中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第一名

030417

「金金」計較

學校名稱：新北市立永和國民中學

作者：	指導老師：
國二 洪銘德	黃國智
國二 周代翔	陳自瑩

關鍵詞：一次不等式、等差級數、二次函數

得獎感言

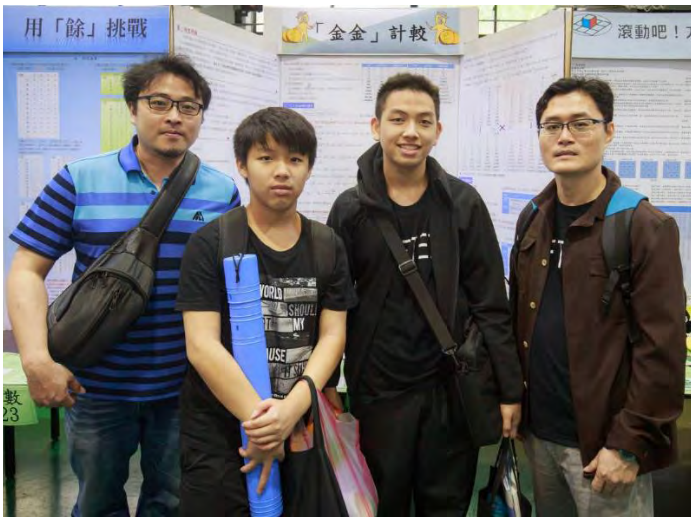
科展的點點滴滴

這次能獲獎，真是開心與感動，興奮之情，是難以言喻的。

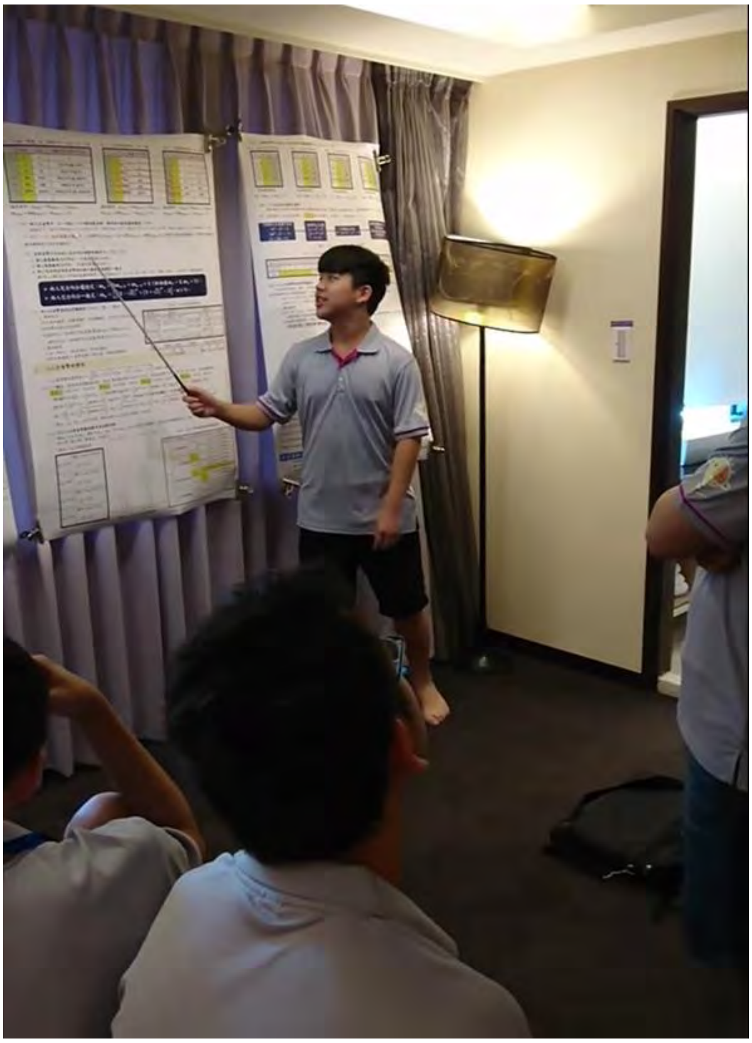
一開始時，我們對專題研究毫無經驗，雜亂無章地摸索。即使選定了這個主題，也遭遇到難以突破的瓶頸，還好經過老師的教導，加上不斷地討論、耐心的計算、清除錯誤…，於是漸漸成長、累積。過程中，會有挫折、失敗、氣餒，甚至想放棄，但每當想起老師的鼓勵，或督促我們要完成自己的目標時，心中的熱情又點燃了起來，已經趴在桌上的頭又抬了起來，繼續努力，充實研究內容。好幾次，我們在夜幕低垂時離開學校，回家又繼續未完成的工作，深夜或凌晨時一有想法，就趕緊發文到群組上，假日也約出來討論一整天。住在基隆的自瑩老師為了我們，每天太陽才剛升起就開車來永和，晚上在星光中回家，開車時只要一有空檔就督促、激勵我們要努力或者討論新發現；而國智老師也提供我們方向、不斷提醒我們要按進度做好該做的事，只希望我們可以完成一份最完美的研究報告。看到老師們的熱忱與無私，我們也不敢懈怠，努力打拚。

參展過程中我們也遇到許多貴人，無論是校內、市展、或國展。很感謝新北市辦理的國展研習，安排經驗豐富老師，提供我們精進作品的寶貴意見，以及在市展、國展中互相交流、分享心得的各校同學與老師們，還有班級導師的鼓勵與支持，讓我們心無旁騖，勇往直前。

雖然作品中仍有需要改進的地方，但能得到這樣的成績，我們要對一路上所有幫助我們的貴人、給予我們肯定的評審、兩位認真的指導老師說：「謝謝你們！」



市展合照



在飯店裡認真練習

會場外合影

摘要

有m袋金幣排在一直線上，每一袋金幣數都比前一袋的多1枚，每一枚金幣皆相等(等值/等重)，且相鄰兩袋的距離也相等，金幣總數為$1+2+3+\cdots+m$。有兩個人站在這條直線上的相異兩點，離袋子最近的那個人可以拿到那袋所有的金幣，若兩人離同一個袋子一樣近，則他們將平分那袋金幣，他們要如何站才能讓分得的金幣數量最接近？三個人時要如何站才能讓分得的金幣數量最接近？

先用二次函數處理兩人分的情形，而在三人分時，用標準差找出最佳解與第k、h袋金幣($1 \le k < h \le m$)是否要平分的判別方法。接著，列出最佳解時的站位方式、討論兩人分金幣時平分或不平分方式皆為最佳解的情形、兩人和三人能完全均分所有金幣的情形，以及分析均分解的遞迴關係式。

壹、 研究動機

本研究源自於科學研習月刊56-9期中「海盜分金幣」的問題。說明如下：海盜頭目在某次的航海中大豐收，決定用以下方法犒賞他的兩位得力手下。頭目把總數量分別是1、2、3、4單位的四袋金幣，分別放在同一條直線的四個位置上，且相鄰的位置等距。他跟兩位手下說：「你們兩個可以事先商量，選兩個位置。選好之後，兩個位置分別得到離它比較近的所有金幣；離兩個人位置一樣近的金幣就平分。」兩位手下分得金幣的數量最接近(即兩人分得金幣的差最小)時即為最佳解。

我們一開始先找到一些金幣袋數較少時的解，後來也用C語言與$Excel$軟體計算袋數較多時的解，在研究這個問題的過程中，我們發現一元二次方程式以及二次函數、不等式的運算性質、配方法…這些數學方法都可以運用到。所以我們想要繼續研究這個遊戲，找到當金幣袋數為已知時，兩人或三人分時最佳解的一般性規則。

貳、 研究目的

我們想深入探討兩名或三名海盜到底能不能平分全部的金幣，並找出這個問題的一般性解法，當金幣袋數m為已知時，我們要解決的問題如下：

一、兩位手下要如何分，才能使得兩人的金幣數量最接近(**最佳解**)？

二、三位手下要如何分，才能使得三人的金幣數量最接近(**最佳解**)？

三、兩人分時是否存在某第k袋金幣($k < m$)**不平分**或**被平分**均為**最佳解**的狀態？

四、是否存在兩位手下之**完全均分解** (兩人分得金幣的數量相等)？

五、是否存在三位手下之**完全均分解** (三人分得金幣的數量相等)？

六、解決最佳解之公平站位的方式為何？

參、 研究設備及器材

筆、紙、計算機、電腦、數學課本、$\boldsymbol{GeoGebra}$、$\boldsymbol{The\ Geometer's\ Sketchpad}$、$\boldsymbol{C\ language}$、$\boldsymbol{Excel}$、$\boldsymbol{PARi/GP}$。

肆、 研究過程或方法

【名詞定義】

$\boldsymbol{m}$：金幣的總袋數，也是最後一袋金幣的金幣數量。

$\boldsymbol{S}$：所有金幣的總數，即$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$。$m \in \mathbb{N}$。

$\boldsymbol{S(A)}$、$\boldsymbol{S(B)}$、$\boldsymbol{S(C)}$：指A、B、C三人分得的金幣總數。

$\boldsymbol{S_L}$、$\boldsymbol{S_M}$、$\boldsymbol{S_R}$：分別表示左邊那堆、中間那堆、右邊那堆的金幣總數(如下說明)。

$\boldsymbol{k}$：$1 \sim m$袋金幣依序排在數線上1、2、⋯、m的位置後，第k袋要「被平分」或「不被平分」的金幣$(k \in \mathbb{N}，k \le m)$。$A$、$B$二人分金幣時，若第$k$袋不平分，則所有金幣被分成「$\boldsymbol{S_L} = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$」和「$\boldsymbol{S_R} = (k+1) + (k+2) + \cdots + m$」兩堆；若第$k$袋被平分，則所有金幣被分成「$\boldsymbol{S_L} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + \frac{k}{2}$」和「$\boldsymbol{S_R} = \frac{k}{2} + (k+1) + (k+2) + \cdots + m$」兩堆，這兩堆將透過「$A$、$B$兩人站位方式」分別取得其中一堆金幣。

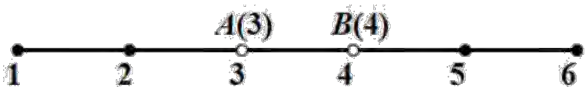
$\boldsymbol{h}$：意義同k，$1 < k < h \le m$，$h \in \mathbb{N}$。A、B、C三人分金幣時，依k和h平分或不平分的情形，需分為四種情況討論，以「第k袋不平分且第h袋平分」(本研究中的方式二)為例，則所有金幣被分成「$\boldsymbol{S_L} = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$」、「$\boldsymbol{S_M} = (k+1) + (k+2) + \cdots + (h-1) + \frac{h}{2}$」和「$\boldsymbol{S_R} = \frac{h}{2} + (h+1) + (h+2) + \cdots + m$」三堆，這三堆將透過「$A$、$B$、$C$三人站位方式」分別取得其中一堆金幣。

最佳解：每個人分到的金幣數量最接近的情形。

一、 兩人分金幣的情形

(一)舉例：以$m = 6$，$k = 3$的情形。

1. $k = 3$(不平分)

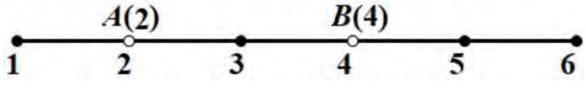


圖一

例：$A(3)$、$B(4)$ 如右圖一。

$S(A) = 1 + 2 + 3 = 6$，$S(B) = 4 + 5 + 6 = 15$，$|S(A) - S(B)| = |6 - 15| = 9$ 。

2. $k = 3$(平分)



圖二

例：$A(2)$、$B(4)$ 如右圖二。

$S(A) = 1 + 2 + \frac{3}{2} = 4.5$，$S(B) = \frac{3}{2} + 4 + 5 + 6 = 16.5$，

$|S(A) - S(B)| = |16.5 - 4.5| = 12$。

由1、2可知當$m=6$，$k=3$的最佳解為「k不平分，此時$|S(A)-S(B)|=9$」。

$m=6$時，k等於多少時有最佳解呢？我們算出的結果如下表一：

表一：當$m=6$時，所有$|S(A)-S(B)|$可能的值

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$\boldsymbol{k=4}$	$k=5$	$k=6$
不平分時，$|S(A)-S(B)|$的值	19	15	9	**1**	9	21
平分時，$|S(A)-S(B)|$的值	20	17	12	5	4	15

由上表可知，$m=6$時，選第4袋金幣不平分，此時可讓A站在4、B站在5的位置，得$S(A)=1+2+3+4=10$，$S(B)=5+6=11$，$|S(A)-S(B)|$可得最小值為$|10-11|=1$。

(二)**一般化的情形**：當金幣的袋數為m時，將$S_L-\frac{1}{2}S$的差以數學式子表示：

1. $\boldsymbol{k}$不平分時

$S_L=\frac{1}{2}(k+1)k$，$\left|S_L-\frac{1}{2}S\right|=\left|S_L-\frac{1}{4}m(m+1)\right|=\frac{1}{2}\left|k(k+1)-\frac{1}{2}m(m+1)\right|$，設$f_1(x)=\frac{1}{2}\left|x(x+1)-\frac{1}{2}m(m+1)\right|$。$f_1(x)$的值越小時，$S_L$和$\frac{1}{2}S$的差越小，當兩者的差為0時即$f_1(x)=0$，$x^2+x-\frac{1}{2}m(m+1)=0$，$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+2m(m+1)}}{2}$，設$\boxed{\boldsymbol{t_1=\frac{-1+\sqrt{1+2m(m+1)}}{2}}}$。

2. $\boldsymbol{k}$被平分時

$S_L=\frac{k}{2}(k+1)-\frac{k}{2}=\frac{k^2}{2}$，$\left|S_L-\frac{1}{2}S\right|=\left|S_L-\frac{1}{4}m(m+1)\right|=\frac{1}{2}\left|k^2-\frac{1}{2}m(m+1)\right|$，設$f_2(x)=\frac{1}{2}\left|x^2-\frac{1}{2}m(m+1)\right|$，當$f_2(x)=0$時，$x=\frac{\pm\sqrt{2m(m+1)}}{2}$，設$\boxed{\boldsymbol{t_2=\frac{\sqrt{2m(m+1)}}{2}}}$。

3. 當$S_L+S_R=\boldsymbol{S}$時，可得$\left|S_L-\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\right|=\left|S_R-\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\right|$。

【證明】設$\left|S_L-\frac{1}{2}S\right|=d$，$\Rightarrow S_L=\frac{1}{2}S\pm d$，$d\geq 0$。

(1) 當$S_L=\frac{1}{2}S+d$ 時，$S_R=S-S_L=S-\left(\frac{1}{2}S+d\right)=\frac{1}{2}S-d$，

$\therefore\left|S_R-\frac{1}{2}S\right|=d$。且$|S_L-S_R|=\left|\frac{1}{2}S+d-\left(\frac{1}{2}S-d\right)\right|=|2d|=2d$。

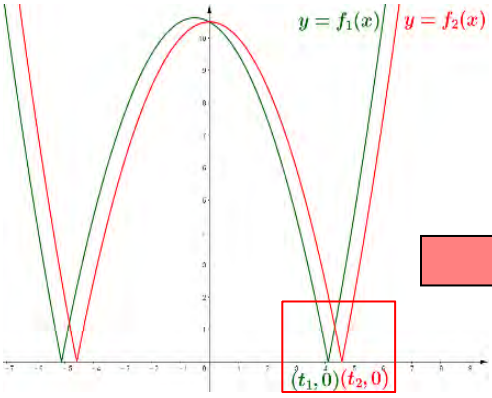
(2) 當$S_L=\frac{1}{2}S-d$ 時，$S_R=S-S_L=S-\left(\frac{1}{2}S-d\right)=\frac{1}{2}S+d$，

$\therefore\left|S_R-\frac{1}{2}S\right|=d$。且$|S_L-S_R|=\left|\frac{1}{2}S-d-\left(\frac{1}{2}S+d\right)\right|=|-2d|=2d$。

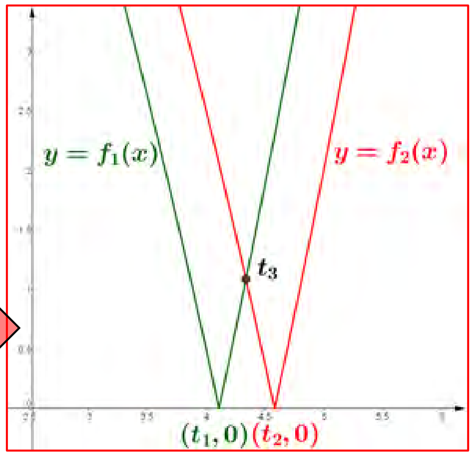
由3.可知**當$\boldsymbol{d}$的值愈小時，表示S_L、S_R愈接近$\frac{1}{2}\boldsymbol{S}$，即兩人所得的金幣越接近均分。此時$|S_L-S_R|$亦愈小。故要找出兩人分的最佳解，只須找出$\boldsymbol{x}\in\mathbb{N}$時，$\boldsymbol{f_1(x)}$、$\boldsymbol{f_2(x)}$的最小值即可，最小值出現的$\boldsymbol{x}$值即為「要平分」或「不平分」的$\boldsymbol{k}$。**

(三) $f_1(x)$、$f_2(x)$的圖形與t_1、t_2的討論

當$m=6$時，以$GeoGebra$軟體畫出函數$f_1(x)$、$f_2(x)$的圖形如圖三；t_1、t_2附近的圖形如圖四，並可得以下性質：



圖三：$f_1(x)$和$f_2(x)$的函數圖形



圖四：$f_1(x)$和$f_2(x)$函數的零點與其交點

$\boxed{\text{性質 1}}$：**t_1和t_2的距離小於(但接近)$\frac{1}{2}$：**

【證明】$t_2-t_1=\frac{\sqrt{2m(m+1)}}{2}-\frac{-1+\sqrt{1+2m(m+1)}}{2}=\frac{1+\sqrt{2m(m+1)}-\sqrt{1+2m(m+1)}}{2}$，$\because$ $\frac{\sqrt{2m(m+1)}-\sqrt{1+2m(m+1)}}{2}<0$，對任意$m\in\mathbb{N}$，故 $\frac{1+\sqrt{2m(m+1)}-\sqrt{1+2m(m+1)}}{2}<\frac{1}{2}$。$m$愈大時，$\frac{\sqrt{2m(m+1)}-\sqrt{1+2m(m+1)}}{2}$愈接近 0，即$t_2-t_1$愈接近$\frac{1}{2}$。

如圖四，設t_3為$f_1(x)$與$f_2(x)$在第一象限交點的x值，將$f_1(x)=f_2(x)$的式子化簡整理得 $2x^2+x-m(m+1)=0$，解$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8m(m+1)}}{4}$。故$\boxed{\boldsymbol{t_3=\frac{-1+\sqrt{1+8m(m+1)}}{4}}}$**，即$\boldsymbol{k=t_3}$時，第$k$袋金幣「平分或不平分」所得的結果相同**。$t_3$的性質如下：

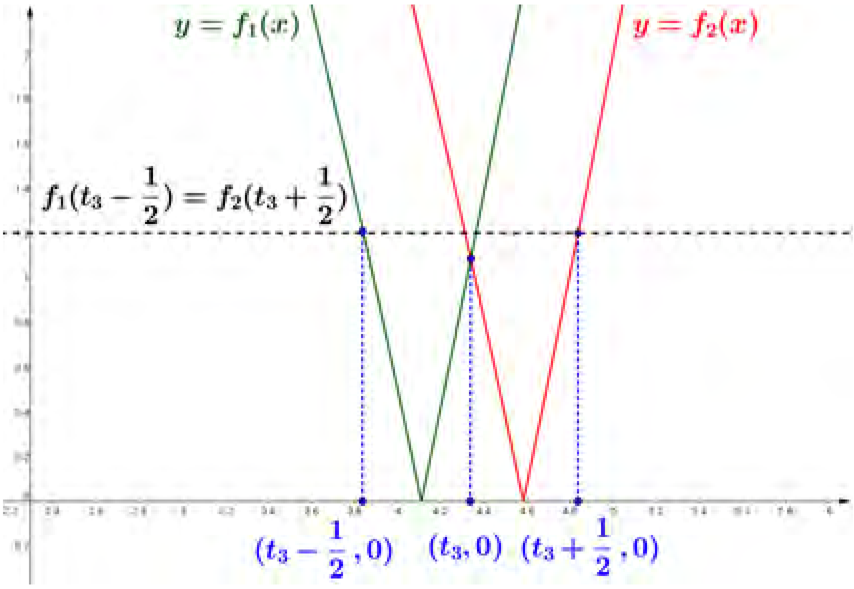
$\boxed{\text{性質 2}}$：**t_3小於(但接近)t_1和t_2的中點。**

【證明】 t_1和t_2的中點$=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{1+2m(m+1)}+\sqrt{2m(m+1)}$，又$t_3=\frac{1}{4}\left[-1+\sqrt{1+8m(m+1)}\right]$，$\therefore$只須證明$\boldsymbol{-1+\sqrt{1+8m(m+1)}<-1+\sqrt{1+2m(m+1)}+\sqrt{2m(m+1)}}$即可。

$\because m\in\mathbb{N}$，上式成立$\Leftrightarrow\sqrt{1+8m(m+1)}<\sqrt{(1+2m(m+1)}+\sqrt{2m(m+1)}$………①

將上式①兩邊平方、化簡後，得$4[m(m+1)]^2<4[m(m+1)]^2+2m(m+1)$，此對正整數$m$顯然成立。故$t_3<\frac{t_1+t_2}{2}$。另外，當$m$增加時，$\sqrt{1+8m(m+1)}\approx\sqrt{8m(m+1)}$，且$\sqrt{1+2m(m+1)}\approx\sqrt{2m(m+1)}$，又$\sqrt{8m(m+1)}=2\sqrt{2m(m+1)}=\sqrt{2m(m+1)}+\sqrt{2m(m+1)}$。故$m$增加時，上列①式中左式的值≒右式的值，即$t_3$愈接近$t_1$和$t_2$的中點。

$\boxed{\text{性質 3}}$： **$f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)>f_2(t_3)$，且$f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)-f_2(t_3)=\frac{1}{8}$。**



圖五：$t_3\pm\frac{1}{2}$的函數值相同

【證明】以$m=6$為例圖示，如上圖五。$\because t_3$小於t_1和t_2的中點，$t_2-t_1<\frac{1}{2}$，由$f_2(x)=\frac{1}{2}\left|x^2-\frac{1}{2}m(m+1)\right|$，$\therefore f_2(t_3)=-\frac{1}{2}\left[{t_3}^2-\frac{1}{2}m(m+1)\right]$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$①　，

又$f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(t_3+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}m(m+1)\right]\cdots\cdots$②，②$\times 2-$①$\times 2$ 得 $2f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)-2f_2(t_3)=2{t_3}^2+t_3+\frac{1}{4}-m(m+1)$，配方得$2\left(t_3+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}-m(m+1)\cdots\cdots$③，將$t_3=\frac{-1+\sqrt{1+8m(m+1)}}{4}$代入③並化簡後得值$\frac{1}{4}$，$\Rightarrow 2f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)-2f_2(t_3)=\frac{1}{4}$，故$f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)-f_2(t_3)=\frac{1}{8}$。同理，可得

性質 4：$\boldsymbol{f_1\left(t_3-\frac{1}{2}\right)>f_1(t_3)}$，且$\boldsymbol{f_1\left(t_3-\frac{1}{2}\right)-f_1(t_3)=\frac{1}{8}}$。

由性質 3、性質 4 可知，$\boldsymbol{f_1\left(t_3-\frac{1}{2}\right)=f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)}$。

(四) 由t_3取整數值判別最佳解與平分情形

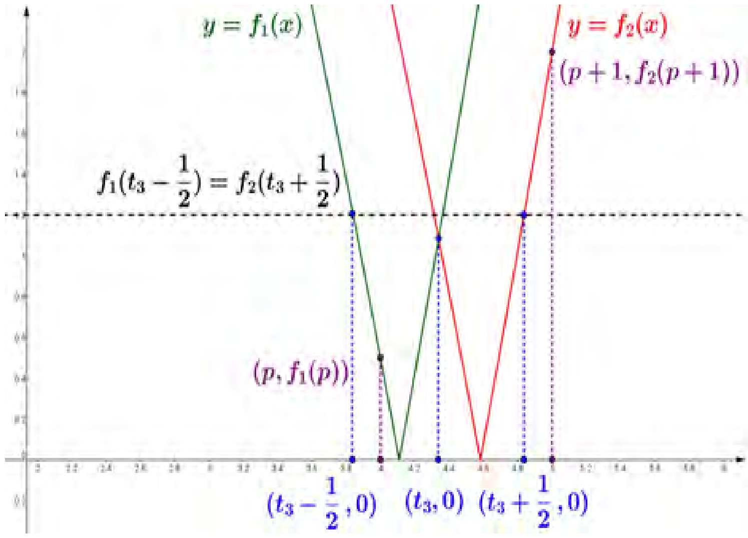
設t_3的小數部分為α，$0\le\alpha<1$，即$t_3=p+\alpha$，$p\in\mathbb{N}$。

1. $\boxed{\boldsymbol{0<\alpha<\frac{1}{2}}\ \textbf{時}}$，以$m=6$的圖形說明，$t_3\fallingdotseq 4.34$，$p=4$，$\alpha=0.34$。如下圖六。

$\because f_1\left(t_3-\frac{1}{2}\right)=f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)$，且$t_3-\frac{1}{2}<p<t_3<t_3+\frac{1}{2}<p+1$，$t_3-\frac{1}{2}<p<t_3$，可得$f_1(p)<f_1\left(t_3-\frac{1}{2}\right)$。$x>t_2$時，$f_2(x)$為嚴格遞增函數($S_L-\frac{1}{2}S$的差愈大)，又$t_2<t_3+\frac{1}{2}<p+1$，$\therefore f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)<f_2(p+1)$。由性質 3、性質 4 得$f_1\left(t_3-\frac{1}{2}\right)=f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)>f_1(t_3)=f_2(t_3)$，可知

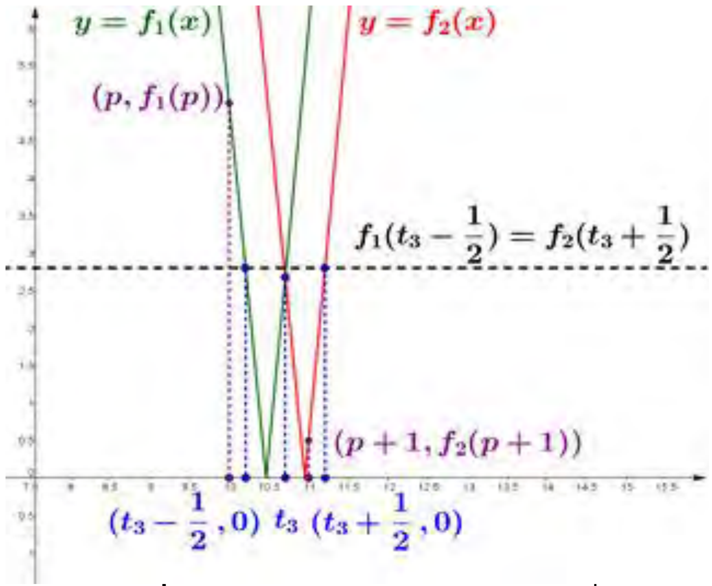
$f_1(p) < f_1\left(t_3 - \frac{1}{2}\right) = f_2\left(t_3 + \frac{1}{2}\right) < f_2(p+1)$。**故選第$\boldsymbol{k = p}$袋金幣，$\boldsymbol{k}$不平分，可得到最佳解**。

以下舉例說明：



圖六：當$\boldsymbol{0 < \alpha < \frac{1}{2}}$時$p$會在$t_3 - \frac{1}{2}$到$t_3$之間

【Ex1】若$m = 6$，$t_3 = \frac{-1+\sqrt{1+8\times6\times7}}{4} \fallingdotseq 4.34 \fallingdotseq 4$ $(\alpha = 0.34 < 0.5)$，故選第4袋金幣且不平分，可得最佳解。此時得$S_L = 1+2+3+4 = 10$，$S_R = 5+6 = 11$，$|S_L - S_R| = |10-11| = 1$為最小值。



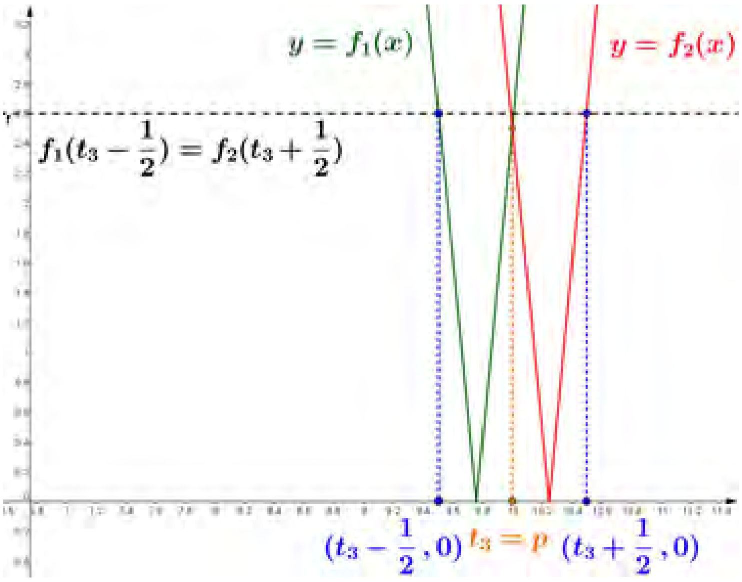
圖七：當$\boldsymbol{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$時$p+1$會在$t_3$到$t_3 + \frac{1}{2}$之間

2. $\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{2} < \alpha < 1}\text{時}}$，以$m = 15$的圖形說明，$t_3 \fallingdotseq 10.71$，p = 10，$\alpha = 0.71$。如上圖七，$\because p < t_3 - \frac{1}{2} < t_3 < p+1 < t_3 + \frac{1}{2}$，類似上面 1.的討論，得$f_2(p+1) < f_2\left(t_3 + \frac{1}{2}\right) = f_1\left(t_3 - \frac{1}{2}\right) < f_1(p)$。**故選第$\boldsymbol{k = p+1}$，$\boldsymbol{k}$要平分，可得到最佳解**。以下舉例說明：

【Ex2】若$m = 15$，$t_3 = \frac{-1+\sqrt{1+8\times15\times16}}{4} \fallingdotseq 10.71 \fallingdotseq 11$ $(\alpha = 0.71 > 0.5)$，故選第11袋

金幣且平分，可得最佳解。此時得$S_L = 1+2+3+\cdots+10+5.5 = 60.5$，$S_R = 5.5+12+13+14+15 = 59.5$，$|S_L - S_R| = |60.5-59.5| = 1$為最小值。

3. 當$\boxed{\boldsymbol{\alpha = 0}}$，以$m = 14$的圖形說明，$t_3 = 10$，$p = 10$，$\alpha = 0$。如下圖八，

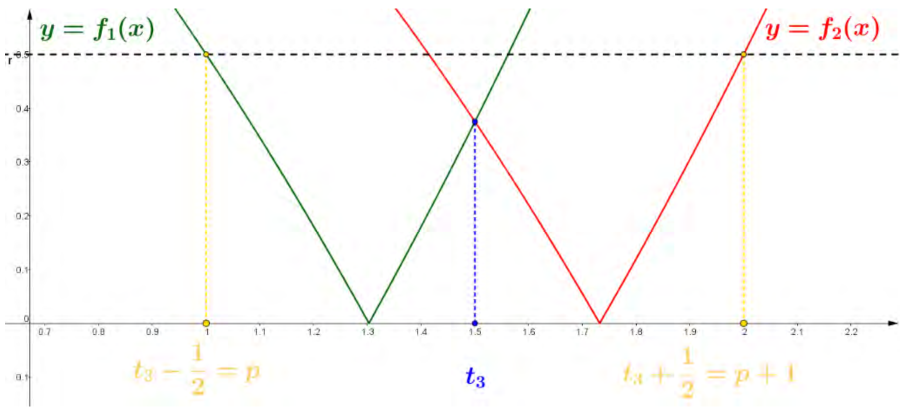


圖八：當$\boldsymbol{\alpha = 0}$時p會和t_3一樣

觀察兩函數交點，可知$f_1(p) = f_2(p)$。**故選第$\boldsymbol{k = p}$，$\boldsymbol{k}$平分或不平分，皆可得到最佳解。**

【Ex3】若$m = 14$，$t_3 = \frac{-1+\sqrt{1+8\times14\times15}}{4} = 10$，故選第10袋金幣平分或不平分，皆可得最佳解。此時情況如下：<u>當第10袋金幣不平分時</u>，$S_L = 1+2+3+\cdots+10 = 55$；$S_R = 11+12+13+14 = 50$，$|S_L - S_R| = |55-50| = 5$。<u>當第10袋金幣被平分時</u>，$S_L = 1+2+3+\cdots+9+\frac{10}{2} = 50$；$S_R = \frac{10}{2}+11+12+13+14 = 55$，$|S_L - S_R| = |50-55| = 5$。兩人拿到的金幣的差相同。

4. 當$\boxed{\boldsymbol{\alpha = 0.5}}$，以$m = 2$的圖形說明，$t_3 = 1.5$，$p = 1$，$\alpha = 0.5$。如下圖九，



圖九：當$\boldsymbol{\alpha = 0.5}$時$p$和$p+1$的函數值會一樣

觀察$t_3 \pm \frac{1}{2}$所對應到的函數值，可知$f_1(p) = f_2(p+1)$。**故選第$\boldsymbol{k = p}$(不平分)或$\boldsymbol{k = p+1}$(平分)，皆可得到最佳解。**以下舉例說明：

【Ex4】若$m=84$，$t_3=\frac{-1+\sqrt{1+8\times 84\times 85}}{4}=59.5$，故選第59袋金幣不平分或第60袋金幣平分，皆可得最佳解。此時情況如下：當第59袋金幣不平分時，$S_L=1+2+3+\cdots+59=1770$；$S_R=60+61+\cdots+84=1800$，$|S_L-S_R|=|1770-1800|=30$。當第60袋金幣**被**平分時，$S_L=1+2+3+\cdots+59+\frac{60}{2}=1800$；$S_R=\frac{60}{2}+61+62+\cdots+84=1770$，$|S_L-S_R|=|1800-1770|=30$。兩人拿到的金幣的差相同。

二、 兩人分金幣中，$\boldsymbol{\alpha=0}$或$\boldsymbol{\alpha=0.5}$時的最佳解，與所有$\boldsymbol{m}$值的遞迴關係

已知$t_3=p+\alpha$，$p\in\mathbb{N}$時，當$\alpha=0$或$\alpha=0.5$(會有2個最佳解)時，$\because t_3=\frac{-1+\sqrt{1+8m(m+1)}}{4}$為有理數，得$1+8m(m+1)$為奇完全平方數，故$-1+\sqrt{1+8m(m+1)}$為偶數，$\therefore$ t_3的有理數值必為「整數」或「整數+0.5」的形式。

$\because 1+8m(m+1)$是一個奇完全平方數。設$1+8m(m+1)=(2q+1)^2$，$q\in\mathbb{N}$，得$8m(m+1)=4q^2+4q$，$2m(m+1)=q(q+1)$，$2m^2+2m=q^2+q$，配方、化簡後得$8\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-4\left(q+\frac{1}{2}\right)^2=1$，$\Rightarrow 2(2m+1)^2-(2q+1)^2=1$，$m$、$q$皆為整數。設$x=2q+1$，$\boldsymbol{y=2m+1}$，上式得$\boldsymbol{x^2-2y^2=-1}$。此丟番圖方程式(Diophantine equation)由WolframAlpha ($http://www.wolframalpha.com/$)線上計算其整數解為

$$\boldsymbol{x=\pm\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n\right]},$$

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{1}{4}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\left(2-\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n\right]，n\in\mathbb{Z}，n\geq 0}\ 。$$

計算至$n=6$所得到的x、y、m、t_3、k的值，如下表二：

表二：t_3為「整數」或「整數+0.5」時的x、y、q、m、k值

n	x	y	q	m值	t_3值	**k值(平分或不平分)**
0	1	1	0	0	0	**0**
1	7	5	3	2	1.5	**1(不平)或 2(平)**
2	41	29	20	14	10	**10(不平或平)**
3	239	169	119	84	59.5	**59(不平)或 60(平)**
4	1393	985	696	492	348	**348(不平或平)**
5	8119	5741	4059	2870	2029.5	**2029(不平)或 2030(平)**
6	47321	33461	23660	16730	11830	**11830(不平或平)**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
遞迴關係	**y欄位的遞迴式：$y_{(t3)n}=6y_{(t3)n-1}-y_{(t3)n-2}$，$y_{(t3)0}=1$，$y_{(t3)1}=5$**					
	m欄位的遞迴式：$m_{(t3)n}=6m_{(t3)n-1}-m_{(t3)n-2}+2$，$m_{(t3)1}=2$，$m_{(t3)2}=14$					

(一)上表所有 y值的遞迴式

【證明】$\because$一般式$y_{(t3)n}=\frac{1}{4}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\left(2-\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n\right]$，$n\in\mathbb{Z}$，$n\geq 0$

$$\Rightarrow (3-2\sqrt{2})y_{(t3)n}=\frac{1}{4}\left[(2+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n}+(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n}\right](3-2\sqrt{2})$$

$=\frac{1}{4}\left[(2+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n+1}+(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1}\right]\ldots\ldots$①，同理，

$(3+2\sqrt{2})y_{(t3)n}=\frac{1}{4}\left[(2+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n-1}+(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n+1}\right]\cdots\cdots$②

①＋②得 $6y_{(t3)n}=\frac{1}{4}\left[(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1}+(2+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n-1}+(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n+1}+(2+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n+1}\right]=y_{(t3)n-1}+y_{(t3)n+1}$，$6y_{(t3)n}=y_{(t3)n-1}+y_{(t3)n+1}$，

$\boldsymbol{\therefore y_{(t3)n}=6y_{(t3)n-1}-y_{(t3)n-2}}$。

(二) 上表所有 m值的遞迴式

【證明】將 $y=2m+1$代入上式，$2m_{(t3)n}+1=6(2m_{(t3)n-1}+1)-(2m_{(t3)n-2}+1)$，化簡後得 $\boldsymbol{m_{(t3)n}=6m_{(t3)n-1}-m_{(t3)n-2}+2}$。

三、全部金幣可以由兩人完全均分的情形探討：$\boldsymbol{S(A)=S(B)=\frac{1}{2}S}$

(一) 當t_1為整數時

t_1為整數時，此整數為不平分的k，並可使$S(A)=S(B)=\frac{1}{2}S$。$\because t_1=\frac{-1+\sqrt{1+2m(m+1)}}{2}\in\mathbb{N}$，設$1+2m(m+1)=(2q+1)^2$，$q$為非負整數，得$1+2m^2+2m=(2q+1)^2$，$(2m+1)^2+1=2(2q+1)^2$，$(2m+1)^2-2(2q+1)^2=-1$，設$\boldsymbol{x=2m+1}$，$y=2q+1$，得$\boldsymbol{x^2-2y^2=-1}$之丟番圖方程式。由WolframAlpha線上計算其整數解為

$$\boldsymbol{x=\pm\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n}+(1-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n}\right]},$$

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{1}{4}\left[(2+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n}+(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n}\right]，n\in\mathbb{Z}，n\geq 0}。$$

計算至$n=6$所得到的x、y、m、$t_1(=k)$的值，如下表三：(*遞迴式之推導同t_3，故省略*)

表三：t_1為整數時的x、y、q、m、k值

n	x	y	q	m	t_1	$S(A)=S(B)$	**k值(不平分)**
0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	7	5	2	**3**	**2**	**3**	**2**
3	41	29	14	**20**	**14**	**105**	**14**
4	239	169	84	**119**	**84**	**3570**	**84**
5	1393	985	492	**696**	**492**	**121278**	**492**
6	8119	5741	2870	**4059**	**2870**	**4119885**	**2870**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
遞迴關係	**x欄位的遞迴式：$x_{(t1)n}=6x_{(t1)n-1}-x_{(t1)n-2}$，$x_{(t1)0}=1$，$x_{(t1)1}=7$** **$m$欄位的遞迴式：$m_{(t1)n}=6m_{(t1)n-1}-m_{(t1)n-2}+2$，$m_{(t1)1}=3$，$m_{(t1)2}=20$**						

以上為前6個m值以$k=t_1$且不平分的方式，由兩人完全均分所有的金幣。

(二) 當t_2為整數時

t_2為整數時，此整數為被平分的k，並可使$\boldsymbol{S(A)=S(B)=\frac{1}{2}S}$。 $\because t_2=\frac{\sqrt{2m(m+1)}}{2}\in\mathbb{N}$，

故設$2m(m+1)=(2q)^2\Rightarrow m^2+m=2q^2$，$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2=2q^2+\frac{1}{4}$，$(2m+1)^2-8q^2=1$。設

$\boldsymbol{x=2m+1}$，$y=q$，得$\mathbf{x^2-8y^2=1}$ 之丟番圖方程式。由$WolframAlpha$線上計算其整數

解為 $\boldsymbol{x=\pm\frac{1}{2}\left[-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n-\left(3+2\sqrt{2}\right)^n\right]}$，

$\boldsymbol{y=\pm\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\left(3-2\sqrt{2}\right)^n-\left(3+2\sqrt{2}\right)^n\right]}$，$\boldsymbol{n\in\mathbb{Z}}$，$\boldsymbol{n\geq 0}$。

計算至$n=6$所得到的x、y、m、$t_2(=k)$的值，如下表四：(*遞迴式之推導同t_3，故省略*)

表四：t_2為整數時的x、y、q、m、k值

n	x	y	q	m	t_2	$S(A)=S(B)$	**k值(平分)**
0	1	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	3	1	1	**1**	**1**	**0.5**	**1**
2	17	6	6	**8**	**6**	**18**	**6**
3	99	35	35	**49**	**35**	**612.5**	**35**
4	577	204	204	**288**	**204**	**20808**	**204**
5	3363	1189	1189	**1681**	**1189**	**706860.5**	**1189**
6	19601	6930	6930	**9800**	**6930**	**24012450**	**6930**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
遞迴關係	**x欄位的遞迴式：$x_{(t2)n}=6x_{(t2)n-1}-x_{(t2)n-2}$，$x_{(t1)0}=1$，$x_{(t1)1}=3$** **$m$欄位的遞迴式：$m_{(t2)n}=6m_{(t2)n-1}-m_{(t2)n-2}+2$，$m_{(t1)1}=1$，$m_{(t1)2}=8$**						

以上為前6個m值以$k=t_2$且平分的方式，由兩人完全均分所有的金幣。

(三) **兩人完全均分所有的金幣之m值之遞迴關係與其一般式**

將[表三]與[表四]中的m值重新排序，依次為$m=1$、3、8、20、49、119、288、696、1681、4059、9800、23660、57121、137903、332928、…得以下遞迴關係：

1.兩人完全均分遞迴式：$\boldsymbol{m_n=2m_{n-1}+m_{n-2}+1}$(初始值$\boldsymbol{m_1=1, m_2=3}$)。

2.兩人完全均分一般式：$\boldsymbol{m_n=\frac{1}{4}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}-2\right]}$，$\boldsymbol{n\in\mathbb{N}}$。

【證明】對照[表三]與[表四]

欲證明 $m_n=2m_{n-1}+m_{n-2}+1$，⇒等價於證明$m_{(t_2)n}=2m_{(t_1)n}+m_{(t_2)n-1}+1$，

$\Rightarrow m_{(t_2)n}-m_{(t_2)n-1}=2m_{(t_1)n}+1$ ($\because$表中均設$x=2m+1$，利用線性轉換)，

$\Rightarrow\frac{2m_{(t_2)n}+1}{2}-\frac{2m_{(t_2)n-1}+1}{2}=\frac{2[2m_{(t_1)n}+1]}{2}$，$\Rightarrow x_{(t_2)n}-x_{(t_2)n-1}=2x_{(t_1)n}$(等價於證明此式)。

$$\begin{cases} x_{(t_2)n}=-\dfrac{1}{2}\left[-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n-\left(3+2\sqrt{2}\right)^n\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x_{(t_2)n-1}=-\dfrac{1}{2}\left[-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n-1}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② $\Rightarrow x_{(t_2)n} - x_{(t_2)n-1} = 2 \times \left\{-\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n\right]\right\}$，

$\Rightarrow x_{(t_2)n} - x_{(t_2)n-1} = 2x_{(t_1)n}$(成立)。且$m_{(t_2)n} = 2m_{(t_1)n} + m_{(t_2)n-1} + 1$(亦成立)，其一般式為$m_n = \frac{1}{4}\left[(1-\sqrt{2})^{n+1} + (1+\sqrt{2})^{n+1} - 2\right]$。

四、 兩人分金幣的站位問題探討

(一) 環境設定：

1. 已知m值時，可得最佳解k，有2種類型：(1) k不平分(2) k平分
2. A可站位的區間為數線上任意點$A \in (-\infty, \infty)$，(若平分則A不可站在k的位置)。
3. $A(a)$、$B(b)$代表A、B兩人分別站在a、b兩點。

(二) 選位規則：

1. A、B兩人，由A先選位，再由B選位

   (B必須選擇2人金幣差最小的位置，即最佳解區間)
2. 數線上由左至右會有以下2種站位排序法：

   A-B、B-A。(以A-B為例：表示A拿到S_L，B拿到S_R)

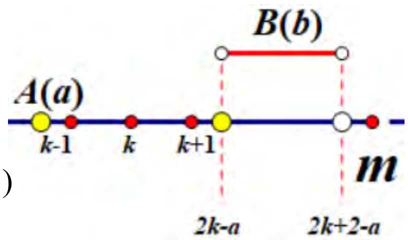


圖 1-1：A站定後B可站位之最佳解區間

(三) 二種類型之站位討論

【型一】不平分：

1. A-B：$a \in (-\infty, k+1)$時，A均可拿到S_L，且B拿到S_R

(1) 若$a \in (-\infty, k]$，且$b > k \geq a$，如圖 1-1。

$\because A$要拿到k，$\therefore |a-k| < |b-k|$，$\Rightarrow k - a < |b-k|$

$\because b > k$，$\Rightarrow k - a < b - k$，$\Rightarrow b > \mathbf{2k - a}$ ………①

$\because B$要拿到$k+1$，$\therefore |a-(k+1)| > |b-(k+1)|$，

$\Rightarrow k + 1 - a > |b-(k+1)|$。

$$\begin{cases} 若b > k+1，k+1-a > b-k-1，\Rightarrow \mathbf{b < 2k+2-a} \cdots\cdots\cdots ② \\ 若b < k+1，k+1-a > k+1-b，\Rightarrow \mathbf{b > a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$\because k \geq a$，$\Rightarrow k - a \geq 0$，$\Rightarrow \mathbf{2k - a \geq k \geq a}$ ………④

$\therefore$由上述①、②、③、④知$b \in (2k-a, 2k+2-a)$

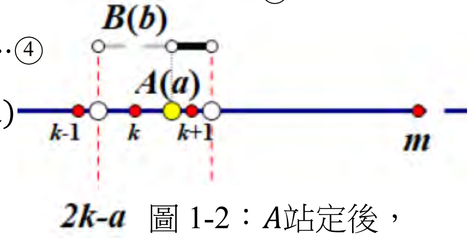


圖 1-2：A站定後，B可站位之最佳解區間

(2) 若$a \in (k, k+1)$，且$a < b$ ，如圖 1-2。

$\because A$要拿到k，$\therefore |a-k| < |b-k|$，$\Rightarrow a - k < |b-k|$，

$\Rightarrow$若$b > k$，$\Rightarrow a - k < b - k$，$\Rightarrow \mathbf{b > a}$ ………①

$\because B$要拿到$k+1$，$\therefore |a-(k+1)| > |b-(k+1)|$，

$\Rightarrow k+1-a>|b-(k+1)|$，

$$\Rightarrow \begin{cases} 若b>k+1，\Rightarrow k+1-a>b-k-1，\Rightarrow \boldsymbol{b<2k+2-a} \cdots\cdots\cdots ② \\ 若b<k+1，\Rightarrow k+1-a>k+1-b，\Rightarrow \boldsymbol{b>a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}。$$

$\because k+1>a$，$\Rightarrow 2k+2>2a$，$\Rightarrow \boldsymbol{2k+2-a>a}$ $\cdots\cdots\cdots$④

$\therefore$由上述①、②、③、④知$\boldsymbol{b\in(a,2k+2-a)}$

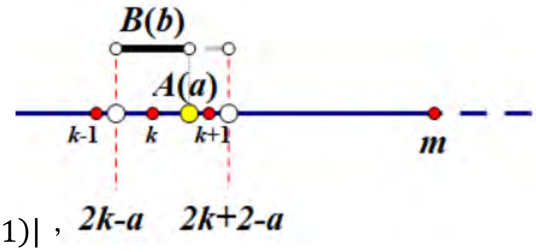


圖 1-3：A站定後，B可站位之最佳解區間

2. $\boldsymbol{B}$-$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{a\in(k,\infty)}$時，$\boldsymbol{A}$均可拿到$S_R$，且$\boldsymbol{B}$拿到$S_L$

(1) 若$a\in(k,k+1)$時，且$b<a$，如圖 1-3。

$\because A$要拿到$k+1$，$\therefore|a-(k+1)|<|b-(k+1)|$，

$\Rightarrow k+1-a<k+1-b$，$\Rightarrow \boldsymbol{b<a}$ $\cdots\cdots\cdots$ ①。

$\because B$要拿到k，$\therefore|a-k|>|b-k|$，$\Rightarrow a-k>|b-k|$，

$$\Rightarrow \begin{cases} 若b>k，\Rightarrow b-k<a-k，\Rightarrow \boldsymbol{b<a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ 若b<k，\Rightarrow k-b<a-k，\Rightarrow \boldsymbol{b>2k-a} \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}。$$

$\because k<a$，$2k<2a$，$\Rightarrow \boldsymbol{2k-a<a}$，$\cdots\cdots\cdots$④

$\therefore$由上述①、②、③、④知$\boldsymbol{b\in(2k-a,a)}$.

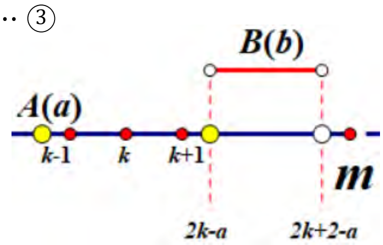


圖 1-4：A站定後，B可站位之最佳解區間

(2) 若 $a\in[k+1,\infty)$且$b<k+1\leq a$如圖 1-4。

$\because A$要拿到$k+1$，$\therefore$ $|a-(k+1)|<|b-(k+1)|$

$\Rightarrow a-k-1>k+1-b$，$\Rightarrow \boldsymbol{b<2k+2-a} \cdots\cdot$ ①。

$\because B$要拿到k，$\therefore|a-k|>|b-k|$，$\Rightarrow a-k>|b-k|$，

$$\begin{cases} 若b>k，\Rightarrow a-k>b-k，\Rightarrow \boldsymbol{b<a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ 若b<k，\Rightarrow a-k>k-b，\Rightarrow \boldsymbol{b>2k-a} \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}。$$

$\because k+1<a$，$\Rightarrow 2k+2<2a$，$\Rightarrow \boldsymbol{2k+2-a<a}$ $\cdots\cdots\cdots$④

$\therefore$由上述①、②、③、④知$\boldsymbol{b\in(2k-a,2k+2-a)}$。

【型二】平分$(a\neq k)$：

如圖 1-1、1-2、1-3、1-4，A、B分別站在黃色點上，k為$\overline{AB}$中點。

1. $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{a\in(-\infty,k)}$時，$\boldsymbol{A}$均可拿到$S_L$，且$\boldsymbol{B}$拿到$S_R$

若$a\in(-\infty,k)$且$b\in(k,\infty)$，$\because|a-k|=|b-k|$，$\Rightarrow k-a=b-k$，$\Rightarrow b=2k-a$。

2. $\boldsymbol{B}$-$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{a\in(k,\infty)}$時，$\boldsymbol{A}$均可拿到$S_R$，且$\boldsymbol{B}$拿到$S_L$

若$a\in(k,\infty)$且$b\in(-\infty,k)$，$\because|a-k|=|b-k|$，$\Rightarrow a-k=k-b$，$\Rightarrow b=2k-a$。

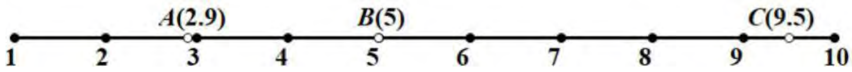
五、三人分金幣的情形

在探討三人分金幣的最佳解時，我們計算三人分得金幣數的標準差，即

$\sigma=\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(S(A)-\frac{1}{3}S\right)^2+\left(S(B)-\frac{1}{3}S\right)^2+\left(S(C)-\frac{1}{3}S\right)^2\right]}$，相同的$m$值會因第$k$、$h$袋金幣的平分與否而產生四種方式與對應的四個$\sigma$值，當$\sigma$值愈小時，表示三人各自分得的金幣數與完全均分金幣數($\frac{1}{3}S$)的差異愈小，最小的σ值即為最佳解。

(一)以$m=10$，$S=\frac{1}{2}\cdot 10(10+1)=55$，$\frac{1}{3}S\fallingdotseq 18.3$，$k=3$，$h=7$為例：

1. **方式一：$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{h}$皆不平分**，例：$A(2.9)$、$B(5)$、$C(9.5)$，如圖十

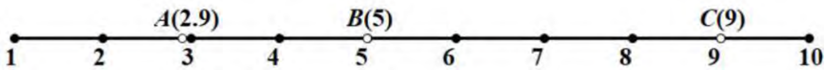
圖十 

$S(A)=1+2+3=6$，$S(B)=4+5+6+7=22$，$S(C)=8+9+10=27$，

得$|6-18.3)|+|22-18.3)|+|27-18.3|=12.3+3.7+8.7=24.7$，

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{|6-18.3)|^2+|6-18.3)|^2+|27-18.3|^2}{3}}=\sqrt{\frac{12.3^2+3.7^2+8.7^2}{3}}=8.957。$$

2. **方式二：$\boldsymbol{k}$不平分、$\boldsymbol{h}$平分**，例：$A(2.9)$、$B(5)$、$C(9)$，如圖十一

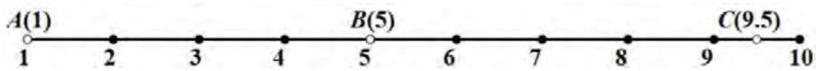
圖十一 

$S(A)=1+2+3=6$，$S(B)=4+5+6+\frac{7}{2}=18.5$，$S(C)=\frac{7}{2}+8+9+10=30.5$，

得 $|6-18.3|+|18.5-18.3|+|30.5-18.3|=12.3+0.2+12.2=24.7$，

$$\sigma_2=\sqrt{\frac{|6-18.3|^2+|18.5-18.3|^2+|30.5-18.3|^2}{3}}=\sqrt{\frac{12.3^2+0.2^2+12.2^2}{3}}=10.003。$$

3. **方式三： $\boldsymbol{k}$平分、$\boldsymbol{h}$不平分**，例：$A(1)$、$B(5)$、$C(9.5)$，如圖十二

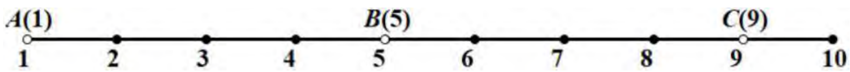
圖十二 

$S(A)=1+2+\frac{3}{2}=4.5$，$S(B)=\frac{3}{2}+4+5+6+7=23.5$，$S(C)=8+9+10=27$，

得$|4.5-18.3|+|23.5-18.3|+|27-18.3|=13.8+5.2+8.7=27.7$，

$$\sigma_3=\sqrt{\frac{|4.5-18.3|^2+|23.5-18.3|^2+|27-18.3|^2}{3}}=\sqrt{\frac{13.8^2+5.2^2+8.7^2}{3}}=9.886。$$

4. **方式四：$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{h}$皆平分**，例：$A(1)$、$B(5)$、$C(9)$，如圖十三

圖十三 

$S(A)=1+2+\frac{3}{2}=4.5$，$S(B)=\frac{3}{2}+4+5+6+\frac{7}{2}=20$，$S(C)=\frac{7}{2}+8+9+10=30.5$，

得$|4.5-18.3|+|20-18.3|+|30.5-18.3|=13.8+1.7+12.2=27.7$，

$$\sigma_4=\sqrt{\frac{|4.5-18.3|^2+|20-18.3|^2+|30.5-18.3|^2}{3}}=\sqrt{\frac{13.8^2+1.7^2+12.2^2}{3}}=10.680\text{。}$$

$\therefore m=10$，$k=3$，$h=7$中，方式一的標準差σ_1的值最小，故「**方式一**」為其最佳解。

(二) **一般化的情形--**當金幣的袋數為m時，則有「第k袋金幣被平分或不平分，第h袋金幣被平分或不平分」$(k<h)$，共四種情形。

1. 方式一：k不平分，h不平分

為了討論每個人拿到的金幣和全部的三分之一的差，列式如下：

(1)$\left|S_L-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{k}{2}(k+1)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\right|=\frac{1}{2}\left|k^2+k-\frac{1}{3}m(m+1)\right|$，設$g_{1a}(x)$

$=\frac{1}{2}\left|x^2+x-\frac{1}{3}m(m+1)\right|$，$\Rightarrow$其根$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{4}{3}m(m+1)}}{2}$，設正根為$u_{1a}$。

(2)$\left|S_M-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}(h^2-k^2+h-k)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\right|=\frac{1}{2}\left|k^2+k-h^2-h+\frac{1}{3}m(m+1)\right|$，

設$g_{1b}(x,y)=\frac{1}{2}\left|x^2+x-y^2-y+\frac{1}{3}m(m+1)\right|$。

(3)$\left|S_R-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}(m^2+m-h^2-h)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\right|=\frac{1}{2}\left|h^2+h-\frac{2}{3}m(m+1)\right|$，設

$g_{1c}(x)=\frac{1}{2}\left|x^2+x-\frac{2}{3}m(m+1)\right|$，$\Rightarrow$其根$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{8}{3}m(m+1)}}{2}$，設正根為$u_{1c}$。

2. 方式二：k不平分、h被平分。同理，

(1) $\left|S_L-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}\left[k^2+k-\frac{1}{3}m(m+1)\right]\right|$，設$g_{2a}(x)=\frac{1}{2}\left|x^2+x-\frac{1}{3}m(m+1)\right|$。

得$g_{2a}(x)=g_{1a}(x)$，$\Rightarrow$其根$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{4}{3}m(m+1)}}{2}$，設正根為$u_{2a}(=u_{1a})$。

(2) $\left|S_M-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}(h^2-k^2-k)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\right|$，設

$g_{2b}(x,y)=\frac{1}{2}\left|x^2+x-y^2+\frac{1}{3}m(m+1)\right|$。

(3) $\left|S_R-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}(m^2+m-h^2)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\right|=\frac{1}{2}\left|h^2-\frac{2}{3}m(m+1)\right|$，

設$g_{2c}(x)=\frac{1}{2}\left|x^2-\frac{2}{3}m(m+1)\right|$，$\Rightarrow$其根$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}m(m+1)}$，設正根為$u_{2c}$。

3. 方式三：k被平分、h不平分。同理，

(1)$\left|S_L-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\right|=\frac{1}{2}\left|k^2-\frac{1}{3}m(m+1)\right|$

設$g_{3a}(x)=\frac{1}{2}\left|x^2-\frac{1}{3}m(m+1)\right|$，$\Rightarrow$其根$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}m(m+1)}$，設正根為$u_{3a}$。

(2)$\left|S_M-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}(h^2+h-k^2)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\right|$，設 $g_{3b}(x,y)=$

$\frac{1}{2}\left|x^2-y(y+1)+\frac{1}{3}m(1+m)\right|$。

(3) $\left|S_R-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}(m^2+m-h^2-h)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\right|=\frac{1}{2}\left|h^2+h-\frac{2}{3}m(m+1)\right|$

設$g_{3c}(x)=\frac{1}{2}\left|x^2+x-\frac{2}{3}m(m+1)\right|$，得$g_{3c}(x)=g_{1c}(x)$，⇒其根

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{8}{3}m(m+1)}}{2}$，設正根為$u_{3c}(=u_{1c})$。

4. 方式四：k被平分、h被平分。同理，

(1) $\left|S_L-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(m+1)\right|=\frac{1}{2}\left|k^2-\frac{1}{3}m(m+1)\right|$。設$g_{4a}(x)=\frac{1}{2}\left|x^2-\frac{1}{3}m(m+1)\right|$，得$g_{4a}(x)=g_{3a}(x)$，⇒其根$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}m(m+1)}$，設正根為$u_{4a}(=u_{3a})$。

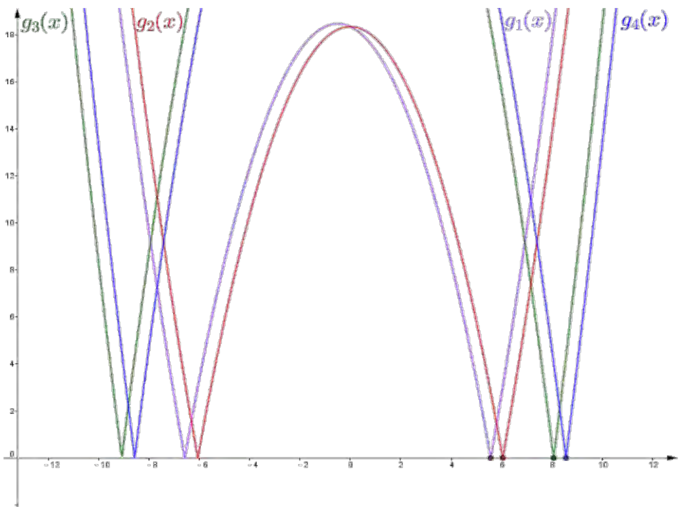
(2) $\left|S_M-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}(h^2-k^2)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\right|$，設$g_{4b}(x,y)=\frac{1}{2}\left|x^2-y^2+\frac{1}{3}m(m+1)\right|$。

(3) $\left|S_R-\frac{1}{3}S\right|=\left|\frac{1}{2}(m^2+m-h^2)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\right|=\frac{1}{2}\left|h^2-\frac{2}{3}m(m+1)\right|$。

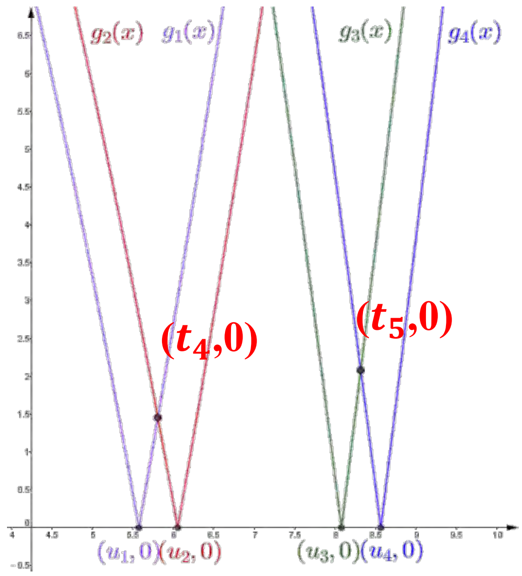
設$g_{4c}(x)=\frac{1}{2}\left|x^2-\frac{2}{3}m(m+1)\right|$，得$g_{4c}(x)=g_{2c}(x)$，⇒其根$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}m(m+1)}$，設正根為$u_{4c}(=u_{2c})$。

5. g的函數圖形

當$m=10$時，以$GeoGebra$軟體畫出的圖形如下圖十四。由於$g_{1a}(x)=g_{2a}(x)$，故將這兩個函數以$\boldsymbol{g_1(x)}$表示；其他的函數也同樣以$g_{3a}(x)=g_{4a}(x)=\boldsymbol{g_2(x)}$、$g_{1c}(x)=g_{3c}(x)=\boldsymbol{g_3(x)}$、$g_{2c}(x)=g_{4c}(x)=\boldsymbol{g_4(x)}$表示。類似，四個函數值為0時的$x$值也分別以$\boldsymbol{u_1}\ (=u_{1a}=u_{2a})$、$\boldsymbol{u_2}\ (=u_{3a}=u_{4a})$、$\boldsymbol{u_3}\ (=u_{1c}=u_{3c})$、$\boldsymbol{u_4}\ (=u_{2c}=u_{4c})$表示。圖十四中$u_1$、$u_2$、$u_3$、$u_4$附近的圖形如下圖十五。



圖十四：$g_1(x)$到$g_4(x)$的函數圖形



圖十五：$g_1(x)$到$g_4(x)$函數的零點與其交點

設$g_1(x)$、$g_2(x)$在第一象限交點的 x 值為t_4，$g_3(x)$、$g_4(x)$在第一象限的交點為t_5，經計算化簡後，得$\boldsymbol{t_4=\frac{1}{4}\left[-1+\sqrt{1+\frac{16}{3}m(m+1)}\right]}$；$\boldsymbol{t_5=\frac{1}{4}\left[-1+\sqrt{1+\frac{32}{3}m(m+1)}\right]}$。

6. t_4、t_5的性質

類似兩人分中的性質1~性質4，t_4、t_5亦有以下性質(由於以下性質和三人分找最佳解無直接關係，故證明省略)：

性質5：$\boldsymbol{0<u_2-u_1<\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{0<u_4-u_3<\frac{1}{2}}$。

性質6：**$\boldsymbol{t_4}$大於(但接近)$\boldsymbol{u_1}$和$\boldsymbol{u_2}$的中點；$\boldsymbol{t_5}$(但接近)大於$\boldsymbol{u_3}$和$\boldsymbol{u_4}$的中點。**

性質7-1：$\boldsymbol{g_1\left(t_4-\frac{1}{2}\right)>g_1(t_4)}$，且$\boldsymbol{g_1\left(t_4-\frac{1}{2}\right)-g_1(t_4)=\frac{1}{8}}$；

$\boldsymbol{g_2\left(t_4+\frac{1}{2}\right)>g_2(t_4)}$，且$\boldsymbol{g_2\left(t_4+\frac{1}{2}\right)-g_2(t_4)=\frac{1}{8}}$。

性質7-2：$\boldsymbol{g_3\left(t_5-\frac{1}{2}\right)>g_3(t_5)}$，且$\boldsymbol{g_3\left(t_5-\frac{1}{2}\right)-g_3(t_5)=\frac{1}{8}}$；

$\boldsymbol{g_4\left(t_5+\frac{1}{2}\right)>g_4(t_5)}$，且$\boldsymbol{g_4\left(t_5+\frac{1}{2}\right)-g_4(t_5)=\frac{1}{8}}$。

由性質 7 的結果可知 $\boldsymbol{g_1\left(t_4-\frac{1}{2}\right)=g_2\left(t_4+\frac{1}{2}\right)}$； $\boldsymbol{g_3\left(t_5-\frac{1}{2}\right)=g_4\left(t_5+\frac{1}{2}\right)}$。

(三) 以三人分得金幣數的標準差討論最佳解

1. 由$\sigma=\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(S_L-\frac{1}{3}S\right)^2+\left(S_M-\frac{1}{3}S\right)^2+\left(S_R-\frac{1}{3}S\right)^2\right]}$ 及上述的討論可得

(2) 方式一：$\left|S_L-\frac{1}{3}S\right|=\frac{1}{2}\left|k(k+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right|$、

$\left|S_M-\frac{1}{3}S\right|=\frac{1}{2}\left|k(k+1)-h(h+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right|$、

$\left|S_R-\frac{1}{3}S\right|=\frac{1}{2}\left|h(h+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right|$，代入上式$\sigma$中，得

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(k(k+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(k(k+1)-h(h+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(h(h+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}。$$

(3) 方式二：同理可得

$$\sigma_2=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(k(k+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(k(k+1)-h^2+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(h^2-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}\quad。$$

(4) 方式三：同理可得

$$\sigma_3=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(k^2-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(k^2-h(h+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(h(h+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}\ 。$$

(5) 方式四：同理可得

$$\sigma_4=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(k^2-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(k^2-h^2+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(h^2-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}\ 。$$

以上σ_1、 σ_2、 σ_3、 σ_4根號內的式子為h、k的雙變數函數。

2. 對於每個m值，代入對應的$u_1=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4}{3}m(m+1)}\right)$、$u_2=\sqrt{\frac{1}{3}m(m+1)}$、$u_3=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{8}{3}m(m+1)}\right)$、$u_4=\sqrt{\frac{2}{3}m(m+1)}$後，以**方式一**為例，所得的$u_1$、$u_3$分別是「三人完全均分」的$k$、$h$值，但因大多數的$u_i$都不是整數，所以須以**最接近$u_i$的兩個整數值**代入$\sigma_i$後再比較找出最佳解。設$p_{i1}\le u_i\le p_{i2}$，$p_{i1}$、$p_{i2}\in\mathbb{N}$，$i=1$、2、3、4 (即$p_{i1}$、$p_{i2}$為最接近$u_i$的兩個整數)。分別將$k=p_{11}$、$p_{12}$，$h=p_{31}$、$p_{32}$代入$\sigma_1$中，可得方式一的4個$\sigma_1$值

$$\sigma_{1a}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{11}(p_{11}+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{11}(p_{11}+1)-p_{31}(p_{31}+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{31}(p_{31}+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}\ 。$$

$$\sigma_{1b}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{11}(p_{11}+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{11}(p_{11}+1)-p_{32}(p_{32}+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{32}(p_{32}+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}\ 。$$

$$\sigma_{1c}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{12}(p_{12}+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{12}(p_{12}+1)-p_{31}(p_{31}+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{31}(p_{31}+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}\ 。$$

$$\sigma_{1d}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{12}(p_{12}+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{12}(p_{12}+1)-p_{32}(p_{32}+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{32}(p_{32}+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}\ 。$$

同樣地將$k=p_{11}$、p_{12}，$h=p_{41}$、p_{42}代入σ_2的式子中，可得方式二的四個σ_2值，分別是

$$\sigma_{2a}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{11}(p_{11}+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{11}(p_{11}+1)-{p_{41}}^2+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left({p_{41}}^2-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}\ 。$$

$$\sigma_{2b}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{11}(p_{11}+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{11}(p_{11}+1)-{p_{42}}^2+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left({p_{42}}^2-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}\ 。$$

$$\sigma_{2c}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{21}(p_{21}+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{21}(p_{21}+1)-{p_{41}}^2+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left({p_{41}}^2-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}$$

$$\sigma_{2d}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{21}(p_{21}+1)-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{21}(p_{21}+1)-{p_{42}}^2+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left({p_{42}}^2-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}\ 。$$

將$k=p_{21}$、p_{22}，$h=p_{31}$、p_{32}代入σ_3的式子中，可得方式三的四個σ_3值，分別是

$$\sigma_{3a}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left({p_{21}}^2-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left({p_{21}}^2-p_{31}(p_{31}+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{31}(p_{31}+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}$$

$$\sigma_{3b}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left({p_{21}}^2-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left({p_{21}}^2-p_{32}(p_{32}+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^2+\left(p_{32}(p_{32}+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^2\right]}$$

$$\sigma_{3c}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{22}{}^{2}-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{22}{}^{2}-p_{31}(p_{31}+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{31}(p_{31}+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^{2}\right]}$$

$$\sigma_{3d}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{22}{}^{2}-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{22}{}^{2}-p_{32}(p_{32}+1)+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{32}(p_{32}+1)-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^{2}\right]}$$

將$k=p_{21}$、p_{22}，$h=p_{41}$、p_{42}代入σ_4的式子中，可得方式四的四個σ_4值，分別是

$$\sigma_{4a}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{21}{}^{2}-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{21}{}^{2}-p_{41}{}^{2}+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{41}{}^{2}-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^{2}\right]}。$$

$$\sigma_{4b}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{21}{}^{2}-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{21}{}^{2}-p_{42}{}^{2}+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{42}{}^{2}-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^{2}\right]}。$$

$$\sigma_{4c}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{22}{}^{2}-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{22}{}^{2}-p_{41}{}^{2}+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{41}{}^{2}-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^{2}\right]}。$$

$$\sigma_{4d}=\sqrt{\frac{1}{12}\left[\left(p_{22}{}^{2}-\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{22}{}^{2}-p_{42}{}^{2}+\frac{1}{3}m(m+1)\right)^{2}+\left(p_{42}{}^{2}-\frac{2}{3}m(m+1)\right)^{2}\right]}。$$

算出上列關於m的16個標準差後，選出最小值，其對應的k、h值與平分方式即為三人分的最佳解。以$m=10$為例，所得到的最佳解為$\boldsymbol{k=6}$，$\boldsymbol{h=8}$，**方式三**。如表五：

表五：16個σ並比較大小，以$m=10$為例

m	u_1~u_4值	p_{i1}、p_{i2}	方式	(k,h)	標準差	最小
$m=10$	$u_1=5.575908711$	$p_{11}=5$	方式一	$(5,8)$	$\sigma_{1a}=2.494438258$	
				$(5,9)$	$\sigma_{1b}=8.498365856$	
		$p_{12}=6$		$(6,8)$	$\sigma_{1c}=2.494438258$	
				$(6,9)$	$\sigma_{1d}=6.018490028$	
	$u_2=6.055300708$	$\boldsymbol{p_{21}=6}$	方式二	$(5,8)$	$\sigma_{2a}=3.399346342$	
				$(5,9)$	$\sigma_{2b}=5.071708018$	
		$p_{22}=7$		$(6,8)$	$\sigma_{2c}=5.249338583$	
				$(6,9)$	$\sigma_{2d}=2.778888667$	
	$u_3=8.078072822$	$\boldsymbol{p_{31}=8}$	**方式三**	**$(6,8)$**	$\boldsymbol{\sigma_{3a}=0.471404521}$	★
				$(6,9)$	$\sigma_{3b}=6.944222219$	
		$p_{32}=9$		$(7,8)$	$\sigma_{3c}=5.328122454$	
				$(7,9)$	$\sigma_{3d}=6.114645443$	
	$u_4=8.563488386$	$p_{41}=8$	方式四	$(6,8)$	$\sigma_{4a}=3.681787006$	
				$(6,9)$	$\sigma_{4b}=3.274480451$	
		$p_{42}=9$		$(7,8)$	$\sigma_{4c}=7.684761256$	
				$(7,9)$	$\sigma_{4d}=4.403281605$	

六、全部金幣可以由三人均分的情形探討

(一) u_1為整數時，即k不平分的條件下，$S_L=\frac{1}{3}S$。

$$\because u_1=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{3}m(m+1)}}{2}$$為整數，設$1+\frac{4}{3}m(m+1)=(2q+1)^2$，$q\in\mathbb{Z}$，

$\Rightarrow 3+4m(m+1)=3(2q+1)^2$，$\Rightarrow 3+4\left(m+\frac{1}{2}\right)^2=3(2q+1)^2+1$，

$3+(2m+1)^2=3(2q+1)^2+1$，$\Rightarrow 3(2q+1)^2-(2m+1)^2=2$。得$3x^2-y^2=2$(其中$x=2q+1$，$y=2m+1$)。此**丟番圖方程式**由WolframAlpha線上計算其整數解為

$$\boldsymbol{x=\pm\frac{1}{6}\left[(3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n+(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n\right]},$$

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n\right]，n\in\mathbb{Z}，n\geq 0}。$$

計算8以內的n所得到的x、y、q、m、k的值，如表六：

表六：u_1為整數時的x、y、q、m、k值

n	x	y	q	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{u_1(=k)}$
0	1	1	1	***0***	***0***
1	1	1	1	***0***	***0***
2	3	5	3	***2***	***1***
3	11	19	11	***9***	***5***
4	41	71	41	***35***	***20***
5	153	265	153	***132***	***76***
6	571	989	571	***494***	***285***
7	2131	3691	2131	***1845***	***1065***
8	7953	13775	7953	***6887***	***3976***
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
遞迴關係	**由$\boldsymbol{m}$的解可得遞迴式$\boldsymbol{a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}+1}$，$\boldsymbol{a_1=2}$，$\boldsymbol{a_2=9}$**				

(二) u_2為整數時，即k平分的條件下，$S_L=\frac{1}{3}S$。

$u_2=\sqrt{\frac{1}{3}m(m+1)}$為整數，設$\frac{1}{3}m(m+1)=q^2$，$q\in\mathbb{Z}$，$m(m+1)=3q^2$，

$\Rightarrow\left(m+\frac{1}{2}\right)^2=3q^2+\frac{1}{4}$，$12q^2-(2m+1)^2=-1$，$3(2q)^2-(2m+1)^2=-1$，

得$3x^2-y^2=-1$(其中$x=2q$，$y=2m+1$)。此**丟番圖方程式**由WolframAlpha線上計算其整數解為

$$\boldsymbol{x=\pm\frac{(2-\sqrt{3})^n-(2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}，y=\pm\frac{1}{2}\left(-(2-\sqrt{3})^n-(2+\sqrt{3})^n\right)，n\in\mathbb{Z}，n\geq 0}。$$

計算8以內的n所得到的x、y、m、$u_2(=k)$的值，如表七：

表七：u_2為整數時的x、y、q、m、k值

n	x	y	q	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{u_2(=h)}$
0	0	1	0	0	0
1	3	2	1.5	0.5	0.5
2	12	7	6	***3***	***2***
3	45	26	22.5	12.5	7.5

4	168	97	84	***48***	***28***
5	627	362	313.5	180.5	104.5
6	2340	1351	1170	***675***	***390***
7	8733	5042	4366.5	2520.5	1455.5
8	32592	18817	16296	***9408***	***5432***
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
遞迴關係	**由m的解可得遞迴式$b_n=14b_{n-1}-b_{n-2}+6$，$b_1=3$，$b_2=48$**				

(三) u_3為整數時，即h不平分的條件下，$S_R=\frac{1}{3}S$。

$\because u_3=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{8}{3}m(m+1)}}{2}$為整數，設$1+\frac{8}{3}m(m+1)=(2q+1)^2$，$q\in\mathbb{Z}$，

則$3+8m(m+1)=3(2q+1)^2$，$3+8\left(m+\frac{1}{2}\right)^2=3(2q+1)^2+2$，$2(2m+1)^2=3(2q+1)^2-1$，$3(2q+1)^2-2(2m+1)^2=1$，得$3x^2-2y^2=1$ (其中$x=2q+1$，$y=2m+1$)。此**丟番圖方程式**由WolframAlpha線上計算其整數解為

$$\boldsymbol{x=\pm\frac{1}{2}\left[(3+\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})^n+(3-\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})^n\right]}，$$

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{1}{4}\left[(2+\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})^n+(2-\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})^n\right]，n\in\mathbb{Z}，n\geq 0}。$$

計算10以內的n所得到的x、y、m、$u_3(=h)$的值，如表八：

表八：u_3為整數時的x、y、q、m、h值

n	x	y	q	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{u_3(=h)}$
0	1	1	0	***0***	***0***
1	1	1	0	***0***	***0***
2	9	11	4	***5***	***4***
3	89	109	44	***54***	***44***
4	881	1079	440	***539***	***440***
5	8721	10681	4360	***5340***	***4360***
6	86329	105731	43164	***52865***	***43164***
7	854569	1046629	427284	***523314***	***427284***
8	8459361	10360559	4229680	***5180279***	***4229680***
9	83739041	102558961	41869520	***51279480***	***41869520***
10	828931049	1015229051	414465524	***507614525***	***414465524***
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
遞迴關係	**由m的解可得遞迴式$c_n=10c_{n-1}-c_{n-2}+4$，$c_1=5$，$c_2=54$**				

(四) u_4為整數時，即h平分的條件下，$S_R=\frac{1}{3}S$。

$u_4=\sqrt{\frac{2}{3}m(m+1)}$為整數，設$\frac{2}{3}m(m+1)=q^2$，$q\in\mathbb{Z}$。$2m(m+1)=3q^2$，$\Rightarrow$ $4\left(m+\frac{1}{2}\right)^2=6q^2+1$，$\Rightarrow 6q^2-(2m+1)^2=-1$，得$6x^2-y^2=-1$(其中$x=q$，$y=2m+1$)。此**丟番圖方程式**經由WolframAlpha線上計算其整數解為

$$\boldsymbol{x=\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}\left[\left(5-2\sqrt{6}\right)^n-\left(5+2\sqrt{6}\right)^n\right]}，$$

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{1}{2}\left[-\left(5-2\sqrt{6}\right)^n-\left(5+2\sqrt{6}\right)^n\right]，n\in\mathbb{Z}，n\geq 0}$$

計算10以內的n所得到的x、y、m、$u_4(=h)$的值，如表九：(*表六至表九中 m 值的遞迴關係式推導方式同*t_3)

表九：u_4為整數時的x、y、q、m、h值

n	x	y	q	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{u_4(=h)}$
0	0	1	0	***0***	***0***
1	12	5	12	***2***	***2***
2	120	49	120	***24***	***20***
3	1188	485	1188	***242***	***198***
4	11760	4801	11760	***2400***	***1960***
5	116412	47525	116412	***23762***	***19402***
6	1152360	470449	1152360	***235224***	***192060***
7	11407188	4656965	11407188	***2328482***	***1901198***
8	112919520	46099201	112919520	***23049600***	***18819920***
9	1117788012	456335045	1117788012	***228167522***	***186298002***
10	11064960600	4517251249	11064960600	***2258625624***	***1844160100***
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
遞迴關係	**由$\boldsymbol{m}$的解可得遞迴式$\boldsymbol{d_n=10d_{n-1}-d_{n-2}+4}$，$\boldsymbol{d_1=2}$，$\boldsymbol{d_2=24}$**				

由於必須要「以同一個m值，代入u_1、u_3後若其值皆為整數，則此 m 值可以用**方式一**完全均分所有金幣」、或「以同一個m值，代入u_1、u_4後若其值皆為整數，則此 m 值可以用**方式二**完全均分所有金幣」、「以同一個m值，代入u_2、u_3後若其值皆為整數，則此 m 值可以用**方式三**完全均分所有金幣」、及「以同一個m值，代入u_2、u_4後若其值皆為整數，則此 m 值可以用**方式四**完全均分所有金幣」。由表六至表九的結果，發現僅在$\boldsymbol{m=2}$**時，以「方式二」可以三人均分全部的金幣**。接下來證明不存在其他可三人完全均分的 m 值。

(五) 三人完全均分無解證明

三人完全均分的情形我們以上面方式分成四種狀況討論會不會有相同的 m 值，流程如下：

2個聯立的丟番圖方程式 $\xrightarrow{Step1}$ 1一組畢氏三元數 $\xrightarrow{Step2}$ 1個圖厄方程 $\xrightarrow{Step3}$ MAGMA / WolframAlpha / PARi/GP

$Step1$：將兩個聯立的丟番圖方程式寫成一組畢氏三元數的形式。

$Step2$：將一組畢氏三元數帶回原本的丟番圖方程式得到一個圖厄方程(Thue equation)。

$Step3$：圖厄方程必為有限多組解(在一定值以上必定不存在整數解)，用三套數學軟體算出所有的解，代回m，若$m \in \mathbb{N}$則此方式存在完全均分解；若$m \notin \mathbb{N}$，則代表不存在完全均分解。

1. 方式一：k不平分，h不平分(u_1、u_3)

$$\begin{cases} u_1(\text{其中}x = 2p_1 + 1\text{，}y = 2m + 1) \\ u_3(\text{其中}z = 2p_2 + 1\text{，}y = 2m + 1) \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 2 \cdots\cdots\cdots ① \\ 3z^2 - 2y^2 = 1 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

$Step1$：將常數項消掉，得到$x^2 + y^2 = 2z^2$，設$x = a + b$，$y = a - b$，則 $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2z^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = z^2$，轉換成畢氏三元數的形式：

$$\begin{cases} a = r^2 - s^2 \\ b = 2rs \\ z = r^2 + s^2 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x = r^2 + 2rs - s^2 \\ y = r^2 - 2rs - s^2 \\ z = r^2 + s^2 \end{cases}$$

$Step2$：將$x = r^2 + 2rs - s^2$、$y = r^2 - 2rs - s^2$代入①中可得一條圖厄方程——

$$r^4 + 8r^3 s + 2r^2 s^2 - 8rs^3 + s^4 = 1$$

$Step3$：將圖厄方程代入三個數學軟體後皆得到兩組(r, s)的解--$(\pm 1,0)$、$(0, \pm 1)$，$\Rightarrow$ $y = 1\ or - 1$，$\Rightarrow m = -1\ or\ 0$ (皆不合)，所以<u>方式一無三人完全均分解</u>。

方式二、方式三、方式四以同樣的步驟處理，結果整理如下表十：

表十

類別	聯立丟番圖方程式	畢氏三元數形式通解	圖厄方程式	是否有完全均分的 m
方式二	$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 2 \\ 6z^2 - y^2 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = r^2 - s^2 \\ y = r^2 + s^2 \\ z = rs \end{cases}$	$r^4 - 4r^2 s^2 + s^4 = 1$	是。$\boldsymbol{m=2}$
方式三	$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ 3z^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = r^2 - s^2 \\ y = r^2 + s^2 \\ z = 2rs \end{cases}$	$-2r^4 + 8r^2 s^2 - 2s^4 = 1$	否
方式四	$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ 6z^2 - y^2 = -1 \end{cases}$	僅$(x, y, z) = (0, \pm 1,0)$		否

因此，我們得到**<u>除了$\boldsymbol{m = 2}$(方式二)以外，沒有三人完全均分解</u>的結果。**

七、 三人分金幣的站位問題探討

(一) 環境設定

1. 已知m值求出k、h值，全部有四種類型：

(1) k平分h平分； (2) k不平分h不平分； (3) k平分h不平分；(4) k不平分h平分

2. 其中設$P = k - |h - k| = 2k - h$即P和h的中點為k；

設$Q = h + |h - k| = 2h - k$即Q和k的中點為h。

3. 其中A站位的區間為$(P - 1, Q + 2)$，若超出此區間將無法得到三人分最佳解站位法(其中我們定義：左界$= P - 1$、右界$= Q + 2$，其證明如下**【證一】**、**【證二】**)

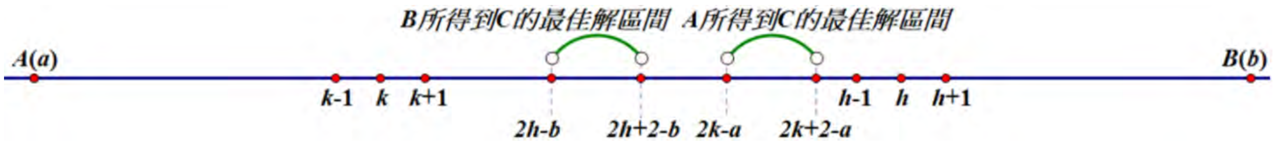
4. $A(a)$、$B(b)$、$C(c)$分別代表A、B、C三人站在數線上a、b、c的位子。

(二) 選位規則

2. A、B、C三人，由A先選位，再由B選位，最後C再選位。

(A選完後，B必須選擇站在最佳解區間，最後C亦是如此，完成最佳解站位)

3. 為避免選位時，C發生無位可選**(無解)**的情況，以致三人無法完成最佳解站位，故我們設定規則如下：**A先選定後，B要拿與A鄰近的一堆，C再拿最後剩下的一堆。**



圖十六：為無法達成最佳解時範例圖示(兩區間並無交集)。

4. 數線上由左至右會有以下4種站位排序法：

A-B-C、B-A-C、C-A-B、C-B-A。(以A-B-C為例：A拿到S_L，B拿到S_M，C拿到S_R)

(三) 四種類型之佔位討論：我們利用**B的站位區間**來討四種類型的站位：

【型 1】k不平分，h不平分

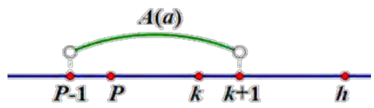


圖 2-1

(1)A-B-C：如圖 2-1，**$a \in (P-1, k+1)$時，A均可拿到S_L**。

【證一】$\because P = 2k - h$，且$b \in (2k-a, 2k+2-a)$，B才能拿到S_M。

但$\because b$的區間左界$2k-a$不可以超過(大於)$h+1$，否則會無解(C無法拿到S_R)

$\therefore 2k - a < h + 1$，$\Rightarrow 2k - h - 1 < a$，$\Rightarrow P - 1 < a$。(此即$A$站位區間的左界)

以下分4種情況討論：

①$\begin{cases} 2k - a + 2 < a, & \Rightarrow a < k + 1 \\ 2k - a < a, & \Rightarrow a > k \end{cases}$ $\Rightarrow \boldsymbol{a \in (k, k+1)}$，**$A$先拿$S_L$**，如圖 2-1-1。

$\Rightarrow \boldsymbol{b \in (a, 2k+2-a)}$，**$B$再拿$S_M$**。

$\Rightarrow \boldsymbol{c \in (2h-b, 2h+2-b)}$，**$C$最後拿$S_R$**。

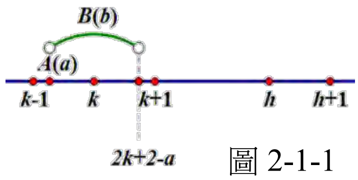


圖 2-1-1

②$\begin{cases} 2k - a < h, & \Rightarrow 2k - h < a \\ 2k + 2 - a \le h, & \Rightarrow 2k - h + 2 \le a \end{cases}$ $\Rightarrow \therefore a \ge 2k - h + 2$，$\Rightarrow a \ge P + 2$

$\Rightarrow \boldsymbol{a \in [P+2, k)}$，**$A$先拿$S_L$**，如圖 2-1-2。

$\Rightarrow \boldsymbol{b \in (2k-a, 2k+2-a)}$，**$B$再拿$S_M$**。

$\Rightarrow \boldsymbol{c \in (2h-b, 2h+2-b)}$，**$C$最後拿$S_R$**。

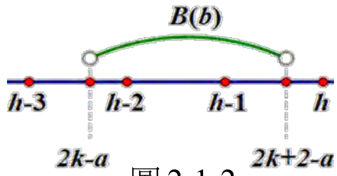


圖 2-1-2

②$\begin{cases} 2k - a < h, & \Rightarrow a > 2k - h \\ h < 2k + 2 - a \le h + 1, & \Rightarrow 2k - h + 1 \le a < 2k - h + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \therefore 2k - h + 1 \le a < 2k - h + 2$，$\Rightarrow P + 1 \le a < P + 2$

$\Rightarrow \boldsymbol{a \in [P+1, P+2)}$，**$A$先拿$S_L$**，如圖 2-1-3。

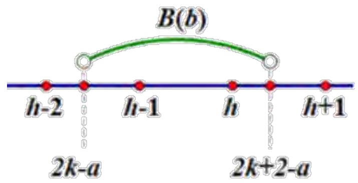


圖 2-1-3

$$\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{b\in(2k-a,h]}\text{ ，}\boldsymbol{B}\textbf{再拿}\boldsymbol{S_M}\text{，}\ \boldsymbol{\Rightarrow c\in(2h-b,2h+2-b)}\text{，}\boldsymbol{C}\textbf{最後拿}\boldsymbol{S_R}\text{。}\\ \boldsymbol{b\in(h,2k+2-a)}\text{，}\boldsymbol{B}\textbf{再拿}\boldsymbol{S_M}\text{，}\ \boldsymbol{\Rightarrow c\in(b,2h+2-b)}\text{，}\boldsymbol{C}\textbf{最後拿}\boldsymbol{S_R}\text{。}\end{cases}$$

③$\begin{cases}2k-a\le h & \text{，}\Rightarrow 2k-h\le a\\ h+1<2k+2-a & \text{，}\Rightarrow a<2k-h+1\end{cases}$

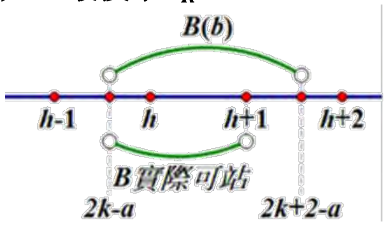


圖 2-1-4

$\Rightarrow\therefore k-h\le a<2k-h+1$，$\Rightarrow P\le a<P+1$

$\Rightarrow \boldsymbol{a}\in[\boldsymbol{P},\boldsymbol{P+1})$，**$A$先拿$S_L$**，如圖 2-1-4。

$$\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{b\in(2k-a,h]}\text{，}\boldsymbol{B}\textbf{再拿}\boldsymbol{S_M}\text{，}\ \boldsymbol{\Rightarrow c\in(2h-b,2h+2-b)}\text{，}\boldsymbol{C}\textbf{最後拿}\boldsymbol{S_R}\text{。}\\ \ \boldsymbol{b\in(h,h+1)}\ \text{，}\boldsymbol{B}\textbf{再拿}\boldsymbol{S_M}\text{，}\ \boldsymbol{\Rightarrow c\in(b,2h+2-b)}\text{，}\boldsymbol{C}\textbf{最後拿}\boldsymbol{S_R}\text{。}\end{cases}$$

④$\begin{cases}h<2k-a<h+1 & \text{，}\Rightarrow 2k-h-1<a<2k-h\\ h+2<2k+2-a<h+3 & \text{，}\Rightarrow 2k-h-1<a<2k-h\end{cases}$，

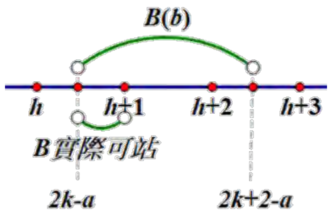


圖 2-1-5

$\Rightarrow\therefore 2k-h-1<a<2k-h$，$\Rightarrow P-1<a<P$

$\Rightarrow a\in(P-1,P)$，**A先拿S_L**，如圖 2-1-5。

$\Rightarrow b\in(2k-a,h+1)$，**$B$再拿$S_M$**。$\Rightarrow c\in(b,2h+2-b)$，**$C$最後拿$S_R$**。

(2) **<u>B-A-C</u>**：如圖 2-2。**<u>$a\in(k,h+1)$時，A均可拿到S_M</u>**。

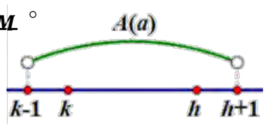


圖 2-2

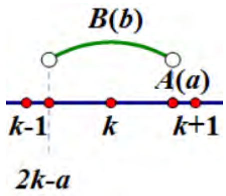


圖 2-2-1

以下分3種情況討論：

①$a\in(k,k+1)$，**A先拿S_M**，如圖 2-2-1。

$\Rightarrow b\in(2k-a,a)$，**B再拿S_L**。$\Rightarrow c\in(2h-a,2h+2-a)$，**$C$最後拿$S_R$**。

②$a\in[k+1,h]$，**A先拿S_M**，如圖 2-2-2。

$\Rightarrow b\in(2k-a,2k+2-a)$，**$B$再拿$S_L$**。

$\Rightarrow c\in(2h-a,2h+2-a)$，**$C$最後拿$S_R$**。

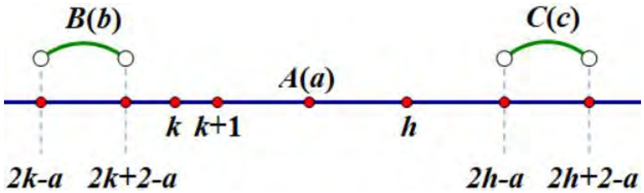


圖 2-2-2

③$a\in(h,h+1)$，**A先拿S_M**，如圖 2-2-3。

$\Rightarrow b\in(2k-a,2k+2-a)$，**$B$再拿**。

$\Rightarrow c\in(a,2h+2-a)$，**$C$最後拿$S_R$**。

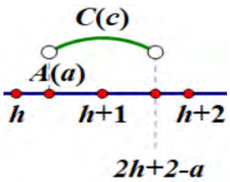


圖 2-2-3

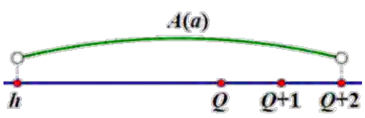


圖 2-4

(3) **<u>C-A-B</u>**：**<u>$a\in(k,h+1)$時，A均可拿到S_M</u>**

同(2)之討論，C與B互換。

(4) **<u>C-B-A</u>**：如圖 2-4。**<u>$a\in(h,Q+2)$時，A均可拿到S_R</u>**

【證二】$\because Q=2h-k$，且$b\in(2k-a,2k+2-a)$，B才能拿到S_M。

但$\because b$的區間右界$2k+2-a$不可以小於k，否則會無解(C無法拿到S_L)，

$\therefore 2h+2-a>k$，$\Rightarrow 2h-k+2>a$，$\Rightarrow Q+2>a$。(此即A站位區間的右界)

以下分5種情況討論：

① $\begin{cases} k-2 \le 2h-a < k-1, & \Rightarrow 2h-k+1 \le a < 2h-k+2 \\ k \le 2h+2-a < k+1, & \Rightarrow 2h-k+1 \le a < 2h-k+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \therefore 2h-k+1 \le a < 2h-k+2 \Rightarrow Q+1 \le a < Q+2$，

$\Rightarrow a \in [Q+1, Q+2)$，$\boldsymbol{A}$**先拿**$\boldsymbol{S_R}$，如圖 2-4-1。

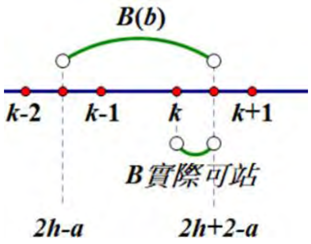


圖 2-4-1

$\Rightarrow b \in (k, 2h+2-a)$，$\boldsymbol{B}$**再拿**$\boldsymbol{S_M}$。$\Rightarrow c \in (2k-b, b)$，$\boldsymbol{C}$**最後拿**$\boldsymbol{S_L}$。

② $\begin{cases} k-1 < 2h-a \le k & , \Rightarrow 2h-k \le a < 2h-k+1 \\ k+1 < 2h+2-a \le k+2, & \Rightarrow 2h-k \le a < 2h-k+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \therefore 2h-k \le a < 2h-k+1$，$\Rightarrow Q \le a < Q+1$

$\Rightarrow a \in [Q, Q+1)$，$\boldsymbol{A}$**先拿**$\boldsymbol{S_R}$，如圖 2-4-2。

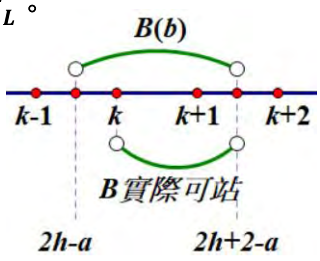


圖 2-4-2

$\Rightarrow \begin{cases} b \in (k, k+1) & ，\boldsymbol{B}\text{再拿}\boldsymbol{S_M}。\Rightarrow c \in (2k-b, b)，\boldsymbol{C}\text{最後拿}\boldsymbol{S_L}。 \\ b \in [k+1, 2h+2-a)，& \boldsymbol{B}\text{再拿}\boldsymbol{S_M}。\Rightarrow c \in (2k-b, 2k+2-b)，\boldsymbol{C}\text{最後拿}\boldsymbol{S_L}。 \end{cases}$

③ $\begin{cases} k < 2h-a \le k+1 \\ k+2 < 2h+2-a \le k+3 \end{cases}$

$\Rightarrow \therefore 2h-k-1 \le a < 2h-k$，$\Rightarrow Q-1 \le a < Q$

$\Rightarrow a \in [Q-1, Q)$，$\boldsymbol{A}$**先拿**$\boldsymbol{S_R}$，如圖 2-4-3。

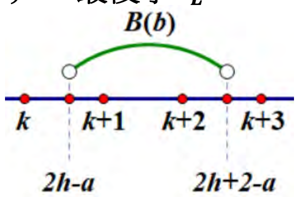


圖 2-4-3

$\begin{cases} \Rightarrow b \in (2h-a, k+1) & ，\boldsymbol{B}\text{再拿}\boldsymbol{S_M}。\Rightarrow c \in (2k-b, b)，\boldsymbol{C}\text{最後拿}\boldsymbol{S_L}。 \\ \Rightarrow b \in [k+1, 2h+2-a)，& \boldsymbol{B}\text{再拿}\boldsymbol{S_M}。\Rightarrow c \in (2k-b, 2k+2-b)，\boldsymbol{C}\text{最後拿}\boldsymbol{S_L}。 \end{cases}$

④ $\begin{cases} k+1 < 2h-a, & \Rightarrow 2h-k-1 > a \\ 2h+2-a \le a, & \Rightarrow a \ge h+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \therefore 2h-k-1 > a$，$\Rightarrow Q-1 > a$

$\Rightarrow a \in (h+1, Q-1)$，$\boldsymbol{A}$**先拿**$\boldsymbol{S_R}$，如圖 2-4-4。

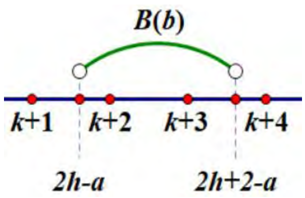


圖 2-4-4

$\Rightarrow b \in (2h-a, 2h+2-a)$，$\boldsymbol{B}$**再拿**$\boldsymbol{S_M}$。$\Rightarrow c \in (2k-b, 2k+2-b)$，$\boldsymbol{C}$**最後拿**$\boldsymbol{S_L}$。

⑤ $\begin{cases} 2h+2-a > a, & \Rightarrow a < h+1 \\ 2h-a < a & , \Rightarrow a > h \end{cases}$

$\Rightarrow a \in (h, h+1)$，$\boldsymbol{A}$**先拿**$\boldsymbol{S_R}$，如圖 2-4-5。

$\Rightarrow b \in (2h-a, a)$，$\boldsymbol{B}$**再拿**$\boldsymbol{S_M}$。

$\Rightarrow c \in (2k-b, 2k+2-b)$，$\boldsymbol{C}$**最後拿**$\boldsymbol{S_L}$。

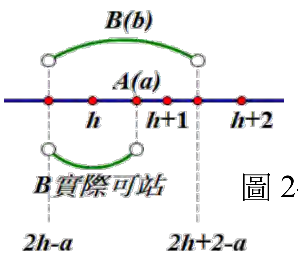


圖 2-4-5

【型 2】 $\boldsymbol{k}$不平分，$\boldsymbol{h}$平分

(1)*<u>A-B-C</u>*：如圖 3-1，<u>$\boldsymbol{a \in (P, k+1)}$**時，**$\boldsymbol{A}$**均可拿到**$\boldsymbol{S_L}$</u>

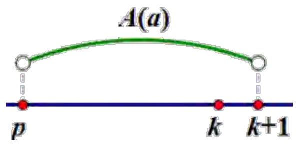


圖 3-1

【證三】$\boldsymbol{\because b \in (2k-a, 2k+2-a)}$。為了使$\boldsymbol{h}$可以順利平分，$\boldsymbol{b}$區間左界不可大於$\boldsymbol{h}$，否則會無解($\boldsymbol{C}$ 無法拿到$\boldsymbol{S_R}$)，。此即$\boldsymbol{2k-a < h}$，$\boldsymbol{\Rightarrow 2k-h < a}$，$\boldsymbol{\Rightarrow P < a}$。

以下分4種情況討論：

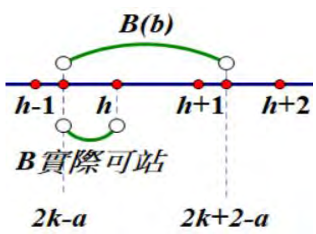


圖 3-1-1

①$\begin{cases} h-1 \le 2k-a < h & \Rightarrow 2k-h < a \le 2k-h+1 \\ h+1 \le 2k+2-a < h+2, & \Rightarrow 2k-h < a \le 2k-h+1 \end{cases}$

$\Rightarrow 2k-h < a \le 2k-h+1$，$\Rightarrow P < a \le P+1$

$\Rightarrow a \in (P, P+1]$，**$A$先拿$S_L$**，如圖 3-1-1。

$\Rightarrow b \in (2k-a, h)$，**$B$再拿$S_M$**。$\Rightarrow c = 2h-b$，**$C$最後拿$S_R$**。

②$\begin{cases} h-2 \le 2k-a < h-1, & \Rightarrow 2k-h+1 < a \le 2k-h+2 \\ h \le 2k+2-a < h+1, & \Rightarrow 2k-h+1 < a \le 2k-h+2 \end{cases}$

$\Rightarrow 2k-h+1 < a \le 2k-h+2$，$\Rightarrow P+1 < a \le P+2$

$\Rightarrow a \in (P+1, P+2]$，**$A$先拿$S_L$**，如圖 3-1-2。

$\Rightarrow b \in (2k-a, h)$，**$B$再拿$S_M$**。$\Rightarrow c = 2h-b$，**$C$最後拿$S_R$**。

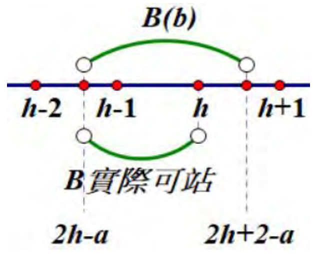


圖 3-1-2

③$2k-a < 2k+2-a < h \Rightarrow a > 2k-h+2$，$\Rightarrow a > P+2$

$\Rightarrow a \in (P+2, k]$，**$A$先拿$S_L$**，如圖 3-1-3。

$\Rightarrow b \in (2k-a, 2k+2-a)$，**$B$再拿$S_M$**。$\Rightarrow c = 2h-b$，**$C$最後拿$S_R$**。

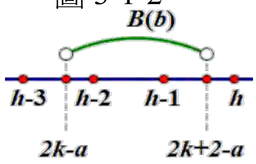


圖 3-1-3

④$a \in (k, k+1)$，**A先拿S_L**，如圖 3-1-4。

$\Rightarrow b \in (a, 2k+2-a)$，**$B$再拿$S_M$**。 $\Rightarrow c = 2h-b$，**C最後拿S_R**。

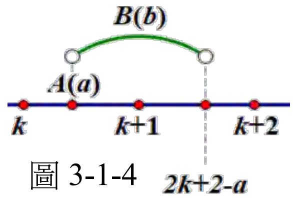


圖 3-1-4

(2)**<u>B-A-C</u>**：如圖 3-2。<u>$a \in (k, h)$時，均可拿到S_2</u>

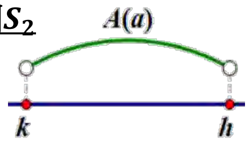


圖 3-2

以下分2種情況討論：

①$a \in (k, k+1)$，**A先拿S_M**，如圖 3-2-1

$\Rightarrow b \in (2k-a, a)$，**$B$再拿$S_L$**。$\Rightarrow c = 2h-a$，**$C$最後拿$S_R$**。

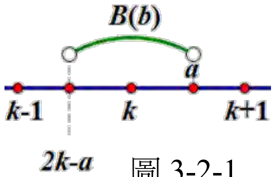


圖 3-2-1

②$a \in [k+1, h)$，**A先拿S_M**，如圖 3-2-2

$\Rightarrow b \in (2k-a, 2k+2-a)$，**$B$再拿$S_L$**。 $\Rightarrow c = 2h-a$，**C最後拿S_R**。

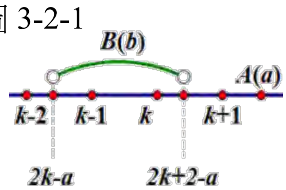


圖 3-2-2

(3)**<u>C-A-B</u>**：**<u>$a \in (k, h)$時，均可拿到S_M</u>**

同(2)之討論C、B互換

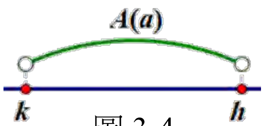


圖 3-4

(4)**<u>C-B-A</u>**：如圖 3-4。**<u>$a \in (h, Q)$時，均可拿到S_R</u>**

以下分兩種情況討論：

①$a \in (Q-1, Q)$，**A先拿S_R**，如圖 3-4-1

$\Rightarrow b = 2h-a$，**B再拿S_M**。$\Rightarrow c \in (2k-b, b)$，**$C$最後拿$S_L$**。

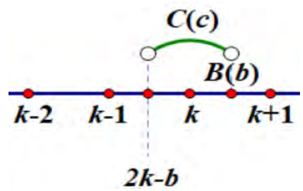


圖 3-4-1

②$a \in (h, Q-1]$，**A先拿S_R**，如圖 3-4-2

$\Rightarrow b = 2h-a$，**B再拿S_M**。

$\Rightarrow c \in (2k-b, 2k+2-b)$，**$C$最後拿$S_L$**。

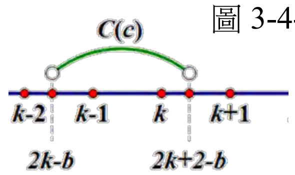


圖 3-4-2

【型 3】 **k平分h不平分**

(1)<u>A-B-C</u>：如圖 4-1。**<u>$a \in (P-1, k)$時，A均可拿到S_L</u>**

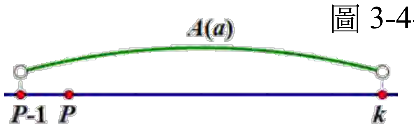


圖 4-1

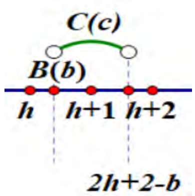


圖 4-1-1

以下分 2 種狀況討論：

①$a \in (P-1, P)$，$\boldsymbol{A}$先拿$\boldsymbol{S_L}$，如圖 4-1-1。

$\Rightarrow b = 2k - a$，$\boldsymbol{B}$再拿$\boldsymbol{S_2}$，$\Rightarrow c \in (b, 2h+2-b)$，**C** 最後拿$\boldsymbol{S_R}$。

②$a \in [P, k)$，$\boldsymbol{A}$先拿$\boldsymbol{S_L}$，如圖 4-1-2。

$\Rightarrow b = 2k - a$，$\boldsymbol{B}$再拿$\boldsymbol{S_2}$，$\Rightarrow c \in (2h-b, 2h+2-b)$，**C** 最後拿$\boldsymbol{S_R}$。

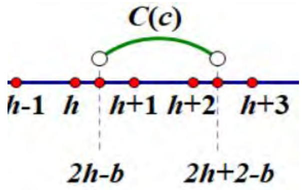


圖 4-1-2

(2)<u>B-A-C</u>：如圖 4-2。<u>$\boldsymbol{a \in (k, h+1)}$**時，**$\boldsymbol{A}$**均可拿到**$\boldsymbol{S_M}$</u>

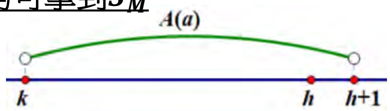


圖 4-2

以下分 2 種狀況討論：

①$a \in (k, h]$，$\boldsymbol{A}$先拿$\boldsymbol{S_M}$，如圖 4-2-1。

$\Rightarrow b = 2k - a$，$\boldsymbol{B}$再拿$\boldsymbol{S_L}$，$\Rightarrow c \in (2h-a, 2h+2-a)$，$\boldsymbol{C}$最後拿$\boldsymbol{S_R}$。

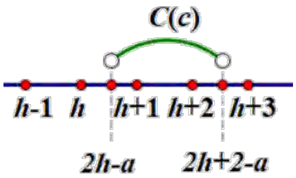


圖 4-2-1

②$a \in (h, h+1)$，$\boldsymbol{A}$先拿$\boldsymbol{S_M}$，如圖 4-2-2。

$\Rightarrow b = 2k - a$，$\boldsymbol{B}$再拿$\boldsymbol{S_L}$，$\Rightarrow c \in (a, 2h+2-a)$，$\boldsymbol{C}$最後拿$\boldsymbol{S_R}$。

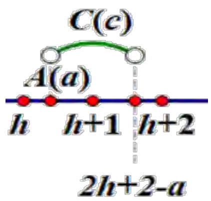


圖 4-2-2

(3)<u>C-A-B</u>：<u>$\boldsymbol{a \in (k, h+1)}$**時，**$\boldsymbol{A}$**均可拿到**$\boldsymbol{S_M}$</u>

同(2)之討論，c與b互換。

(4)<u>C-B-A</u>：圖 4-3，<u>$\boldsymbol{a \in (h, Q+2)}$**時，**$\boldsymbol{A}$**均可拿到**$\boldsymbol{S_R}$</u>

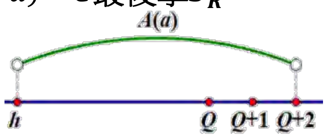


圖 4-3

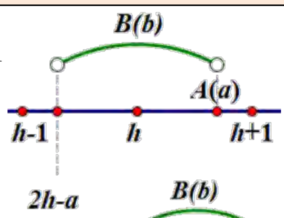
【證四】∵$b \in (2h-a, 2h+2-a)$，但b的區間必須包含到到$(k, h+1)$之一部份，否則會無解($\boldsymbol{C}$**無法拿到**$\boldsymbol{S_L}$)，此即$2h+2-a > k$，$\Rightarrow a < 2h-k+2$，$\Rightarrow a < Q+2$

以下分4種情況討論：

①$a \in (h, h+1)$，$\boldsymbol{A}$先拿$\boldsymbol{S_R}$，如圖 4-3-1。

$\Rightarrow b \in (2h-a, h)$，$\boldsymbol{B}$再拿$\boldsymbol{S_M}$，$\Rightarrow c = 2k - b$，$\boldsymbol{C}$最後拿$\boldsymbol{S_L}$。

圖 4-3-1



②$\begin{cases} k-2 < 2h-a \le k-1, & \Rightarrow 2h-k+1 \le a < 2h-k+2 \\ k < 2h+2-a \le k+1, & \Rightarrow 2h-k+1 \le a < 2h-k+2 \end{cases}$

$\Rightarrow 2h-k+1 \le a < 2h-k+2$，$\Rightarrow Q+1 \le a < Q+2$

$\Rightarrow a \in [Q+1, Q+2)$，$\boldsymbol{A}$先拿$\boldsymbol{S_R}$，如圖 4-3-2。

$\Rightarrow b \in (k, 2h+2-a)$，$\boldsymbol{B}$再拿$\boldsymbol{S_M}$，$\Rightarrow c = 2k - b$，$\boldsymbol{C}$最後拿$\boldsymbol{S_L}$。

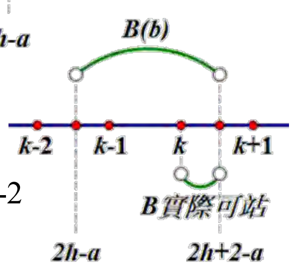


圖 4-3-2

③$\begin{cases} k-1 < 2h-a \le k, & \Rightarrow 2h-k \le a < 2h-k+1 \\ k+1 < 2h+2-a \le k+2, & \Rightarrow 2h-k \le a < 2h-k+1 \end{cases}$

$\Rightarrow 2h-k \le a < 2h-k+1$，$\Rightarrow Q \le a < Q+1$

$a \in [Q, Q+1)$，$\boldsymbol{A}$先拿$\boldsymbol{S_R}$，如圖 4-3-3。

$\Rightarrow b \in (k, 2h+2-a)$，$\boldsymbol{B}$再拿$\boldsymbol{S_M}$，$\Rightarrow c = 2k - b$，$\boldsymbol{C}$最後拿$\boldsymbol{S_L}$。

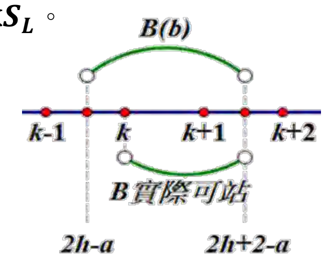


圖 4-3-3

④$k < k+2 < 2h-a$，$\Rightarrow a < 2h-k$，$\Rightarrow a < Q$

$\Rightarrow a \in [h+1, Q)$，$\boldsymbol{A}$先拿$\boldsymbol{S_R}$，如圖 4-3-4。

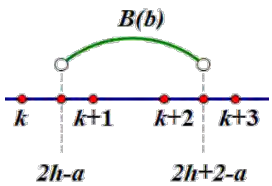


圖 4-3-4

$\Rightarrow b \in (2h-a, 2h+2-a)$，**$B$再拿$S_M$**，$\Rightarrow c = 2k - b$，**$C$最後拿$S_L$**。

【型 4】 **k平分h平分**

(1)<u>A-B-C</u>：**<u>$a \in (P, k)$時，A均可拿到S_L</u>**，如圖 5-1。

$a \in (P, k) \in (2k-h, k)$，$\Rightarrow \begin{cases} b = 2k - a \\ c = 2h - b \end{cases}$。

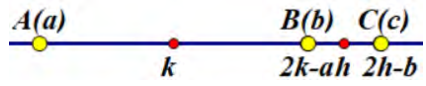


圖 5-1

(2)<u>B-A-C</u>：**<u>$a \in (k, h)$時，A均可拿到S_M</u>**，如圖 5-2。

$a \in (k, h)$，$\Rightarrow \begin{cases} b = 2k - a \\ c = 2h - a \end{cases}$。

圖 5-2

(3)<u>C-A-B</u>：**<u>$a \in (k, h)$時，A均可拿到S_M</u>**，如圖 5-3。

$a \in (k, h)$，$\Rightarrow \begin{cases} b = 2h - a \\ c = 2k - a \end{cases}$。

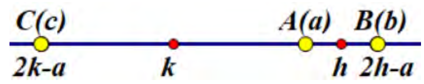


圖 5-3

(4)<u>C-B-A</u>：**<u>$a \in (h, Q)$時，A均可拿到S_R</u>**，如圖 5-4。

$a \in (h, Q) \in (h, 2h-k)$，$\Rightarrow \begin{cases} b = 2h - a \\ c = 2k - b \end{cases}$。

圖 5-4

我們將三人站位分析整理於以下研究結果中。

伍、研究結果

一、完成兩人分金幣最佳解判別法

A、B兩人分金幣時，設$t_3 = \frac{-1+\sqrt{1+8m(m+1)}}{4}$，計算$t_3$得值$p + \alpha$，$p \in \mathbb{N}$，$\alpha$為$t_3$的小數部分。若$\alpha < 0.5$，則取第$p$袋金幣不平分；若$\alpha > 0.5$，則取$p+1$袋金幣要平分，可使兩人分得金幣的差最小；當$\alpha = 0$時，則第$p$袋金幣不平分或被平分皆為最佳解；當$\alpha = 0.5$時，則第$p$袋金幣不平分或第$p+1$袋金幣被平分皆為最佳解。以下為兩人分最佳解判別表：

α值	k值(最佳解)	S_L與S_R的大小關係	最佳解個數
$0 < \alpha < 0.5$	$k = p$(不平分)	不一定	1 個
$0.5 < \alpha < 1$	$k = p + 1$(平分)	不一定	1 個
$\alpha = 0$	$k = p$(不平分)或	$S_L > S_R$	2 個
	$k = p$(平分)	$S_L < S_R$	$\lvert S_L - S_R \rvert$皆相同
$\alpha = 0.5$	$k = p$(不平分)或	$S_L < S_R$	2 個
	$p + 1$(平分)	$S_L > S_R$	$\lvert S_L - S_R \rvert$皆相同

二、兩人分金幣中同時存在兩種k值最佳解的m值之遞迴式

$m_n = 6m_{n-1} - m_{n-2} + 2$ (初始值$m_1 = 2$，$m_2 = 14$，$n \in \mathbb{N}, n \geq 3$)。前五個$m$分別為 2、14、84、492、2870。

三、兩人完全均分之所有m值遞迴式：

$\boldsymbol{m_n = 2m_{n-1} + m_{n-2} + 1}$ **(初始值$\boldsymbol{m_1 = 1, m_2 = 3}$，$\boldsymbol{n \in \mathbb{N}, n \geq 3}$)**。第$k$袋金幣不平分的前五個$m$值為3、20、119、696、4059；第$k$袋金幣被平分的前五個$m$值為1、8、49、288、1681。

四、完成三人分金幣最佳解判別法：

A、B、C三人分金幣時，計算標準差$\sigma = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(S(A) - \frac{1}{3}S\right)^2 + \left(S(B) - \frac{1}{3}S\right)^2 + \left(S(C) - \frac{1}{3}S\right)^2\right]}$，每個$m$值對應到16個標準差。標準差值愈小，表示三人分得的金幣數和平均值$\frac{1}{3}S$的差異愈小，最小的標準差值即為最佳解。

五、三人完全均分無解之證明：

我們將四種方式以聯立丟番圖方程式轉換為圖厄方程，並透過三套軟體的分析後，發現除了$m = 2$(方式二)以外，沒有其他三人完全均分解。

六、兩人、三人分金幣的站位方式判別表：

(一) 兩人站位：在k值已知的情況下，$b \in (a, 2k + 2 - a)$或$(2k - a, a)$。

站位	$A(a)$	$B(b)$
k平分	$a \in \mathbb{R}$且$a \neq k$	$b = 2k - a$
k不平分	$a \in (-\infty, k)$	$b \in (2k - a, 2k + 2 - a)$
	$a \in (k, k + 1)$	$b \in (2k - a, 2k + 2 - a)$且$b \neq k$
	$a \in (k + 1, \infty)$	$b \in (2k - a, 2k + 2 - a)$

(二) 三人站位，已知m袋金幣的最佳解為k、h：

1. k不平分，h不平分：

站位類型	$A(a)$	$B(b)$	$C(c)$
A-B-C	$(k, k + 1)$	$(a, 2k + 2 - a)$	$(2h - b, 2h + 2 - b)$
	$(P + 2, k]$	$(2k - a, 2k + 2 - a)$	$(2h - b, 2h + 2 - b)$
	$[P + 1, P + 2)$	$(2k - a, h]$	$(2h - b, 2h + 2 - b)$
		$(h, 2k + 2 - a)$	$(b, 2h + 2 - b)$
	$[P, P + 1)$	$(2k - a, h]$	$(2h - b, 2h + 2 - b)$
		$(h, h + 1)$	$(b, 2h + 2 - b)$
	$(P - 1, P]$	$(2k - a, h + 1)$	$(b, 2h + 2 - b)$
B-A-C	$(k, k + 1)$	$(2k - a, a)$	$(2h - a, 2h + 2 - a)$
	$[k + 1, h]$	$(2k - a, 2k + 2 - a)$	$(2h - a, 2h + 2 - a)$
	$(h, h + 1)$	$(2k - a, 2k + 2 - a)$	$(a, 2h + 2 - a)$
C-A-B	$(k, k + 1)$	$(2h - a, 2h + 2 - a)$	$(2k - a, a)$
	$[k + 1, h]$	$(2h - a, 2h + 2 - a)$	$(2k - a, 2k + 2 - a)$
	$(h, h + 1)$	$(a, 2h + 2 - a)$	$(2k - a, 2k + 2 - a)$
C-B-A	$[Q + 1, Q + 2)$	$(k, 2h + 2 - a)$	$(2k - b, b)$
	$[Q, Q + 1)$	$(k, k + 1)$	$(2k - b, b)$
		$[k + 1, 2h + 2 - a)$	$(2k - b, 2k + 2 - b)$

	$[Q-1,Q)$	$(2h-a,k+1)$	$(2k-b,b)$
		$[k+1,2h+2-a)$	$(2k-b,2k+2-b)$
	$(h+1,Q-1)$	$(2h-a,2h+2-a)$	$(2k-b,2k+2-b)$
	$(h,h+1)$	$(2h-a,a)$	$(2k-b,2k+2-b)$

2. k不平分，h平分：

站位類型	$A(a)$	$B(b)$	$C(c)$
A-B-C	$(P,P+2]$	$(2k-a,h)$	$2h-b$
	$(P+2,k]$	$(2k-a,2k+2-a)$	$2h-b$
	$(k,k+1)$	$(a,2k+2-a)$	$2h-b$
B-A-C	$(k,k+1)$	$(2k-a,a)$	$2h-a$
	$[k+1,h)$	$(2k-a,2k+2-a)$	$2h-a$
C-A-B	$(k,k+1)$	$2h-a$	$(2k-a,a)$
	$[k+1,h)$	$2h-a$	$(2k-a,2k+2-a)$
C-B-A	$(Q-1,Q)$	$2h-a$	$(2k-b,b)$
	$(h,Q-1]$	$2h-a$	$(2k-b,2k+2-b)$

3. k平分，h不平分：

站位類型	$A(a)$	$B(b)$	$C(c)$
A-B-C	$(P-1,P)$	$2k-a$	$(b,2h+2-b)$
	$[P,k)$	$2k-a$	$(2h-b,2h+2-b)$
B-A-C	$(k,h]$	$2k-a$	$(2h-a,2h+2-a)$
	$(h,h+1)$	$2k-a$	$(a,2h+2-a)$
C-A-B	$(k,h]$	$(2h-a,2h+2-a)$	$2k-a$
	$(h,h+1)$	$(a,2h+2-a)$	$2k-a$
C-B-A	$(h,h+1)$	$(2h-a,h)$	$2k-b$
	$[Q,Q+2)$	$(k,2h+2-a)$	$2k-b$
	$[h+1,Q)$	$(2h-a,2h+2-a)$	$2k-b$

4. k平分，h平分：

站位類型	$A(a)$	$B(b)$	$C(c)$
A-B-C	(P,k)	$2k-a$	$2h-b$
B-A-C	(k,h)	$2k-a$	$2h-a$
C-A-B	(k,h)	$2h-a$	$2k-a$
C-B-A	(h,Q)	$2h-a$	$2k-b$

陸、討論與未來展望

一、 求最佳解的方法中，兩人分要算出t_3，三人分要先算u_1、u_2、u_3、u_4，以及對應的 16 個標準差的值，這些計算較為繁複，希望可以繼續研究，找到一種較簡便的最佳解求法。

二、 在探討三人「第k、h袋平分或不平分所得結果相同且為最佳解」的情形中，要先個別找出符合t_4或t_5值同時為「整數」或「整數+0.5」形式的m，再以標準差找出符合最佳解的情形與進一步驗證，這是我們後續研究的方向。

三、 將站位問題延伸為搶位問題，討論海盜經搶位後分得最多金幣的策略。

四、 將2人分金幣、3人分金幣、⋯，延伸至n人分金幣。

五、 本研究之金幣排列僅為首項$= 1$，公差$= 1$之直線排列的等差數列，所以未來可發展如下：

(一) 將所有金幣成等差數列直線排列時，做一般化之研究。

(二) 將所有金幣成等特殊數列直線排列時，做一般化之研究。

(三) 將所有金幣在平面上作環狀或特殊的排列方式，做一般化之研究。

柒、參考資料

一、 游森棚(2017)。森棚教官的數學題。**科學研習月刊，56-9**，66。

二、 國中數學課本第四冊第一章：等差數列與等差級數。南一書局。

三、 國中數學課本第六冊第一章：二次函數。南一書局。

四、 László Szalay,(Ed.s). (2007). *On the resolution of simultaneous Pell equations*.Annales Mathematicae et Informaticae,34,/ 77-87,from http://www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami

【評語】030417

本作品主要探討如何將兩個海盜分四袋金幣的遊戲，推廣到兩人或三人分 m 袋金幣的情況並詳細討論一般化的結果。作者展現了優異的研究能力，得到不錯的結論。本文原創性佳且有發展下去的潛力，在國中階段是很好的作品。問題與定理敘述的呈現都略微凌亂，有改進的空間。往後若要繼續發展，數學表達的能力可以加強。

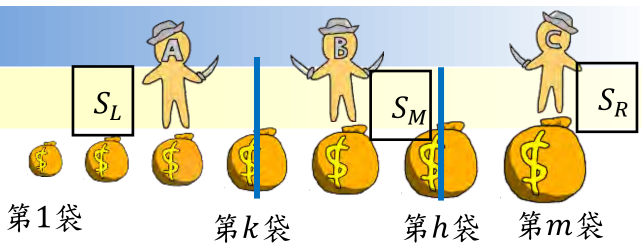
作品海報

壹、 研究動機

本研究源自於科學研習月刊56-9期中「海盜分金幣」的問題。海盜頭目在某次的航海中大豐收，決定用以下方法犒賞他的兩位得力手下。頭目把總數量分別是1、2、3、4單位的四袋金幣(每一單位的金幣皆等值等重)，分別放在同一條直線的四個位置上，且相鄰的位置等距。他跟兩位手下說：「你們兩個可以事先商量，選兩個位置。選好之後，每個位置得到離它比較近的所有金幣；離兩個位置一樣近的金幣就平分。」**兩位手下分得金幣的數量最接近(即兩人的差最小)時即為最佳解**。在研究這個問題的過程中，我們發現一元二次方程式、二次函數、不等式的運算、配方法…這些數學概念都可以運用到。所以我們想要研究這個問題，找到**當金幣袋數為已知時，兩人或三人分時最佳解的一般性規則**。

貳、 研究目的

一、名詞解釋及定義



m：金幣的總袋數，也是最後一袋金幣的金幣數量。

S：所有金幣的總數，即$S = 1+2+3+\cdots+m = \frac{m(m+1)}{2}$。$m \in \mathbb{N}$。

S_L、S_M、S_R：分別表示左邊那堆、中間那堆、右邊那堆的金幣總數。

k：1~m袋金幣依序排在數線上1、2、…、m的位置後，第k袋要「被平分」或「不被平分」的金幣($k \in \mathbb{N}$，$k \le m$)。A、B二人分金幣時，若第k袋不平分，則所有金幣被分成「$\boldsymbol{S_L} = 1+2+3+\cdots+k$」和「$\boldsymbol{S_R} = (k+1)+(k+2)+\cdots+m$」兩堆；若第$k$袋被平分，則所有金幣被分成「$\boldsymbol{S_L} = 1+2+3+\cdots+(k-1)+\frac{k}{2}$」和「$\boldsymbol{S_R} = \frac{k}{2}+(k+1)+(k+2)+\cdots+m$」兩堆，設這兩堆依序由$A$、$B$兩人取得。

h：意義同k，$1<k<h\le m$，$h \in \mathbb{N}$。A、B、C三人分金幣時，依k和h(平分或不平分)的情形，需分為四種情況討論，以「第k袋不平分且第h袋平分」為例，則所有金幣被分成如下三堆：

「$\boldsymbol{S_L} = 1+2+\cdots+k$」、「$\boldsymbol{S_M} = (k+1)+(k+2)+\cdots+(h-1)+\frac{h}{2}$」和「$\boldsymbol{S_R} = \frac{h}{2}+(h+1)+(h+2)+\cdots+m$」，設這三堆依序由$A$、$B$、$C$兩人取得。

最佳解：每個人分到的金幣數量最接近。

二、 研究問題

(一)兩位手下要如何站位才能使兩人分得金幣的數量最接近？

(二)三位手下要如何站位才能使三人分得金幣的數量最接近？

(三)兩位手下是否存在某第k袋金幣($k<m$)**不平分**或**被平分**均為**最佳解**的狀態？

(四)是否存在兩位手下之**完全均分解**(兩人分得金幣的數量均相等)？

(五)是否存在三位手下之**完全均分解**(三人分得金幣的數量均相等)？

(六)解決最佳解之公平站位的方式為何？

參、 研究結果

一、 兩人分金幣的情形

（一） **一般化：將S_L與$\frac{1}{2}S$的差以函數表示**

1. **k不平分時**

$S_L = \frac{1}{2}k(k+1)$，設$f_1(x) = \left|S_L - \frac{1}{2}S\right| = \frac{1}{2}\left|x(x+1) - \frac{1}{2}m(m+1)\right|$。其正根$\boxed{\boldsymbol{t_1} = \frac{-1+\sqrt{1+2m(m+1)}}{2}}$。

2. **k被平分時**

$S_L = \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{k}{2} = \frac{k^2}{2}$，設$f_2(x) = \left|S_L - \frac{1}{2}S\right| = \frac{1}{2}\left|x^2 - \frac{1}{2}m(m+1)\right|$。其正根$\boxed{\boldsymbol{t_2} = \frac{\sqrt{2m(m+1)}}{2}}$。

3. **當$\left|S_L - \frac{1}{2}S\right|$的值愈小時，表示$S_L$、$S_R$愈接近$\frac{1}{2}S$，即兩人所得的金幣越接近均分。**

4. **設f_1、f_2在第一象限交點的 x 值為$t_3 = \frac{-1+\sqrt{1+8m(m+1)}}{4}$。**

（二） **$f_1(x)$、$f_2(x)$與t_1、t_2的討論，如圖一**

$\boxed{性質1}$：**t_1和t_2的距離小於(但接近)$\frac{1}{2}$。**

$\boxed{性質2}$：**t_3小於(但接近)t_1和t_2的中點。**

$\boxed{性質3}$：**$f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right) > f_2(t_3)$，且$f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right) - f_2(t_3) = \frac{1}{8}$。**

$\boxed{性質4}$：**$f_1\left(t_3-\frac{1}{2}\right) > f_1(t_3)$，且$f_1\left(t_3-\frac{1}{2}\right) - f_1(t_3) = \frac{1}{8}$。**

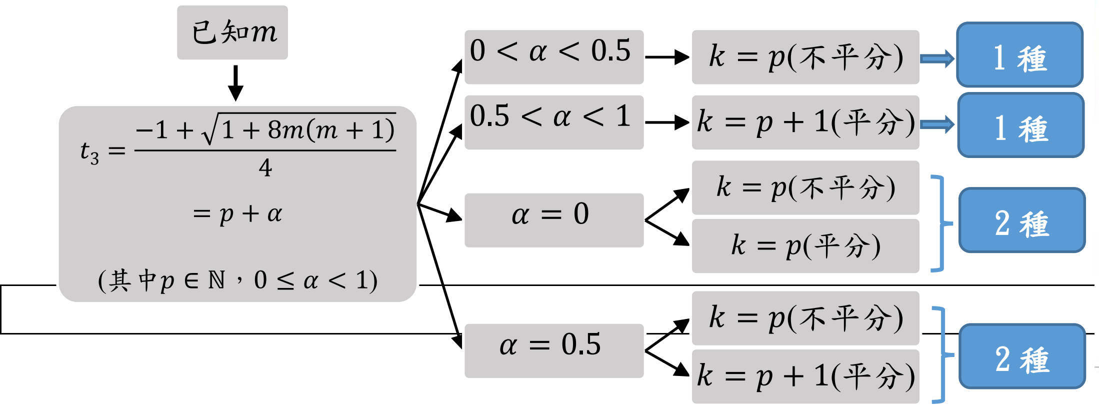
$\boxed{性質5}$：**$f_1\left(t_3-\frac{1}{2}\right) = f_2\left(t_3+\frac{1}{2}\right)$。**

（三） **由t_3的值判別最佳解與平分情形**

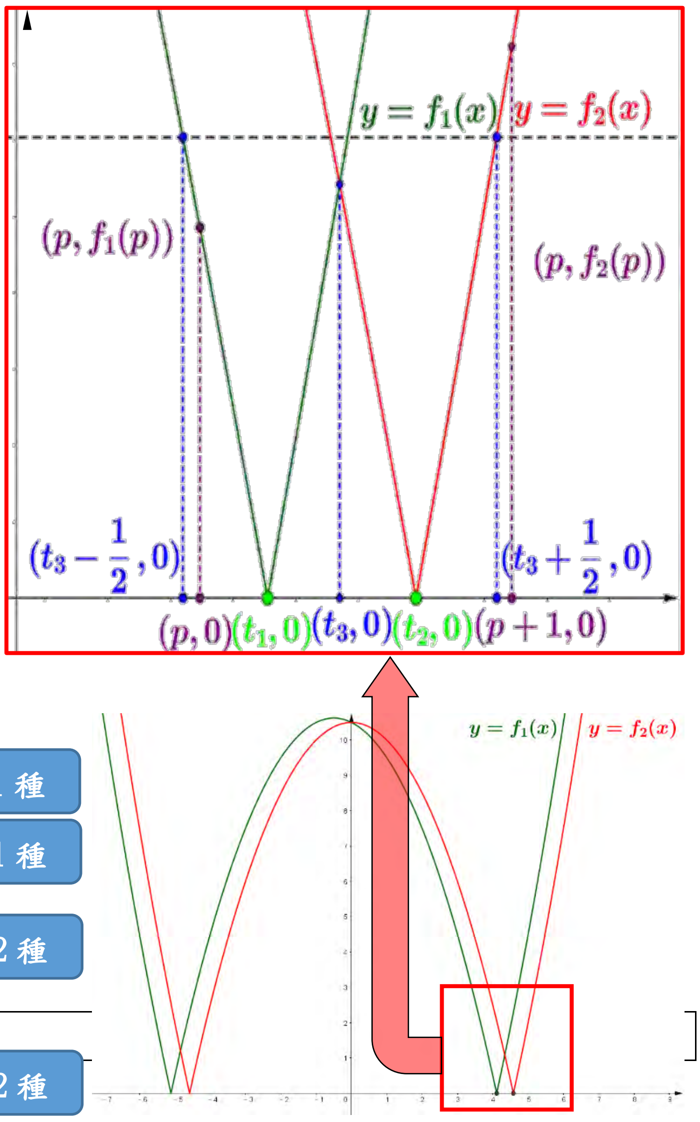
由下圖二，我們得到以下結論。

1. **當$0<\alpha<0.5$或$0.5<\alpha<1$時**，均只有 1 種k值最佳解可作為 2 人站位依據。

2. **當$\alpha=0$或$\alpha=0.5$時**，均有 2 種k值最佳解可作為 2 人站位依據。



圖二：兩人最佳解 k 值判別流程圖



圖一：兩人分函數圖形

表一：t_3為「整數」或「整數+0.5」的y、m、k值

y	m值	t_3值	k值(平分或不平分)
1	0	0	0
5	**2**	**1.5**	**1(不平)或 2(平)**
29	**14**	**10**	**10(不平或平)**
169	**84**	**59.5**	**59(不平)或 60(平)**
985	**492**	**348**	**348(不平或平)**
5741	**2870**	**2029.5**	**2029(不平)或 2030(平)**
⋮	⋮	⋮	⋮

遞迴關係：$y_{(t3)n} = 6y_{(t3)n-1} - y_{(t3)n-2}$

$m_{(t3)n} = 6m_{(t3)n-1} - m_{(t3)n-2} + 2$

表二：t_1為整數時的x、m、k值

x	m	t_1	k值(不平分)
1	0	0	0
7	**3**	**2**	**2**
41	**20**	**14**	**14**
239	**119**	**84**	**84**
1393	**696**	**492**	**492**
8119	**4059**	**2870**	**2870**
⋮	⋮	⋮	⋮

遞迴關係：$x_{(t1)n} = 6x_{(t1)n-1} - x_{(t1)n-2}$

$m_{(t1)n} = 6m_{(t1)n-1} - m_{(t1)n-2} + 2$

表三：t_2為整數時的x、m、k值

x	m	t_2(平分)	k值(不平分)
1	0	0	0
3	**1**	**1**	**1**
17	**8**	**6**	**6**
99	**49**	**35**	**35**
577	**288**	**204**	**204**
3363	**1681**	**1189**	**1189**
⋮	⋮	⋮	⋮

遞迴關係：$x_{(t2)n} = 6x_{(t2)n-1} - x_{(t2)n-2}$

$m_{(t2)n} = 6m_{(t2)n-1} - m_{(t2)n-2} + 2$

（四）**兩人分金幣中，$\alpha = 0$或$\alpha = 0.5$時的最佳解，與所有m值的遞迴關係**，如表一。

此狀況下，設$1 + 8m(m+1) = (2q+1)^2$，得$2(2m+1)^2 - (2q+1)^2 = 1$，m、$q \in \mathbb{N}$。設$\boldsymbol{x = 2q+1}$、$\boldsymbol{y = 2m+1}$，得$\boldsymbol{x^2 - 2y^2 = -1}$。此**丟番圖方程式**中，$y$的解符合$\boldsymbol{y_{(t3)n} = (\alpha+\beta) y_{(t3)n-1} - \alpha\beta y_{(t3)n-2}}$之二階齊次線性遞迴數列，再將$y$的遞迴式線性轉換後可得$m$的遞迴式。

（五）**全部金幣可以由兩人完全均分的情形探討$(S_L = S_R = \frac{1}{2}S)$**

1. **當t_1為整數時(k不平分)**，其遞迴關係式如表二。
2. **當t_2為整數時(k平分)**，其遞迴關係式如表三。
3. **兩人完全均分所有金幣的m值之遞迴關係與其一般式**

將「表二」與「表三」中的m值重新排序，依次為$m = 1$、3、8、20、49、119、288、696、…可得以下遞迴關係：

> ➢ **兩人完全均分遞迴式：$m_n = 2m_{n-1} + m_{n-2} + 1$（初始值$m_1 = 1, m_2 = 3$）。**
> ➢ **兩人完全均分一般式：$m_n = \frac{1}{4}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1+\sqrt{2}\right)^n - 2\right]$，$n \in \mathbb{N}$。**

（六）**兩人分金幣的站位問題探討**(如表四、圖三、圖四)

1. 環境設定

(1)已知m值時，得最佳解k，有2種類型：①k不平分②k平分。

(2)金幣分成S_L和S_R兩堆。

(3)若k平分，則A的可站位區間為$A(a) \in \mathbb{R}$且$a \neq k$

若k不平分，則A的可站位區間為$A(a) \in (-\infty, \infty)$。

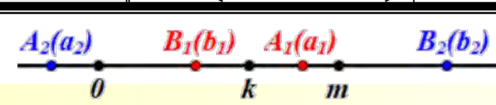
2. 選位規則

(1)A、B兩人，由A先選位，再由B選位。

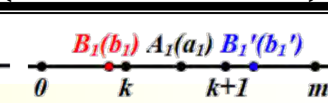
(2)B必須選擇2人金幣差最小的位置，即最佳解區間。

表四：兩人站位判別表

站位	$A(a)$	$B(b)$
k平分	$a \in \mathbb{R}$且$a \neq k$	$b = 2k - a$
k不平分	$a \in (-\infty, k)$	$b \in (2k-a, 2k+2-a)$
	$a \in (k, k+1)$	$b \in (2k-a, 2k+2-a)$且$b \neq k$
	$a \in (k+1, -\infty)$	$b \in (2k-a, 2k+2-a)$



圖三：兩人平分範例圖



圖四：兩人不平分範例圖

二、三人分金幣的情形

三人最佳解以標準差$\sigma = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(S_L - \frac{1}{3}S\right)^2 + \left(S_M - \frac{1}{3}S\right)^2 + \left(S_R - \frac{1}{3}S\right)^2\right]}$ 的最小值處理。

（一）**一般化**：當金幣的袋數為m時，則有「第k袋金幣平分或不平分，第h袋金幣平分或不平分」$(k < h)$，共四種情形。

方式一：k不平分，h不平分、**方式二**：k不平分、h平分、**方式三**：k平分、h不平分、**方式四**：k平分、h平分

將4種方式的$\left|S_L - \frac{1}{3}S\right|$及$\left|S_R - \frac{1}{3}S\right|$的函數以$\boldsymbol{g_1(x) = \frac{1}{2}\left|x^2 + x - \frac{1}{3}m(m+1)\right|}$、$\boldsymbol{g_2(x) = \frac{1}{2}\left|x^2 - \frac{1}{3}m(m+1)\right|}$、$\boldsymbol{g_3(x) = \frac{1}{2}\left|x^2 + x - \frac{2}{3}m(m+1)\right|}$、$\boldsymbol{g_4(x) = \frac{1}{2}\left|x^2 - \frac{2}{3}m(m+1)\right|}$**表示如圖五**，四個函數的零點為

$$\boldsymbol{u_1 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}m(m+1)}\right)}、\boldsymbol{u_2 = \sqrt{\frac{1}{3}m(m+1)}}、\boldsymbol{u_3 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8}{3}m(m+1)}\right)}、\boldsymbol{u_4 = \sqrt{\frac{2}{3}m(m+1)}}。$$

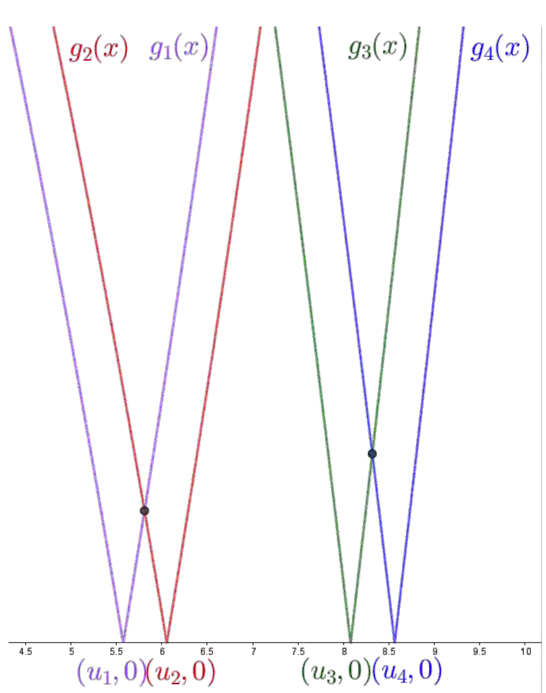
當u_1、u_2、u_3、$u_4 \in \mathbb{N}$時，將有助於三人均分之探討，如表五。

（二）**以三人分得金幣數的標準差求最佳解**

設$p_{i1} \leq u_i \leq p_{i2}$，將$k = p_{11}$、$p_{12}$，$h = p_{31}$、$p_{32}$分別代入每個$\sigma$，並比較16個標準差，以$m = 10$為例，所得到的最佳解為$\boldsymbol{k = 6}$，$\boldsymbol{h = 8}$，**方式三**。如表六。

表五：$u_i \in \mathbb{N}$的性質

$u_1 \in \mathbb{N}$	當$k = u_1$(不平分)，$S_L = \frac{1}{3}S$
$u_2 \in \mathbb{N}$	當$k = u_2$(平分)，$S_L = \frac{1}{3}S$
$u_3 \in \mathbb{N}$	當$h = u_3$(不平分)，$S_R = \frac{1}{3}S$
$u_4 \in \mathbb{N}$	當$h = u_4$(平分)，$S_R = \frac{1}{3}S$



圖五：三人分的函數圖形

表六：$m = 10$的最佳解判斷流程

m	u_1~u_4值	p_{i1}、p_{i2}	方式	(k, h)	標準差	最小
$m=10$	$u_1 = 5.575908711$	$p_{11} = 5$	方式一	(5,8)	$\sigma_{1a} = 2.494438258$	
				(5,9)	$\sigma_{1b} = 8.498365856$	
		$p_{12} = 6$		(6,8)	$\sigma_{1c} = 2.494438258$	
				(6,9)	$\sigma_{1d} = 6.018490028$	
	$u_2 = 6.055300708$	**$p_{21} = 6$**	方式二	(5,8)	$\sigma_{2a} = 3.399346342$	
				(5,9)	$\sigma_{2b} = 5.071708018$	
		$p_{22} = 7$		(6,8)	$\sigma_{2c} = 5.249338583$	
				(6,9)	$\sigma_{2d} = 2.778888667$	
	$u_3 = 8.078072822$	**$p_{31} = 8$**	**方式三**	**(6,8)**	**$\sigma_{3a} = 0.471404521$**	★
				(6,9)	$\sigma_{3b} = 6.944222219$	
		$p_{32} = 9$		(7,8)	$\sigma_{3c} = 5.328122454$	
				(7,9)	$\sigma_{3d} = 6.114645443$	
	$u_4 = 8.563488386$	$p_{41} = 8$	方式四	(6,8)	$\sigma_{4a} = 3.681787006$	
				(6,9)	$\sigma_{4b} = 3.274480451$	
		$p_{42} = 9$		(7,8)	$\sigma_{4c} = 7.684761256$	
				(7,9)	$\sigma_{4d} = 4.403281605$	

（三） 全部金幣可以由三人完全均分的情形探討($S_L = S_M = S_L = \frac{1}{3}S$)

表七：$u_1 \in \mathbb{Z}$(k不平分)

y	m	$u_1(=k)$
5	2	1
19	9	5
71	35	20
265	132	76
⋮	⋮	⋮

m的遞迴關係：

$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} + 1$

表八：$u_2 \in \mathbb{Z}$(k平分)

y	m	$u_2(=k)$
7	3	2
97	48	28
1351	675	390
18817	9408	5432
⋮	⋮	⋮

m的遞迴關係：

$b_n = 14b_{n-1} - b_{n-2} + 6$

表九：$u_3 \in \mathbb{Z}$(h不平分)

y	m	$u_3(=h)$
11	5	4
109	54	44
1079	539	440
10681	5340	4360
⋮	⋮	⋮

m的遞迴關係：

$c_n = 10c_{n-1} - c_{n-2} + 4$

表十：$u_4 \in \mathbb{Z}$(h平分)

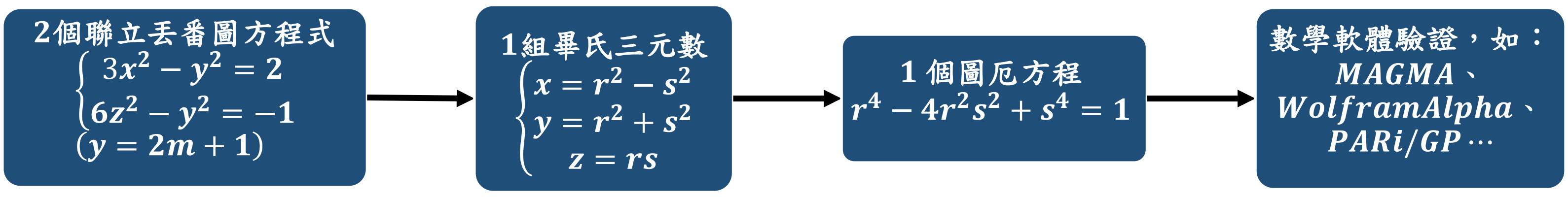
y	m	$u4(=h)$
5	2	2
49	24	20
485	242	198
4801	2400	1960
⋮	⋮	⋮

m的遞迴關係：

$d_n = 10d_{n-1} - d_{n-2} + 4$

（四）三人完全均分無解之證明

將四種方式以**聯立丟番圖方程式轉換為圖厄方程**，並透過三套軟體的分析，我們發現除了$m = 2$(方式二)以外，沒有其他三人完全均分解。以方式二為例(如圖六)，流程如下：(結果如表十一)



圖六：三人完全均分無解之證明流程圖

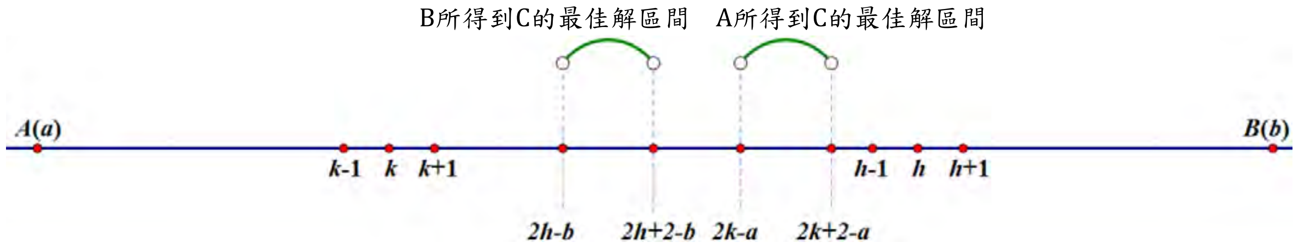
表十一：方式二的圖厄方程與y、m的解

[r,s]	[-2,-1]	[-2, 1]	[-1, -2]	[-1, 0]	[-1, 2]	[0, -1]	[0, 1]	[1, -2]	[1, 0]	[1, 2]	[2, -1]	[2, 1]
y	5	5	5	1	5	1	1	5	1	5	5	5
m	2	2	2	0	2	0	0	2	0	2	2	2

（五）三人分金幣的站位問題探討

已知m值求出k、h值，全部有四種類型：k平分h平分、k不平分h不平分、k平分h不平分、k不平分h平分。我們推導出A可站區間為$(P-1, Q+2)$，若超出此區間將無法得到三人分最佳解站位法。

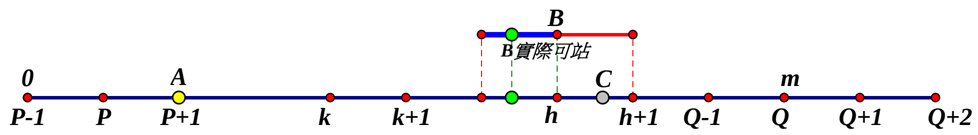
1. 設$P = k - |h-k| = 2k - h$即P和h的中點為k；$Q = h + |h-k| = 2h - k$即Q和k的中點為h。
   (左界$= P-1$、右界$= Q+2$，證明詳見說明書)
2. 選位規則
   (1)A、B、C三人，由A先選位，再由B選位，最後C再選位。
   (A選完後，B必須選擇站在最佳解區間，最後C亦是如此，完成最佳解站位)
   (2)為避免選位時，C發生無位可選(**無解**)的情況，如圖七，以致三人無法完成最佳解站位，故設定規則：
   A先選定後，B要拿與A鄰近的一堆，C再拿最後剩下的一堆。



圖七：無法達成最佳解時之範例圖示(兩區間並無交集)。

   (3)數線上由左至右會有以下4種站位排序法：
   A–B–C、B–A–C、C–A–B、C–B–A。(以A–B–C為例：A拿到S_L，B拿到S_M，C拿到S_L)
3. 站位情況(詳見說明書)

圖八：三人站位(k不平分 h 平分)示意圖



伍、結論與未來展望

一、結論	二、未來展望
1.完成兩人分金幣最佳解判別法(圖二) 2.兩人分金幣中同時存在兩種k值最佳解的m值之遞迴式(表一) 3.兩人完全均分之所有m值遞迴式(表二、三) 4.完成三人分金幣最佳解判別法(表六) 5.三人完全均分無解之證明(表十一、圖六) 6.兩人站位與三人站位判別表(表四)	1.求最佳解的方法中，兩人分要算出t_3，三人分要先算u_1、u_2、u_3、u_4，以及對應的 16 個標準差的值，這些計算較為繁複，希望可以繼續研究，找到一種較簡便的最佳解求法。 2.在探討三人「第k、h袋平分或不平分所得結果相同且為最佳解」的情形中，討論過程較為複雜，這將是我們後續研究的方向。 3.三人站位部分，目前採用特定的選位順序與環境設定，進而得到所有可能的站法，未來亦可針對站位部分，做更一般性的深入研究。 4.將站位問題延伸為搶位問題，討論海盜搶位後分得最多金幣的策略。 5.將兩人分金幣、三人分金幣、⋯，推廣為n人分金幣。

參考資料

一、游森棚。森棚教官的數學題。科學研習月刊。國立台灣科學教育館。2017年8月，P.66。
二、國中數學課本第四冊第一章：等差數列與等差級數；第六冊第一章：二次函數。南一書局。
三、László Szalay,(Ed.s). (2007). *On the resolution of simultaneous Pell equations*.Annales Mathematicae et nformaticae,34, 77-87,from http://www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami