中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

(鄉土)教材獎

030416

「4」in love

-探討任意四邊形生成之四心四邊形的性質

學校名稱：彰化縣立和群國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳祈安	王郁茜
國二 柯意如	黃芳薇
國二 葉軒芷	

關鍵詞：四心、迭代

摘要

運用四心及平行、圓等幾何性質探討任意四邊形生成之四心(內心、外心、重心、垂心)四邊形的性質，發現任意四邊形所生成之外心四邊形、重心四邊形、垂心四邊形均為相似的平行四邊形。更進一步利用平行線性質及 AA 相似性質等說明迭代生成之重心四邊形、外心四邊形、垂心四邊形其四邊形$A_nB_nC_nD_n$與四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$相似，而內心四邊形$A_nB_nC_nD_n$會收斂漸成正方形。同時證明出任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$重心G與對角線交點 E 的中點正好是重心四邊形收斂點，圓內接四邊形$A_1B_1C_1D_1$其外接圓圓心 O 與對角線交點E的中點正好是其外心四邊形收斂點，而內心四邊形與垂心四邊形沒有類似的結果。

壹、研究動機

在我們上數學課教到三角形的全等性質後，我們好奇在三角形中還可以發現什麼其他不一樣的，於是上課時提出了這個疑問，老師便介紹了外心、內心、重心和垂心，所以我們開始尋找在各種不同的四邊形中對角線切割形成的四個三角形中的四心連接成的形狀。除此之外，亦搜尋了全國科展中曾經研究過的問題：第五十三屆全國科展「多個三角形的重心連線性質探討」，此作品討論到在 n 邊形中任取一點 P，對 P 點重複做重心 n 邊形迭代，發現各層重心的距離關係以及 P 點為第 k 層(k→ ∞)的收斂點。我們以此為基礎，想由四邊形的對角線切割成的四個三角形，來討論其四心生成的四邊形具什麼性質，以及其迭代收斂情形。

貳、研究目的

一、討論連接任意四邊形的對角線後，產生四個三角形之四心(內外重垂)連線段，分別生成的四邊形(四心多邊形)有什麼性質。

二、討論四心多邊形迭代收斂情形。

三、討論迭代收斂點與原心、原圖形對角線交點的關係。

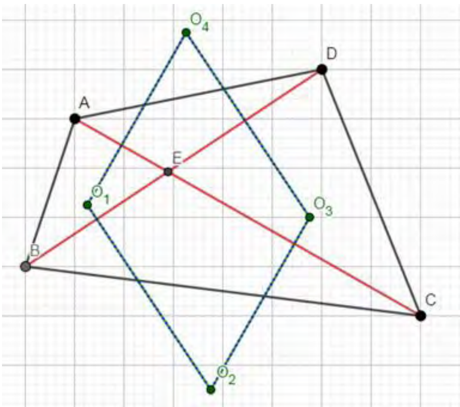
參、研究設備及器材

電腦、GeoGebra、Word

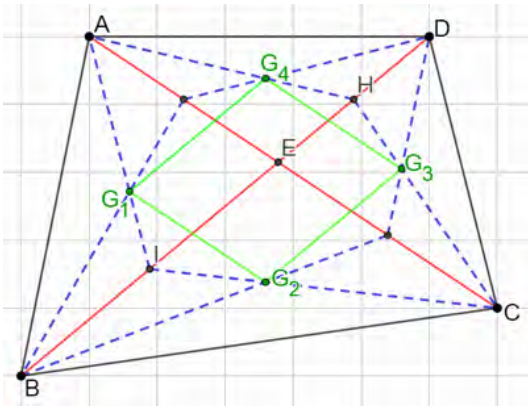
肆、名詞定義

一、**四邊形$O_1O_2O_3O_4$**：如【圖一】，設任意四邊形ABCD，對角線$\overline{AC}$、對角線$\overline{BD}$交於E點，

O_1、O_2、O_3、O_4分別為△EAB、△EBC、△ECD、△EDA 的外心。



【圖一】



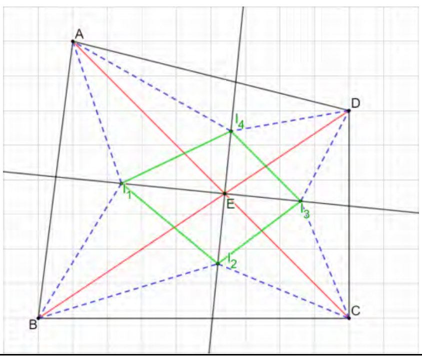
【圖二】

二、**四邊形$G_1G_2G_3G_4$**：如【圖二】，設任意四邊形ABCD，對角線$\overline{AC}$、對角線$\overline{BD}$交於E點，

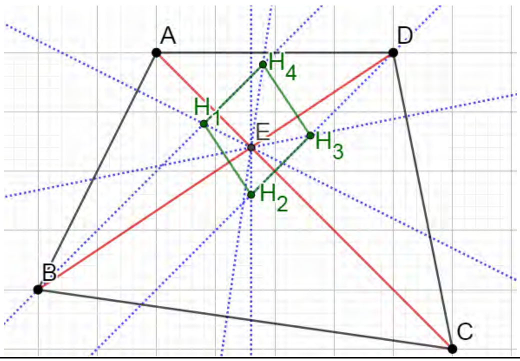
G_1、G_2、G_3、G_4分別為△EAB、△EBC、△ECD、△EDA 的重心。

三、**四邊形$I_1I_2I_3I_4$**：如【圖三】，設任意四邊形 ABCD，對角線$\overline{AC}$、對角線$\overline{BD}$交於E點，I_1、I_2、

I_3、I_4分別為△ EAB、 △ EBC、 △ ECD、 △ EDA的內心。



【圖三】

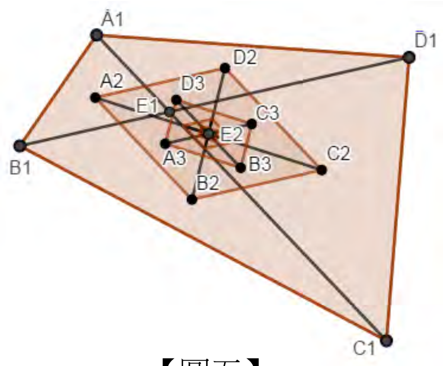


【圖四】

四、**四邊形$H_1H_2H_3H_4$**：如【圖四】，設任意四邊形ABCD，對角線$\overline{AC}$、對角線$\overline{BD}$交於E點，

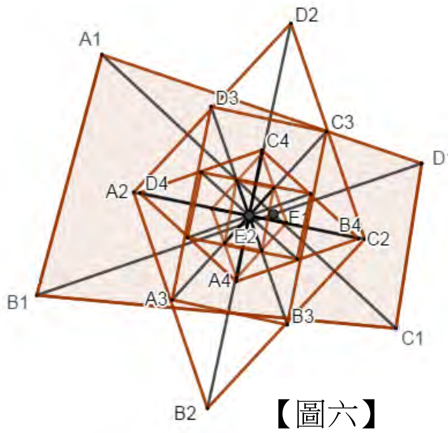
H_1、H_2、H_3、H_4分別為△ EAB、 △ EBC、 △ ECD、 △ EDA的垂心。

五、**重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$**：如【圖五】，設任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$，對角線$\overline{A_1C_1}$、對角線$\overline{B_1D_1}$交於E_1點，A_2、B_2、C_2、D_2分別為△$E_1A_1B_1$、△$E_1B_1C_1$、△$E_1C_1D_1$、△$E_1D_1A_1$的重心，$\overline{A_2C_2}$、$\overline{B_2D_2}$交於E_2點。四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線$\overline{A_nC_n}$、對角線$\overline{B_nD_n}$交於E_n點，A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1}分別為△$E_nA_nB_n$、△$E_nB_nC_n$、△$E_nC_nD_n$、△$E_nD_nA_n$的**重心**，對角線$\overline{A_nC_n}$、對角線$\overline{B_nD_n}$交於E_n點。



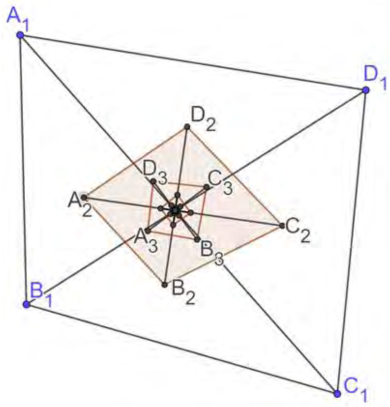
【圖五】

六、**外心四邊形**$A_nB_nC_nD_n$：如【圖六】，設任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$，對角線$\overline{A_1C_1}$、對角線$\overline{B_1D_1}$交於E_1點，A_2、B_2、C_2、D_2分別為△$E_1A_1B_1$、△$E_1B_1C_1$、△$E_1C_1D_1$、△$E_1D_1A_1$的外心，$\overline{A_2C_2}$、$\overline{B_2D_2}$交於E_2點。四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線$\overline{A_nC_n}$、對角線$\overline{B_nD_n}$交於E_n點，$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$分別為△$E_nA_nB_n$、△$E_nB_nC_n$、△$E_nC_nD_n$、△$E_nD_nA_n$的**外心**，對角線$\overline{A_1C_1}$、對角線$\overline{B_1D_1}$交於$E_1$點。



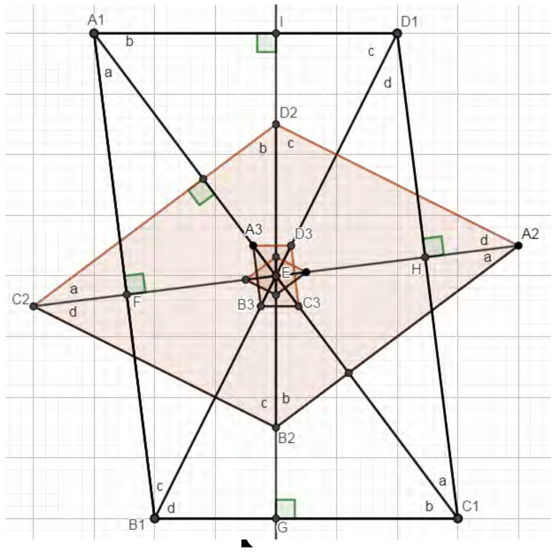
【圖六】

七、**內心四邊形**$A_nB_nC_nD_n$：如【圖七】，設任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$，對角線$\overline{A_1C_1}$、對角線$\overline{B_1D_1}$交於E_1點，A_2、B_2、C_2、D_2分別為△$E_nA_nB_n$、△$E_nB_nC_n$、△$E_nC_nD_n$、△$E_nD_nA_n$的**內心**，$\overline{A_2C_2}$、$\overline{B_2D_2}$交於E_2點。四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線$\overline{A_nC_n}$、對角線$\overline{B_nD_n}$交於E_n點，A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1}分別為△$EnAnBn$、△$EnBnCn$、△$EnCnDn$、△$EnDnAn$的**內心**，對角線$\overline{A_nC_n}$、對角線$\overline{B_nD_n}$交於E_n點。



【圖七】

八、**垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$**：如【圖八】，設任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$，對角線$\overline{A_1C_1}$、對角線$\overline{B_1D_1}$交於E_1點，A_2、B_2、C_2、D_2分別為△$E_1A_1B_1$、△$E_1B_1C_1$、△$E_1C_1D_1$、△$E_1D_1A_1$的垂心，$\overline{A_2C_2}$、$\overline{B_2D_2}$交於E_2點。四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線$\overline{A_nC_n}$、對角線$\overline{B_nD_n}$交於E_n點，A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1}分別為△$E_nA_nB_n$、△$E_nB_nC_n$、△$E_nC_nD_n$、、△$E_nD_nA_n$的垂心，對角線$\overline{A_1C_1}$、對角線$\overline{B_1D_1}$交於E_1點。

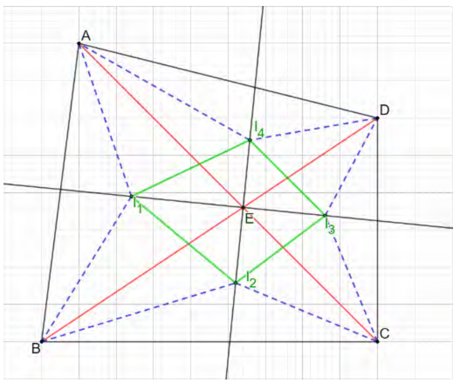


【圖八】

伍、研究過程或方法

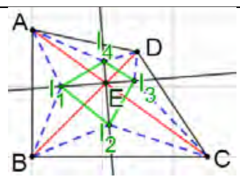
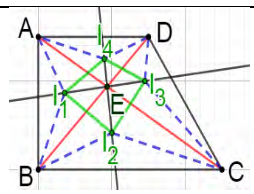
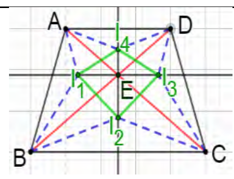
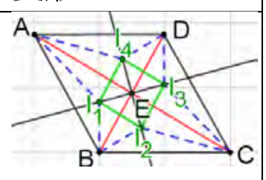
一、討論各式四邊形ABCD，對角線切割 4 個三角形，此 4 個三角形的內、外、重、垂心連線段所形成的四邊形。

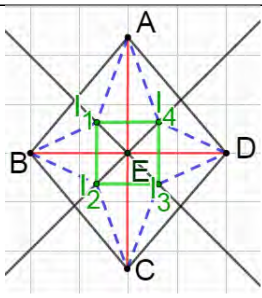
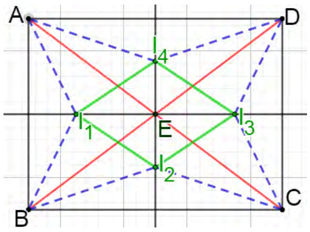
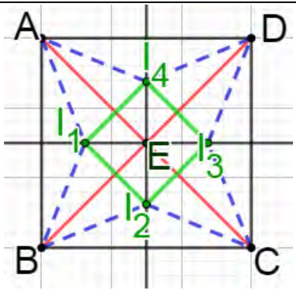
(一)如【圖九】，四邊形ABCD中，E為對角線交點，設△ EAB、 △ EBC、 △ ECD、 △ EDA的內心分別為I_1、I_2、I_3、I_4。



【圖九】

我們透過Geogebra動態觀察四邊形$I_1I_2I_3I_4$，都是對角線互相垂直的非特殊四邊形，其他特殊四邊形如下：

四邊形ABCD	任意四邊形	梯形	等腰梯形	平行四邊形
四邊形$I_1I_2I_3I_4$	非特殊四邊形	非特殊四邊形	箏形	菱形
圖示				

四邊形ABCD	菱形	長方形	正方形
四邊形$I_1I_2I_3I_4$	正方形	菱形	正方形
圖示			

以下，再針對其必然性，予以證明:

1. ABCD為任意四邊形，E點為$\overline{AC}$、$\overline{BD}$交點，I_1、I_2、I_3、I_4分別為△EAB、△EBC、△ECD、△EDA的內心，則$I_1I_2I_3I_4$為對角線互相垂直的四邊形。

證明:如【圖十】,

∵I_1、I_2、I_3、I_4分別為△EAB、△EBC、△ECD、△EDA的內心，

∴$\angle 7 = \angle 8$，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，$\angle 5 = \angle 6$，

又$\angle 1 + \angle 2 = \angle 5 + \angle 6$(對頂角)，

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 5 + \angle 6$(對頂角)，

∴ $\angle 1 = \angle 2 = \angle 5 = \angle 6$，$\angle 3 = \angle 4 = \angle 7 = \angle 8$。

設$\angle 1 = x°$，$\angle 3 = y°$，

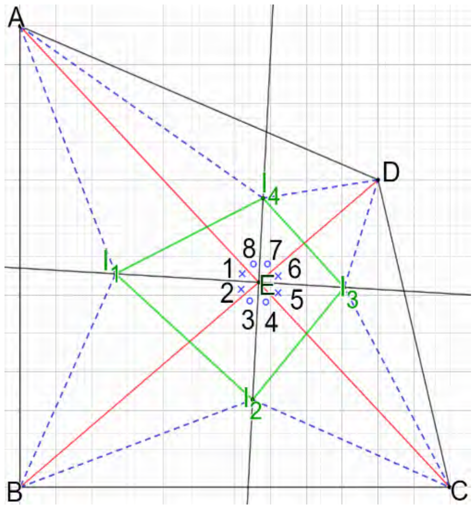
$\angle 8 + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2x+2y=180°$，

故I_1、E、I_3在同一直線上，同理I_2、E、I_4三點共線；

故$\overline{I_1I_3}$、$\overline{I_2I_4}$為四邊形$I_1I_2I_3I_4$的對角線。

顯然$\angle 8 + \angle 1 = x° + y°$即$\overline{I_1I_3} \perp \overline{I_2I_4}$

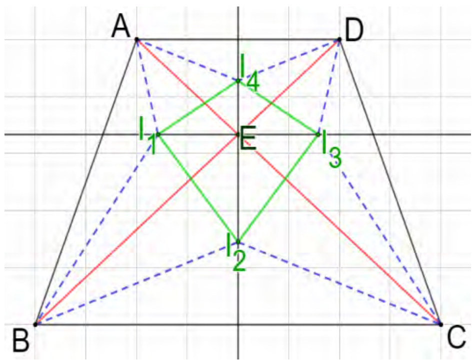
因此$I_1I_2I_3I_4$為對角線互相垂直的四邊形。



【圖十】

2. 如【圖十一】:若ABCD為等腰梯形，則對應之四邊形$I_1I_2I_3I_4$為箏形

由證明 1 可知，$I_1I_2I_3I_4$為對角線互相垂直的四邊形，由於ABCD為等腰梯形，所以△AEB ≅△DEC，因此



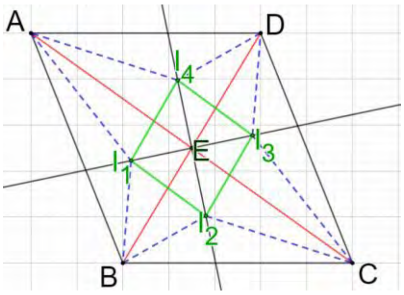
【圖十一】

此兩三角形的內心到頂點距離相等，即$\overline{I_1E}=\overline{I_3E}$，換言之，$\overline{I_2I_4}$平分 $\overline{I_1I_3}$

由上可知，四邊形$I_1I_2I_3I_4$的對角線互相垂直且對角線$\overline{I_1I_3}$被平分，所以四邊形$I_1I_2I_3I_4$為箏形。

3. 如【圖十二】:若ABCD為平行四邊形，則對應之四邊形$I_1I_2I_3I_4$為箏形

由證明 1 可知，$I_1I_2I_3I_4$為對角線互相垂直的四邊形，由於ABCD 為平行四邊形，所以△ AEB ≅△ DEC， △ AED ≅△ BEC，因此△ AEB、 △ DEC的內心到頂點的距離相等，△ AED、 △ BEC內心到頂點的距離也相等，即$\overline{I_1E}=\overline{I_3E}$，$\overline{I_2E}=\overline{I_4E}$，換言之，$\overline{I_1I_3}$ 與 $\overline{I_2I_4}$互相平分

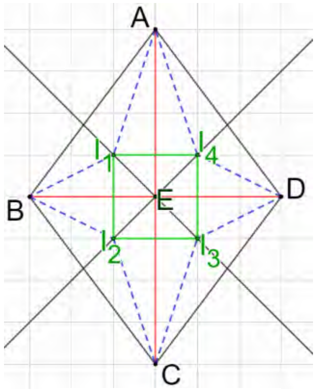


【圖十二】

因為四邊形$I_1I_2I_3I_4$的對角線互相垂直、平分，所以四邊形$I_1I_2I_3I_4$為菱形。

4. 如【圖十三】:若ABCD為菱形，則對應之四邊形$I_1I_2I_3I_4$為正方形

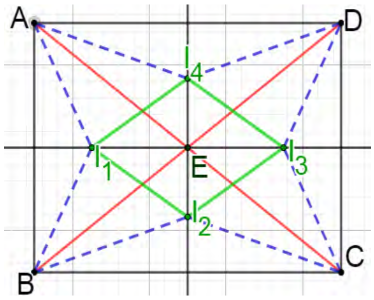
由證明 1 可知，$I_1I_2I_3I_4$為對角線互相垂直的四邊形，由於ABCD為菱形，所以對角線切割成的四個三角形皆全等，因此，此四個三角形內心到頂點的距離相等，即$\overline{I_1E}=\overline{I_3E}=\overline{I_2E}=\overline{I_4E}$，即對角線平分又等長。因為四邊形$I_1I_2I_3I_4$的對角線互相**垂直、平分**且**等長**，所以四邊形$I_1I_2I_3I_4$為正方形。



【圖十三】

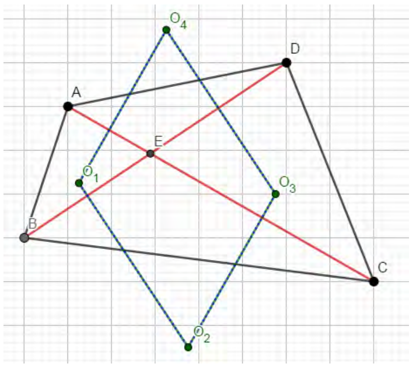
5. 如【圖十四】:若ABCD為長方形，則對應之四邊形$I_1I_2I_3I_4$為菱形

證明:由(一)可知，$I_1I_2I_3I_4$為對角線互相垂直的四邊形，由於四邊形ABCD為長方形，所以△ AEB ≅△ DEC，△ AED ≅△ BEC，兩全等三角形的內心到頂點距離相等，即$\overline{I_1E}=\overline{I_3E}$ ，$\overline{I_2E}=\overline{I_4E}$，即對角線互相平分，因為四邊形$I_1I_2I_3I_4$的對角線互相垂直、平分，所以四邊形$I_1I_2I_3I_4$為菱形



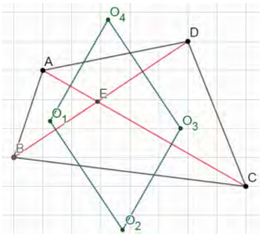
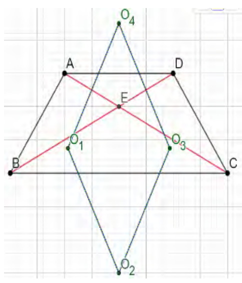
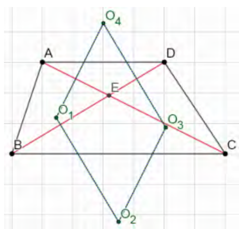
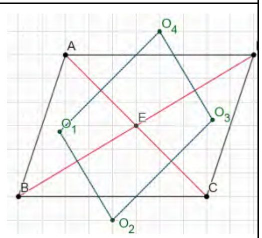
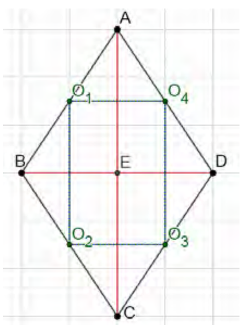
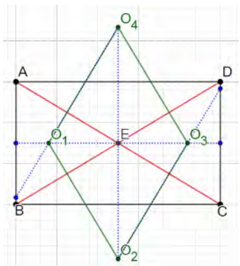
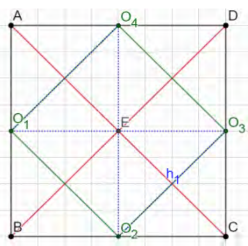
【圖十四】

(二)如【圖十五】，四邊形ABCD中，E為對角線交點，設△ EAB、△ EBC、△ ECD、△ EDA的外心分別為O_1、O_2、O_3、O_4，



【圖十六】

我們透過GEOGEBRA動態觀察四邊形$O_1O_2O_3O_4$，都會是平行四邊形。其他特殊四邊形的情形如下：

四邊形ABCD	任意四邊形	等腰梯形	梯形	平行四邊形
四邊形$O_1O_2O_3O_4$	平行四邊形	菱形	平行四邊形	平行四邊形
圖示				
四邊形ABCD	菱形	長方形	正方形	
四邊形$O_1O_2O_3O_4$	長方形	菱形	正方形	
圖示				

以下，再針對其必然性，予以證明：

1. 四邊形ABCD為任意四邊形，則對應之四邊形$O_1O_2O_3O_4$為平行四邊形。

證明：如**【圖十六】**

因為O_1 、O_4同時在$\overline{AE}$中垂線上，

故$\overline{O_1O_4}$為$\overline{AE}$的中垂線，

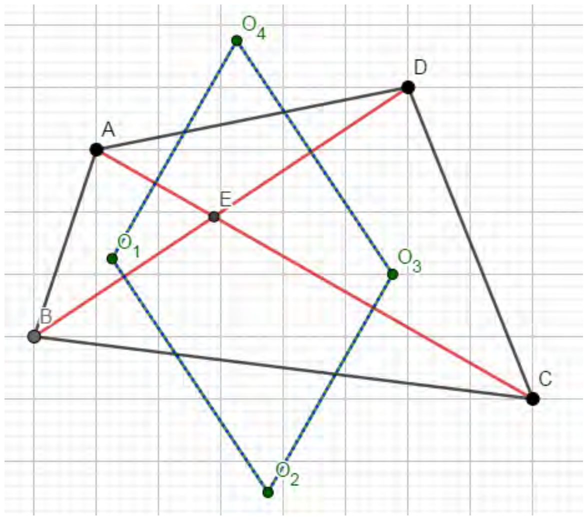
同理$\overline{O_2O_3}$為$\overline{EC}$的中垂線。

因此$\overline{O_1O_4}$及$\overline{O_2O_3}$同時垂直$\overline{AC}$，故$\overline{O_1O_4}//\overline{O_2O_3}$

同理，因為$\overline{O_1O_2}$與$\overline{O_3O_4}$ 會同時垂直$\overline{BD}$，

所以$\overline{O_1O_2}//\overline{O_3O_4}$

故$O_1O_2O_3O_4$為平行四邊形。



【圖十六】

2. **四邊形ABCD為等腰梯形，則對應之四邊形$O_1O_2O_3O_4$為菱形。**

證明：如**【圖十七】**

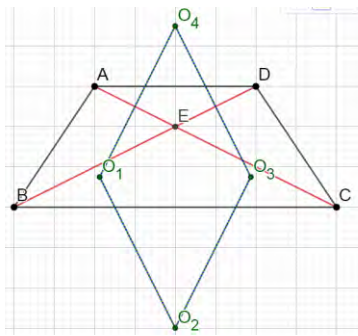
(1)由上述 1 可知$O_1O_2O_3O_4$為平行四邊形。

(2)因為ABCD為等腰梯形， O_4、O_2同時在$\overline{AD}$的中垂線上，

$\overline{O_4O_2}$亦為等腰梯形的對稱軸，

△AEB、 △DEC互為對稱圖形，此對稱圖形之外心O_1 、O_3

也必互為對稱點。



【圖十七】

(3)$\overline{O_2O_4}$在對稱軸上，O_1 、O_3互為對稱點，

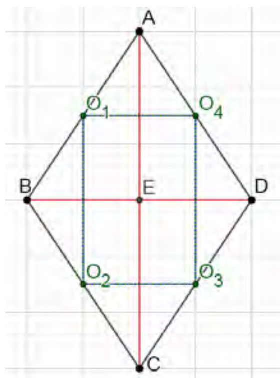
則$O_1O_2O_3O_4$必為鳶形。

(4) ∵ $O_1O_2O_3O_4$是平行四邊形也是箏形，故$O_1O_2O_3O_4$為一菱形。

3. 四邊形ABCD為菱形，則對應之四邊形$O_1O_2O_3O_4$為長方形。

證明：如**【圖十八】**，

因為四邊形ABCD 為菱形，所以對角線將四邊形切割成四個全等的直角三角形。由直角三角形的外心在斜邊中點的性質可知$\overline{O_1E}=\overline{O_3E}=\overline{O_2E}=\overline{O_4E}$，又我們可從菱形亦為點對稱圖形性質可知$O_1$、$O_3$、E共線且$O_2$、$O_4$、E共線，因此可知四邊形$O_1O_2O_3O_4$之對角線會互相平分又等長，因此四邊形$O_1O_2O_3O_4$為長方形。

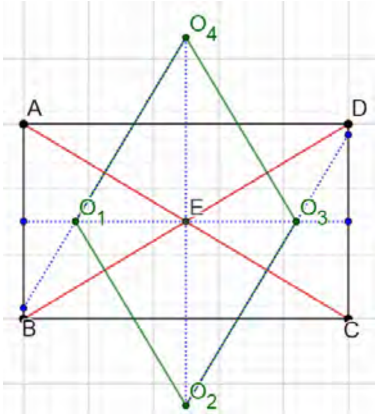


【圖十八】

4. 四邊形ABCD為長方形，則對應之四邊形$O_1O_2O_3O_4$為菱形。

證明：如**【圖十九】**，

因為四邊形 ABCD 為長方形，為點對稱圖形，△ ADE ≅△ BCE 且△ ABE ≅△ DCE，又O_2 、O_4、O_1 、O_3為上述三角形之外心，因此$\overline{O_2E} = \overline{O_4E}$、$\overline{O_1E} = \overline{O_3E}$、又由 E 為點對稱圖形的中心可知$O_1$ 、O_3 、E共線且O_2 、O_4 、E共線且$\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$，因此我們知道四邊形$O_1O_2O_3O_4$的對角線互相垂直平分，因此四邊形$O_1O_2O_3O_4$為菱形。



【圖十九】

5. 四邊形ABCD為正方形，則對應之四邊形$O_1O_2O_3O_4$為正方形。

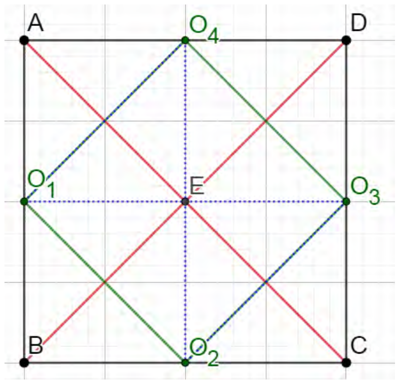
證明：如**【圖二十】**，

(1)以下證明$O_1O_2O_3O_4$的兩條中垂線互相垂直。

∵ ABCD 為一正方形

∴ $\overline{AB}$的中垂線 ⊥ $\overline{AD}$的中垂線

∴ $O_1O_2O_3O_4$的兩條中垂線互相垂直。



【圖二十】

(2)以下證明$O_1O_2O_3O_4$的兩條中垂線互相平分。

∵△ ABE 和 △ DCE 的中垂線同一條，

△ ADE 和 △ BCE 的中垂線同一條

∵ $\overline{O_1E} = \overline{O_3E} = \frac{1}{2}\overline{O_1O_3}$ $\overline{O_2E} = \overline{O_4E} = \frac{1}{2}\overline{O_2O_4}$

∴ $O_1O_2O_3O_4$的兩條中垂線互相平分

(3)以下證明$\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$。

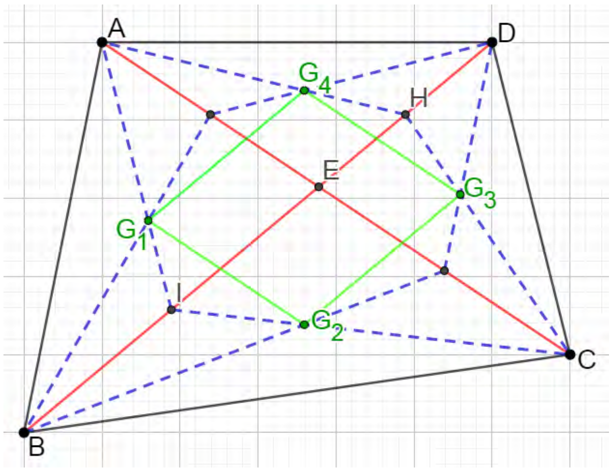
∵ $O_1O_2O_3O_4$都是四個全等的外心

∴ $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$

∵ 對角線垂直、平分又等長

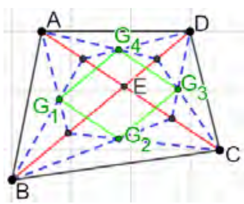
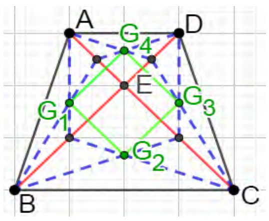
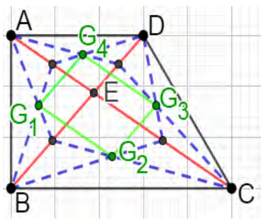
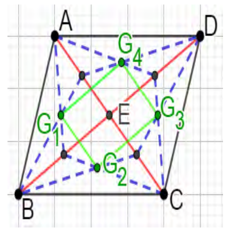
故$O_1O_2O_3O_4$為一正方形

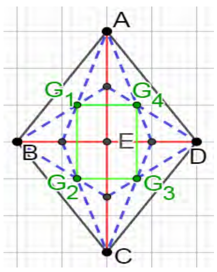
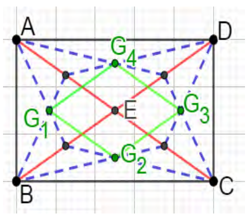
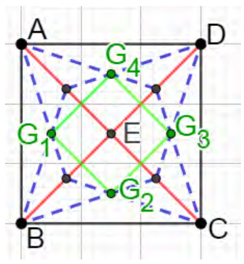
(三)如【圖二十一】，四邊形ABCD中，E為對角線交點，設△ EAB、△ EBC、△ ECD、△ EDA的重心分別為G_1、G_2、G_3、G_4



【圖二十一】

我們透過GEOGEBRA動態觀察四邊形$G_1G_2G_3G_4$，都會是平行四邊形。其他特殊四邊形的情形如下：

四邊形ABCD	任意四邊形	等腰梯形	梯形	平行四邊形
四邊形 $G_1G_2G_3G_4$	平行四邊形	菱形	平行四邊形	平行四邊形
圖示				

四邊形 ABCD	菱形	長方形	正方形
四邊形 $G_1G_2G_3G_4$	長方形	菱形	正方形
圖示			

以下，再針對其必然性，予以證明：

1. 若四邊形ABCD為任意四邊形，則對應之四邊形$G_1G_2G_3G_4$為平行四邊形。

證明：如**【圖二十二】**，

∵ $\overline{AI}$為△ABE的中線，

∴ $\overline{AG_1}:\overline{G_1I}=2:1$，

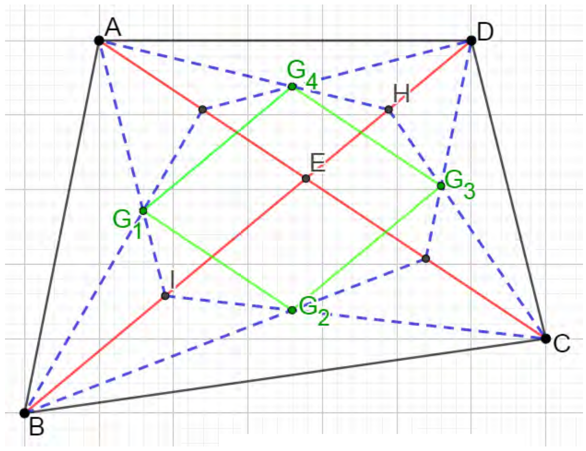
同理，G 為 △ADE 重心，

∴ $\overline{AG_4}:\overline{G_4H}=2:1$，

由於$\overline{AG_1}:\overline{G_1I}$=$\overline{AG_4}:\overline{G_4H}$，故$\overline{G_1G_4}//\overline{IH}$，

同理可證$\overline{G_1G_4}//\overline{G_2G_3}$、$\overline{G_3G_4}//\overline{G_1G_2}$，

故$G_1G_2G_3G_4$為平行四邊形。



【圖二十二】

2.四邊形ABCD為等腰梯形，則對應之四邊形$G_1G_2G_3G_4$為菱形。

證明：如**【圖二十三】**

∵ $\overline{AG_4}:\overline{IG_4}=2:1$；$\overline{AG_1}:\overline{FG_1}=2:1$，

$\overline{G_1G_4}=\frac{2}{3}\overline{IF}$，$\overline{IF}=\frac{1}{2}\overline{BD}$，

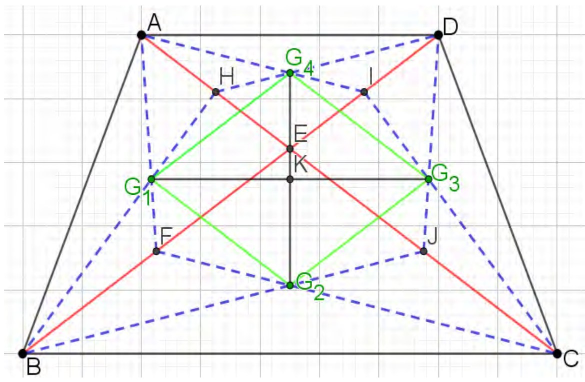
∴ $\overline{G_2G_3}=\overline{G_1G_4}=\frac{1}{3}\overline{BD}$；

$\overline{G_1G_2}=\overline{G_3G_4}=\frac{1}{3}\overline{AC}$，

又$\overline{AC}=\overline{BD}$(ABCD為等腰梯形)，

故$\overline{G_1G_2}=\overline{G_2G_3}=\overline{G_3G_4}=\overline{G_1G_4}$，

可得四邊形$G_1G_2G_3G_4$為一菱形。



【圖二十三】

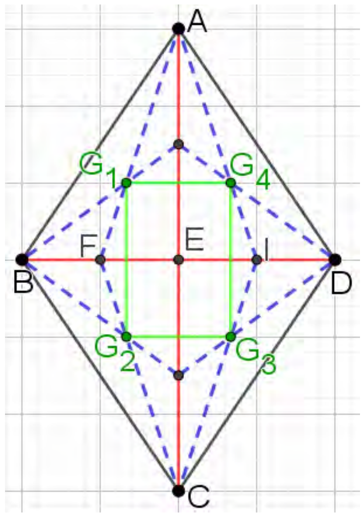
3.四邊形ABCD為菱形，則對應之四邊形$G_1G_2G_3G_4$為長方形。

證明：如**【圖二十四】**

∵ ABCD 為菱形

∴ $\overline{AC}$為對稱軸，△ABE、△ADE 互為對稱圖形

△BCE、△DCE 互為對稱圖形



【圖二十四】

顯然，互為對稱圖形的重心亦互為對稱圖形，

即G_1 、G_4互為對稱點，G_2 、G_3互為對稱點

故$G_1G_2G_3G_4$為一長方形

4.四邊形ABCD為長方形，則對應之四邊形$G_1G_2G_3G_4$為菱形。

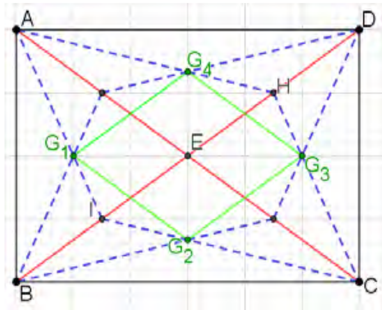
證明：如**【圖二十五】**

前述證明可知$\overline{G_1G_2}//\overline{G_2G_3}$

$\overline{G_1G_2}=\overline{G_3G_4}=\frac{1}{3}\overline{AC}$

$\overline{G_1G_4}//\overline{G_2G_3}$

$\overline{G_1G_4}=\overline{G_2G_3}=\frac{1}{3}\overline{BD}$



【圖二十五】

∵ ABCD 為長方形

∴ $\overline{AC}=\overline{BD}$

因此可進一步得知四邊等長

可得$G_1G_2G_3G_4$為一菱形

5.四邊形ABCD為正方形，則對應之四邊形$G_1G_2G_3G_4$為正方形。

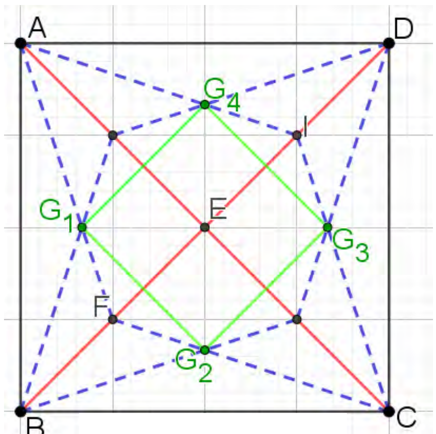
證明：如**【圖二十六】**

因四邊形 ABCD 既為長方形也為菱形，

故為正方形

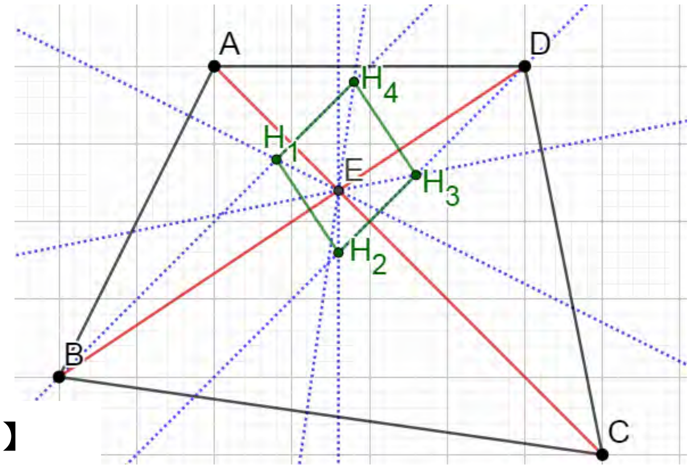
$G_1G_2G_3G_4$為長方形也為菱形

因此為正方形。



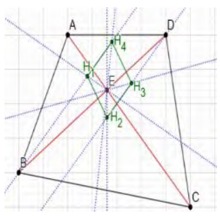
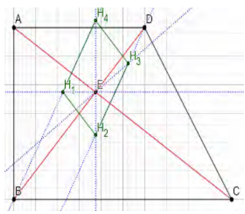
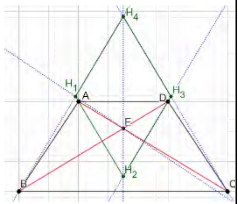
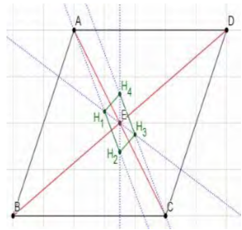
【圖二十六】

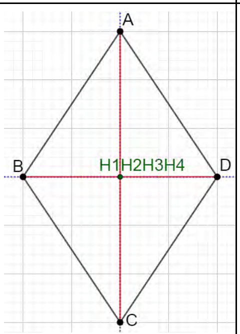
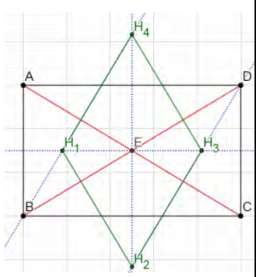
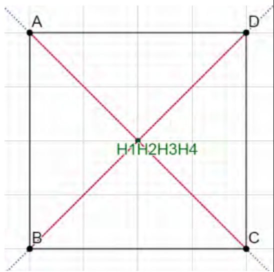
(四)如【圖二十七】，四邊形ABCD中，E為對角線交點，設△EAB、△EBC、△ECD、△EDA的垂心分別為H_1、H_2、H_3、H_4



【圖二十七】

我們透過GEOGEBRA動態觀察四邊形$H_1H_2H_3H_4$，都會是平行四邊形。其他特殊四邊形的情形如下：

四邊形ABCD	任意四邊形	梯形	等腰梯形	平行四邊形
四邊形$H_1H_2H_3H_4$	平行四邊形	平行四邊形	菱形	平行四邊形
圖示				

四邊形ABCD	菱形	長方形	正方形
四邊形$H_1H_2H_3H_4$	一個點	菱形	一個點
圖示			

以下，再針對其必然性，予以證明：

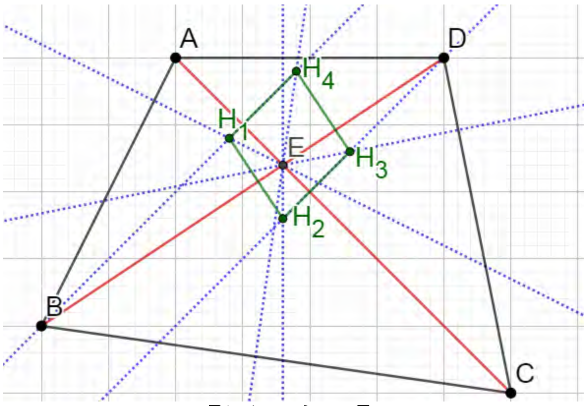
1. 四邊形ABCD為任意四邊形，則對應之四邊形$H_1H_2H_3H_4$為平行四邊形。

證明：如**【圖二十八】**

$\because \overline{H_1H_4} \perp \overline{AC}$且$\overline{H_2H_3} \perp \overline{AC}$， $\therefore \overline{H_1H_4} // \overline{H_2H_3}$

$\because \overline{H_1H_2} \perp \overline{BD}$且$\overline{H_4H_3} \perp \overline{BD}$， $\therefore \overline{H_1H_2} // \overline{H_4H_3}$

故$H_1H_2H_3H_4$為一平行四邊形



【圖二十八】

2. 四邊形ABCD為等腰梯形，則對應之四邊形$H_1H_2H_3H_4$為菱形。

證明：如**【圖二十九】**

(1)以下證明$H_1H_2H_3H_4$為一平行四邊形

$\because \overline{H_1H_4}$都$\overline{H_2H_3} \perp \overline{AC}$， $\therefore \overline{H_1H_4} // \overline{H_2H_3}$

$\because \overline{H_1H_2}$都$\overline{H_4H_3} \perp \overline{BD}$， $\therefore \overline{H_1H_2} // \overline{H_4H_3}$

故$H_1H_2H_3H_4$為一平行四邊形

(2)以下證明$\overleftrightarrow{H_2H_4} \perp \overline{H_1H_3}$

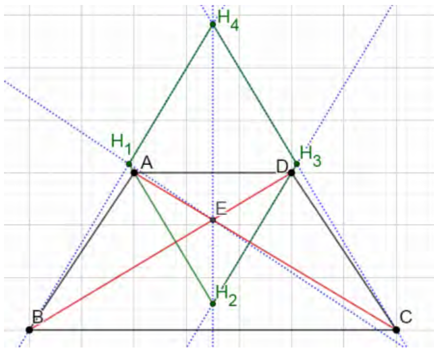
$\because \triangle AEB \cong \triangle DEC$， $\therefore \overline{H_1H_3} // \overline{AD} // \overline{BC}$，

又$\overleftrightarrow{H_2H_4}$是$\overline{AD}$的垂線也是$\overline{BC}$的垂線

$\therefore \overleftrightarrow{H_2H_4} \perp \overline{H_1H_3}$

$\because$ 兩雙對邊分別平行，且對角線互相垂直，

故$H_1H_2H_3H_4$為一菱形

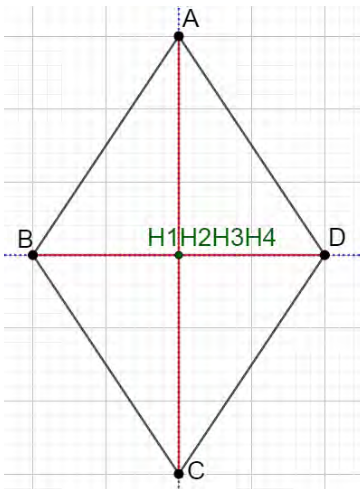


【圖二十九】

3. 四邊形ABCD為菱形，則對應之四邊形$H_1H_2H_3H_4$為一個點。

證明：如**【圖三十】**

$\because$ ABCD 為菱形，$\overline{AC} \perp \overline{BD}$，$\because \triangle ABH_1$、$\triangle CDH_3$、$\triangle DAH_4$的垂心就會剛好是對角線的交點， 故$H_1H_2H_3H_4$在同一點上。



【圖三十】

4.四邊形ABCD為長方形，則對應之四邊形$H_1H_2H_3H_4$為菱形。

證明：如**【圖三十一】**

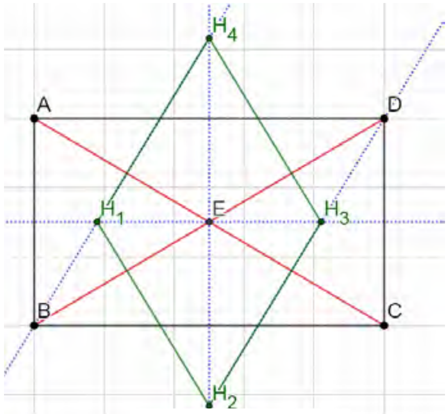
$\because \triangle AEB \cong \triangle DEC$， $\triangle AED \cong \triangle CEB$，

$\overline{H_4H_2}$是$\overline{AD}$、$\overline{BC}$的中垂線，

$\overleftrightarrow{H_1H_3}$是$\overline{AB}$、$\overline{CD}$的中垂線，且$\overline{AD} \perp \overline{AB}$，$\overline{AD} \perp \overline{CD}$

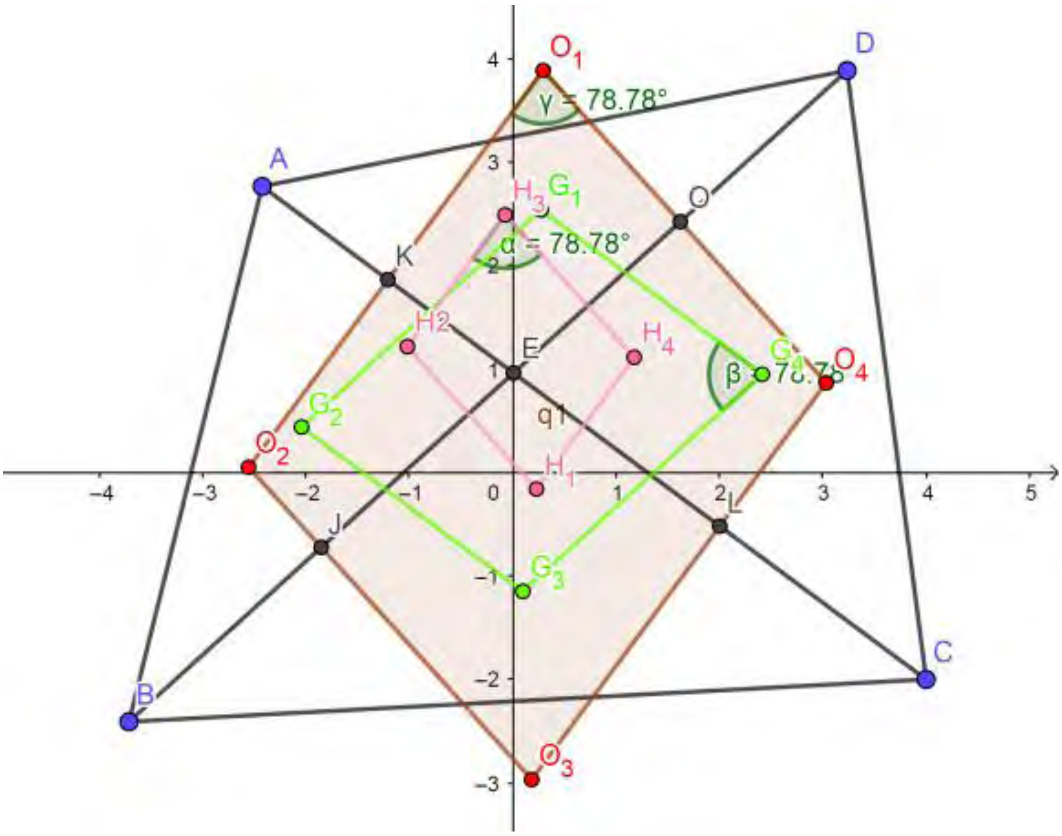
$\therefore \overline{H_2H_4} \perp \overline{H_1H_3}$，$\overline{H_1H_4} = \overline{H_1H_2} = \overline{H_2H_3} = \overline{H_3H_4}$

故$H_1H_2H_3H_4$為一菱形



【圖三十一】

綜合以上，我們透過 Geogebra 觀察任意四邊形 ABCD 對應之外心四邊形$O_1O_2O_3O_4$、重心四形 $G_1G_2G_3G_4$、垂心四邊形 $H_1H_2H_3H_4$有什麼關係，發現這三個四邊形為相似之平行四邊形。如**【圖三十二】(後續相關討論說明由 AA 相似性質可說明平行四邊形之外心四邊形、重心四邊形、垂心四邊形相似。)**



【圖三十二】

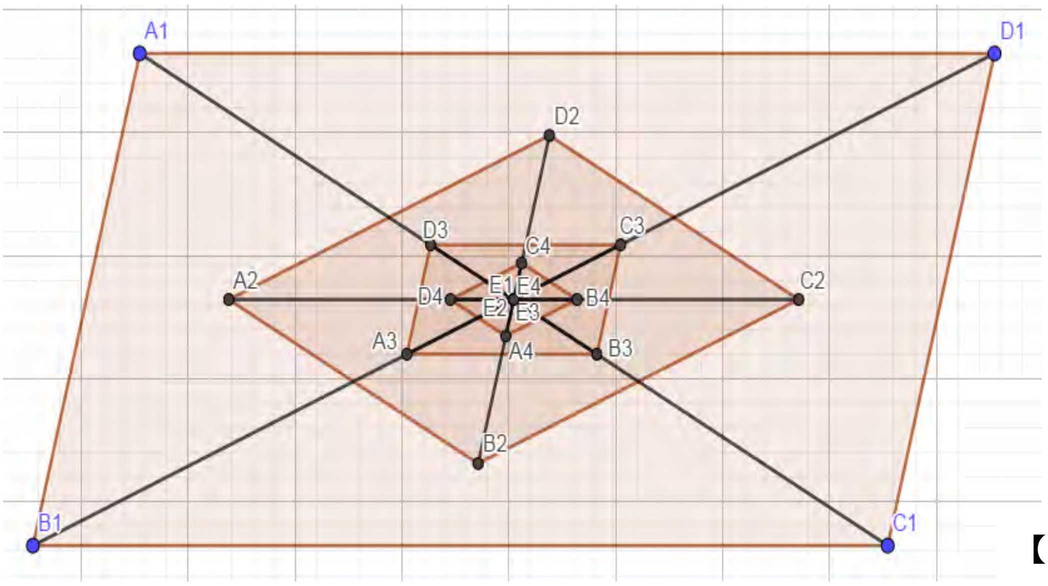
二、討論生成之四心四邊形AnBnCnDn的情形：

接著，我們進一步思考迭代的情形，四心四邊形AnBnCnDn彼此間又有什麼關係呢？

(一)重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的迭代收斂情形：

由於任意四邊形ABCD其對應之四邊形$G_1G_2G_3G_4$必為平行四邊形；而平行四邊形ABCD，其對應之四邊形$G_1G_2G_3G_4$亦僅為平行四邊形，因此討論其迭代的情形，我們僅需就平行四邊形來討論即可，如【**圖三十三**】。設四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線$\overline{A_nC_n}$、$\overline{B_nD_n}$交點E_n，$\triangle E_nA_nB_n$、$\triangle E_nB_nC_n$、$\triangle E_nC_nD_n$、$\triangle E_nD_nA_n$的**重心**分別為A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1}。

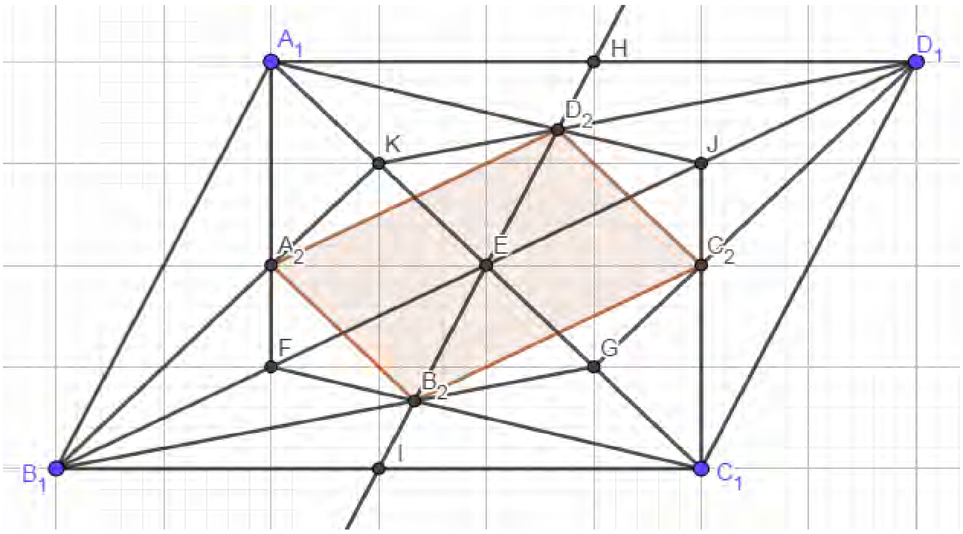
在GEOGEBRA中觀察**平行**四邊形$A_1B_1C_1D_1$，針對迭代的結果，我們有以下的發現：



【圖三十三】

1.重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$ (n>1)對角線交點共點。

2.重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與重心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$相似。



【圖三十四】

證明：【圖三十四】

由於A_2、D_2分別為△EA_1B_1、△EA_1D_1重心，所以$\overline{A_2D_2}=\frac{2}{3}\overline{FJ}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overline{B_1D_1}=\frac{1}{3}\overline{B_1D_1}$，

且$\overline{A_2D_2}//\overline{B_1D_1}$，同理，$\overline{A_2B_2}=\frac{2}{3}\overline{A_1C_1}$，$\overline{A_2B_2}//\overline{A_1C_1}$。

連接$\overleftrightarrow{D_2B_2}$，設分別交於$\overline{A_1D_1}$，$\overline{B_1C_1}$於H、I，$\because D_2$、$B_2$分別為△$EA_1D_1$、△$EB_1C_1$重心，$\therefore\overline{A_1H}=\frac{1}{2}\overline{A_1D_1}$，$\overline{B_1I}=\frac{1}{2}\overline{B_1C_1}$，由於$A_1B_1C_1D_1$為平行四邊形，可得知，$\overline{A_1H}//\overline{B_1I}$且$\overline{A_1H}=\overline{B_1I}$，$\therefore A_1B_1IH$為平行四邊形。

故$\overline{HI}//\overline{A_1B_1}$亦即$\overline{D_2B_2}//\overline{A_1B_1}$，且$\overline{D_2B_2}=\frac{2}{3}\overline{IH}=\frac{2}{3}\overline{A_1B_1}$

因此$\overline{D_{n+2}B_{n+2}}//\overline{A_{n+1}B_{n+1}}//\overline{A_nC_n}$，且$\overline{D_{n+2}B_{n+2}}=\frac{2}{3}\overline{A_{n+1}B_{n+1}}==\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\overline{A_nC_n}=\frac{2}{9}\overline{A_nC_n}$

同樣的，我們也可以進一步得出$\overline{C_{n+2}D_{n+2}}//\overline{A_{n+1}C_{n+1}}//\overline{B_nC_n}$，

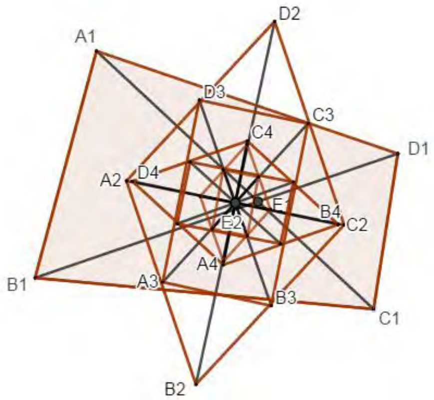
且$\overline{C_{n+2}D_{n+2}}=\frac{2}{3}\overline{A_{n+1}C_{n+1}}==\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\overline{B_nC_n}=\frac{2}{9}\overline{B_nC_n}$依此可知對應角相等、對應邊成比例，因此四邊形$A_nB_nC_nD_n$與四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$相似，且邊長比為 9：2。

(二)外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的迭代收斂情形(如【圖三十五】)：

以下討論外心連線段所生成的四邊形的迭代情形：

設四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線$A_nC_nD_n$、B_nD_n交點E_n，△$E_nA_nB_n$、△$E_nB_nC_n$、△$E_nC_nD_n$、△$E_nD_nA_n$的**外心**分別為A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1}。

在GEOGEBRA中觀察任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$，其迭代後的結果如下：



【圖三十五】

發現以下幾點性質：

1.除了初始圖形$A_1B_1C_1D_1$不為平行四邊形，外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$ (n>1)必為平行四邊形。

2.外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$ (n>1)對角線交點共點。

3.外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與外心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$相似。

4.有別於重心，重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與重心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$的邊長比為 9：2，然而外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與外心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$的邊長，卻會因為$A_1$、$B_1$、$C_1$、$D_1$的拉動而影響其邊長比例關係

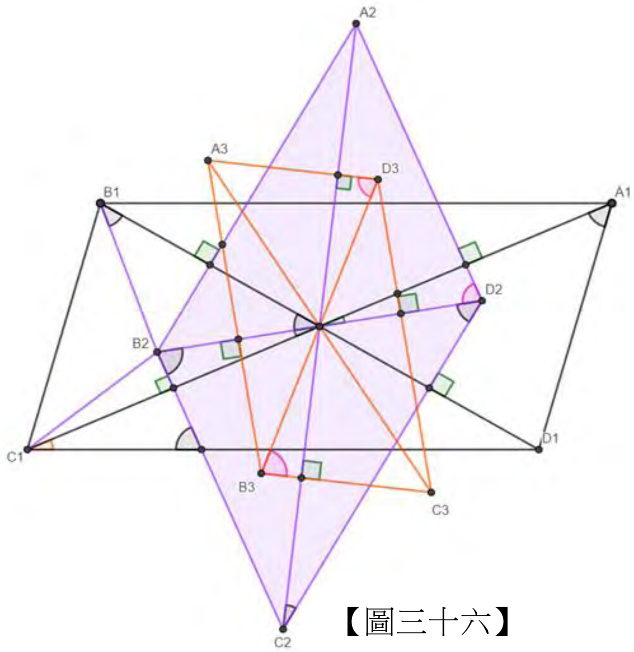
我們觀察各四邊形的長度與角度的關係(如下表)，也支持我們的發現。

n	$\overline{AnBn}$	$\overline{CnDn}$	$\angle B_nA_nD_n$	$\angle A_nB_nC_n$	En
1	8.28	5.54	86.39°	80.08°	(1.55， -1.95)
2	7.57	7.57	118.2°	61.8°	(0.74， -2)
3	3.92	3.92	90.85°	89.15°	(0.74， -2)
4	4.3	4.3	118.2°	61.8°	(0.74， -2)
5	2.22	2.22	90.85°	89.15°	(0.74， -2)

n	四邊形$A_nB_nC_nD_n$面積	$A_nB_n/B_{n+2}C_{n+2}$	對角線$\overline{A_nC_n}$長度	對角線$\overline{B_nD_n}$長度
1	79.58	2.11	13.35	13.53
2	51.23	1.76	7.83	13.08
3	25.62	1.76	7.58	7.68
4	16.49	1.76	4.44	7.42
5	8.25	1.76	4.3	4.35

由於任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$，其對應之$O_1O_2O_3O_4$的圖形均為平行四邊形。因此我們直接以平行四邊形作為初始圖形來討論外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$迭代的情形。

以下證明**外心四邊形AnBnCnDn與外心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$必相似。**



【圖三十六】

證明：如**【圖三十六】**

觀察平行四邊形$A_1B_1C_1D_1$與其外心四邊形$A_2B_2C_2D_2$內角的關係：

$\because B_2$為$\triangle C_1B_1E_1$ 的外心，

由外心到三頂點等距離知$\triangle B_2B_1E_1$、$\triangle B_2C_1E_1$、$\triangle B_2B_1C_1$均為等腰三角形，

由等腰三角形底角相等性質，我們可以進一步知道$\angle C_1B_1B_2+\angle B_2B_1E_1+\angle B_2E_1C_1=90°$，

又$\overleftrightarrow{B_2C_2}$垂直$\overleftrightarrow{E_1C_1}$，$\angle C_2B_2E_1+\angle B_2E_1C_1=90°$，因此

$\angle C_2B_2E_1=\angle C_1B_1B_2+\angle B_2B_1E_1=\angle C_1B_1E_1$。

同理$\angle A_2B_2E_1=\angle B_1C_1E_1$，$\angle B_2A_2E_1=\angle B_1A_1E_1$，$\angle D_2A_2E_1=\angle A_1B_1E_1$。

接續觀察外心四邊形$A_2B_2C_2D_2$與其外心四邊形$A_3B_3C_3D_3$內角的關係：

再次運用外心到三頂點等距及等腰三角形底邊相等性質，可推演出內角彼此間的關係。是以利用外心四邊形$A_2B_2C_2D_2$來串聯起平行四邊形$A_1B_1C_1D_1$與外心四邊形$A_3B_3C_3D_3$內角的關係，可知內角可對應相等。

同時由於平行四邊形$A_1B_1C_1D_1$與外心四邊形$A_3B_3C_3D_3$對角線切割出四個三角形，彼此內角對應相等，因此四個三角形相似，所以可進一步得到平行四邊形$A_1B_1C_1D_1$與外心四邊形$A_3B_3C_3D_3$相似。同理可證，**外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與外心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$必相似**

(三)生成的垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$收斂情形與彼此間的關係迭代情形：

設四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線$\overline{A_nC_n}$、$\overline{B_nD_n}$交點E_n，△$E_nA_nB_n$、△$E_nB_nC_n$、△$E_nC_nD_n$、△$E_nD_nA_n$的**垂心**分別為A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1}。

在GEOGEBRA中觀察任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$，其迭代後的結果如下：

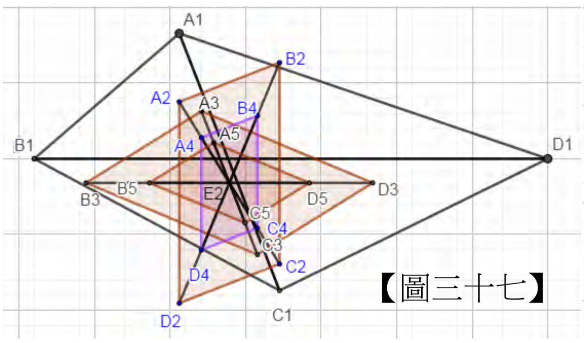
1. 如【圖三十七】垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與垂心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$相似。

2. 如【圖三十八】迭代所生成的垂心四邊形不一定是愈來愈小，也可能愈來愈大。

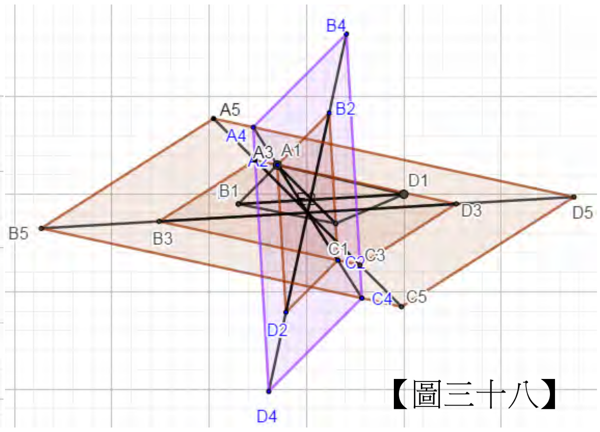
3. 如【圖三十九】在對角線$\overline{A_1C_1}$垂直$\overline{A_1B_1}$時，垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與垂心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$疊合。

4. 如【圖四十】可以找到四邊形$A_1B_1C_1D_1$，垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與四邊形$A_1B_1C_1D_1$全等。

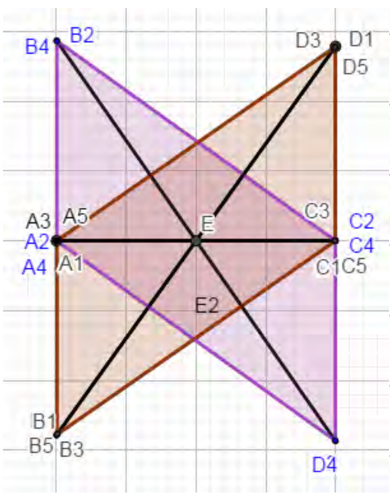
5. 如【圖四十一】不同圖形收斂的速度差異很大，菱形所生成的垂心四邊形直接收斂成一點。

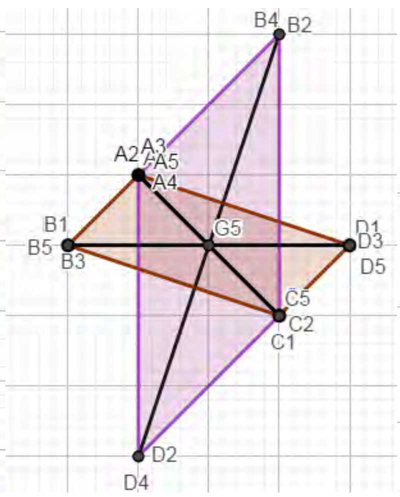


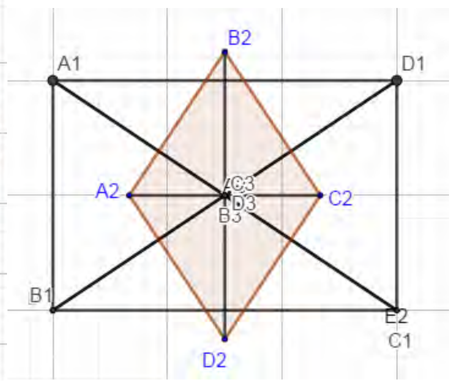
【圖三十七】



【圖三十八】







【圖三十九】

【圖四十】

【圖四十一】

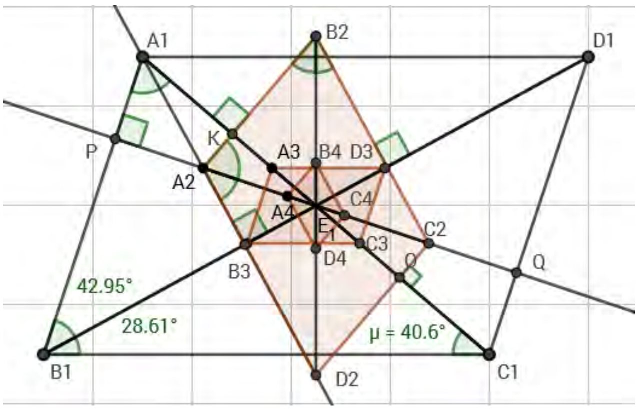
先前我們已經證明：無論一般的四邊形$A_1B_1C_1D_1$，所生成的垂心四邊形$H_1H_2H_3H_4$必為平行四邊形，在此，我們僅進一步說明生成的垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與垂心四邊形$\mathbf{A}_{n+2}\mathbf{B}_{n+2}\mathbf{C}_{n+2}\mathbf{D}_{n+2}$必相似。

證明：

為方便說明，如【圖四十二】，我們假設初始圖形為**平行**四邊形$A_1B_1C_1D_1$，由於四邊形$A_1B_1C_1D_1$為平行四邊形，因此所生成的垂心A_2、C_2連線段必垂直$\overline{A_1B_1}$與$\overline{C_1D_1}$且通過對角線交點 E1，且A_2、B_2同時落在以B_1為頂點，$\overline{A_1C_1}$為底邊的垂線上，即$\angle A_2KE_1=90^\circ$。

在$\triangle A_2KE_1$與$\triangle A_2KE_1$中，$\angle A_1PE_1=\angle A_2KE_1=90^\circ$，又共用$\angle A_1PE_1$，因此$\angle PA_1E_1=\angle KA_2E_1$。利用這個方法，我們可以推導出生成的垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$各內角彼此間的關係，因此我們可以進一步推導出生成的垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與垂心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$內角對應相等，然而，證明四邊形相似，不能只有證明內角對應相等，對應邊也必須相等啊!!

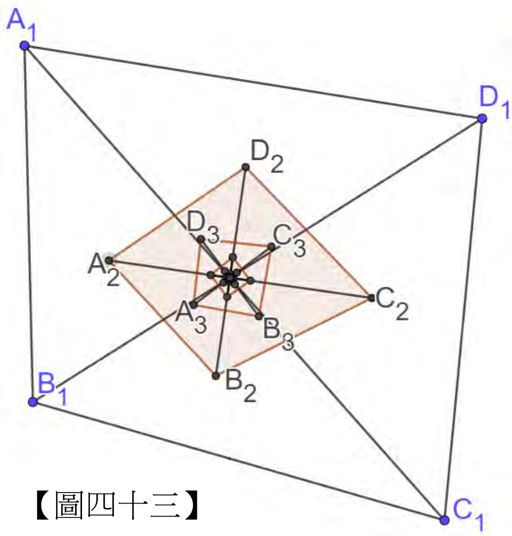
這裡必須注意到，我們知道的不只是四內角對應相等，而是由對角線切割出來的四組三角形均對應相等，由四組三角形均對應相等，我們就可以肯定由分別四個三角形所拼合而成的四邊形垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與垂心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$相似。



【圖四十二】

(四) **內心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的迭代收斂情形：**

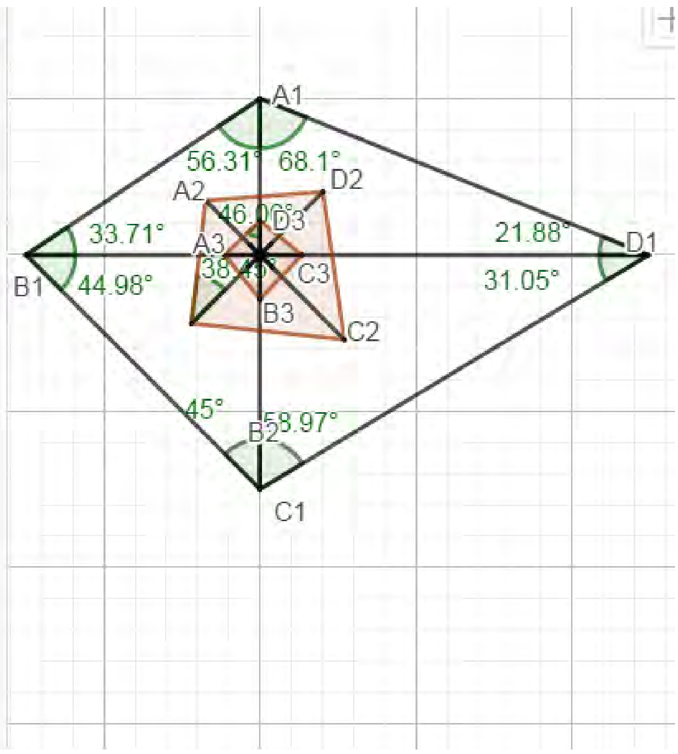
設四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線$\overline{A_nC_n}$、$\overline{B_nD_n}$交點E_n，$\triangle E_nA_nB_n$、$\triangle E_nB_nC_n$、$E_nC_nD_n$、$E_nD_nA_n$的**內心**分別為A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1}。【圖四十三】，在GEOGEBRA中觀察任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$，其迭代後的結果如下：



【圖四十三】

觀察完外心與重心，我們懷疑任意四邊形在內心的狀況下迭代也與外心、重心一樣，有規律地出現相似圖形，但卻沒有看到有這種情形。然而我們又觀察到無論$A_1B_1C_1D_1$為何種四邊形，對角線交點與$A_nB_nC_nD_n$ (n>2)的對角線交點皆為同一點(如【圖四十三】)。換言之，我們可稱E_n就是對角線交點<E_n>的收斂點。而且愈迭代所得的四邊形的角度愈接近 90°(如【圖四十四】左表)，換言之，圖形愈來愈接近正方形。

	∠ABC	∠BCD	∠CDA	∠DAB
1	78.69°	103.97°	52.93°	124.41°
2	89.42°	75.72°	94.16°	100.7°
3	82.27°	85.5°	96.99°	95.24°
4	83.41°	91.65°	95.7°	89.24°
5	87.65°	93.57°	92.54°	86.24°
6	90.72°	92.95°	89.5°	86.83°
7	91.81°	91.25°	88.15°	88.8°
8	91.5°	89.72°	88.44°	90.33°
9	90.62°	89.08°	89.39°	90.91°
10	89.86°	89.23°	90.16°	90.76°
11	89.54°	89.7°	90.46°	90.31°
12	89.62°	90.08°	90.38°	89.93°
13	89.85°	90.23°	90.15°	89.77°
14	90.04°	90.19°	89.96°	89.81°
15	90.11°	90.08°	89.89°	89.92°
16	90.1°	89.98°	89.9°	90.02°
17	90.04°	89.94°	89.96°	90.06°

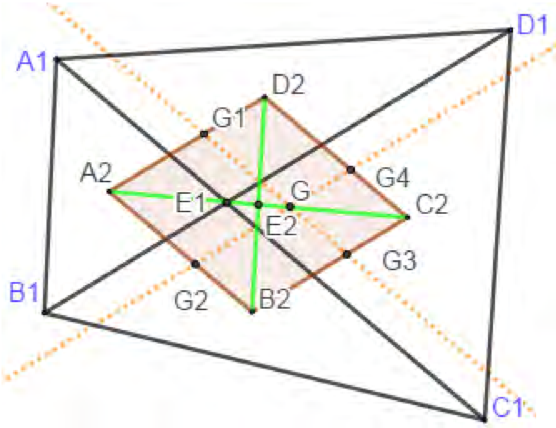


【圖四十四】

三、討論四心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的收斂點及與原心的關係：

(一)重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的收斂點及與原四邊形$\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$重心的關係：

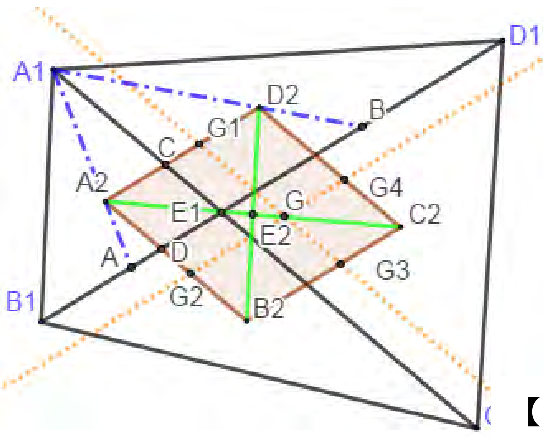
在思考重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的收斂情形時，我們同時也觀察了原四邊形重心G的位置，發現收斂點E_2，原四邊形$A_1B_1C_1D_1$的對角線交點E_1，與重心G彼此間有一個很有趣的現象，那就是E剛好是E_2與G的中點【圖四十五】。然而，這是為什麼呢？



【圖四十五】

以下證明**原四邊形$A_1B_1C_1D_1$的對角線交點與原四邊形$A_1B_1C_1D_1$重心互為以重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的收斂點為對稱中心的對稱點。**

證明: 如【圖四十六】我們必須先清楚四邊形$A_1B_1C_1D_1$的重心G是如何找出來的，首先，分別求出$\triangle A_1B_1D_1$、$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle D_1B_1C_1$、$\triangle A_1D_1C_1$的重心位置G_1、G_2、G_3、G_4，而重心G必為$\overline{G_1G_3}$與$\overline{G_2G_4}$的交點，而$\triangle A_1B_1D_1$可分割成$\triangle A_1B_1E_1$及$\triangle A_1D_1E_1$，因此G_1在$\overline{A_2D_2}$上，且由槓桿原理知$\overline{G_1A_2}:\overline{G_1D_2}=\overline{D_1E_1}:\overline{B_1E_1}$。同理$\overline{G_2A_2}:\overline{G_2B_2}=\overline{C_1E_1}:\overline{A_1E_1}$。



【圖四十六】

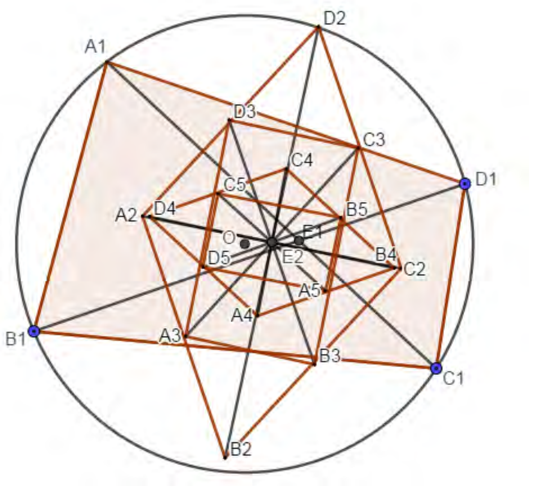
再由A_2、D_2為$\triangle A_1B_1E_1$、$\triangle A_1D_1E_1$的重心可知，$\overline{CA_2}:\overline{CD_2}=\frac{2}{3}\overline{AE_1}:\frac{2}{3}\overline{BE_1}=\overline{AE_1}:\overline{BE_1}$

$=\frac{1}{2}\overline{B_1E_1}:\frac{1}{2}\overline{D_1E_1}=\overline{B_1E_1}:\overline{D_1E_1}$，同理$\overline{DA_2}:\overline{DB_2}=\overline{A_1E_1}:\overline{C_1E_1}$。

又E_2為平行四邊形$A_2B_2C_2D_2$對角線交點，因此E_1**與G互為以**E_2**為對稱中心的對稱點**。

(二) **外心四邊形**$A_nB_nC_nD_n$**的收斂點及與原四邊形**$A_1B_1C_1D_1$**外接圓圓心的關係【圖四十七】**

在討論重心的情形下，我們發現無論$A_1B_1C_1D_1$圖形為何，我們發現E_2剛好是E_1與G的中點。我們思索著，在討論外心四邊形的情況下，會不會同樣的現象呢？然而，任意四邊形ABCD均有重心G，而任意的四邊形並不一定都有所謂的外心，因此，四邊形$A_1B_1C_1D_1$為了要有外心，我們必須限定四邊形$A_1B_1C_1D_1$為圓內接四邊形，而在GEOGEBRA的觀察下，我們竟然發現也有類似的結果：



【圖四十七】

1. **外心四邊形**$A_nB_nC_nD_n$**對角線交點**E_n**收斂，且**$E_n = E_2$
2. **四邊形**$A_1B_1C_1D_1$**外接圓圓心O，對角線交點**E_1**，則**E_1**、**E_2**、O共線，且**E_2**為**E_1**、O的中點。**

證明 1：

設四邊形$A_1B_1C_1D_1$對角線交點為 E_1，$\triangle A_1B_1E_1$、$\triangle B_1C_1E_1$、$\triangle C_1D_1E_1$、$\triangle D_1A_1E_1$的外心分別為A_2、B_2、C_2、D_2

依此原理，設外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$ ，對角線交點$E_n (n \geq 2)$

$\triangle A_nB_nE_n$、$\triangle B_nC_nE_n$、$\triangle C_nD_nE_n$、$\triangle D_nA_nE_n$外心分別為$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$

則$A_nB_nC_nD_n$為平行四邊形$(n \geq 2)$ ，

當 n= 1時，從前面的證明知任意四邊形ABCD，其對應之$O_1O_2O_3O_4$為平行四邊形，因此外心四邊形$A_2B_2C_2D_2$是平行四邊形，

由平行四邊形對角線互相平分及平行四邊形對角線將平行四邊形切割成 2 組全等三角形等性質可知$\overline{A_2C_2}$、$\overline{B_2D_2}$互相平分且$\triangle E_2A_2B_2 \cong \triangle E_2C_2D_2$， $\triangle A_2E_2D_2 \cong \triangle C_2E_2B_2$，

故$\overline{A_3E_2} = \overline{C_3E_2}$，且以$E_2$為對稱中心，$A_3$、$C_3$互為對稱點，

同理$\overline{D_3E_2} = \overline{B_3E_2}$，且以$E_2$為對稱中心，$D_3$、$B_3$互為對稱點，

故$A_3B_3C_3D_3$為平行四邊形，且E_2也剛好為平行四邊形$A_3B_3C_3D_3$對角線交點E_3，

也就是$E_2 = E_3$，依此遞移得出$E_n = E_2$。

證明 2(**E_2為E_1、O的中點**)：

$\because \overline{OA_1} = \overline{OB_1} = \overline{OC_1} = \overline{OD_1}$

$\therefore$ 令$\angle OA_1C_1 = \angle OC_1A_1 = x°$，$\angle OB_1D_1 = \angle OD_1B_1 = y°$

又$\triangle A_1B_1E_1 \sim \triangle D_1C_1E_1$，$A_2$為$\triangle A_1B_1E_1$的外心，$C_2$為$\triangle C_1D_1E_1$的外心

$\Rightarrow \angle A_2A_1B_1 = \angle A_2B_1A_1 = \angle C_2D_1C_1 = \angle C_2C_1D_1 = a°$

$\angle A_2A_1E_1 = \angle A_2E_1A_1 = \angle C_2D_1E_1 = \angle C_2E_1D_1 = b°$

$\angle C_2C_1O = z°$，$\angle C_2E_1C_1 = \angle C_2C_1E_1 = b° + z° = \angle A_2B_1E_1 = \angle A_2E_1B_1 = x° + z°$

$\because \triangle C_2D_1O \cong \triangle C_2C_1O \quad \therefore z° = b° + y°$

又$\overleftrightarrow{E_1A_2}$為$\overline{A_1B_1}$中垂線

$\Rightarrow \angle A_1OD_1 = 90° - a° - b° - x° = z° = b° + y° = \angle OD_1C_2$

$$\angle A_1A_2O = \angle OA_2B_1 = \frac{360° - \angle A_1A_2B_1}{2} = \frac{360° - (180° - 2a°)}{2} = 90° + a°$$

同理$\angle OC_2D_1 = 90° + a°$

$\triangle A_2A_1O$、$\triangle OC_2D_1$中

$\because \angle A_1OA_2 = \angle OD_1C_2$，$\overline{OA} = \overline{OD}$，$\angle A_1A_2O = \angle D_1C_2O$

$\therefore \triangle A_1A_2O \cong \triangle OC_2D_1$(AAS 全等)

$\Rightarrow \overline{OA_2} = \overline{D_1C_2} = \overline{C_2E_1}$，$\overline{OC_2} = \overline{A_2A_1} = \overline{A_2E_1}$

$\therefore OA_2E_1C_2$為平行四邊形

而E_2又是平行四邊形對角線交點，由對角線互相平分可知E_2為E_1與O的中點。

陸、結論

一、四邊形ABCD，對角線切割 4 個三角形，探討所生成之內心四邊形、外心四邊形、重心四邊形、垂心四邊形的性質。

(一)任意四邊形ABCD所生成的內心四邊形，必為對角線互相垂直的四邊形。

特殊四邊形ABCD所生成的內心四邊形情形如下：

四邊形 ABCD	梯形	等腰梯形	平行四邊形	菱形	長方形	正方形
四邊形$I_1I_2I_3I_4$	非特殊四邊形	梯形	菱形	正方形	菱形	正方形

(二) 任意四邊形ABCD所生成的外心四邊形為平行四邊形。

特殊四邊形ABCD所生成的的外心四邊形情形如下：

四邊形ABCD	等腰梯形	梯形	平行四邊形	菱形	長方形	正方形
四邊形$O_1O_2O_3O_4$	菱形	平行四邊形	平行四邊形	長方形	菱形	正方形

(三) 任意四邊形ABCD所生成的重心四邊形為平行四邊形。

特殊四邊形ABCD所生成的重心四邊形情形如下：

四邊形$ABCD$	等腰梯形	梯形	平行四邊形	菱形	長方形	正方形
四邊形$G_1G_2G_3G_4$	菱形	平行四邊形	平行四邊形	長方形	菱形	正方形

(四)任意四邊形 ABCD 所生成的垂心四邊形為平行四邊形。

特殊四邊形ABCD所生成的垂心四邊形情形如下：

四邊形$ABCD$	等腰梯形	梯形	平行四邊形	菱形	長方形	正方形
四邊形$H_1H_2H_3H_4$	菱形	平行四邊形	平行四邊形	一個點	菱形	一個點

(五) 任意四邊形 ABCD所生成的外心四邊形、重心四邊形、垂心四邊形相似。

二、四心四邊形$A_nB_nC_nD_n$迭代收斂情形：

(一)任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$所生成的重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$均為平行四邊形，且重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與重心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$相似，邊長比為 9：2，且重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$ (n>1)對角線交點共點。

(二)任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$所生成的外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$均為平行四邊形，且外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$ 與外心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$相似，另外，外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$ (n>1)對角線交點共點。

(三)任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$所生成的垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$均為平行四邊形，且垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$ 與垂心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$相似，迭代所得垂心四邊形不一定是愈來愈小，也可能愈來愈大，此外，在對角線$\overline{A_1C_1}$垂直$\overline{A_1B_1}$時，垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與垂心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$疊合。

(四) 非特殊四邊形$A_1B_1C_1D_1$的內心四邊形亦為非特殊四邊形，但**圖形愈來愈接近正方形**。且對角線交點與$A_nB_nC_nD_n$ (n>2)的對角線交點皆為同一點(如【圖四十三】)。

三、重心、外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的收斂點及與原心的關係

(一) **重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的收斂點及與原四邊形$A_1B_1C_1D_1$的關係：**

1. 重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線交點E_n收斂，且$E_n=E_2$
2. 原四邊形$A_1B_1C_1D_1$的對角線交點E_1，原四邊形$A_1B_1C_1D_1$重心 G，E_1、G 中點恰好是重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$收斂點，亦即重心四邊形$A_2B_2C_2D_2$對角線交點E_2。

(二)**外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的收斂點及與原四邊形$A_1B_1C_1D_1$外接圓圓心的關係：**

1. 外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線交點E_n收斂，且$E_n=E_2$
2. 圓內接四邊形$A_1B_1C_1D_1$外接圓圓心O，對角線交點E_1，O、E_1的中點恰好是外心四邊形的收斂點，亦即重心四邊形$A_2B_2C_2D_2$對角線交點E_2。

柒、參考資料

- 林哲佑、朱柏翰、李沛宸（2012）。**第 52 屆全國中小學科展作品–心心相印**。2012 年 11 月 27 日，取自「科展群傑廳」: http://science.ntsec.edu.tw/ScienceContent.aspx?cat=&a=0&fld=1000000&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=9618

- 張欣雅、陳芊卉、蔡佩珊(2013)。**第五十三屆全國中小學科展作品－多個三角形的重心連線性質探討**。取自「科展群傑廳」: https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=10131

- 張幼賢(2017)。國中數學課本第五冊。**第三章外心、內心與重心**。台南市：翰林出版社。

【評語】030416

本作品主要探討由連接任意四邊形ABCD的對角線切割出的4個三角形，分別考慮此4個三角形之四心(內、外、重、垂)連線所新生成的四邊形與原四邊形ABCD的關聯性。這是一個有趣的作品，論證清楚，值得嘉許，可惜的是結論不夠深入。若能應用更深入的幾何及解析的方法，應能得到更深入的結果，整個作品會更完整。

作品海報

壹、研究動機

在我們上數學課教到三角形的全等性質後，我們好奇在三角形中還可以發現什麼其他不一樣的，於是上課時提出了這個疑問，老師便介紹了外心、內心、重心和垂心，所以我們開始尋找在各種不同的四邊形中對角線切割形成的四個三角形中的四心連接成的形狀。除此之外，亦搜尋了全國科展中曾經研究過的問題：第五十三屆全國科展「多個三角形的重心連線性質探討」，此作品討論到在 n 邊形中任取一點 P，對 P 點重複做重心 n 邊形迭代，發現各層重心的距離關係以及 P 點為第 k 層($k\to\infty$)的收斂點。我們以此為基礎，想由四邊形的對角線切割成的四個三角形，來討論其四心生成的四邊形具什麼性質，以及其迭代收斂情形。

貳、研究目的

一、討論連接任意四邊形的對角線後，產生四個三角形之四心(內外重垂)連線段，分別生成的四邊形(四心多邊形)有什麼性質。

二、討論四心多邊形迭代收斂情形。

三、討論迭代收斂點與原心、原圖形對角線交點的關係。

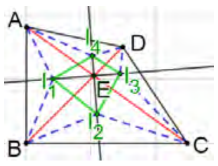
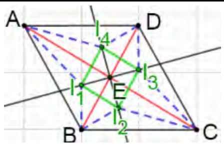
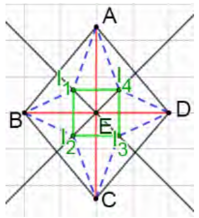
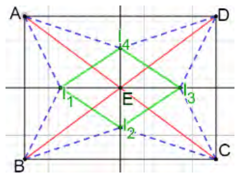
參、研究器材

電腦、GeoGebra、Word

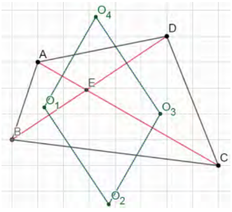
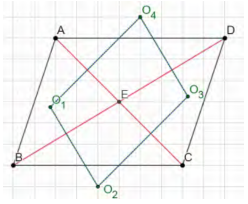
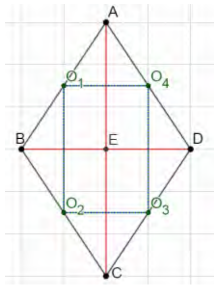
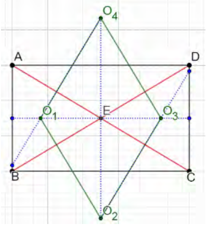
肆、研究方法過程與結果：

一、探討四邊形ABCD，對角線切割 4 個三角形，探討所生成之內心四邊形、外心四邊形、重心四邊形、垂心四邊形的性質。

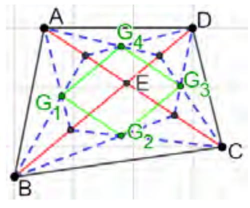
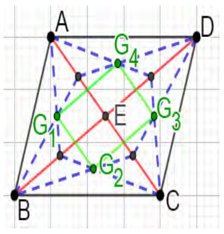
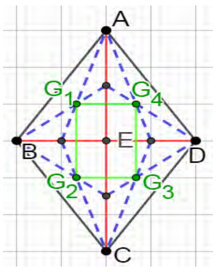
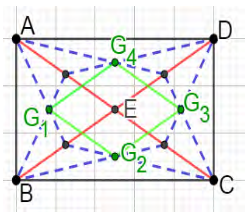
(一)運用內心為角平分線交點等性質，得出內心四邊形必為對角線互相垂直的四邊形，其他特殊圖形所得內心四邊形圖形如下：

四邊形ABCD	任意四邊形	平行四邊形	菱形	長方形
四邊形$I_1I_2I_3I_4$	非特殊四邊形	菱形	正方形	菱形
圖示				

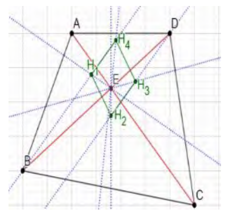
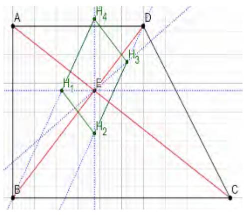
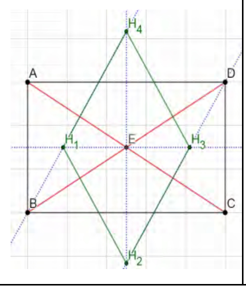
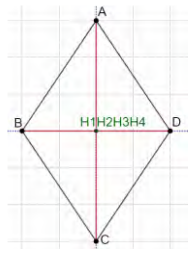
(二) 運用外心為三中垂線交點、中垂線的對稱性、平行線等性質，得出外心四邊形必為平行四邊形，其他特殊圖形所得外心四邊形圖形如下：

四邊形ABCD	任意四邊形	平行四邊形	菱形	長方形
四邊形$O_1O_2O_3O_4$	平行四邊形	平行四邊形	長方形	菱形
圖示				

(三) 運用重心到頂點與對邊中點的距離比為 2：1 以及平行線截比例線段等性質，得出重心四邊形必為平行四邊形，其他特殊圖形所得內心四邊形圖形如下：

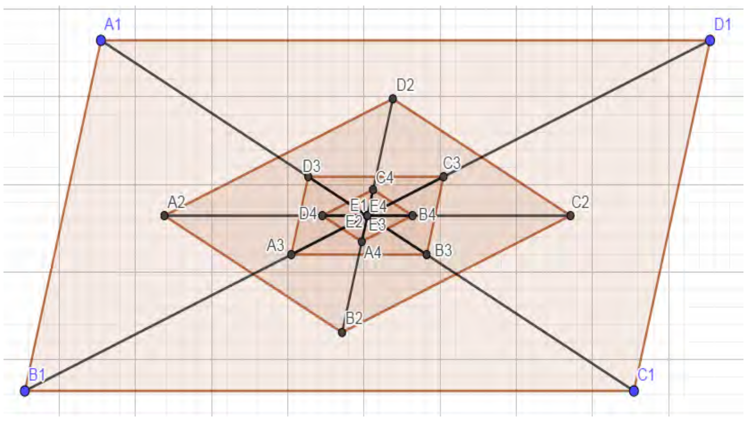
四邊形ABCD	任意四邊形	平行四邊形	菱形	長方形
四邊形$G_1G_2G_3G_4$	平行四邊形	平行四邊形	長方形	菱形
圖示				

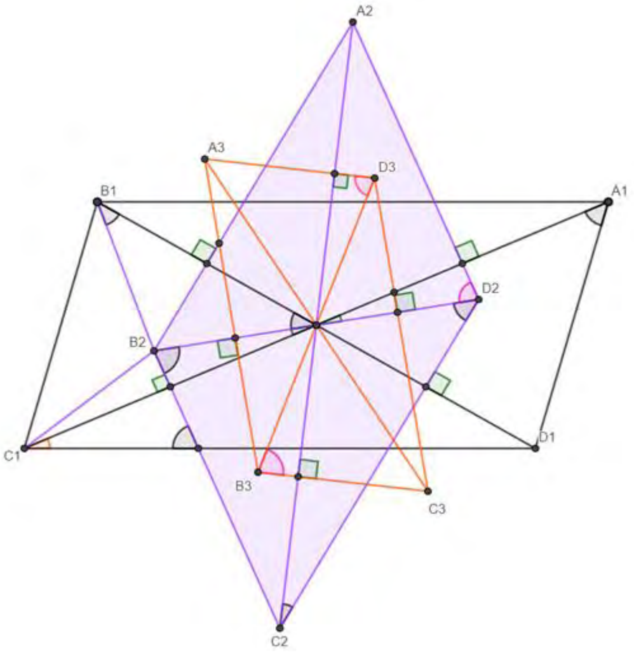
(四) **運用垂心為三高交點、平行線等性質，得出垂心四邊形必為平行四邊形，其他特殊圖形所得內心四邊形圖形如下：**

四邊形ABCD	任意四邊形	梯形	長方形	菱形
四邊形$H_1H_2H_3H_4$	平行四邊形	平行四邊形	菱形	一個點
圖示				

二、**四心四邊形$A_nB_nC_nD_n$迭代收斂情形：**

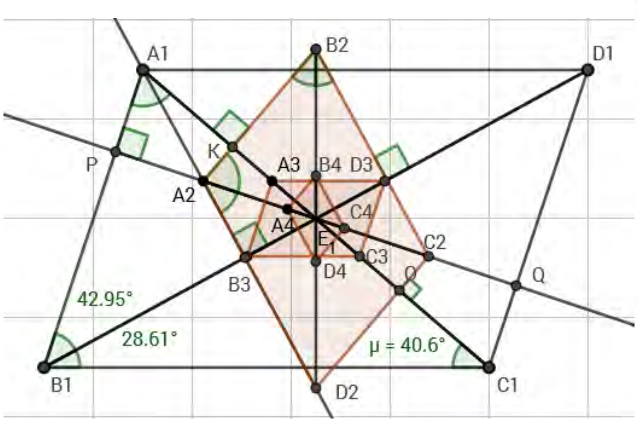
(一)**探討重心四邊形的迭代關係**：如左下圖，利用重心等性質可知重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與重心四邊形$A_{n-2}B_{n-2}C_{n-2}D_{n-2}$的對邊同時與重心四邊形$A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$的對角線互相平行，繼而可知；再利用 AA 相似性質，可知重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與重心四邊形$A_{n-2}B_{n-2}C_{n-2}D_{n-2}$的內角對應相等，可推導出重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與重心四邊形$A_{n-2}B_{n-2}C_{n-2}D_{n-2}$相似，且邊長比為 9：2。

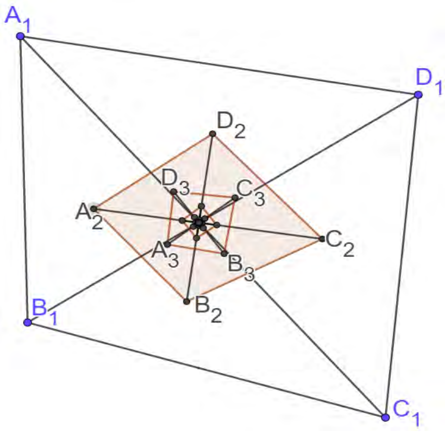




(二))**探討外心四邊形的迭代關係**：如右上圖，外心四邊形不像重心四邊形一樣，有著重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與重心四邊形$A_{n-2}B_{n-2}C_{n-2}D_{n-2}$的四邊分別互相平行的性質。然而，利用外心為中垂線交點、運用角度的分析，可以知道$\angle A_2B_2E_1=\angle B_1C_1E_1$，$\angle C_3B_3E_1=\angle A_2B_2E_1$，透過分析外心四邊形$A_{n-2}B_{n-2}C_{n-2}D_{n-2}$、外心四邊形$A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$與外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$經對角線所切割出來的 8 個內角之間的關係，就可知道外心四邊形$A_{n-2}B_{n-2}C_{n-2}D_{n-2}$與外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$相似。

(三) **探討垂心四邊形的迭代關係**：如左下圖，運用類似外心四邊形的性質，可推得任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$所生成的垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$均為平行四邊形，且垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$ 與垂心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$相似，然而迭代所得垂心四邊形不一定是愈來愈小，也可能愈來愈大，此外，在對角線$\overline{A_1C_1}$垂直$\overline{A_1B_1}$時，垂心四邊形$A_nB_nC_nD_n$與垂心四邊形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$疊合。



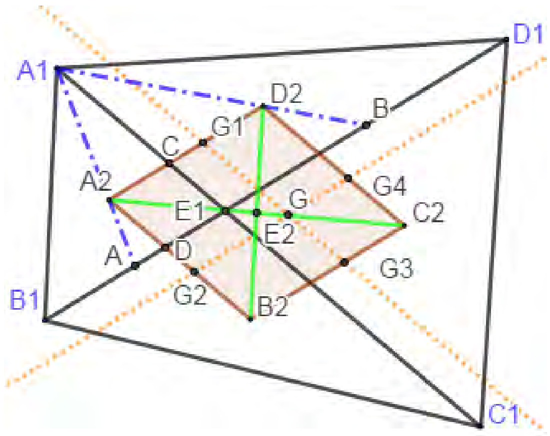


(四) **探討內心四邊形的迭代關係**：如右上圖非特殊四邊形$A_1B_1C_1D_1$的內心四邊形亦為非特殊四邊形，但**圖形愈來愈接近正方形**。且對角線交點與$A_nB_nC_nD_n$ (n>2)的對角線交點皆為同一點。

三、討論四心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的收斂點及與原心的關係：

(一)重心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的收斂點及與原四邊形$A_1B_1C_1D_1$重心 G 的關係：

由於 G 為四邊形$A_1B_1C_1D_1$的重心，因此 G 在△ $A_1B_1D_1$的重心G_1及△ $D_1B_1C_1$的重心G_3的連線段上，而由於G_1為△ $A_1B_1D_1$重心，因此G_1在D_2、A_2的連線段上，且$\overline{G_1A_2}:\overline{G_1D_2}=\overline{D_1E_1}:\overline{B_1E_1}=\overline{CD_2}:\overline{CA_2}$，同理$\overline{DA_2}:\overline{DB_2}=\overline{G_2B_2}:\overline{A_2G_2}$，又$E_2$為平行四邊形$A_2B_2C_2D_2$對角線交點，因此**$E_1$與G互為以$E_2$為對稱中心的對稱點。**

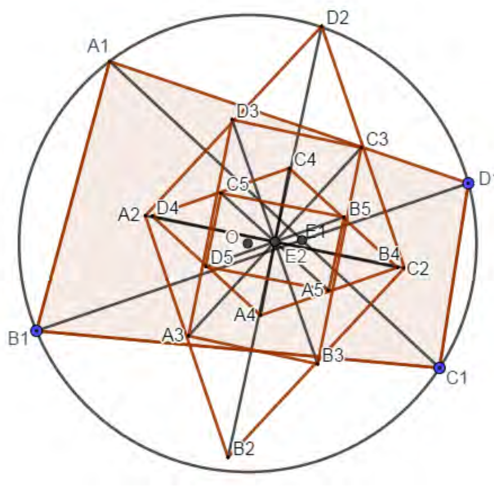


(二) **外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$的收斂點及與原四邊形$A_1B_1C_1D_1$外接圓圓心的關係：**

在討論重心的情形下，我們發現無論$A_1B_1C_1D_1$圖形為何，我們發現E_2剛好是E_1與G的中點。我們思索著，在討論外心四邊形的情況下，會不會同樣的現象呢？然而，任意四邊形ABCD均有重心G，而任意的四邊形並不一定都有所謂的外心，因此，四邊形$A_1B_1C_1D_1$為了要有外心，我們必須限定四邊形$A_1B_1C_1D_1$為圓內接四邊形，而在GEOGEBRA的觀察下，我們竟然發現也有類似的結果：

1. **外心四邊形$A_nB_nC_nD_n$對角線交點E_n收斂，且$E_n=E_2$**
2. **四邊形$A_1B_1C_1D_1$外接圓圓心O，對角線交點E_1，則E_1、E_2、O共線，且E_2為E_1、O的中點。**

而證明的部份我們利用角度的分析，以及 AAS 全等性質可知△ $A_1A_2O\cong$△ OC_2D_1，進一步知道$\overline{OA_2}=\overline{D_1C_2}=\overline{C_2E_1}$，$\overline{OC_2}=\overline{A_2A_1}=\overline{A_2E_1}$，而利用對邊等長等性質可知$OA_2E_1C_2$為平行四邊形，而$E_2$又是平行四邊形對角線交點，由對角線互相平分可知$E_2$為$E_1$與O的中點。



柒、參考資料

- 林哲佑、朱柏翰、李沛宸（2012）。**第 52 屆全國中小學科展作品–心心相印**。2012 年 11 月 27 日，取自「科展群傑廳」：http://science.ntsec.edu.tw/ScienceContent.aspx?cat=&a=0&fld=1000000&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=9618
- 張欣雅、陳芊卉、蔡佩珊(2013)。**第五十三屆全國中小學科展作品－多個三角形的重心連線性質探討**。取自「科展群傑廳」：https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=10131
- 張幼賢(2017)。國中數學課本第五冊。**第三章外心、內心與重心**。台南市：翰林出版社。