DCBA}\qquad \begin{cases} a\mathrm{D}=nq_1+\mathrm{A}\\ a\mathrm{C}+q_1=nq_2+\mathrm{B}\\ a\mathrm{B}+q_2=nq_3+\mathrm{C}\\ a\mathrm{A}+q_3=\mathrm{D}\end{cases}$$

$\mathrm{A}\in\{1,2,\dots,\mathrm{n}-1\}$，

B、C、D $\in\{0,1,2,\dots,\mathrm{n}-1\}$，

$a\in\{2,3,\dots,\mathrm{n}-1\}$。

狀況 1. 若 $q_3=0$，四位數$\boxed{k}\ \boxed{(n-a)t}\ \boxed{\frac{(a^2-1)k}{(\mathrm{n}-a)n}+(an-1)t}\ \boxed{ak}$為$a$倍的反向倍數。

$a\in\{2,3,\dots,\mathrm{n}-1\}$，$k\in\{1,2,\dots,\mathrm{n}-1\}$，$t$為實數。

狀況 2. 若 $q_3\neq 0$，四位數$\boxed{\frac{nq_1-aq_3}{a^2-1}}\ \boxed{\frac{anq_3+(n-a)q_2-q_1}{a^2-1}}\ \boxed{\frac{nq_3+(an-1)q_2-aq_1}{a^2-1}}\ \boxed{\frac{anq_1-q_3}{a^2-1}}$ 為a倍的反向倍數。$a\in\{2,3,\dots,\mathrm{n}-1\}$，$q_1$、$q_2$、$q_3\in\{1,2,\dots,a-1\}$

【n 進位制中(n> 2)，四位數反向倍數的一種判別法】

在 n 進位制中(n> 2)，ABCD 為a倍的四位數反向倍數，$a\in$\{2,3⋯,n-1\}，若$\mathrm{A}\times a=D$，則必滿足下面條件：

(1) $\mathrm{A}:\mathrm{D}=\mathrm{k}:\mathrm{k}a=1:a$，$k\in$\{1,2⋯,n-1\}

(2) $a^2\mathrm{k}\equiv\mathrm{k}\pmod{\mathrm{n}}$

(3) $\begin{cases} B=(n-a)t\\ C=\frac{(a^2-1)k}{(\mathrm{n}-a)n}+(an-1)t\end{cases}$，$t$為實數，且聯立方程式有解。

【$10\boxed{C}\boxed{a}_n$的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數與其進位值數列關係】

(1) 若 $10\boxed{C}\boxed{a}_n$ 的$\boxed{a}_n$倍為反向倍數，則$\boxed{C}\boxed{\mathrm{Cn}}_{cn+a}$的$\boxed{a}_{cn+a}$倍亦為反向倍數。

f： $10\boxed{C}\boxed{a}_n\times\boxed{a}_n\ \rightarrow\ \boxed{C}\boxed{\mathrm{Cn}}_{cn+a}\times\boxed{a}_{cn+a}$

(2) 若$\boxed{C}\boxed{x}_{x+y}$的$\boxed{y}_{x+y}$倍為反向倍數，則$10\boxed{C}\boxed{x+y}_{\frac{C+1}{C}x+y}$ 的$\boxed{x+y}_{\frac{C+1}{C}x+y}$倍亦為反向倍數。

g：$\boxed{C}\boxed{x}_{x+y}\times\boxed{y}_{x+y}\ \rightarrow\ 10\boxed{C}\boxed{x+y}_{\frac{C+1}{C}x+y}\times\boxed{x+y}_{\frac{C+1}{C}x+y}$

(3) $g\circ f$： $10\boxed{C}\boxed{a}_n\times\boxed{a}_n\ \rightarrow\ 10\boxed{C}\boxed{Cn+a}_{(C+1)n+a}\times\boxed{Cn+a}_{(C+1)n+a}$

陸、未來展望

1. 探究 n 進位制 m 位數反向倍數的一般式。
2. 探究是否存在 n 進位制三位數、四位數、五位數以上的反向倍數基本型的原型？
3. 探究a倍的反向倍數與其進位值數列的關係。

目前發現進位值數列大多為迴文數與反向倍數，且都與a進位制反向倍數有所關聯。在 14 進位制的五位數反向倍數 $1\boxed{10}735\times 3$，其進位值數列為 2101(3 進位制反向倍數)；與 $1419\boxed{11}\times 9$，其進位值數列為 2167 (9 進位制 8 倍的反向倍數 1078 的 2 倍)。這又燃起我們的好奇心，若繼續探討五位數反向倍數一般式，也許可以對其進位值數列了解更多一些。

柒、參考文獻

1. 張進安（2017）。反向倍數知多少。**數學傳播，41(3)**，60-69。
2. 裘宗泸、冷崗松（2017）。**國際數學奧林匹克試題•解答•成績(No.1—50)**(167 頁)。北京：開明。
3. 洪有情(主任委員)（2016）。**國中數學第一冊**。新北市：康軒。
4. 洪有情(主任委員)（2017）。**國中數學第三冊**。新北市：康軒。

【評語】030418

　　這是有關反向回文數的探討，作者從十進位制的數字討論到一般化的 n 進位制的數字並對於一些特殊的進位制給出了完整的解答，也給出了許多構造反向倍數的方法。作者展現了很好的研究精神及數學能力；可惜的是這類的問題有點狹隘。

作品海報

壹、研究動機

國文課時，老師談到回文的概念，這使我懷疑既然國文中的回文如此有趣，那麼數學中是否也有跟國文一樣的東西呢？經過查詢，找到「迴文數」這個非常奇特的概念與其性質，接著想更進一步去瞭解是否也有著其他更有趣的數與其相關。課堂上在不經意的情形下我將369倒敘寫成963，接著思索963是否是369的倍數，發現並不是。便繼續試著將所有二位數、三位數的數字都條列出來檢驗，發現除了迴文數才有倍數關係，跟原先預期原數與倒敘書寫的新數字為倍數關係(2倍以上)應該會有很多個的想法大大不同，而這經驗便是此次科展所討論「反向倍數」的發端。並在討論驗證10進位制反向倍數到一段時間後，老師給予我建議去思索n進位制的反向倍數是否會如10進位制一樣的情形，或有其他的特例產生。在發現n進位制中，n-1倍的反向倍數四位數10 $\boxed{n-2}$ $\boxed{n-1}$，其乘以(n的因數)倍後，也會是反向倍數的基本型。在這驚訝的發現中，開啟了這一段探索未知反向倍數世界的新旅程，讓人既好奇、期待，又怕受傷害。

貳、研究目的

一、找出10進位制之反向倍數，並探討其性質。
二、找出n進位制之反向倍數。
三、推論n進位制之m位數反向倍數的一般式。
四、探討驗證n進位制之反向倍數的性質。

參、研究設備及器材

紙、筆、計算機、Excel、Visual Basic

肆、研究步驟

一、名詞定義

定義1. 因數、倍數

對於a、b、c三個非零整數，若滿足$a \div b = c$，則說a可以被b整除，也得到$a = b \times c$，此時a是b和c的倍數，b和c是a的因數。

定義2. 反向數

若某正整數的所有位數數字按相反順序重新排列後，所得到的數稱為原數的反向數。

定義3. 迴文數(palindromic number)

若某正整數的反向數和原數相同，則稱為迴文數。例如：9、33、191、4774、12321等。

定義4. 反向倍數(本文探討之反向倍數暫且排除迴文數的情況)

若某正整數的反向數，其位數與原數一樣，且恰好是原數的正整數倍，則稱其為反向倍數。例如：110的反向數11，因其反向數的位數為2位數，與原數的3位數不同，所以110沒有反向倍數；2018的反向數是8102，8102並非2018的正整數倍，所以2018沒有反向倍數。但如6的1倍是6，777的1倍是777；1234321的1倍是1234321，這種對稱情況1倍的反向倍數即是迴文數，太過顯然。因此在本文反向倍數的尋找與性質探討中，暫且排除迴文數的情況。 **若A…B為m位數，其$\boldsymbol{a}$倍的反向數為反向倍數，則我們稱A…B為$\boldsymbol{a}$倍的反向倍數。**

定義5. n進位制

進位制是一種記數方式，亦稱進位計數法或位值計數法。利用這種記數法，可以使用有限種數字符號來表示所有的數值。一種進位制中可以使用的數字符號的數目稱為這種進位制的基數或底數。若一個進位制的基數為n，即可稱之為n進位制。

本文中，除了討論10進位制，亦會使用到基數n>10之n進位制，基於驗算與閱讀的便利，基數n>10之n進位制可使用數字符號定義為0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、$\boxed{10}$、$\boxed{11}$、$\boxed{12}$、$\boxed{13}$、…、$\boxed{n-2}$、$\boxed{n-1}$。且除10進位制外，其他n進位制數字表示法中，會將其基數標示於數字的右下角，以利辨別與進位制之數值轉換。例如：8進位制，10732_8 。

二、文獻探討-10進位制反向倍數探討

n 進位制$(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2})$

若 m 位數 A…B 為$\boldsymbol{a}$倍的反向倍數$(\boldsymbol{m} \geq \mathbf{2})$

$\mathbf{A} \in \{1, 2, 3, \dots, \boldsymbol{n}-1\}$

$\mathbf{B} \in \{2, 3, 4, \dots, \boldsymbol{n}-1\}$

$\boldsymbol{a} \in \{2, 3, \dots, \boldsymbol{n}-1\}$

$$\begin{array}{r} \text{A}\cdots\text{B} \\ \times \quad \boldsymbol{a} \\ \hline \text{B}\cdots\text{A} \end{array}$$

$$\text{則}\begin{cases} \boldsymbol{Aa} \leq \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{Ba} = \boldsymbol{nq} + \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{na} > \boldsymbol{nq} + \boldsymbol{A} > \boldsymbol{nq} \rightarrow \boldsymbol{a} > \boldsymbol{q} \end{cases}$$

$\boldsymbol{q} \in \{1, 2, \dots, \boldsymbol{a}-1\}$

n 進位制$(n \geq 2)$

若 m 位數 AX…YB 為a倍的反向倍數

A、X、Y $\in \{1,2,3, \dots, n-1\}$

B $\in \{2,3,4, \dots, n-1\}$

$a \in \{2,3, \dots, n-1\}$

$$\begin{array}{lccccc} \text{進位} & q_{m-1} & q_{m-2} & & q_2 & q_1 \\ & \text{A} & \text{X} & \cdots\cdots & \text{Y} & \text{B} \\ \times & & & & & a \\ \hline & \text{B} & \text{Y} & \cdots\cdots & \text{X} & \text{A} \end{array}$$

$$\text{則}\begin{cases} Ba=nq_1+\text{A} \dots\dots\dots\dots (1) \\ Ya+q_1=nq_2+X \dots\dots\dots\dots (2) \\ Xa+q_{m-2}=nq_{m-1}+\text{Y} \dots\dots\dots\dots (3) \\ Aa+q_{m-1}=\text{B} \dots\dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

由(1)式：$na > Ba = nq_1 + A \rightarrow a > q_1 > 0$

由(2)式：$(n-1)a + a > Ya + q_1 = nq_2 + X$
$\rightarrow a > q_2 \geq 0$

同理可得，$0 \leq q_3$、q_4、⋯、q_{m-2}、$q_{m-1} < a$

$q_1 \in \{1,2, \dots, a-1\}$

q_2、⋯、q_{m-2}、$q_{m-1} \in \{0,1,2, \dots, a-1\}$

【推論 1】n 進位制$(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2})$，若 m 位數 A…B 為$\boldsymbol{a}$倍的反向倍數$(\boldsymbol{m} \geq \mathbf{2})$，則其每一位進位值必定小於$\boldsymbol{a}$。$\mathbf{A} \in \{1, 2, 3, \dots, \boldsymbol{n}-1\}$ ，$\mathbf{B} \in \{2, 3, 4, \dots, \boldsymbol{n}-1\}$，$\boldsymbol{a} \in \{2, 3, \dots, \boldsymbol{n}-1\}$

※ 探討與應用 ※

1.探討 12 進位制首位與末位數字的關係時，可得 m 位數反向倍數可能是$\mathbf{1 \cdots\cdots 7_{12}}$的$\mathbf{7_{12}}$倍。
驗證可以得知 12 進位制$\boxed{\text{不存在}}$$\mathbf{1 \cdots\cdots 7_{12}}$的$\mathbf{7_{12}}$倍反向倍數。
因此若採用文獻中只探討首位與末位數字的關係，僅能是一開始篩選 n 進位制反向倍數可能性的方式，並不能如作者那樣直接推斷出定理 A。

2. 10 進位制中，2178 ＝ 1089 × 2，我們稱 1089 為 10 進位制反向倍數基本型的原型。
接著希望能尋找到 n 進位制中有類似反向倍數基本型的原型。

【引理 A】不存在 10 進位制的二、三位數反向倍數。(張進安[1]，引理一、定理二)

【引理 B】10 進位制中，不存在 2、3、5、6、7、8 倍的反向倍數。(張進安[1]，引理二、三、四)

【定理 A】10 進位制中，反向倍數必是 1 倍、4 倍或 9 倍。(張進安[1]，定理一)

【推論 A】10 進位制中，反向倍數則必是 2⋯8×4=8⋯2 或 1⋯9×9=9⋯1 這兩型。(張進安[1]，推論一)

【定理 B】10 進位制中，四位數反向倍數只有兩個:1089 及 2178 的反向數。(張進安[1]，定理三)

【推論 B】10 進位制中，反向倍數則必是 21⋯78×4=87⋯12 或 10⋯89×9=98⋯01 這兩型。(張進安[1]，推論二)

【定理 C】1089、10989、109989、109⋯989 及 2178、21978、219978、219⋯978 的反向數都是 10 進位制反向倍數的基本型。(張進安[1]，定理四)

【推論 C】10 進位制中，可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。(張進安[1]，推論三)

(1)基本型：1089、10989、109989、109⋯989 及 2178、21978、219978、219⋯978。

(2)組合型：
① 10891089、108910891089、10891089⋯10891089
21782178、217821782178、21782178⋯21782178
1098910989、1098910989⋯1098910989
同樣 4 倍或同樣 9 倍的基本型反向倍數串排
② 108901089、1089001089、10890⋯01089
217802178、2178002178、21780⋯02178
10989010989、109890010989、109890⋯010989
把同樣 4 倍或同樣 9 倍的基本型反向倍數加上任意個 0，作成左右對稱的串排
③ 1089108900010891089、1089109891089、2197802178021978
混合①、②將同樣 4 倍或同樣 9 倍的組合型反向倍數組合或加上任意個 0，作成左右對稱的串排

從因數分解方向來探討 4 倍或 9 倍的基本型反向倍數

(1) 1089 ＝ $3^2 \times 11^2$，2178 ＝ 1089 × 2 ＝ $2 \times 3^2 \times 11^2$
1099⋯9989×2 ＝ ＝2199⋯9978
$\boxed{\text{1089 為推導出 10 進位制反向倍數基本型的原型}}$

(2)
1089 ＝ $3^2 \times 11^2$
10989 ＝ $3^2 \times 11 \times 111$ ＝ $3^3 \times 11 \times 37$
109989 ＝ $3^2 \times 11^2 \times 101$
1099989 ＝ $3^2 \times 11 \times 11111$
10999989 ＝ $3^2 \times 11^2 \times 10101$
109999989 ＝ $3^2 \times 11 \times 1111111$
1099999989 ＝ $3^2 \times 11^2 \times 1010101$

三、n進位制反向倍數探討

2 進位制反向倍數

在 2 進位制中，若要滿足反向倍數的不進位制性質，只有1_2倍的反向倍數，亦即是迴文數。例如：$11011_2 \times 1_2 = 11011_2$。因為本文已經暫且排除 1 倍的自我反向倍數(迴文數)，即在 2 進位制中，沒有基本型反向倍數。

3 進位制反向倍數

【推論 2】3 進位制中，反向倍數則必是 $10\cdots12_3 \times 2_3 = 21\cdots01_3$的形式。

【定理 1】1012_3、10212_3、102212_3、$1022\cdots2212_3$的反向數是 3 進位制反向倍數的基本型。

【推論 3】3 進位制中，可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

4 進位制反向倍數

(1) 不存在二位數、三位數 4 進位制反向倍數。

※(2) $1023_4 \times 3_4 = 3201_4$為$3_4$倍的第一個 4 進位制反向倍數。

※(3) 1023_4、10323_4、103323_4、$1033\cdots3323_4$的反向數是 4 進位制反向倍數的基本型。

(4) 4 進位制中，八位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

5 進位制反向倍數

※※(1) $13_5 \times 2_5 = 31_5$為2_5倍的第一個 5 進位制反向倍數。

※※(2) 13_5、143_5、1443_5、$144\cdots443_5$的反向數是 5 進位制反向倍數的基本型。

※(3) $1034_5 \times 4_5 = 4301_5$為$4_5$倍的第一個 5 進位制反向倍數。

※(4) 1034_5、10434_5、104434_5、$1044\cdots4434_5$的反向數是 5 進位制反向倍數的基本型。

(5) 5 進位制中，四位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

6 進位制反向倍數

(1) 不存在二位數、三位數 6 進位制反向倍數。

※(2) ①$1045_6 \times 5_6 = 5401_6$為$5_6$倍的第一個 6 進位制反向倍數。
②$2134_6 \times 2_6 = 4312_6$為$2_6$倍的第一個 6 進位制反向倍數。

※(3) 1045_6、10545_6、105545_6、$1055\cdots5545_6$及2134_6、21534_6、215534_6、$2155\cdots5534_6$的反向數都是 6 進位制反向倍數的基本型。

※(4) ① 1045_6是 6 進位制反向倍數基本型的原型。
② $2134_6 = 1045_6 \times 2_6$

(5) 6 進位制中，八位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

7 進位制反向倍數

※※(1) $15_7 \times 3_7 = 51_7$為3_7倍的第一個 7 進位制反向倍數。

※※(2) 15_7、165_7、1665_7、$166\cdots665_7$的反向數是 7 進位制反向倍數的基本型。

※(3) $1056_7 \times 6_7 = 6501_7$為$6_7$倍的第一個 7 進位制反向倍數。

※(4) 1056_7、10656_7、106656_7、$1066\cdots6656_7$的反向數是 7 進位制反向倍數的基本型。

(5) 7 進位制中，四位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

8 進位制反向倍數(m 位數尚未討論結束)

※※(1) $25_8 \times 2_8 = 52_8$為2_8倍的第一個 8 進位制反向倍數。

※※(2) 25_8、275_8、2775_8、$277\cdots775_8$的反向數是 8 進位制反向倍數的基本型。

※※(3) $11165_8 \times 5_8 = 56111_8$為$5_8$倍的 8 進位制反向倍數。

※※(4) 11165_8、112665_8、1127665_8、11277665_8、11176165_8、…為5_8倍的 8 進位制反向倍數。

※(5) ①$1067_8 \times 7_8 = 7601_8$為$7_8$倍的第一個 8 進位制反向倍數。
②$2156_8 \times 3_8 = 6512_8$為$3_8$倍的第一個 8 進位制反向倍數。

※(6) 1067_8、10767_8、107767_8、$1077\cdots7767_8$及2156_8、21756_8、217756_8、$2177\cdots7756_8$的反向數都是 8 進位制反向倍數的基本型。

※(7) ① 1067_8是 8 進位制反向倍數基本型的原型。
② $2156_8 = 1067_8 \times 2_8$

※(8) $1015_8 \times 5_8 = 5101_8$是$5_8$倍的第一個 8 進位制反向倍數。

※(9) 1015_8、102515_8、$102525\cdots252515_8$的反向數是 8 進位制反向倍數的基本型。

(10) 8 進位制中，四位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

9 進位制反向倍數

※※(1) $17_9 \times 4_9 = 71_9$為4_9倍的第一個 9 進位制反向倍數。

※※(2) 17_9、187_9、1887_9、$188\cdots887_9$的反向數是 9 進位制反向倍數的基本型。

※(3) ①$1078_9 \times 8_9 = 8701_9$為$8_9$倍的第一個 9 進位制反向倍數。
②$3256_9 \times 2_9 = 6523_9$為$2_9$倍的第一個 9 進位制反向倍數。

※(4) 1078_9、10878_9、108878_9、$1088\cdots8878_9$及3256_9、32856_9、328856_9、$3288\cdots8856_9$的反向數都是 9 進位制反向倍數的基本型。

※(5) ① 1078_9是 9 進位制反向倍數基本型的原型。
② $3256_9 = 1078_9 \times 3_9$

(6) 9 進位制中，四位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。

11 進位制反向倍數(m 位數尚未討論結束)

※※(1) $37_{11} \times 2_{11} = 73_{11}$為$2_{11}$倍的第一個 11 進位制反向倍數。

※※(2) 37_{11}、$3\boxed{10}7_{11}$、$3\boxed{10}\boxed{10}7_{11}$、$3\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}7_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(3) ① $14_{11} \times 3_{11} = 41_{11}$為$3_{11}$倍的第一個 11 進位制反向倍數。
② $28_{11} \times 3_{11} = 82_{11}$為$3_{11}$倍的第二個 11 進位制反向倍數。

※※(4) 14_{11}、154_{11}、1554_{11}、$155\cdots54_{11}$及28_{11}、$2\boxed{10}8_{11}$、$2\boxed{10}\boxed{10}8_{11}$、$2\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}8_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(5) ① 14_{11}是 11 進位制反向倍數基本型的原型。
② $28_{11} = 14_{11} \times 2_{11}$

※※(6) $19_{11} \times 5_{11} = 91_{11}$為$5_{11}$倍的第一個 11 進位制反向倍數。

※※(7) 19_{11}、$1\boxed{10}9_{11}$、$1\boxed{10}\boxed{10}9_{11}$、$1\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}9_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(8) $118_{11} \times 7_{11} = 811_{11}$為$7_{11}$倍的第一個 11 進位制反向倍數。

※※(9) 118_{11}、11918_{11}、1191918_{11}、$119191\cdots91918_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(10) $1298_{11} \times 7_{11} = 8921_{11}$為$7_{11}$倍的 11 進位制反向倍數。

※※(11) 1298_{11}、$12\boxed{10}98_{11}$、$12\boxed{10}\boxed{10}98_{11}$、$12\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}98_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(12) $1694_{11} \times 3_{11} = 4961_{11}$為$3_{11}$倍的 11 進位制反向倍數。

※※(13) 1694_{11}、$16\boxed{10}94_{11}$、$16\boxed{10}\boxed{10}94_{11}$、$16\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}94_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※※(14) $2968_{11} \times 3_{11} = 8692_{11}$為$3_{11}$倍的 11 進位制反向倍數。

※※(15) 2968_{11}、296968_{11}、$29696\cdots96968_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※(16) $109\boxed{10}_{11} \times \boxed{10}_{11} = \boxed{10}901_{11}$為$\boxed{10}_{11}$倍的第一個 11 進位制反向倍數。

※(17) $109\boxed{10}_{11}$、$10\boxed{10}9\boxed{10}_{11}$、$10\boxed{10}\boxed{10}9\boxed{10}_{11}$、$10\boxed{10}\boxed{10}\cdots\boxed{10}\boxed{10}9\boxed{10}_{11}$的反向數是 11 進位制反向倍數的基本型。

※(18) 11 進位制中，四位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個0串排成更多位數的反向倍數。

12 進位制反向倍數

(1) 不存在二位數、三位數 12 進位制反向倍數。

※(2) ①$10\boxed{10}\boxed{11}_{12} \times \boxed{11}_{12} = \boxed{11}\boxed{10}01_{12}$為$\boxed{11}_{12}$倍的第一個 12 進位制反向倍數。
②$219\boxed{10}_{12} \times 5_{12} = \boxed{10}912_{12}$為$5_{12}$倍的第一個 12 進位制反向倍數。
③$3289_{12} \times 3_{12} = 9823_{12}$為$3_{12}$倍的第一個 12 進位制反向倍數。
④$4378_{12} \times 2_{12} = 8734_{12}$為$2_{12}$倍的第一個 12 進位制反向倍數。

※(3) $10\boxed{10}\boxed{11}_{12}$、$10\boxed{11}\boxed{10}\boxed{11}_{12}$、$10\boxed{11}\boxed{11}\boxed{10}\boxed{11}_{12}$、$10\boxed{11}\boxed{11}\cdots\boxed{11}\boxed{11}\boxed{10}\boxed{11}_{12}$及
$219\boxed{10}_{12}$、$21\boxed{11}9\boxed{10}_{12}$、$21\boxed{11}\boxed{11}9\boxed{10}_{12}$、$21\boxed{11}\boxed{11}\cdots\boxed{11}\boxed{11}9\boxed{10}_{12}$及
3289_{12}、$32\boxed{11}89_{12}$、$32\boxed{11}\boxed{11}89_{12}$、$32\boxed{11}\boxed{11}\cdots\boxed{11}\boxed{11}89_{12}$及
4378_{12}、$43\boxed{11}78_{12}$、$43\boxed{11}\boxed{11}78_{12}$、$43\boxed{11}\boxed{11}\cdots\boxed{11}\boxed{11}78_{12}$
的反向數都是 12 進位制反向倍數的基本型。

※(4) ① $10\boxed{10}\boxed{11}_{12}$是 12 進位制反向倍數基本型的原型。
② $219\boxed{10}_{12} = 10\boxed{10}\boxed{11}_{12} \times 2_{12}$
$3289_{12} = 10\boxed{10}\boxed{11}_{12} \times 3_{12}$
$4378_{12} = 10\boxed{10}\boxed{11}_{12} \times 4_{12}$

(5) 12 進位制中，八位數以上可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個0串排成更多位數的反向倍數。

將上面 3~12 進位制的(※)四位數反向倍數整理如下

序號	2 進位制	3 進位制	4 進位制	5 進位制	6 進位制	7 進位制	8 進位制	9 進位制	10 進位制	11 進位制	12 進位制
1		1012	1023	1034	1045	1056	1067	1078	1089	$109\boxed{10}$	$10\boxed{10}\boxed{11}$
2					2134		2156		2178		$219\boxed{10}$
3								3256			3289
4							1015				4378

會發現3~12進位制的第1列(※)四位數反向倍數的反向數具有規律性，且除了8進位制1015_8，其他四位數反向倍數的反向數可能是第 1 列四位數反向倍數基本型的原型的倍數。我們將第 1 列四位數反向倍數的反向數的倍數條列成下表。並將四位數反向倍數的反向數用紅色格標示，迴文數用藍色格標示。

倍數	2 進位制	3 進位制	4 進位制	5 進位制	6 進位制	7 進位制	8 進位制	9 進位制	10 進位制	11 進位制	12 進位制
1		1012	1023	1034	1045	1056	1067	1078	1089	$109\boxed{10}$	$10\boxed{10}\boxed{11}$
2		2101	2112	2123	2134	2145	2156	2167	2178	2189	$219\boxed{10}$
3			3201	3212	3223	3234	3245	3256	3267	3278	3289
4				4301	4312	4323	4334	4345	4356	4367	4378
5					5401	5412	5423	5434	5445	5456	5467
6						6501	6512	6523	6534	6545	6556
7							7601	7612	7623	7634	7645
8								8701	8712	8723	8734
9									9801	9812	9823
10										$\boxed{10}901$	$\boxed{10}912$
11											$\boxed{11}\boxed{10}01$

n進位制反向倍數的性質(n>2)

【定理 2】n 進位制中(n> 2)，四位數$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$為$\boxed{n-1}_n$倍的反向倍數。

【定理 3】$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$、$10\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$、$10\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> 2)。

【定理 4】四位數$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$為$\boxed{\frac{n}{s}-1}_n$倍的 n 進位制反向倍數(n> 2)。其中 s、$\frac{n}{s} \in \mathbb{N}$，且$2 < \frac{n}{s}$。

【定理 5】$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$、$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$、$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-1}\boxed{n-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$、…、$\boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-1}\ldots\boxed{n-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$的反向數都是$\boxed{\frac{n}{s}-1}_n$倍的 n 進位制反向倍數基本型(n> 2)。其中 s、$\frac{n}{s} \in \mathbb{N}$，且$2 < \frac{n}{s}$。

從定理 3 知道$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$、$10\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$、$10\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n$的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> 2)，也是基本型的原型。

我們將$10\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n \times \boxed{s}_n = \boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$

$10\boxed{n-1}\cdots\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{n-1}_n \times \boxed{s}_n = \boxed{s}\boxed{s-1}\boxed{n-1}\ldots\boxed{n-1}\boxed{n-(s+1)}\boxed{n-s}_n$

因此若 s 為 n 的因數，且$2 < \frac{n}{s}$，則可透過定理 3 反向倍數基本型的原型乘以 s 倍，找到另一個反向倍數的基本型。

【推論 4】n 進位制中，可以用同倍數的基本型反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數。(n> 2)

【定理 6】n 進位制中(n> 2)，二位數$\boxed{(n-a)k}\boxed{(an-1)k}$為$a$倍的反向倍數。
$a \in\{2,3,\cdots,n\text{-}1\}$，$k \in\{\frac{1}{a^2-1}, \frac{2}{a^2-1}, \cdots, \frac{a-1}{a^2-1}\}$

【定理 7】n 進位制中(n> 2)，三位數$\boxed{\frac{nq_1-aq_2}{a^2-1}}\boxed{\frac{nq_2-q_1}{a-1}}\boxed{\frac{anq_1-q_2}{a^2-1}}$為$a$倍的反向倍數。
$a \in\{2,3,\cdots,n\text{-}1\}$，$q_1$、$q_2 \in\{1,2,\cdots,a-1\}$。

【四位數反向倍數的一般式】

假設存在四位數 ABCD 為 n 進位制a倍的反向倍數

A$\in \{1,2,\ldots,n-1\}$，B、C、D $\in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$，$a \in \{2,3,\ldots,n-1\}$。

∵ ABCD $\times a$ = DCBA，且不為迴文數。

可得
$$\begin{cases} aD=nq_1+A \ldots\ldots(1) \\ aC+q_1=nq_2+B \ldots\ldots(2) \\ aB+q_2=nq_3+C \ldots\ldots(3) \\ aA+q_3=D \ldots\ldots(4) \end{cases}$$

狀況 1. 若 $q_3 = 0$

四位數$\boxed{k}\boxed{(n-a)t}\boxed{\frac{(a^2-1)k}{(n-a)n}+(an-1)t}\boxed{ak}$為$a$倍的反向倍數。

$a \in \{2,3,\ldots,n-1\}$，$k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$，t為實數。

狀況 2. 若 $q_3 \neq 0$

四位數$\boxed{\frac{nq_1-aq_3}{a^2-1}}\boxed{\frac{anq_3+(n-a)q_2-q_1}{a^2-1}}\boxed{\frac{nq_3+(an-1)q_2-aq_1}{a^2-1}}\boxed{\frac{anq_1-q_3}{a^2-1}}$為$a$倍的反向倍數。

$a \in \{2,3,\ldots,n-1\}$，q_1、q_2、$q_3 \in \{1,2,\ldots,a-1\}$

【定理 8】n 進位制中(n> 2)，四位數$\boxed{k}\boxed{(n-a)t}\boxed{\frac{(a^2-1)k}{(n-a)n}+(an-1)t}\boxed{ak}$為$a$倍的反向倍數。$a \in \{2,3,\ldots,n-1\}$，$k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$，$t$為實數。

【四位數的反向倍數判別法】

在 n 進位制中(n> 2)，ABCD 為a倍的四位數反向倍數，$a \in\{2,3,\cdots,n\text{-}1\}$，若 $A \times a = D$，則必滿足下面條件：

(1) $A : D = k : ka = 1 : a$，$k \in\{1,2\cdots,n\text{-}1\}$

(2) $a^2 k \equiv k \pmod{n}$

(3) $\begin{cases} B = (n-a)t \\ C = \frac{(a^2-1)k}{(n-a)n} + (an-1)t \end{cases}$，$t$為實數，且聯立方程式有解。

四位數 10$\boxed{C}\boxed{a}$ 為a倍的反向倍數的一般解

【推論 5】n 進位制中(n> 2)，四位數(首位為 1、末位為a)為a倍的反向倍數，必為 10$\boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}}\boxed{a}$ 的型式。$a \in\{2,3,\cdots,n\text{-}1\}$

【定理 9】n 進位制中(n>2)，若 10$\boxed{A}\boxed{B}$的反向數為四位數反向倍數，則 10$\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$、10$\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\ldots\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A+1}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{B}$的反向數為基本型反向倍數。

以四位數 10$\boxed{C}\boxed{a}$為a倍的反向倍數形式去推導滿足 n 進位制中，101$\boxed{a}$、102$\boxed{a}$、103$\boxed{a}$等為a倍的反向倍數，其 n 與$\boxed{a}$的值。在推導過程中使用了二元二次方程式去求解，並將其整數解情形整理如下：

1. 滿足 n 進位制中，101$\boxed{a}$反向倍數的解。
$(n, a) =$ (3，2)、(8，5)、(21，13)、(55，34)、……
整數解滿足$(n, a) \to (2n+a, n+a)$的規律
2. 滿足 n 進位制中，102$\boxed{a}$反向倍數的解。
$(n, a) =$ (4，3)、(15，11)、(56，41)、(209，153)、……
整數解滿足$(n, a) \to (3n+a, 2n+a)$的規律
3. 滿足 n 進位制中，103$\boxed{a}$反向倍數的解。
$(n, a) =$ (5，4)、(24，19)、(115，91)、(551，436)、……
整數解滿足$(n, a) \to (4n+a, 3n+a)$的規律

從上面的整數解規律中，我們可以大膽的試著去論證定理 10 的合理性。

【定理 10】若數列$\{(A_m, B_m)_{m\geq 0}\}$滿足：
$A_0 = 1$，$B_0 = 1$，$A_{m+1} = (C+1)A_m + B_m$，$B_{m+1} = C \times A_m + B_m$，C $\in\{1,2,\cdots,n\text{-}1\}$。
$(A_m, B_m) \to (A_{m+1}, B_{m+1}) = \big((C+1)A_m + B_m, C \times A_m + B_m\big)$。
則 n 進位制中(n> 2)，四位數 10$\boxed{C}\boxed{a}$為a倍的反向倍數的整數解
$(n, a) = (A_m, B_m)_{m\geq 1}$。

證明：從推論 5 得知，n 進位制中(n> 2)，首位為 1 的四位數的反向倍數，

必為 10$\boxed{\frac{a^2-1}{(n-a)n}}\boxed{a}$ 反向數型式。$a \in\{2,\cdots,n\text{-}1\}$，$\frac{a^2-1}{(n-a)n} \in\{1,2,\cdots,n\text{-}1\}$。

令 $\frac{a^2-1}{(n-a)n} = C$，C $\in\{1,2,\cdots,n\text{-}1\}$

$Cn^2 - Can - a^2 = -1$ ………(1)

將$(n, a) \to \big((C+1)n+a, Cn+a\big)$取代(1)式中左式的 n 、$a$

左式 $= C\big((C+1)n+a\big)^2 - C(Cn+a)\big((C+1)n+a\big) - (Cn+a)^2$
$= Cn^2 - Can - a^2$

因此$\big((C+1)n+a, Cn+a\big)$亦滿足(1)式。

探討二位數反向倍數推廣之基本型

【定理 11】$\boxed{(n-a)k}\boxed{(an-1)k}$、$\boxed{(n-a)k}\boxed{(n-a)k+(an-1)k}\boxed{(an-1)k}$、$\boxed{(n-a)k}\boxed{(n-a)k+(an-1)k}$ …… $\boxed{(n-a)k+(an-1)k}\boxed{(an-1)k}$的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> 2)。$a \in\{2,3,\cdots,n\text{-}1\}$，$k \in\{\frac{1}{a^2-1}, \frac{2}{a^2-1}, \cdots, \frac{a-1}{a^2-1}\}$。

【定理 12】n 進位制中，若 n> 3且 n 為奇數，則二位數 1$\boxed{n\text{-}2}$ 為 $\boxed{\frac{n-1}{2}}$倍的反向倍數。

13_5、143_5、1443_5、$144\cdots443_5$ 是 5 進位制 2 倍反向倍數的基本型。
15_7、165_7、1665_7、$166\cdots665_7$ 是 7 進位制 3 倍反向倍數的基本型。
25_8、275_8、2775_8、$277\cdots775_8$ 是 8 進位制 2 倍反向倍數的基本型。
17_9、187_9、1887_9、$188\cdots887_9$ 是 9 進位制 4 倍反向倍數的基本型。
19_{11}、$1\boxed{10}9_{11}$、$1\boxed{10}\boxed{10}9_{11}$、$1\boxed{10}\cdots\boxed{10}9_{11}$ 是 11 進位制 5 倍反向倍數的基本型。
14_{11}、154_{11}、1554_{11}、$155\cdots54_{11}$ 是 11 進位制 3 倍反向倍數的基本型。
28_{11}、$2\boxed{10}8_{11}$、$2\boxed{10}\boxed{10}8_{11}$、$2\boxed{10}\cdots\boxed{10}8_{11}$ 是 11 進位制 3 倍反向倍數的基本型。
37_{11}、$3\boxed{10}7_{11}$、$3\boxed{10}\boxed{10}7_{11}$、$3\boxed{10}\cdots\boxed{10}7_{11}$ 是 11 進位制 2 倍反向倍數的基本型。

從四位數 $10\boxed{C}\ \boxed{a}_n \times \boxed{a}_n$ 的進位值數列觀察

1. $101\boxed{a}_n$ 的 $\boxed{a}_n$ 倍為反向倍數與其進位值數列關係

運用定理 10. $(n，a) \to (2n+a，n+a)$ 推導出下表

$(n，a)$	$101\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n$ →	進位值數列	進位值數列反向倍數
$(1，1)$			
$(3，2)$	$1012_3 \times 2_3$ →	011	11×1，2 進位制
$(8，5)$	$1015_8 \times 5_8$ →	013	13×2，5 進位制
$(21，13)$	$101\boxed{13}_{21} \times \boxed{13}_{21}$ →	018	18×5，13 進位制
$(55，34)$	$101\boxed{34}_{55} \times \boxed{34}_{55}$ →	$01\boxed{21}$	$1\boxed{21} \times \boxed{13}$，34 進位制
$(144，89)$	$101\boxed{89}_{144} \times \boxed{89}_{144}$ $\boxed{a}_n$	$01\boxed{55}$	$1\boxed{55} \times \boxed{34}$，89 進位制
…	…	…	…

從表中可以觀察到 $(n，a)$ 的變化與進位值數列及其反向倍數的進位制有顯然的關係，我們將其關係用以下兩個函數關係來表示：

(1) 若 $101\boxed{a}_n$ 的 $\boxed{a}_n$ 倍為反向倍數，則 $1\boxed{n}_{n+a}$ 的 $\boxed{a}_{n+a}$ 倍亦為反向倍數。

f： $101\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to 1\boxed{n}_{n+a} \times \boxed{a}_{n+a}$

(2) 若 $1\boxed{x}_{x+y}$ 的 $\boxed{y}_{x+y}$ 倍為反向倍數，則 $101\boxed{x+y}_{2x+y}$ 的 $\boxed{x+y}_{2x+y}$ 倍亦為反向倍數。

g： $1\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \to 101\boxed{x+y}_{2x+y} \times \boxed{x+y}_{2x+y}$

(3) f： $101\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to 1\boxed{n}_{n+a} \times \boxed{a}_{n+a}$

g： $1\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \to 101\boxed{x+y}_{2x+y} \times \boxed{x+y}_{2x+y}$

g o f： $101\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to 101\boxed{n+a}_{2n+a} \times \boxed{n+a}_{2n+a}$

g o f 符合定理 10。

2. $102\boxed{a}_n$ 的 $\boxed{a}_n$ 倍為反向倍數與其進位值數列關係

運用定理 10. $(n，a) \to (3n+a，2n+a)$ 推導出下表

$(n，a)$	$102\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n$ →	進位值數列	進位值數列反向倍數
$(1，1)$			
$(4，3)$	$1023_4 \times 3_4$ →	022	22×1，3 進位制
$(15，11)$	$102\boxed{11}_{15} \times \boxed{11}_{15}$ →	028	28×3，11 進位制
$(56，41)$	$102\boxed{41}_{56} \times \boxed{41}_{56}$ →	$02\boxed{30}$	$2\boxed{30} \times \boxed{11}$，41 進位制
$(209，153)$	$102\boxed{153}_{209} \times \boxed{153}_{209}$ →	$02\boxed{112}$	$2\boxed{112} \times \boxed{41}$，153 進位制
…	…	…	…

從表中可以觀察到 $(n，a)$ 的變化與進位值數列及其反向倍數的進位制有顯然的關係，我們將其關係用以下兩個函數關係來表示：

(1) 若 $102\boxed{a}_n$ 的 $\boxed{a}_n$ 倍為反向倍數，則 $2\boxed{2n}_{2n+a}$ 的 $\boxed{a}_{2n+a}$ 倍亦為反向倍數。

f： $102\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to 2\boxed{2n}_{2n+a} \times \boxed{a}_{2n+a}$

(2) 若 $2\boxed{x}_{x+y}$ 的 $\boxed{y}_{x+y}$ 倍為反向倍數，則 $102\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$ 的 $\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$ 倍亦為反向倍數。

g： $2\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \to 102\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y} \times \boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$

(3) f： $102\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to 2\boxed{2n}_{2n+a} \times \boxed{a}_{2n+a}$

g： $2\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \to 102\boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y} \times \boxed{x+y}_{\frac{3}{2}x+y}$

g o f： $102\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to 102\boxed{2n+a}_{3n+a} \times \boxed{2n+a}_{3n+a}$

g o f 符合定理 10。

3. $103\boxed{a}_n$ 的 $\boxed{a}_n$ 倍為反向倍數與其進位值數列關係

運用定理 10. $(n，a) \to (4n+a，3n+a)$ 推導出下表

$(n，a)$	$103\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n$ →	進位值數列	進位值數列反向倍數
$(1，1)$			
$(5，4)$	$1034_5 \times 4_5$ →	033	33×1，4 進位制
$(24，19)$	$103\boxed{19}_{24} \times \boxed{19}_{24}$ →	$03\boxed{15}$	$3\boxed{15} \times 4$，19 進位制
$(115，91)$	$103\boxed{91}_{115} \times \boxed{91}_{115}$ →	$03\boxed{72}$	$3\boxed{72} \times \boxed{19}$，91 進位制
$(511，436)$	$103\boxed{436}_{511} \times \boxed{436}_{511}$ →	$03\boxed{345}$	$3\boxed{345} \times \boxed{91}$，436 進位制
…	…	…	…

從表中可以觀察到 $(n，a)$ 的變化與進位值數列及其反向倍數的進位制有顯然的關係，我們將其關係用以下兩個函數關係來表示：

(1) 若 $103\boxed{a}_n$ 的 $\boxed{a}_n$ 倍為反向倍數，則 $3\boxed{3n}_{3n+a}$ 的 $\boxed{a}_{3n+a}$ 倍亦為反向倍數。

f： $103\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to 3\boxed{3n}_{3n+a} \times \boxed{a}_{3n+a}$

(2) 若 $3\boxed{x}_{x+y}$ 的 $\boxed{y}_{x+y}$ 倍為反向倍數，則 $103\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$ 的 $\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$ 倍亦為反向倍數。

g： $3\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \to 103\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y} \times \boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$

(3) f： $103\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to 3\boxed{3n}_{3n+a} \times \boxed{a}_{3n+a}$

g： $3\boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \to 103\boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y} \times \boxed{x+y}_{\frac{4}{3}x+y}$

g o f： $103\boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to 103\boxed{3n+a}_{4n+a} \times \boxed{3n+a}_{4n+a}$

g o f 符合定理 10。

4. $10\boxed{C}\ \boxed{a}_n$ 的 $\boxed{a}_n$ 倍為反向倍數與其進位值數列關係

$10\boxed{C}\ \boxed{a}_n$ 的 $\boxed{a}_n$ 倍其進位值數列為 $\{0, \boxed{C}, \boxed{Cn}\}$，其 $(n，a)$ 的變化與進位值數列及其反向倍數的進位制，我們可將其關係用以下兩個函數關係來表示：

(1) 若 $10\boxed{C}\ \boxed{a}_n$ 的 $\boxed{a}_n$ 倍為反向倍數，則 $\boxed{C}\ \boxed{Cn}_{cn+a}$ 的 $\boxed{a}_{cn+a}$ 倍亦為反向倍數。

f： $10\boxed{C}\ \boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to \boxed{C}\ \boxed{Cn}_{cn+a} \times \boxed{a}_{cn+a}$

(2) 若 $\boxed{C}\ \boxed{x}_{x+y}$ 的 $\boxed{y}_{x+y}$ 倍為反向倍數，則 $10\boxed{C}\ \boxed{x+y}_{\frac{C+1}{C}x+y}$ 的 $\boxed{x+y}_{\frac{C+1}{C}x+y}$ 倍亦為反向倍數。

g： $\boxed{C}\ \boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \to 10\boxed{C}\ \boxed{x+y}_{\frac{C+1}{C}x+y} \times \boxed{x+y}_{\frac{C+1}{C}x+y}$

(3) f： $10\boxed{C}\ \boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to \boxed{C}\ \boxed{Cn}_{cn+a} \times \boxed{a}_{cn+a}$

g： $\boxed{C}\ \boxed{x}_{x+y} \times \boxed{y}_{x+y} \to 10\boxed{C}\ \boxed{x+y}_{\frac{C+1}{C}x+y} \times \boxed{x+y}_{\frac{C+1}{C}x+y}$

g o f： $10\boxed{C}\ \boxed{a}_n \times \boxed{a}_n \to 10\boxed{C}\ \boxed{Cn+a}_{(C+1)n+a} \times \boxed{Cn+a}_{(C+1)n+a}$

g o f 符合定理 10。

【延伸推廣】n進位制二位數基本型的原型

(一) 若二位數 $\boxed{C}\ \boxed{Cn}_{cn+a}$ 的 $\boxed{a}_{cn+a}$ 倍為反向倍數，s 為 $\boxed{C}_{cn+a}$ 的因數，則 $\boxed{\frac{C}{s}}\ \boxed{\frac{C}{s}n}_{cn+a}$ 的 $\boxed{a}_{cn+a}$ 倍亦為反向倍數。

(二) 若二位數 $1B_n$ 為 $\boxed{n-mB}_n$ 倍的反向倍數，則 $\boxed{s}\boxed{sB}_n$ 亦為 $\boxed{n-mB}_n$ 倍的反向倍數。其中 m、s、$\frac{m}{s} \in \mathbb{N}$

【定理 13】n 進位制中(n> 2)，若二位數 $1\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n$ 為 a_n 倍的反向倍數，則 $\boxed{s}\boxed{s(\frac{an-1}{n-a})}_n$ 亦為 a_n 倍的反向倍數。

其中 s、$\frac{an-1}{n-a}$、$\frac{(n-a)^2}{an-1}$、$\frac{(n-a)^2}{s(an-1)} \in \mathbb{N}$，s 為 $\frac{(n-a)^2}{an-1}$ 的因數。

而在定理 12，n 進位制中，若 n> 3 且 n 為奇數，則 $1\boxed{n-2}$ 是 $\boxed{\frac{n-1}{2}}$ 倍的反向倍數。若要同時滿足定理 13，則可推出 n=3、5，部分與定理 12 的起始條件不合，因此定理 12 與定理 13 為 n 進位制中，二位數首位為 1 的反向數為反向倍數的判別定理。

從定理 11 與定理 13 知道 $1\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n$、$1\boxed{1+\frac{an-1}{n-a}}\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n$、$1\boxed{1+\frac{an-1}{n-a}}\cdots\boxed{1+\frac{an-1}{n-a}}\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n$、的反向數是 n 進位制反向倍數的基本型(n> 2)，也是基本型的原型。

我們將 $1\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n \times \boxed{s}_n = \boxed{s}\boxed{s(\frac{an-1}{n-a})}_n$

$1\boxed{1+\frac{an-1}{n-a}}\cdots\boxed{1+\frac{an-1}{n-a}}\boxed{\frac{an-1}{n-a}}_n \times \boxed{s}_n = \boxed{s}\boxed{s+s(\frac{an-1}{n-a})}\cdots\boxed{s+s(\frac{an-1}{n-a})}\boxed{s(\frac{an-1}{n-a})}_n$

因此若 s 為 $\frac{(n-a)^2}{an-1}$ 的因數，且 s <n，則可透過定理 13 反向倍數基本型的原型乘以 s 倍，找到另一個反向倍數的基本型。

【延伸應用】尋找n進位制m位數 a 倍反向倍數的電腦程式

尋找 n 進位制 m 位數 a 倍反向倍數的電腦程式演算法，以下為大致流程：

① 輸入(n，m)。n 進位制(n>2)，搜尋 m 位數反向倍數(m≥2)。

② m=2 或 3，運用定理 6、定理 7，計算及輸出二位數、三位數 a 倍的反向倍數與 a 值。

③ m≥4 時，使用文獻中探討首位與末位數字的關係與推論 1，篩選出滿足 A⋯B × a =B⋯A。A<B，$a \in\{2,3,\cdots,n-1\}$。得到 A、B、a、q_1、q_{m-1}。

④ 計算篩選出滿足 AX⋯YB 為 a 倍的反向倍數。得到 X、Y。

$X = \frac{naq_{m-1}-aq_{m-2}+nq_2-q_1}{a^2-1} \in \{0,1,2 \ldots, n-1\}$，$Y = \frac{nq_{m-1}-q_{m-2}+naq_2-aq_1}{a^2-1} \in \{0,1,2 \ldots, n-1\}$，

q_2、$q_{m-2} \in\{0,1,2,\cdots, a-1\}$

⑤ 在首兩位 AX 與末兩位 YB 中間插入 m-4 位數字。

⑥ 計算⑤之數字× a，與其反向數進行比對。

⑦ 輸出滿足⑥比對一致之四位數以上數字(a 倍的反向倍數)與 a 值。

伍、結論

1. 二位數、三位數、四位數一般式及二位數、四位數反向倍數的判別式。
2. 找出二位數與四位數的n進位制反向倍數基本型的原型。
3. n進位制中，a 倍的反向倍數四位數 $10\text{C}\,a$ 的(n，a)遞迴關係式及與其進位值數列的函數關係。
4. 透過文獻探討與本文推論定理撰寫找出n進位制m位數反向倍數演算法與電腦程式。

陸、未來展望

1. 探究n進位制m位數反向倍數的一般式。
2. 探究是否存在n進位制三位數、五位數以上的反向倍數基本型的原型？
3. 探究 a 倍的反向倍數與其進位值數列的關係。

柒、參考資料

1. 張進安（2017）。反向倍數知多少。數學傳播，41(3)，60-69。
2. 裘宗滬、冷崗松（2017）。國際數學奧林匹克試題・解答・成績(No.1—50)(167頁)。北京：開明。
3. 洪有情(主任委員)（2016）。國中數學第一冊。新北市：康軒。
4. 洪有情(主任委員)（2017）。國中數學第三冊。新北市：康軒。