中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030415

從零開始

-初始多邊形及拿破崙多角星之性質探討

學校名稱：新竹市立光武國民中學

作者：	指導老師：
國二 徐啓惇	許志箐
國二 楊宗諺	蘇錦霞
國二 吳承諺	

關鍵詞：拿破崙定理、多角星、投影幾何

摘要

本文利用 GeoGebra 進行關於拿破崙初始 n 邊形之研究。一開始研究拿破崙初始 n 邊形的性質，發現不論奇數邊或偶數邊拿破崙初始 n 邊形都存在著一些不變的性質 。之後，由拿破崙初始 n 邊形的鄰邊中點連線向外延伸、對角線以固定的規律相連兩種連線方式，分別會形成外角星及內角星。拿破崙初始 n 邊形會和其畫出的 m 階交點圖形、中點連線所圍出的圖形有因邊數奇偶而異的相似性質。拿破崙初始 n 邊形繪出之內 n 角星在不重複之前題下，同層內 n 角星截線段比例固定。接著我們依序研究拿破崙內角星及拿破崙外角星之共同性質，及投影幾何與拿破崙定理的關聯性，最後發現拿破崙初始 n 邊形為正 n 邊形的投影。

壹、研究動機

在學習國中數學的歷程中，對幾何產生了興趣。並在因緣際會下看到了一個有趣的定理—拿破崙定理。上網查詢歷屆科展報告後，看到了一篇有關拿破崙定理的研究，發現要使拿破崙定理能推廣到其他多邊形中，其關鍵在於能找出拿破崙初始n邊形，並由其向外作正n邊形後，使中心相連能產生新的正n邊形，因此展開了接下來一連串對於拿破崙初始n邊形的研究。

貳、研究目的

一、探討拿破崙初始 n 邊形的性質。
二、探討拿破崙初始 n 邊形及拿破崙內 n 角星之關連性。
三、探討拿破崙初始 n 邊形及拿破崙外 n 角星之關連性。
四、探討拿破崙內 n 角星及拿破崙外 n 角星之關連性。
五、探討拿破崙初始 n 邊形及投影幾何之關連性。

參、研究設備與器材

電腦、Geogebra 軟體、筆、紙。

肆、研究過程與方法

一、名詞解釋

(一)拿破崙定理:

以任意三角形各邊為邊分別向外側作正三角形，則三個正三角之重心連線必構成一個正三角形。

(二)拿破崙初始 n 邊形:

給定一個 n 邊形(在此研究中所討論的 n 邊形均為凸 n 邊形)，以各邊分別向外作外接正 n 邊形(因為邊長不一定等長,所以各外接正 n 邊形不一定全等),連接相鄰兩正 n 邊形中心，形成一個新的 n 邊形，若此新的 n 邊形為正 n 邊形，則稱給定的 n 邊形為拿破崙初始 n 邊形，而中心連出的正 n 邊形為拿破崙正 n 邊形。(如圖 1)

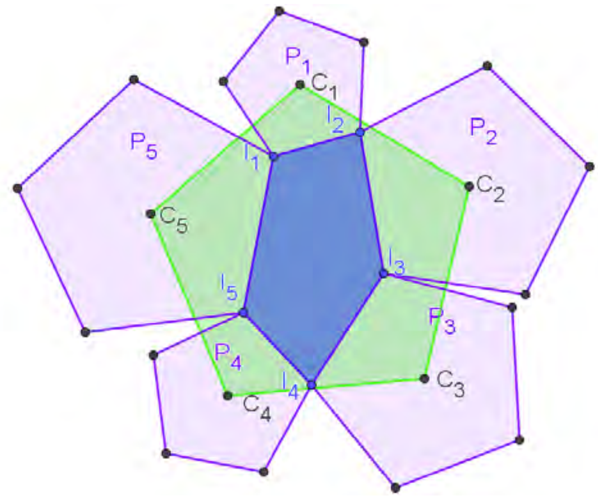


圖 1

以上圖為例:

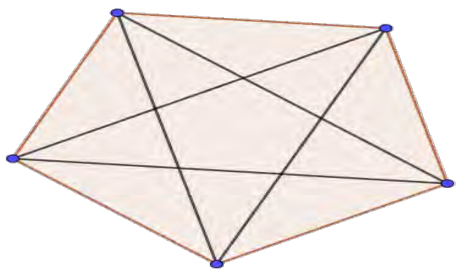
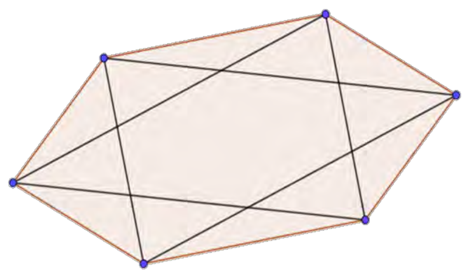
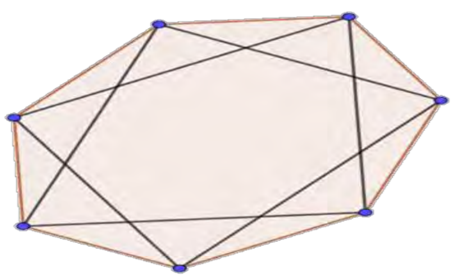
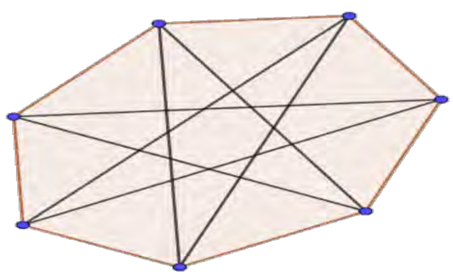
五邊形$I_1I_2I_3I_4I_5$為任意五邊形P_1為以$\overline{I_1I_2}$為邊長所作之正五邊形，依此類推，分別C_1、C_2、C_3、C_4、C_5為P_1、P_2、P_3、P_4、P_5之中心，當五邊形$C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ C_5$為正五邊形時，稱五邊形$I_1\ I_2\ I_3\ I_4\ I_5$為拿破崙初始五邊形，而正五邊形$C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ C_5$稱之為拿破崙正五邊形。

(三)拿破崙 n 角星:由拿破崙初始 n 邊形依特殊規律連線而產生的星形，其分類方式如下:

1. 內角星(以對角線相連產生的星形)

在拿破崙初始 n 邊形中以固定順序、固定規律依順時針或逆時針將對角線相連。將每次跳 m 個頂點連線所產生的星形稱為 m 層 n 角星($n \geqq 5$，$[\frac{n}{2}]+1 \geqq m \geqq 1$)。(如表一)

表一

五角星	六角星
	
一層七角星(跳一個頂點後連線)	二層七角星(跳兩個頂點後連線)
	

2. 外角星(鄰邊中點連線向外延伸)

將拿破崙初始 n 邊形鄰邊中點相連向外延伸後，形成的星形即為拿破崙外角星。(如圖 2)

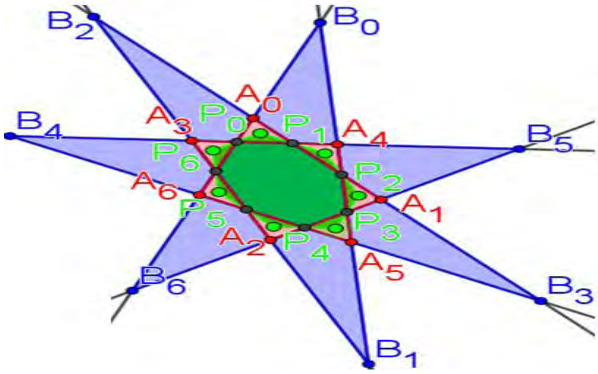


圖 2

以上圖為例:

圖中以初始七邊形$\mathbf{P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6}$鄰邊中點相連向外延伸，形成一階外角星$\mathbf{A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$和二階外角星$\mathbf{B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6}$

(三) m 層(內角星)與 m 階(外角星)交點

1. m 層交點

將拿破崙初始 n 邊形頂點依規律連線，連線間格 m 個頂點所形成之內 n 角星，與拿破崙初始 n 邊形頂點距離最短之交點即為 m 層交點

2. m 階交點

將拿破崙初始 n 邊形以鄰邊中點連線向外延伸，第一個交點為一階交點，第二個交點為二階交點，依此類推。

(四)拿破崙內外 n 角星所截線段比

1. 拿破崙內 n 角星截線段比(如圖 3)

拿破崙內角星於同一直線上,同層交點至同層交點(如圖 3 中藍色線段)和同層交點至頂點(如圖 3 中紅色線段)兩連線段之比

2.拿破崙外 n 角星截線段比(如圖 4)

拿破崙外角星於同一直線上,兩 n-1 階交點連線段(如圖 4 中藍色線段)和 n 階交點至 n-1 階交點之連線段(如圖 4 中紅色線段)之比

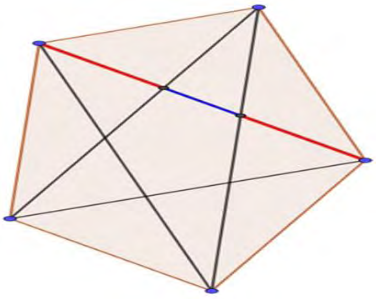


圖 3

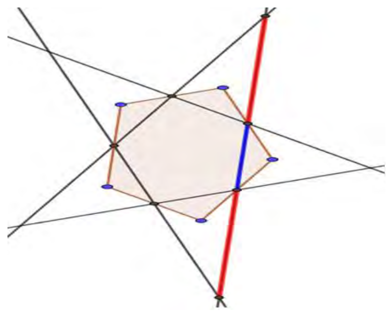


圖 4

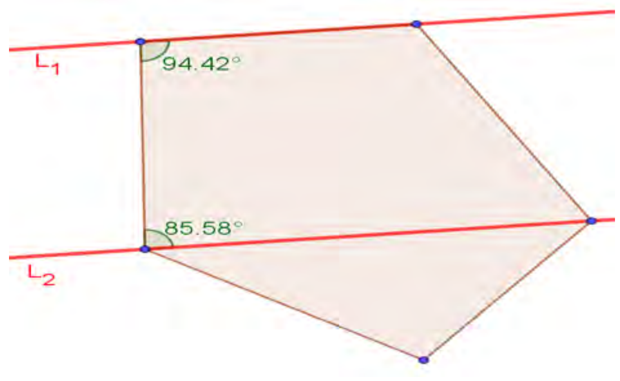
二、拿破崙初始 n 邊形基本性質

在觀察拿破崙初始 n 邊形時，發現其具有與任意多邊形不一定具備的特殊性質，所以進一步的進行探討：

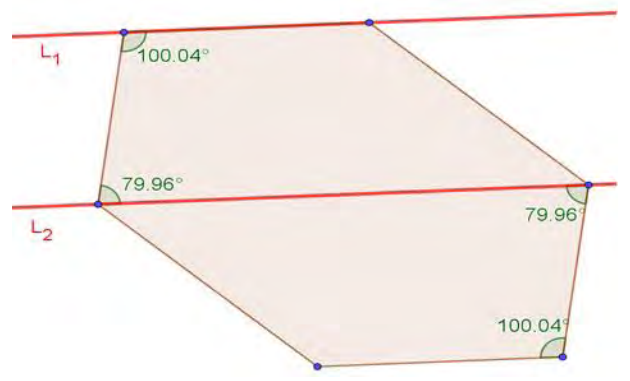
(一)拿破崙初始 n 邊形平行性質(判別性質)

以任意拿破崙初始 n 邊形一邊為指定邊，其兩頂點分別向順時針及逆時針各推 m 個頂點後將其相連。其產生直線會與原線段平行。研究中發現若 n 邊形符合此平行性質則為必為拿破崙初始 n 邊形，也就是說此性質為拿破崙初始 n 邊形之判別性質。(如表二)

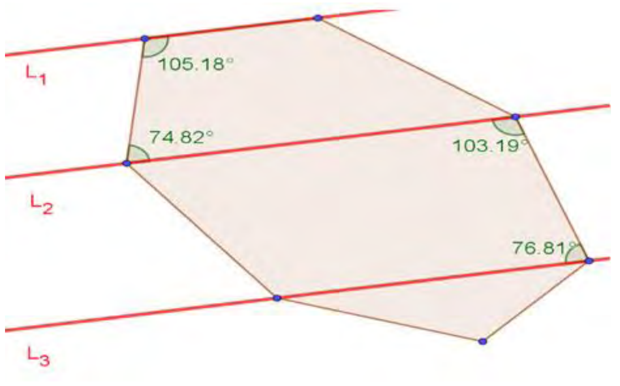
表二



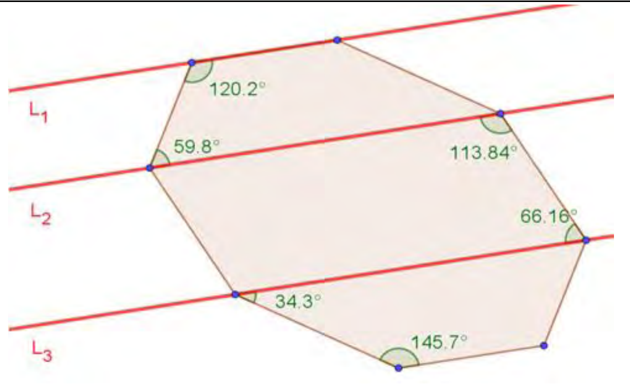
$L_1 // L_2$



$L_1 // L_2$



$L_1 // L_2 // L_3$



$L_1 // L_2 // L_3$

平行性質證明:

已知:五邊形$P_0P_1P_2P_3P_4$為拿破崙初始五邊形，以拿破崙法向外作圖，可得正五邊 ABCDE。(如圖 5)

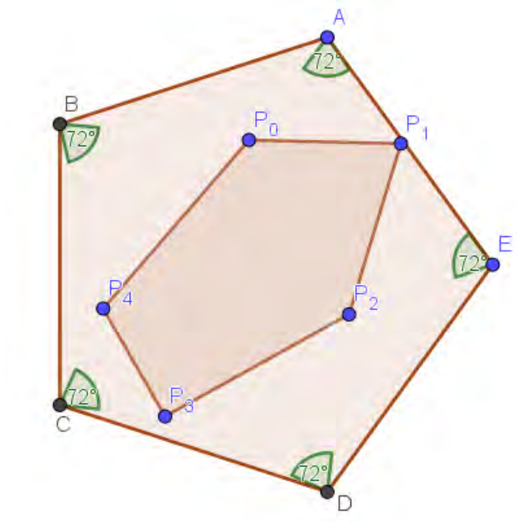


圖 5

試證:$\overline{P_4P_3}//\overline{P_0P_2}$

證明:

以 A 點為轉軸，將P_0逆時針旋轉 72° 會到達P_1；

以 E 點為轉軸，將P_1逆時針旋轉 72° 會到達P_2；

以 D 點為轉軸，將P_2逆時針旋轉 72° 會到達P_3；

以 C 點為轉軸，將P_3逆時針旋轉 72° 會到達P_4。

向外作正五邊形並取其中心連線可將其視為以拿破崙初始 n 邊形各邊為底邊，向外作頂角為 72° 之等腰三角形，並將頂角兩邊所夾之頂點連線圍成正五邊形。

在複數平面中，假設正五邊形內接於半徑 1 單位的圓(如圖 8)。將正五邊形的重心設為原點，則可假設其五個頂點的複數分別為 A(ω)、B(ω^2)、C(ω^3)、D(ω^4)、E(ω^5=1)，其中

$\omega=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

假設P_0的複數為z_0，則$\overrightarrow{AP_0}=(z_0-\omega)$

根據已知條件，可知$\overrightarrow{AP_1}=\omega*\overrightarrow{AP_0}=\omega*(z_0-\omega)$

可得點P_1座標z_1，$z_1=\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP_1}=\omega+\omega*(z_0-\omega)$

同理可得:

P_2點座標為$z_2=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EP_2}=1+\omega*(z_1-1)$

P_3點座標為$z_3=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP_3}=\omega^4+\omega*(z_2-\omega^4)$

P_4點座標為$z_4=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP_4}=\omega^3+\omega*(z_3-\omega^3)$ ………………………………………… (如圖 6)

全部展開來，用ω、z_0來表示:

$z_0=z_0$，……………………………………………………………………………(0)

$z_1=\omega*z_0+(-\omega^2+\omega)$，……………………………………………………………… (1)

$z_2=\omega^2*z_0+(-\omega^3+\omega^2-\omega+1)$，……………………………………………………… (2)

$z_3=\omega^3*z_0+(\omega^3-\omega^2+\omega-1)$，……………………………………………………… (3)

$z_4=\omega^4 * z_0+(\omega^2-\omega)$，…………………………………………………………………… (4)

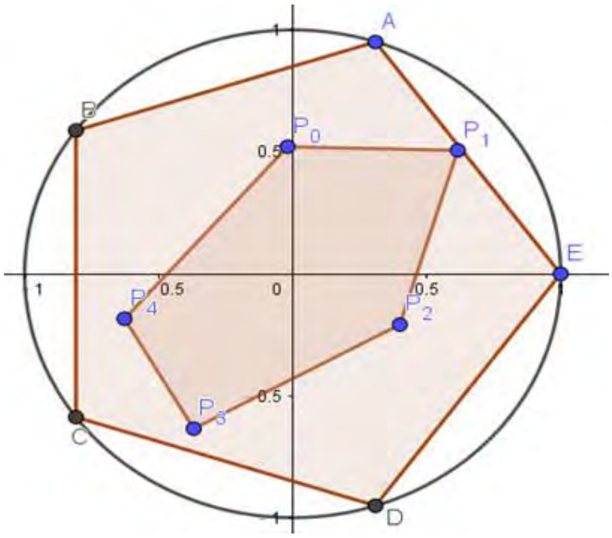


圖 6

接著考慮兩個向量:

$\overrightarrow{P_4P_3}=z_3-z_4=\{(\omega^3)*z_0+[\omega^3-\omega^2+\omega-1]\}-\{(\omega^4)*z_0+[\omega^2-\omega)\}$

$=(\omega^3-\omega^4)*z_0+(\omega^3-2\omega^2+2\omega-1)$…………………………………………… (5)

$\overrightarrow{P_0P_2}=z_2-z_0=\{(\omega^2)*z_0+[-\omega^3+\omega^2-\omega+1]\}-\{z_0\}$

$=\omega^2-1)*z_0+(-\omega^3+\omega^2-\omega+1)$…………………………………………………(6)

宣告 1.

$\frac{\omega^3-\omega^4}{\omega^2-1}=\frac{\omega^3-2\omega^2+2\omega-1}{-\omega^3+\omega^2-\omega+1}$

宣告 2.

假設 $K=\frac{\omega^3-\omega^4}{\omega^2-1}(=\frac{\omega^3-2\omega^2+2\omega-1}{-\omega^3+\omega^2-\omega+1})$，則 K 是個實數。

若宣告 1、宣告 2 皆為，則根據(5)、(6)是可得:

$\overrightarrow{P_4P_3}=z_3-z_4=\{(\omega^3)*z_0+[\omega^3-\omega^2+\omega-1]\}-\{(\omega^4)*z_0+[\omega^2-\omega)\}$

$=(\omega^3-\omega^4)*z_0+(\omega^3-2\omega^2+2\omega-1)$

$=[K(\omega^2-1)]*z_0+[K(-\omega^3+\omega^2-\omega+1)]$

$=K[(\omega^2-1)*z_0+(-\omega^3+\omega^2-\omega+1)]$

$=K*\overrightarrow{P_0P_2}$

$\overrightarrow{P_4P_3}$是$\overrightarrow{P_0P_2}$的某個實數 K 倍，所以$\overrightarrow{P_4P_3}//\overrightarrow{P_0P_2}$，也即是:$\overline{P_4P_3}//\overline{P_0P_2}$，證畢所求。

宣告 1 之證明

$\frac{\omega^3-\omega^4}{\omega^2-1}=\frac{\omega^3-2\omega^2+2\omega-1}{-\omega^3+\omega^2-\omega+1}$

$(\omega^3-\omega^4)*(-\omega^3+\omega^2-\omega+1)=(\omega^3-2\omega^2+2\omega-1)*(\omega^2-1)$，

其中左式$=(\omega^3-\omega^4)*(-\omega^3+\omega^2-\omega+1)$

$=-2\omega^4+\omega^3+\omega^2-2\omega+2$

右式=$(\omega^3-2\omega^2+2\omega-1)*(\omega^2-1)$

$=-2\omega^4+\omega^3+\omega^2-2\omega+2$

左式=右式，所以宣告 1 正確。

宣告 2 之證明

依照對 K 的定義，將其展開來:

$$K=\frac{\omega^3-\omega^4}{\omega^2-1}$$

$$=\frac{(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5})-(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5})}{(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5})-1}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{6\pi}{5}-\cos\frac{8\pi}{5}\right)+i(\sin\frac{6\pi}{5}-\sin\frac{8\pi}{5})}{(\cos\frac{4\pi}{5}-1)+i\sin\frac{4\pi}{5}}$$

$$=\frac{\left(-2*\sin\frac{7\pi}{5}*\sin\frac{-\pi}{5}\right)+i(2*\cos\frac{7\pi}{5}*\sin\frac{-\pi}{5})}{(\cos\frac{4\pi}{5}-1)+i\sin\frac{4\pi}{5}}$$

$$=\frac{\left(-2*\sin\frac{2\pi}{5}*\sin\frac{\pi}{5}\right)+i(2*\cos\frac{2\pi}{5}*\sin\frac{\pi}{5})}{(\cos\frac{4\pi}{5}-1)+i\sin\frac{4\pi}{5}}$$

$$=\frac{\left(-2*\sin\frac{2\pi}{5}*\sin\frac{\pi}{5}\right)+i(2*\cos\frac{2\pi}{5}*\sin\frac{\pi}{5})}{\left(-2*\sin^2\frac{2\pi}{5}\right)+i\,(2*\sin\frac{2\pi}{5}*\cos\frac{2\pi}{5})}$$

$$=\frac{\left(-2*\sin\frac{2\pi}{5}*\sin\frac{\pi}{5}\right)+i(2*\cos\frac{2\pi}{5}*\sin\frac{\pi}{5})}{\left(-4*\sin\frac{\pi}{5}*\cos\frac{\pi}{5}*\sin\frac{2\pi}{5}\right)+i\,(4*\sin\frac{\pi}{5}*\cos\frac{\pi}{5}*\cos\frac{2\pi}{5})}$$

$$=\frac{\text{分子}}{(2*\cos\frac{\pi}{5})*\text{分子}}$$

$=\frac{1}{2*\cos\frac{\pi}{5}}$，是個實數。($2*\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$=1.618⋯)

$\because \overrightarrow{P_4P_3}=K*\overrightarrow{P_0P_2}(K\in R)$

$\therefore \overline{P_4P_3}//\overline{P_0P_2}$，證畢所求

<u>將平行性質推廣至拿破崙初始 n 邊形之證明:</u>

已知 n 邊形$P_0P_1P_2P_3P_4\cdots P_{n-1}$為拿破崙初始 n 邊形，以拿破崙法向外作圖，可得正 n 邊形$A_1A_2A_3A_4\cdots A_n$。

試證: $\overline{P_0P_{n-1}}//\overline{P_mP_{n-m-1}}$

證明:

接下來將P_0以A_1為旋轉軸逆時針旋轉$\frac{360°}{n}$會到達點P_1；

將P_1以A_2為旋轉軸逆時針旋轉$\frac{360°}{n}$會到達點P_2；

以相同作法繼續作點$P_3,P_4,P_5,\cdots,P_{n-1}$ 。

所得之 n 邊形$P_0P_1P_2P_3P_4\ldots P_{n-1}$即為拿破崙初始 n 邊形

在複數平面中，假設此正 n 邊形$A_1A_2A_3A_4.\cdots..A_n$內接於半徑 1 單位的圓。將正 n 邊形的重心設為原點，則可假設其頂點座標分別為$A_1(\omega)$ $A_2(\omega^2)$ $A_3(\omega^3)\cdots A_n(\omega^n=1)$，其中

$\omega=\cos(\frac{2\pi}{n})+i\ \sin(\frac{2\pi}{n})$。

假設P_0的座標為z_0，可知$\overrightarrow{A_1P_0}=(z_0-\omega)$。

又根據已知條件可得，$\overrightarrow{A_1P_1} = \omega \cdot \overrightarrow{A_1P_0} = \omega \cdot (z_0 - \omega)$，

P_1點座標$z_1 = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P_1} = \omega + \omega \cdot z_0 - \omega)$

同理可得，P_2點座標$z_2 = 1 + \omega \cdot (z_1 - 1)$

P_3點座標$z_3 = \omega^{n-1} + \omega \cdot (z_2 - \omega^{n-1})$，

以此類推，拿破崙初始 n 邊形一頂點P_a的座標$z_a = \omega^{n-a+2} + \omega \cdot (z_{a-1} - \omega^{n-a+2})$

$$Z_m = \omega^{n-m+2} + \omega(Z_{m-1} - \omega^{n-m+2})$$

$$\omega^m = \cos(\frac{2\pi}{n} * m) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n} * m\right)$$

$$\because \omega^n = \cos(2\pi) = 1$$

$$Z_m = \omega^{-m+2} + \omega(Z_{m-1} - \omega^{-m+2})$$

$$\binom{z_m}{\omega^{-m}} = \begin{pmatrix} \omega & \omega - \omega^2 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \binom{z_{m-1}}{\omega^{-(m-1)}}$$

當$m = 1$，$\binom{z_1}{\omega^{-1}} = \begin{pmatrix} \omega & \omega - \omega^2 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \binom{Z_0}{1}$

當$m = 2$，$\binom{z_2}{\omega^2} = \begin{pmatrix} \omega & \omega - \omega^2 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \binom{z_1}{\omega^{-1}}$

$$= \begin{pmatrix} \omega & \omega - \omega^2 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \omega - \omega^2 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \omega & \omega - \omega^2 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} Z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore \binom{z_m}{\omega^{-m}} = \begin{pmatrix} \omega & \omega - \omega^2 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}^m \binom{z_0}{1}$$

設$Z_m = A\omega^m + B\omega^{-m}$

當$m = 0$，$Z_0 = A\omega^0 + B\omega^0 = A + B$

$A = -B$

$Z = 1$，$Z_1 = A\omega + B\omega^{-1}$

$$= \omega + \omega(Z_0 - \omega)$$

$$B\omega^{-1} + (Z_0 - B)\omega = Z_0\omega + \omega - \omega^2$$

$$-B\omega + \frac{B}{\omega} = \omega(1 - \omega)$$

$$B = \frac{\omega^2}{\omega + 1}$$

$$A = Z_0 - \frac{\omega^2}{\omega + 1}$$

$$Z_m = \left(Z_0 - \frac{\omega^2}{\omega + 1}\right)\omega^m + \left(\frac{\omega^2}{\omega + 1}\right)\omega^{-m}$$

$$= Z_0\omega^m + \frac{\omega^2}{\omega + 1}(\omega^{-m} - \omega^m)$$

$\Rightarrow Z_{n-m-1} - Z_m$

$= Z_0\omega^{n-m-1} + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-(n-m-1)} - \omega^{(n-m-1)}\right) - Z_0\omega^m - \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-m} - \omega^m)$

$= Z_0(\omega^{n-m-1} - \omega^m) + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-(n-m-1)} - \omega^{(n-m-1)} - \omega^{-m} + \omega^m\right)$

$= Z_0(\omega^{n-m-1} - \omega^m) + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\frac{\omega^{m+1}}{\omega^n} - \omega^{(n-m-1)} - \omega^n * \omega^{-m} + \omega^m\right)$

$= Z_0(\omega^{n-m-1} - \omega^m) + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{m+1} - \omega^{(n-m-1)} - \omega^{n-m} + \omega^m\right)$

$= Z_0(\omega^{n-m-1} - \omega^m) + \frac{\omega^2}{\omega+1}(1+\omega)(\omega^m - \omega^{n-m-1})$

$= Z_0(\omega^{n-m-1} - \omega^m) + \omega^2(\omega^m - \omega^{n-m-1})$

$= (Z_0 - \omega^2)(\omega^{n-m-1} - \omega^m)$

設 $m = 0$，$Z_{n-1} - Z_0 = (Z_0 - \omega^2)(\omega^{n-1} - \omega^0)$

$\Rightarrow \frac{Z_{n-1}-Z_0}{Z_{n-m-1}-Z_m} = \frac{(Z_0-\omega^2)(\omega^{n-1}-\omega^0)}{(Z_0-\omega^2)(\omega^{n-m-1}-\omega^m)} = \frac{(\omega^{n-1}-\omega^0)}{(\omega^{n-m-1}-\omega^m)}$

$\because \overrightarrow{P_0P_{n-1}} = K * \overrightarrow{P_mP_{n-m-1}} (K \in R)$

$\therefore \overline{P_0P_{n-1}} // \overline{P_mP_{n-m-1}}$，證畢所求

(二)偶數邊拿破崙初始 n 邊形，對邊平行且等長、對角相等

偶數邊拿破崙初始 n 邊形，對邊平行且等長、對角相等。(如下圖 7，圖 8)

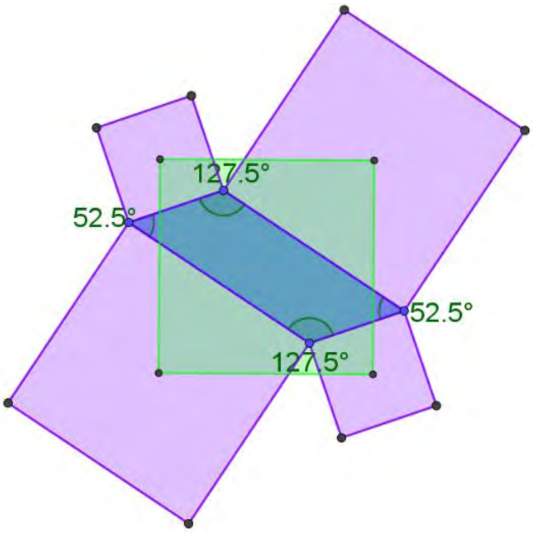


圖 7

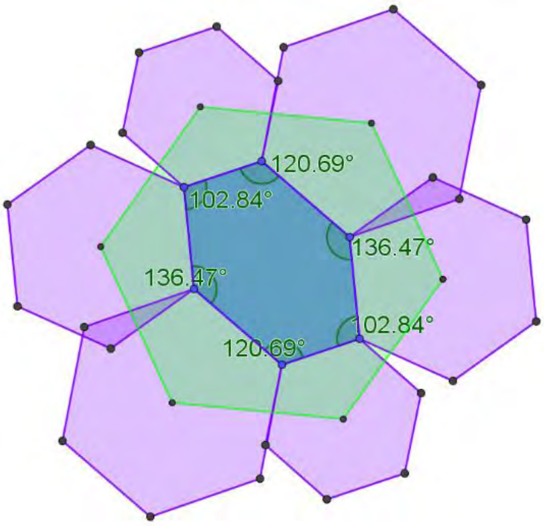


圖 8

(三)拿破崙初始 n 邊形的交點性質

1. $\boxed{\text{拿破崙正 n 邊形中心與拿破崙初始 n 邊形重心之關聯性}}$

拿破崙正 n 邊形中心會和拿破崙初始 n 邊形的重心共點。(如圖 9)

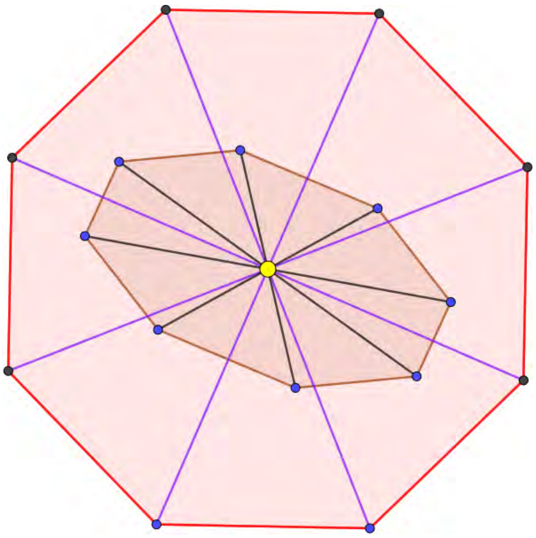


圖 9

<u>拿破崙初始 n 邊形之共點證明</u>

已知:拿破崙初始 n 邊形重心為 G(g)，拿破崙正 n 邊形中心為 O(0)(如圖 10)

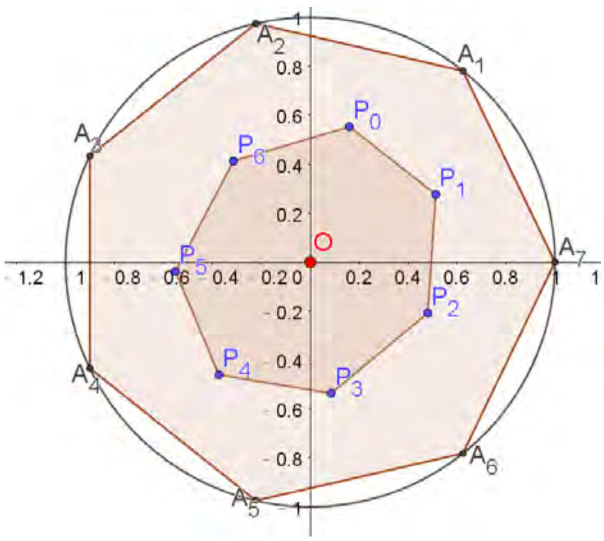


圖 10

試証: G(g)= O(0)

證明:

∵G 為拿破崙初始 n 邊形之重心

∴拿破崙初始 n 邊形任意點座標為$Z_m = Z_0\omega^m + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-m} - \omega^m)$…(平行性質中已證畢)

$\overrightarrow{GP_0} + \overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2} + \overrightarrow{GP_3} + \cdots + \overrightarrow{GP_n} = 0$

$\rightarrow (z_0 - g) + (z_1 - g) + (z_2 - g) + (z_3 - g) + \cdots + (z_{n-1} - g) = 0$

$$(z_0+z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{n-1})-ng=0$$

$$Z_0(\omega+\omega^2+\cdots+1)+\frac{\omega^2}{\omega+1}[(\omega^{-1}+\omega^{-2}+\cdots+1)-(\omega+\omega^2+\cdots+1)]-ng=0$$

$$Z_0(\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n)+\frac{\omega^2}{\omega+1}\left[\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}\right)-(\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n)\right]-ng=0$$

$$Z_0(\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n)+\frac{\omega^2}{\omega+1}\left[\left(\frac{\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n}{\omega^n}\right)-(\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n)\right]-ng=0$$

$$Z_0*0+\frac{\omega^2}{\omega+1}\left[\left(\frac{0}{\omega^n}\right)-(0)\right]-ng=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n=0)$$

$-ng=0$

$\because n\neq 0$

$\therefore g=0$

$\rightarrow$ G 點與 O 點共點

2. $\boxed{\text{拿破崙初始 n 邊形過重心連線之面積平分性質}}$

在偶數邊拿破崙初始 n 邊形中，固定一頂點P_1，點座標以順時針方向依序為P_2、P_3、P_4、P_5、 P_6、P_7、P_8、⋯、P_n。連對角線$\overline{P_xP_{x+\frac{n}{2}}}$可切割出 n 個面積相等三角形；奇數邊拿破崙初始 n 邊形中，固定一頂點P_1，點座標以順時針方向依序為P_2、P_3、P_4、P_5、⋯、P_n，$\overline{P_1P_2}$中點為M_1，之後依序為M_2、M_3、M_4、$M_5\cdots M_n$。連$\overline{P_xM_{x+\frac{n-1}{2}}}$(若$x+\frac{n-1}{2}>n$，即為$\overline{P_xM_{x+\frac{n-1}{2}-n}}$)可以切割出 2n 個面積相等三角形，且此點為重心。 (如圖 11，圖 12)

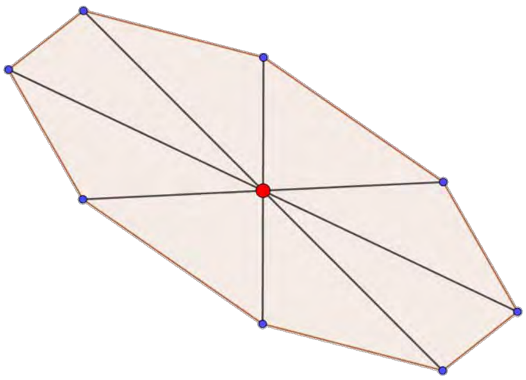


圖 11

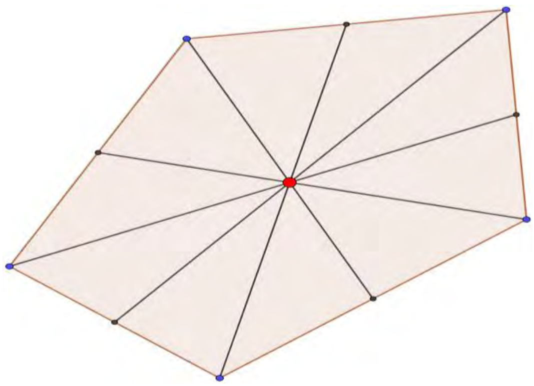


圖 12

(1)<u>偶數邊拿破崙初始 n 邊形特殊連線段交點為重心之證明</u>

已知:一拿破崙初始 n 邊形$P_0P_1P_2P_3P_4\cdots P_{n-1}$(n=2k)，以拿破崙法向外作圖，作正 n 邊形$A_1A_2A_3A_4\cdots A_n$(如圖 13)

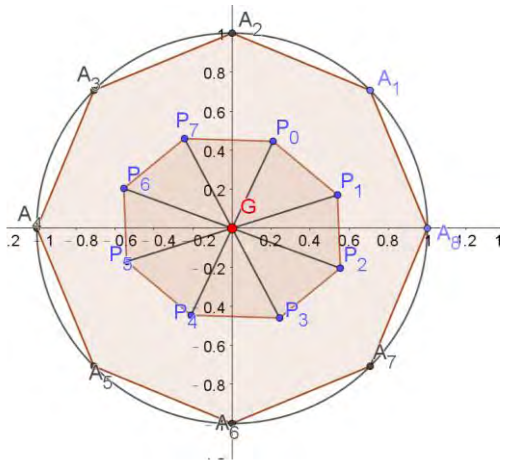


圖 13

試證:對角線$\overline{P_xP_{x+\frac{n}{2}}}$過正 n 邊形$A_1A_2A_3A_4\cdots\ A_n$之重心

證明:

1. 在複數平面中，假設此正 n 邊形$A_1A_2A_3A_4.\cdots..A_n$內接於半徑 1 單位的圓。將正 n 邊形重心設為原點 O，則可假設其頂點座標分別為$A_1(\omega)$、$A_2(\omega^2)$、$A_3(\omega^3)$、$\cdots A_n(\omega^n=1)$，其中 $\omega=\cos(\frac{2\pi}{n})+i\ \sin(\frac{2\pi}{n})$，而拿破崙初始 n 邊形任一頂點$P_x$座標為$Z_x$利用向量可得頂點通式
   $\rightarrow Z_x=\omega^{n-x+2}+\omega(Z_{x-1}-\omega^{n-x+2})$
   $\rightarrow Z_x=Z_0\omega^x+\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x}-\omega^x)$…………………………(平行性質已證畢)
2. 宣告:$\frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}}}=C$

   若宣告正確

   $\because \overrightarrow{P_xO}=C*\overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}}$

   $\therefore \overrightarrow{P_xO}//\overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}}$

   $\rightarrow P_x$、O、$P_{x+\frac{n}{2}}$三點共線

   $\rightarrow$ $\overline{P_xP_{x+\frac{n}{2}}}$過正 n 邊形$A_1A_2A_3A_4\cdots\ A_n$之重心
3. 宣告證明:

   Part 1

   P_x座標:

   $Z_x=Z_0\omega^x+\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x}-\omega^x)$

   $P_{x+\frac{n}{2}}$座標:

   $Z_{x+\frac{n}{2}}=Z_0\omega^{x+\frac{n}{2}}+\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x-\frac{n}{2}}-\omega^{x+\frac{n}{2}})$

   $\overrightarrow{P_xO}=-Z_x$

   $\overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}}=Z_{x+\frac{n}{2}}$

   $\Rightarrow \frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}}}=\frac{-Z_x}{Z_{x+\frac{n}{2}}}=\frac{Z_0\omega^x+\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x}-\omega^x)}{Z_0\omega^{x+\frac{n}{2}}+\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x-\frac{n}{2}}-\omega^{x+\frac{n}{2}})}$

   Part 2

   若$\frac{\omega^x}{\omega^{x+\frac{n}{2}}}=\frac{(\omega^{-x}-\omega^x)}{(\omega^{-x-\frac{n}{2}}-\omega^{x+\frac{n}{2}})}$，則 $C=\frac{\omega^x}{\omega^{x+\frac{n}{2}}}$

   $\omega^x*(\omega^{-x-\frac{n}{2}}-\omega^{x+\frac{n}{2}})=\omega^{x+\frac{n}{2}}*(\omega^{-x}-\omega^x)$

左式=$\omega^{-\frac{n}{2}}-\omega^{2x+\frac{n}{2}}$=$\omega^{\frac{n}{2}}-\omega^{2x+\frac{n}{2}}$

右式=$\omega^{\frac{n}{2}}-\omega^{2x+\frac{n}{2}}$

左式=右式，所以$\frac{\omega^{x}}{\omega^{x+\frac{n}{2}}}$=$\frac{(\omega^{-x}-\omega^{x})}{(\omega^{-x-\frac{n}{2}}-\omega^{x+\frac{n}{2}})}$

$\frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}}}$=C=$\frac{\omega^{x}}{\omega^{x+\frac{n}{2}}}$(宣告證畢)

<u>(2)奇數邊拿破崙初始 n 邊形特殊連線段交點為重心之證明</u>

已知:一拿破崙初始 n 邊形$P_0P_1P_2P_3P_4\cdots P_{n-1}$(n=2k+1)以拿破崙法向外作圖，做出正 n 邊形$A_1A_2A_3A_4\cdots A_n$。從$\overline{P_0P_1}$取中點M_1，之後依序為M_2、M_3、M_4、$M_5\cdots M_n$(如圖 14)

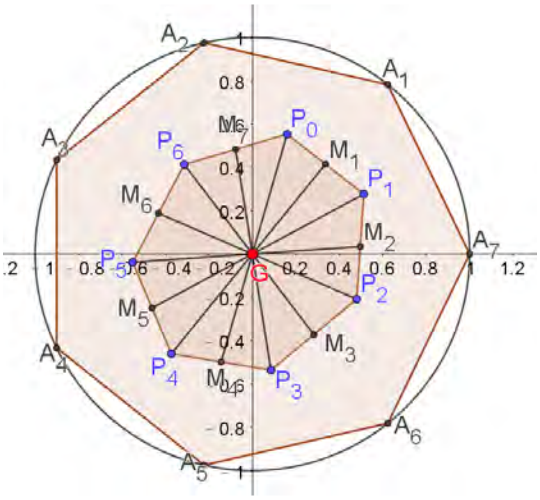


圖 14

試證:對角線$\overline{P_xM_{x+\frac{n+1}{2}}}$過正 n 邊形$A_1A_2A_3A_4\cdots A_n$之重心

證明:

1. 在複數平面中，假設此正 n 邊形$A_1A_2A_3A_4.\cdots..A_n$內接於半徑 1 單位的圓。將正 n 邊形重心設為原點 O，則其頂點座標依序假設為$A_1(\omega)$、$A_2(\omega^2)$、$A_3(\omega^3)$、$\cdots A_n(\omega^n=1)$，其中ω=cos($\frac{2\pi}{n}$)+ i sin($\frac{2\pi}{n}$)，而拿破崙初始 n 邊形任一頂點P_x座標為Z_x

   利用向量可得頂點通式

   $\rightarrow Z_x=\omega^{n-x+2}+\omega(Z_{x-1}-\omega^{n-x+2})$

   $\rightarrow Z_x=Z_0\omega^x+\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x}-\omega^x)$…………………………(平行性質已證畢，此處省略)

   利用線段兩端點找到中點座標通式

   $\rightarrow M_x=\frac{P_x+P_{x-1}}{2}$

2. 宣告:$\frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OM_{x+\frac{n-1}{2}}}}$=C

   若宣告正確

   $\because \overrightarrow{P_xO}=C\ *\overrightarrow{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}$

   $\therefore \overline{P_xO}//\overline{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}$

   $\rightarrow P_x$、O、$M_{x+\frac{n+1}{2}}$三點共線

   $\rightarrow$ $\overline{P_xM_{x+\frac{n+1}{2}}}$過正 n 邊形$A_1A_2A_3A_4\cdots A_n$之重心

3. 宣告證明:

Part 1

P_x座標:

$$Z_x=Z_0\omega^x+\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x}-\omega^x)$$

對邊中點座標:

$$M_{x+\frac{n+1}{2}}=\frac{Z_{x+\frac{n-1}{2}}+Z_{x+\frac{n+1}{2}}}{2}$$

$$=\frac{Z_0\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}}-\omega^{x+\frac{n-1}{2}}\right)+Z_0\omega^{x+\frac{n+1}{2}}+\frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-x-\frac{n+1}{2}}-\omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)}{2}$$

$$=\frac{Z_0\left(\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)+\frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}}-\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{-x-\frac{n+1}{2}}-\omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)}{2}$$

$$\overrightarrow{P_xO}=-Z_x=Z_0\omega^x+\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x}-\omega^x)$$

$$\overrightarrow{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}=\frac{Z_{x+\frac{n-1}{2}}+Z_{x+\frac{n+1}{2}}}{2}$$

$$=\frac{Z_0\left(\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)+\frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}}-\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{-x-\frac{n+1}{2}}-\omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)}{2}$$

$$\frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}}=\frac{-2[Z_0\omega^x+\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x}-\omega^x)]}{Z_0\left(\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)+\frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}}-\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{-x-\frac{n+1}{2}}-\omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)}$$

Part2

若$\frac{\omega^x}{\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{x+\frac{n+1}{2}}}=\frac{(\omega^{-x}-\omega^x)}{(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}}-\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{-x-\frac{n+1}{2}}-\omega^{x+\frac{n+1}{2}})}$，則 $C=\frac{-2*\omega^x}{\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{x+\frac{n+1}{2}}}$

$$\omega^x*(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}}-\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{-x-\frac{n+1}{2}}-\omega^{x+\frac{n+1}{2}})=(\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{x+\frac{n+1}{2}})*(\omega^{-x}-\omega^x)$$

左式$=\omega^{-\frac{n-1}{2}}-\omega^{2x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{-\frac{n+1}{2}}-\omega^{2x+\frac{n+1}{2}}$

右式$=\omega^{\frac{n-1}{2}}-\omega^{2x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{\frac{n+1}{2}}-\omega^{2x+\frac{n+1}{2}}$

左式$+\omega^{2x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{2x+\frac{n+1}{2}}=\omega^{-\frac{n-1}{2}}+\omega^{-\frac{n+1}{2}}$

$=\cos(-\pi+\frac{\pi}{n})+i\sin(-\pi+\frac{\pi}{n})+\cos(-\pi-\frac{\pi}{n})+i\sin(-\pi-\frac{\pi}{n})$

右式$+\omega^{2x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{2x+\frac{n+1}{2}}=\omega^{\frac{n-1}{2}}+\omega^{\frac{n+1}{2}}$

$=\cos(\pi-\frac{\pi}{n})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{n})+\cos(\pi+\frac{\pi}{n})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{n})$

又∵$-\pi+\frac{\pi}{n}=\pi+\frac{\pi}{n}$、$-\pi-\frac{\pi}{n}=\pi-\frac{\pi}{n}$(同界角)

∴$\cos(-\pi+\frac{\pi}{n})+i\sin(-\pi+\frac{\pi}{n})=\cos(\pi+\frac{\pi}{n})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{n})$、$\cos(-\pi-\frac{\pi}{n})+i\sin(-\pi-\frac{\pi}{n})=\cos(\pi-\frac{\pi}{n})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{n})$

→ 左式 $+\omega^{2x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{2x+\frac{n+1}{2}}=$ 右式 $+\omega^{2x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{2x+\frac{n+1}{2}}$

→ 左式 = 右式

$\frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}}=C=\frac{-2*\omega^x}{\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{x+\frac{n+1}{2}}}$(宣告證畢)

(3)偶數邊拿破崙初始 n 邊形重心切面積相等三角形證明

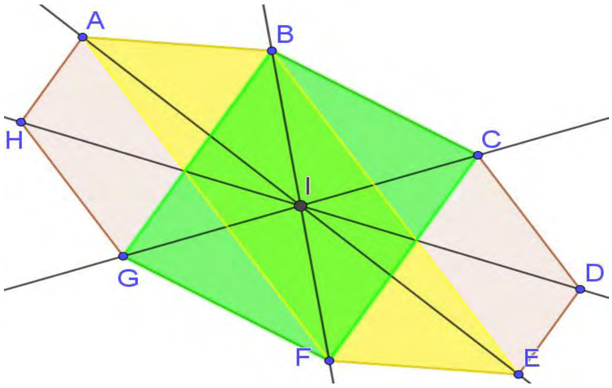


圖 15

已知:八邊形 ABCDEFGH 為初始八邊形(如圖 15)

試證:四條對角線切出三角形面積相等

證明:

1. 連線段$\overline{AC}$、$\overline{BD}$、$\overline{CE}$、$\overline{DF}$、$\overline{EG}$

   ∵$\overline{AI}=\overline{IE}$，且$\overline{BD}//\overline{AE}$

   ∴△AIB 與△EDI 為同底等高△

   ∴△AIB 面積=△EID 面積
2. 同理可證，△BIC 面積=△EIF 面積、△CID 面積=△FIG 面積、△DIE 面積=△GIH 面積、△EIF 面積=△HIA 面積
3. 又，△AIB 面積=△EIF 面積(平行四邊形對角線將其平分成四個面積相等的三角形)、△BIC 面積=△FIG 面積、△CID 面積=△GIH 面積、△DIE 面積=△HIA 面積

   由 3、4 可得知初始偶數邊形對角連線連出之每個三角形面積相等

(4)奇數邊拿破崙初始 n 邊形重心切面積相等三角形面積相等三角形證明

已知:在五邊形 ABCDE 中，$\overline{CD}//\overline{BE}$且 F 為各頂點至對邊中點連線之交點。(如圖 16)

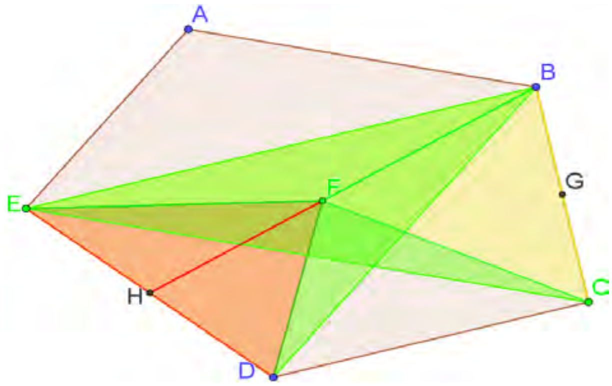


圖 16

試證:△BCF=△CFD=△DFE=△EFA=△AFB

證明:

1. ∵ $\overline{CD}//\overline{BE}$

   ∴△BDE 面積=△BCE 面積
2. ∵△BEH 面積=△BDH 面積且△EFH 面積=△DFH 面積

   ∴△BFE 面積=△BFD 面積

3. 同理可得，△CEF 面積=△BFE 面積

∴△CEF 面積=△BFE 面積=△BFD 面積

4. ∵△BDE 面積=△BFE 面積+△BFD 面積+△DFE 面積，△BCE 面積=△BFE 面積+△CEF 面積+△BCF 面積

∴△BCF 面積=△DFE 面積

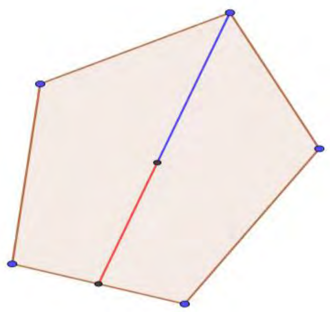
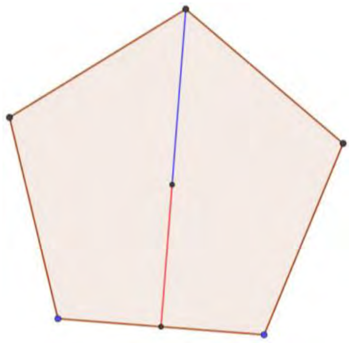
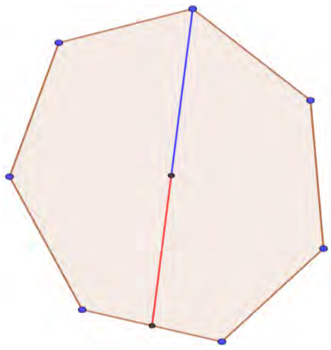
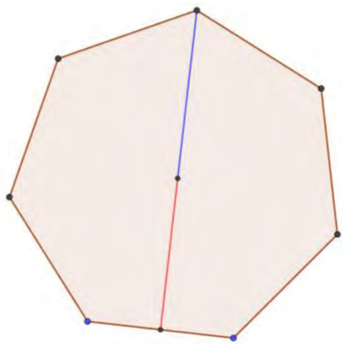
5. 同理可得△BCF=△CFD=△DFE=△EFA=△AFB

(四)拿破崙初始 n 邊形重心分割線段比例固定

1. 奇數邊拿破崙初始 n 邊形

奇數邊拿破崙初始 n 邊形的重心至一頂點和對邊中點的比值會和正 n 邊形中心至一頂點和對邊中點的比值相等(如表三)

表三

五邊形	正五邊形
	
1. 23606797749979	1. 23606797749979
七邊形	正七邊形
	
1.10991626417474	1.10991626417474

<u>奇數邊拿破崙初始 n 邊形重心至兩端點比值為</u>$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

$$C=\frac{-2*\omega^{x}}{\omega^{x+\frac{n-1}{2}}+\omega^{x+\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{-2*\omega^{x}}{\omega^{x}*\omega^{\frac{n-1}{2}}+\omega^{x}*\omega^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{-2*\omega^{x}}{\omega^{x}*(\omega^{\frac{n-1}{2}}+\omega^{\frac{n+1}{2}})}$$

$$=\frac{-2}{\omega^{\frac{n-1}{2}}+\omega^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{-2}{\cos(\frac{n-1}{n}\pi)+i\sin(\frac{n-1}{n}\pi)+\cos(\frac{n+1}{n}\pi)+i\sin(\frac{n+1}{n}\pi)}$$

$$=\frac{-2}{\cos(\frac{n-1}{n}\pi)+\cos(\frac{n+1}{n}\pi)+i[\sin\left(\frac{n+1}{n}\pi\right)+\sin\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)]}$$

$$=\frac{-2}{2*\cos(\pi)*\cos(\frac{-\pi}{n})+i[2*\sin(\pi)*\cos(\frac{-\pi}{n})]}$$

$$=\frac{-2}{2*\cos(\pi)*\cos\left(\frac{-\pi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\rightarrow \frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overline{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}}=C$$

$$\rightarrow \frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overline{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}}=C=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

∴奇數邊拿破崙初始 n 邊形重心至兩端點比值為$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

2. 偶數邊拿破崙初始 n 邊形

偶數邊拿破崙初始 n 邊形的對角線互相平分，且重心至各個頂點線段比皆為 1:1 (如圖 17，圖 18)

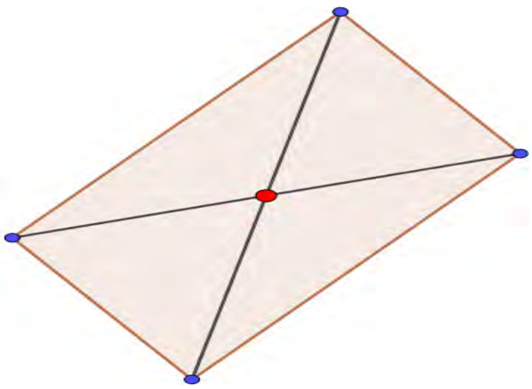


圖 17

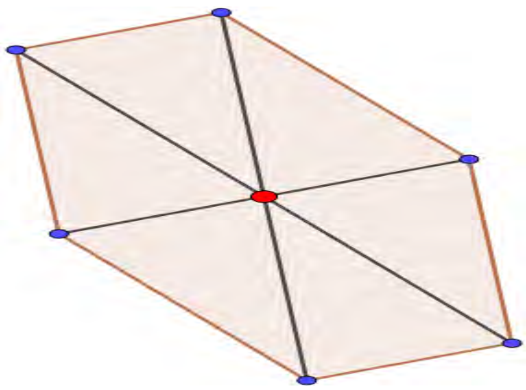


圖 18

<u>偶數邊拿破崙初始 n 邊形重心至兩端點比值為 1</u>

$$C=\frac{\omega^x}{\omega^{x+\frac{n}{2}}}=\frac{\omega^x}{\omega^x*\omega^{\frac{n}{2}}}=\frac{1}{\omega^{\frac{n}{2}}}=\frac{1}{\cos(\frac{n}{2}*\frac{2\pi}{n})+i\sin(\frac{n}{2}*\frac{2\pi}{n})}=\frac{1}{\cos(\pi)+i\sin(\pi)}=\frac{1}{1+0i}=1$$

$$\rightarrow \frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overline{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}}=C$$

$$\rightarrow \frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overline{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}}=C=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

∴偶數邊拿破崙初始 n 邊形重心至兩端點比值為 1

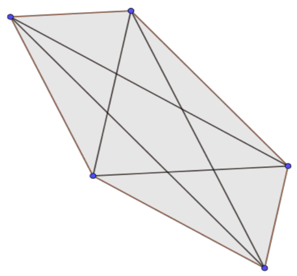
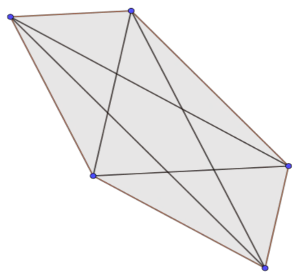
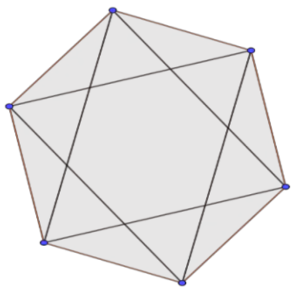
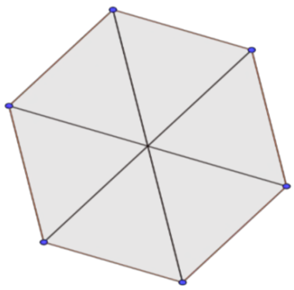
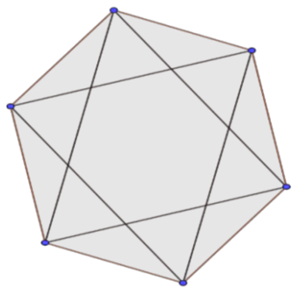
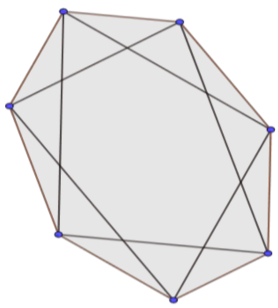
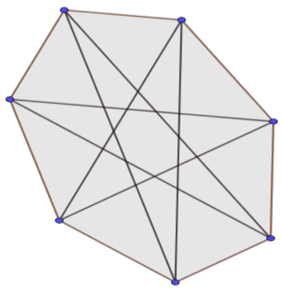
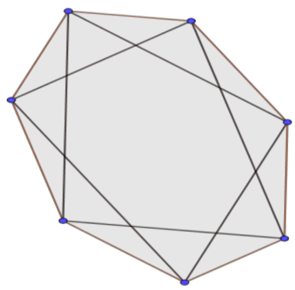
伍、研究結果與討論

一、拿破崙內角星

(一)內 n 角星層數限制

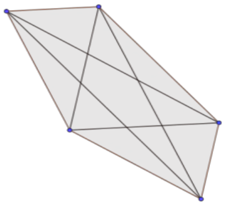
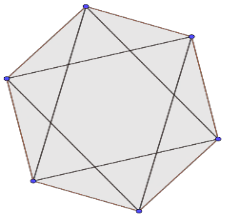
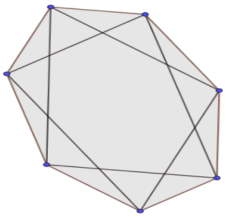
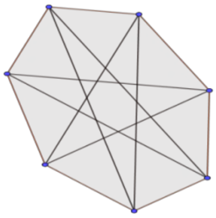
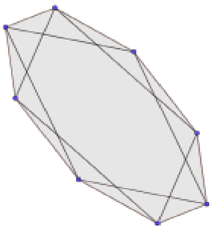
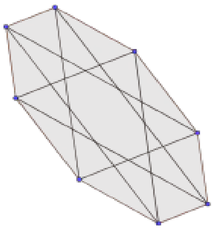
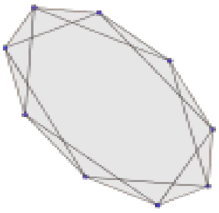
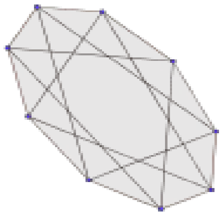
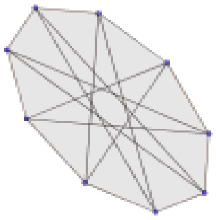
研究過後發現，在畫偶數邊圖形的內角星中，由於圖形在特定層中，做出的圖形會是對角線而不是一個區域，因此不討論此種現象。(如表四)

表四

五邊形一層圖形 	五邊形二層圖形 	五邊形三層圖形
六邊形一層圖形 	六邊形二層圖形 	六邊形三層圖形 
七邊形一層圖形 	七邊形二層圖形 	七邊形三層圖形 

圖形畫超過一定層數後會和之前的圖形相同，因此只討論不同的圖形。比較不同初始 n 邊形連 n 角星的差異(如表五)。研究後，發現拿破崙初始 n 邊形最高層數的規律為 n/2-2 四捨五入後的結果。

表五

五邊形				5/2-2≒1(結果須四捨五入)
六邊形				6/2-2≒1
七邊形				7/2-2≒2
八邊形				8/2-2≒2
九邊形				9/2-2≒3

(二)不同層 n 角星截線段比之關聯性

經由平行性質發現拿破崙內 n 角星所截線段成固定比例，此比例與正 n 邊形相同

1. 拿破崙內 n 角星同一線段上兩 n 層交點至頂點所截線段不論層數和邊數比例皆為 1:1。(如圖 19 中紅色線段)

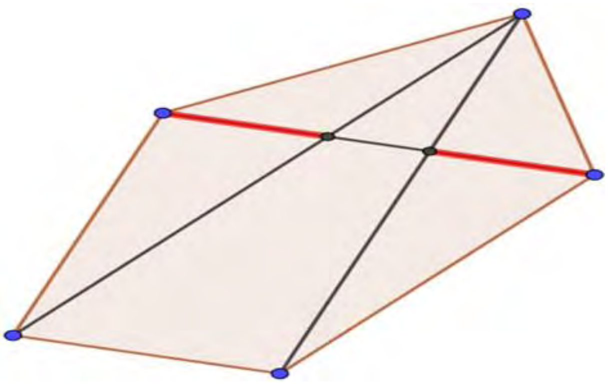


圖 19

拿破崙初始 n 邊形兩 m 層交點至兩端點比例為 1:1 證明

已知:拿破崙初始七邊形 ABCDEFG，連對角線得二層交點 H、I(如圖 20)

試証: $\overline{AH}:\overline{DI}=1:1$

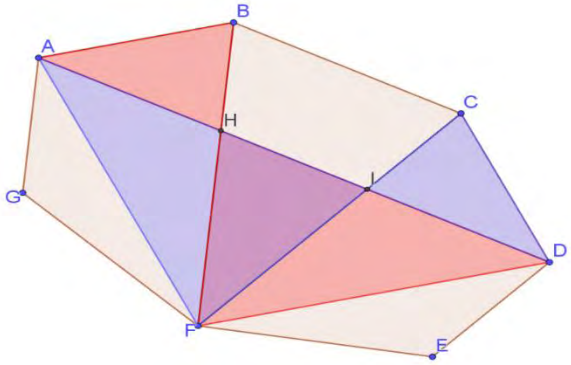


圖 20

證明:

$\because \overline{AB}//\overline{CD}$

$\therefore \triangle AHB \sim \triangle DHF$

$\overline{BH}:\overline{FH}=\overline{AH}:\overline{DH}$ ……(1)

同理可得，$\overline{DI}:\overline{AI}=\overline{CI}:\overline{FI}$ ……(2)

又$\because \overline{DI}//\overline{BC}$

$\therefore \overline{FI}:\overline{CI}=\overline{FH}:\overline{BH}$ ……(3)

依照(1)、(2)、(3)得$\overline{CI}:\overline{FI}=\overline{BH}:\overline{FH}=\overline{AH}:\overline{DH}=\overline{DI}:\overline{AI}$

令$\frac{\overline{AH}}{\overline{DH}}=\frac{\overline{DI}}{\overline{AI}}=k$，$k>0$

$\overline{AH}=k\overline{DH}=k(\overline{DI}+\overline{IH})=k\overline{DI}+k\overline{IH}$

$\overline{DI}=k\overline{AI}=k(\overline{AH}+\overline{IH})=k\overline{AH}+k\overline{IH}$

$\overline{AH}-\overline{DI}=k\overline{DI}+k\overline{IH}-(k\overline{AH}+k\overline{IH})$

$(k+1)\overline{AH}=(k+1)\overline{DI}$

$\overline{AH}:\overline{DI}=(k+1):(k+1)=1:1$

2.拿破崙內 n 角星所截線段比會隨層數和圖形的邊數不同而改變。若為同一邊數同一層數的拿破崙初始 n 邊形的內 n 角星，內 n 角星所截線段比固定(如圖 21)

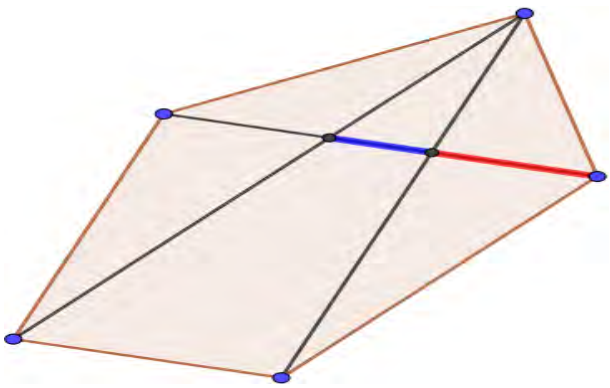
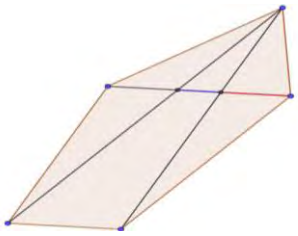
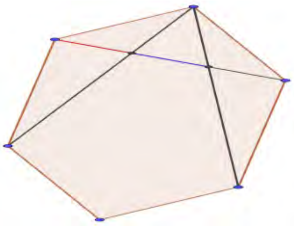
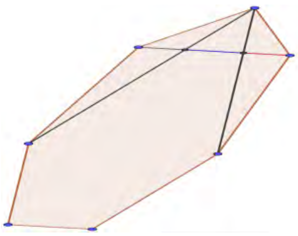
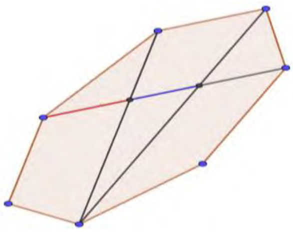
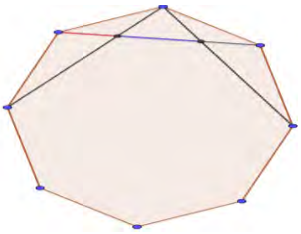
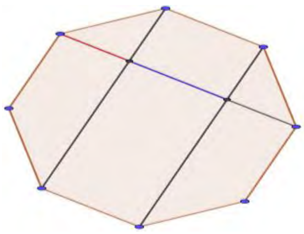
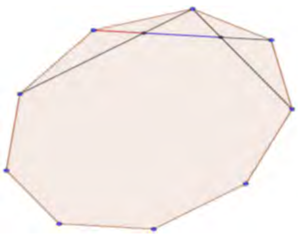
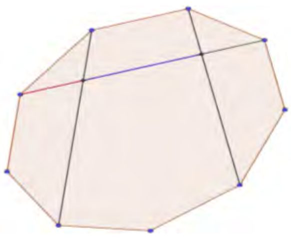
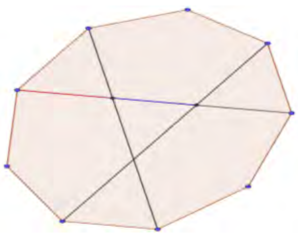


圖 21

研究後拿破崙內 n 角星所截線段比結果如下(表六)

表六

名稱	第 1 層	第 2 層	第 3 層
5 邊形			
比例	0.618033989:1		
6 邊形			
比例	1:1		
7 邊形			
比例	1.246979604:1	0.801937736:1	
8 邊形			
比例	1.414213562:1	1.414213562:1	
9 邊形			
比例	1.532088886:1	1.879385242:1	0.879385242:1

<u>拿破崙初始 n 邊形平行性質推廣至 n 角星截線段比值為</u> $\frac{\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}-1$

已知:拿破崙初始 n 邊形$P_0P_1P_2\cdots P_n$(如圖 22)

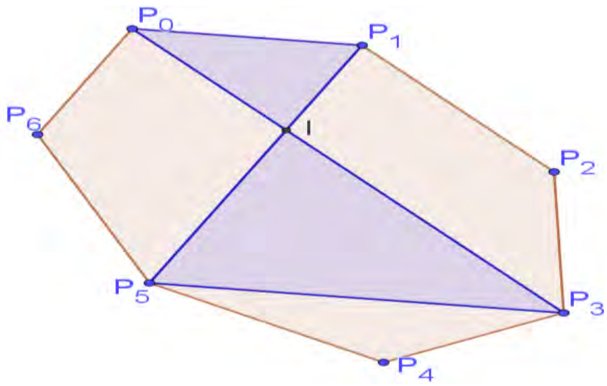


圖 22

試証:拿破崙 m 層 n 角星截線段比值為$\frac{\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}-1$

證明:

在拿破崙初始 n 邊形中，令$\overline{P_0P_{n-1}}:\overline{P_mP_{n-m-1}}=K_m$，其中 m 為層數或階數。

假設$\overline{P_0P_{n-m-1}}$與$\overline{P_{n-1}P_m}$之交點為 I

$\because \overline{P_0P_{n-1}}//\overline{P_mP_{n-m-1}}$

$\triangle P_0IP_{n-1}\sim\triangle P_mIP_{n-m-1}$(AA 相似)

$\overline{P_0P_{n-1}}:\overline{P_mP_{n-m-1}}=\overline{P_0I}:\overline{P_{n-m-1}I}$=n 層交點至頂點所截線段:(n 層交點至 n 層交點所截線段+ n 層交點至頂點所截線段)= K_m:1

根據平行性質的證明，$\overline{P_0P_{n-1}}:\overline{P_mP_{n-m-1}}=\frac{Z_{n-1}-Z_0}{Z_{n-m-1}-Z_m}=\frac{\omega^{n-1}-1}{\omega^{n-m-1}-\omega^m}=K_m$

發現所截線段比例$\frac{1-K_m}{K_m}=\frac{1-\frac{\omega^{n-1}-1}{\omega^{n-m-1}-\omega^m}}{\frac{\omega^{n-1}-1}{\omega^{n-m-1}-\omega^m}}$

$$=\frac{1-\frac{(\cos\frac{2*(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2*(n-1)\pi}{n})-1}{(\cos\frac{2*(n-m-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2*(n-m-1)\pi}{n})-(\cos\frac{2*m\pi}{n}+i\sin\frac{2*m\pi}{n})}}{\frac{(\cos\frac{2*(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2*(n-1)\pi}{n})-1}{(\cos\frac{2*(n-m-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2*(n-m-1)\pi}{n})-(\cos\frac{2*m\pi}{n}+i\sin\frac{2*m\pi}{n})}}$$

$$=\frac{1-\frac{\left(-2*\sin^2\frac{2*(n-1)\pi}{2n}\right)+i\sin\frac{2*(n-1)\pi}{n}}{\left(-2*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{2n}\right)+i(2*\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{2n})}}{\frac{\left(-2*\sin^2\frac{2*(n-1)\pi}{2n}\right)+i\sin\frac{2*(n-1)\pi}{n}}{\left(-2*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{2n}\right)+i(2*\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{2n})}}$$

$$=\frac{1-\frac{\left(-2*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)+i(2*\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n})}{\left(-2*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-m-1)\pi}{2n}\right)+i\,(2*\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{2n})}}{\frac{\left(-2*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)+i(2*\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n})}{\left(-2*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-m-1)\pi}{2n}\right)+i\,(2*\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{2n})}}$$

$$=\frac{1-\frac{\sin\frac{2*(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{2*(n-2m-1)\pi}{2n}}}{\frac{\sin\frac{2*(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{2*(n-2m-1)\pi}{2n}}}$$

$$=\frac{1-\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{n}}}{\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{n}}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}-1$$

二、拿破崙外角星

(一)中點延伸區域圖形之相似情形

將拿破崙初始 n 邊形鄰邊中點相連，其交點相連產生圖形稱為 m 階交點圖形，鄰邊中點其相連產生圖形稱為中點連線圖形。研究發現中點連線圖形、m 階交點圖形皆為拿破崙初始 n 邊形。奇數邊拿破崙初始 n 邊形、m 階交點圖形、拿破崙初始 n 邊形、中點連線圖形皆相似。偶數邊拿破崙初始 n 邊形和奇數階交點圖形相似，鄰邊中點連線圖形和偶數階交點圖形相似。

1.偶數邊拿破崙初始 n 邊形(如圖 23):

紫:拿破崙初始 n 邊形　紅:　鄰邊中點連線圖形　綠:1 階交點圖形　藍:2 階交點圖形

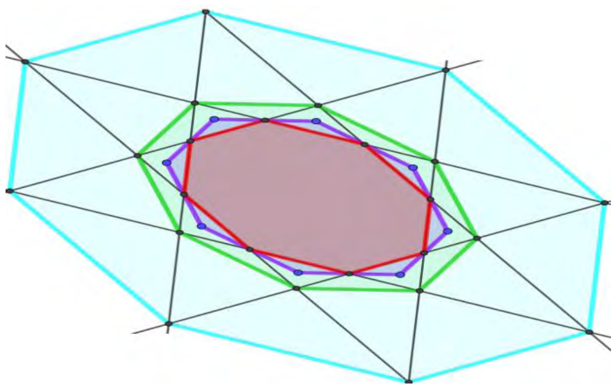


圖 23

2.奇數邊拿破崙初始 n 邊形(如圖 24):

紫:拿破崙初始 n 邊形　紅:鄰邊中點連線圖形　綠:1 階交點圖形　藍:2 階交點圖形

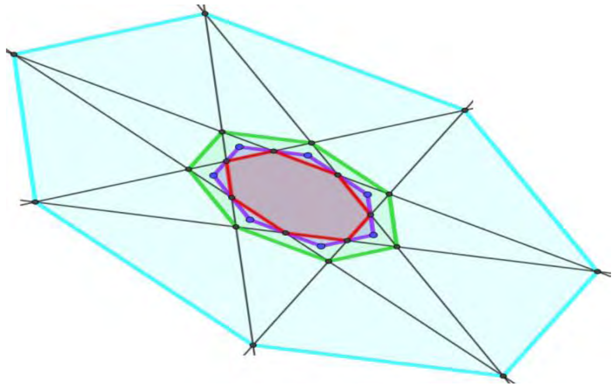


圖 24

(1)偶數邊初始 n 邊形鄰邊中點連線圖形為拿破崙初始 n 邊形證明

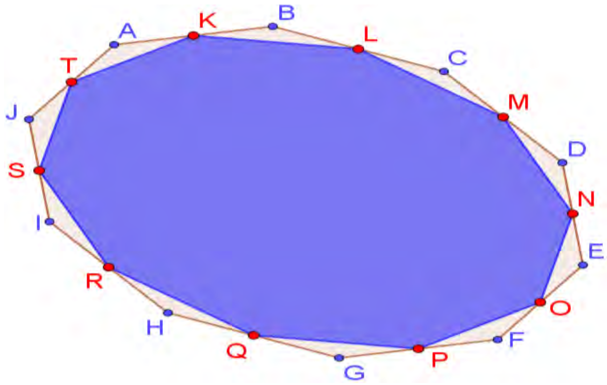


圖 25

已知:十邊形 ABCDEFGHIJ 為初始十邊形，$\overline{AB}//\overline{JC}//\overline{ID}//\overline{HE}//\overline{GF}$，K、L、M、N、O、P、Q、R、S、T 依序為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HI}$、$\overline{IJ}$、$\overline{JA}$之中點(如圖 25)

試証: 十邊形 KLMNOPQRST 為拿破崙初始十邊形

證明:

1. ∵四邊形 BCIJ 為梯形

   ∴$\overline{KT}//\overline{BJ}//\overline{LS}//\overline{IC}$(三角形及梯形中點連線會平行底邊)

2. 同理可証，$\overline{KT}//\overline{LS}//\overline{MR}//\overline{NQ}//\overline{OP}$

3. 同理可証， $\overline{TS}//\overline{KR}//\overline{LQ}//\overline{MP}//\overline{NO}$、$\overline{SR}//\overline{TQ}//\overline{KP}//\overline{LO}//\overline{MN}$、$\overline{RQ}//\overline{SP}//\overline{TO}//\overline{KN}//\overline{LM}$、$\overline{QP}//\overline{RO}//\overline{SN}//\overline{TM}//\overline{KL}$，由判別性質可得知十邊形 KLMNOPQRST 為初始十邊形

(2)偶數邊初始 n 邊形和奇數階交點圖形相似證明

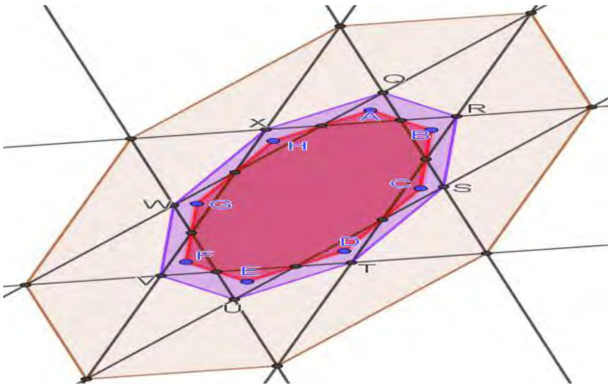


圖 26

已知:八邊形 ABCDEFGH 為初始八邊形，點 I、點 J、點 K、點 L、點 M、點 N、點 O、點 P 依序為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GH}$、 $\overline{HA}$之中點，將兩相鄰中點相連，做初始八邊形 IJKLMNOP，接著將兩相鄰中點向外延伸，連一階交點做八邊形 QRSTUVWX(如圖 26)

試證:八邊形 ABCDEFGH~八邊形 QRSTUVWX

證明:

1. 做$\overline{AC}$、$\overline{BD}$、$\overline{CE}$、$\overline{DF}$、$\overline{EG}$、$\overline{FH}$、$\overline{GA}$、$\overline{HB}$

2. ∵$\overline{AC}//\overline{IJ}$(三角形中點相連平行底邊)，且$\overline{IJ}$和$\overline{QS}$共線

   ∴$\overline{AC}//\overline{QS}$

3. 同理可証，$\overline{BD}//\overline{RT}$、$\overline{CE}//\overline{SU}$、$\overline{DF}//\overline{TV}$、$\overline{EG}//\overline{UW}$、$\overline{FH}//\overline{VX}$、$\overline{GA}//\overline{WQ}$、$\overline{HB}//\overline{XR}$

∴八角星內所有角度相等

4. ∵$\overline{AC}:\overline{IJ}=2:1$，$\overline{IJ}:\overline{PK}:\overline{QS}=\frac{1+\frac{\sin\frac{(8-1)\pi}{8}}{\sin\frac{(8-2*1-1)\pi}{8}}}{1-\frac{\sin\frac{(8-1)\pi}{8}}{\sin\frac{(8-2*1-1)\pi}{8}}}:1:1=(\frac{\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}}{\sin\frac{5\pi}{8}-\sin\frac{7\pi}{8}}):1:1$

∴$\overline{AC}:\ \overline{QS}=1:(\frac{\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}}{2*(\sin\frac{5\pi}{8}-\sin\frac{7\pi}{8})})$

同理可証，$\overline{BD}:\ \overline{RT}=\overline{CE}:\ \overline{SU}=\overline{DF}:\ \overline{TV}=\overline{EG}:\ \overline{UW}=\overline{FH}:\ \overline{VX}=\overline{GH}:\ \overline{WQ}=$

$\overline{HB}:\ \overline{XR}=1:(\frac{\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}}{2*(\sin\frac{5\pi}{8}-\sin\frac{7\pi}{8})})$

<u>(3)鄰邊中點連線圖形和偶數階交點圖形相似證明</u>

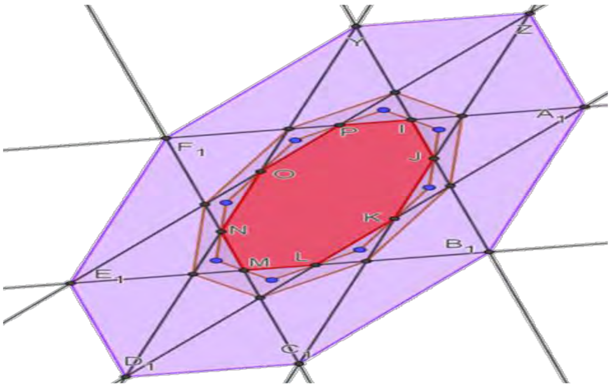


圖 27

已知:八邊形 ABCDEFGH 為初始八邊形，點 I、點 J、點 K、點 L、點 M、點 N、點 O、點 P 依序為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HA}$之中點，將兩相鄰中點相連，做初始八邊形 IJKLMNOP，接著將兩相鄰中點向外延伸，連二階交點做八邊形 $YZA_1B_1C_1D_1E_1F_1$(如圖 27)

試證:八邊形 IJKLMNOP~八邊形$YZA_1B_1C_1D_1E_1F_1$

證明:

1. 做$\overline{IL}$、$\overline{JM}$、$\overline{KN}$、$\overline{LO}$、$\overline{MP}$、$\overline{NI}$、$\overline{OJ}$、$\overline{PK}$
2. ∵$\overline{JK}//\overline{IL}$(初始 n 邊形性質)，且$\overline{JK}$和$\overline{ZC_1}$共線

   ∴$\overline{IL}//\overline{ZC_1}$
3. 同理可証，$\overline{JM}//\overline{A_1D_1}$、$\overline{KN}//\overline{B_1E_1}$、$\overline{LO}//\overline{C_1F_1}$、$\overline{MP}//\overline{D_1Y}$、$\overline{NI}//\overline{E_1Z}$、$\overline{OJ}//\overline{F_1A_1}$、$\overline{PK}//\overline{YB_1}$

   ∴八角星內所有角度相等
4. ∵$\overline{IL}:\overline{RT}:\overline{ZC_1}=1:1:\frac{1+\frac{\sin\frac{(8-1)\pi}{8}}{\sin\frac{(8-2*1-1)\pi}{8}}}{1-\frac{\sin\frac{(8-1)\pi}{8}}{\sin\frac{(8-2*1-1)\pi}{8}}}=1:1:(\frac{\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}}{\sin\frac{5\pi}{8}-\sin\frac{7\pi}{8}})$

   ∴$\overline{IL}:\ \overline{ZC_1}=1:(\frac{\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}}{\sin\frac{5\pi}{8}-\sin\frac{7\pi}{8}})$
5. 同理可証，$\overline{JM}:\overline{A_1D_1}=\overline{KN}:\overline{B_1E_1}=\overline{LO}:\overline{C_1F_1}=\overline{MP}:\overline{D_1Y}=\overline{NI}:\ \overline{E_1Z}=\overline{OJ}:\ \overline{F_1A_1}=$

$\overline{PK}$:$\overline{YB_1}$ $= 1:(\frac{\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}}{\sin\frac{5\pi}{8}-\sin\frac{7\pi}{8}})$

6. ∵兩個八角星相似

   ∴兩八角星頂點相連做出之八邊形亦相似

(1)奇數邊初始 n 邊形和鄰邊中點連線圖形相似證明

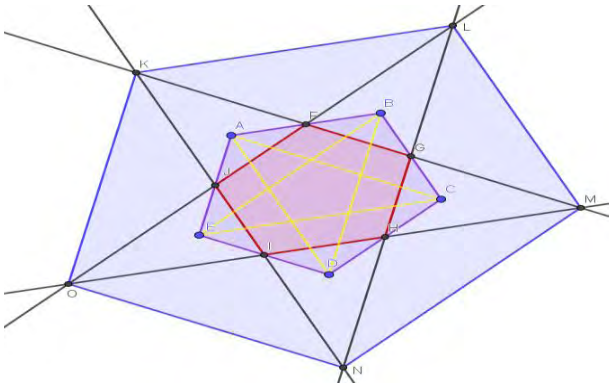


圖 28

已知:初始五邊形 ABCDE，F、G、H、I、J 依序為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EA}$中點(如圖 28)

試證:五邊形 ABCDE~五邊形 HIJFG

證明:

1. 作$\overline{AC}$、$\overline{CE}$、$\overline{EB}$、$\overline{BD}$、$\overline{DA}$
2. ∵點 F 為$\overline{AB}$之中點，點 G 為$\overline{BC}$之中點

   ∴$\overline{FG}$ // $\overline{AC}$ // $\overline{DE}$
3. ∵$\overline{FG}$ // $\overline{DE}$，$\overline{GH}$ // $\overline{EA}$

   ∴∠FGH=∠DEA

   同理可證∠GHI=∠EAB、∠HIJ=∠ABC、∠IJK=∠BCD、∠JKL=∠CDE
4. ∵$\overline{AC}:\overline{DE} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{4\pi}{5}}:1$，$\overline{AC}:\overline{FG} = 2:1$

   ∴$\overline{FG}:\overline{DE} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2*\sin\frac{4\pi}{5}}:1$
5. 同理可得$\overline{GH}$ // $\overline{EA}$、$\overline{HI}$ // $\overline{AB}$、$\overline{IJ}$ // $\overline{BC}$、$\overline{JE}$ // $\overline{CD}$

   $\overline{GH}:\overline{EA} = \overline{HI}:\overline{AB} = \overline{IJ}:\overline{BC} = \overline{JE}:\overline{CD} = 1:4\cos(\frac{2\pi}{5})$，因此五邊形 ABCDE~五邊形 HIJFG

(2)奇數邊初始 n 邊形鄰邊中點連線圖形和 m 階交點圖形相似證明

已知:初始五邊形 ABCDE，F、G、H、I、J 依序為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EA}$中點(如圖 28)

試證:五邊形 HIJFG~五邊形 KLMNO

證明:

1. 作$\overleftrightarrow{FG}$、$\overleftrightarrow{GH}$、$\overleftrightarrow{HI}$、$\overleftrightarrow{IJ}$、$\overleftrightarrow{JF}$
2. 取五線交點點 K、點 L、點 M、點 N、點 O，之後將其相連作出五邊形 KLMNO。
3. 由內部相似之證明可得知$\overline{FG}$ // $\overline{DE}$，因此由上述作法作出之$\overline{KM}$亦平行$\overline{DE}$及$\overline{FG}$
4. 作$\overleftrightarrow{JH}$、$\overleftrightarrow{HF}$、$\overleftrightarrow{JF}$

5. ∵$\overline{JH}//\overline{FG}//\overline{KM}//\overline{KF}$，$\overline{HF}//\overline{IJ}//\overline{KN}//\overline{KJ}$

∴∠KFJ=∠HJF(內錯角相等)

∠KJF=∠HFJ(內錯角相等)

6. ∵∠KFJ=∠HJF

∠KJF=∠HFJ

$\overline{FJ}=\overline{JF}$(共用邊)

∴△KFJ≅△HJK

7. 同理可得，△JHG≅△MGH，因此$\overline{KF}:\overline{JH}:\overline{GM}$=1:1:1

8. ∵內部相似之性質可得知$\overline{JH}:\overline{FG}=(\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}+1):1$

∴$\overline{KF}:\overline{GF}:\overline{GM}=(\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}+1):1:(\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}+1)$

∴$\overline{GF}:\overline{KM}=1:(4\cos(\frac{2\pi}{5})+3)$

9. 同理可得$\overline{FJ}:\overline{OL}=\overline{JI}:\overline{KN}=\overline{IH}:\overline{OM}=\overline{HG}:\overline{NL}=1:(\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}+2)$，因此$\overline{FJ}:\overline{FO}:\overline{NM}=$

$\overline{JI}:\overline{JN}:\overline{ML}=\overline{IH}:\overline{IM}:\overline{LK}=\overline{HG}:\overline{HL}:\overline{KO}=\overline{GH}:\overline{GK}:\overline{ON}=1:2\cos(\frac{2\pi}{5}):2\cos(\frac{2\pi}{5})$，所以五

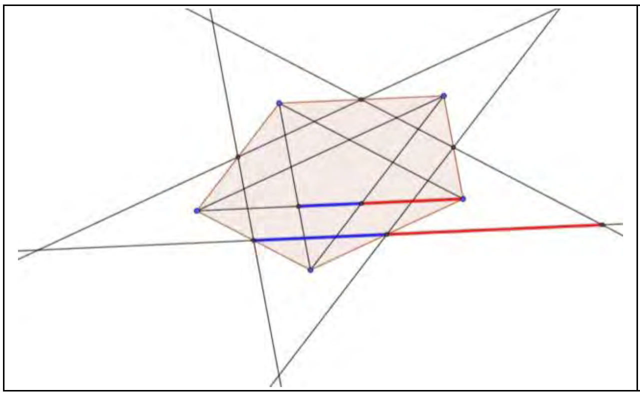
邊形 FGHIJ~五邊形 NOKLM

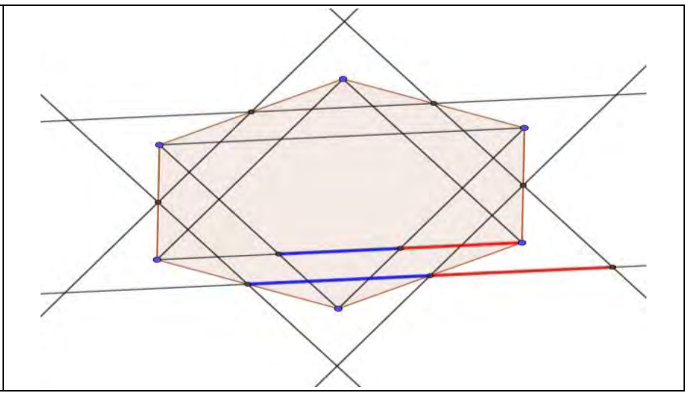
三、拿破崙內角星及外角星之關聯性

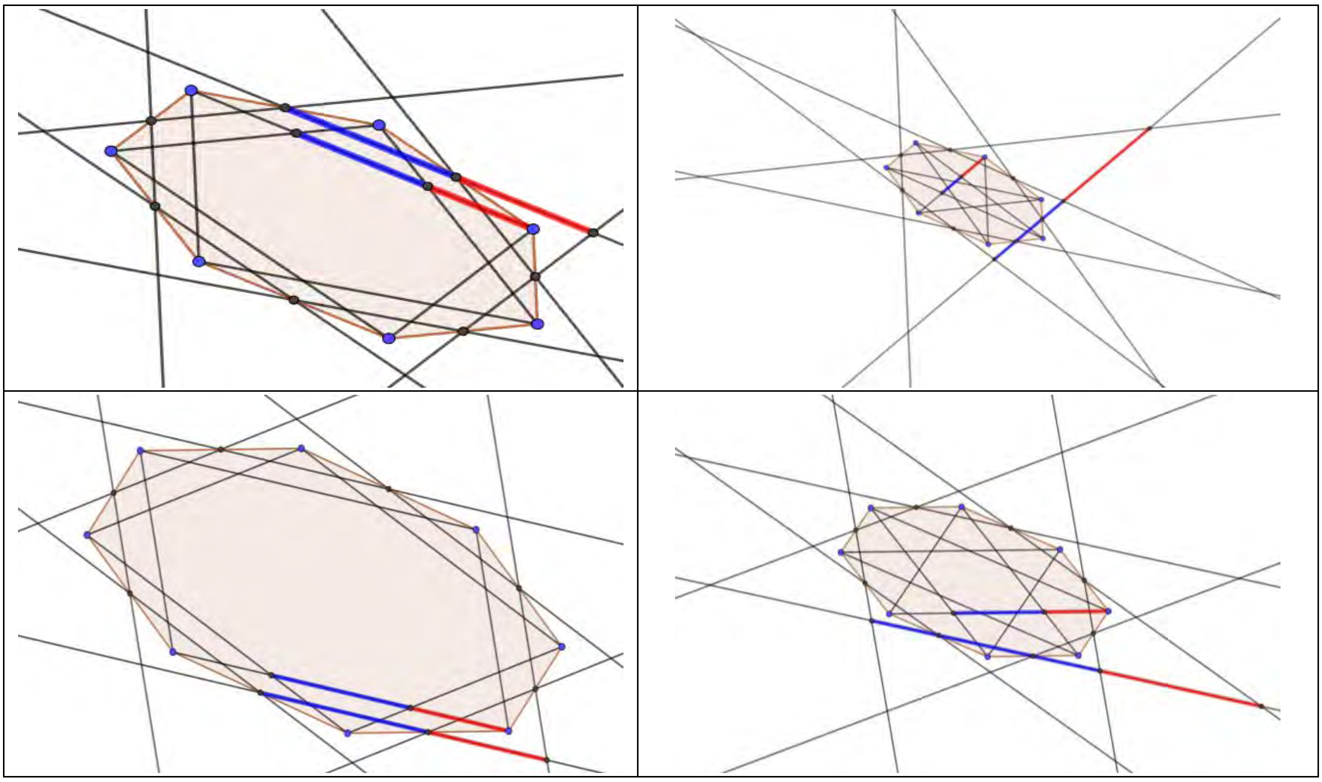
(一)內外角星共同線段比例

在研究拿破崙 m 階外 n 角星截線段比例時，發現會與 m 階內 n 角星相同。m 階外角星可被視為是 m 階交點圖形的 m 層內角星，也就可以得到 m 階外角星截線段比與 m 層內角星截線段比相同之結論。(如表七，藍色線段比紅色線段)

表七







四、拿破崙初始 n 邊形及投影幾何之關聯性

(一)正 n 角柱投影切面性質

在紙板上切割出正五邊形，並以平行光從不同角度照入，發現投影在平面上的五邊形即為初始五邊形。我們以 GGB 軟體繪出正 n 角柱與平面相交的狀況來討論(如圖 29)。由於從正 n 邊形平行照射至投影面上，因此出現的 n 邊形有拿破崙初始 n 邊形的平行性質，可由判別性質證明此 n 邊形為拿破崙初始 n 邊形。(如表八)

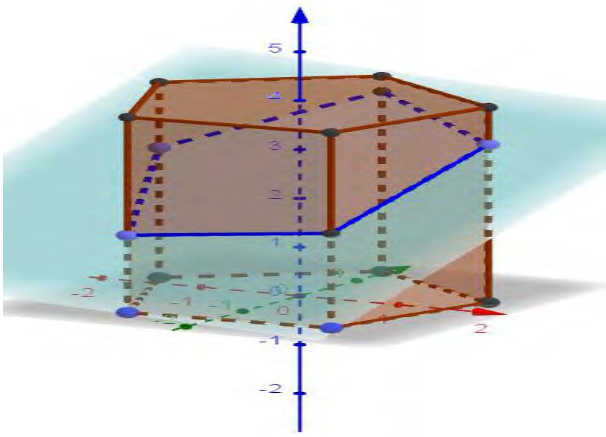
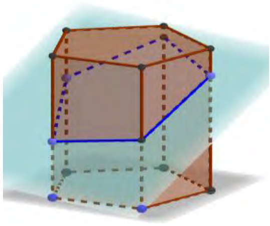
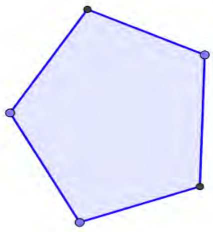
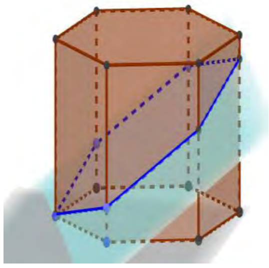
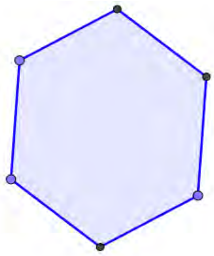
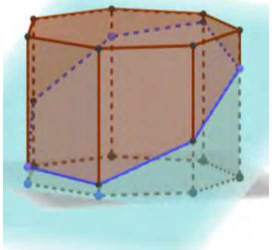
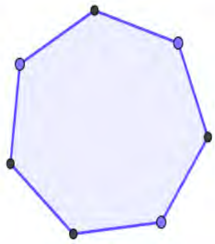
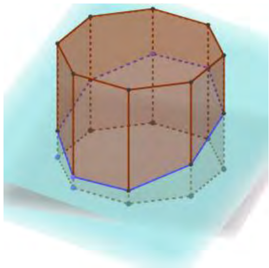


圖 29

表八

五角柱		六角柱	
			
七角柱		八角柱	
			

結果:

觀察到平面和正 n 角柱所截的 n 邊形為拿破崙初始 n 邊形，因此判定拿破崙初始 n 邊形並非正 n 邊形壓縮而是正 n 邊形之投影。故可得知拿破崙初始 n 邊形重心和正 n 邊形中心共點，亦代表拿破崙初始 n 邊形的重心即為中心，且重心至兩端點的比值和正 n 邊形中心至兩端點的比值相同，也可以解釋拿破崙 n 角星為何會具有特殊線段比例，並可說明平行性質為拿破崙初始 n 邊形的判別性質。

陸、結論

一、拿破崙初始 n 邊形基本性質

(一)拿破崙初始 n 邊形平行性質(判別性質)

以任意拿破崙初始 n 邊形一邊為指定邊，其兩頂點分別向順時針及逆時針各推 m 個頂點後將其相連，其產生直線會與原線段平行。此性質亦為拿破崙初始 n 邊形判別性質。

(二)偶數邊拿破崙初始 n 邊形的對邊平行且等長、對角相等

在偶數邊拿破崙初始 n 邊形中，對邊平行且等長、對角相等

(三)拿破崙初始 n 邊形的重心性質

1. 拿破崙初始 n 邊形之重心

偶數邊拿破崙初始 n 邊形中，對角線相連可以產生 n 個面積相等三角形；奇數邊拿破崙初始 n 邊形頂點至對邊中點相連可產生 2n 個面積相等三角形，由於連線交點向量和為零，因此此點為重心

2. 拿破崙正 n 邊形中心與拿破崙初始 n 邊形重心關係

拿破崙正 n 邊形中心和拿破崙初始 n 邊形重心共點

(四)拿破崙初始 n 邊形重心分割線段比例固定

1. 奇數邊拿破崙初始 n 邊形

奇數邊拿破崙初始 n 邊形的重心至一頂點和對邊中點的比值會和正 n 邊形相等比值為

$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

2. 偶數邊拿破崙初始 n 邊形

偶數邊拿破崙初始 n 邊形對角線互相平分重心至各頂點線段比為 1:1

二、拿破崙內角星

(一)內 n 角星層數限制

拿破崙初始 n 邊形若不重複最高層數的規律為 n/2-2 四捨五入後的結果

(二)不同層 n 角星截線段比之關聯性

1. 拿破崙初始 n 邊形內 n 角星同一線段上兩 n 層交點至頂點所截線段不論層數和邊數比例皆為 1:1

2. 拿破崙初始 n 邊形內 m 層 n 角星所截線段比值為$\frac{\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}-1$

三、拿破崙外角星

(一)外 n 角星之相似情形

奇數邊拿破崙初始 n 邊形、n 階交點圖形、中點連線圖形皆相似。偶數邊初始 n 邊形和奇數階交點圖形相似，中點連線圖形和偶數階交點圖形相似。

四、拿破崙內角星及外角星之關聯性

(一)內外角星線段比例

拿破崙內外角星在層數和階數相同的情況下，兩者具相同線段比例

五、拿破崙初始 n 邊形及投影幾何之關聯性

(一)正 n 角柱投影切面性質

利用切割角柱可產生拿破崙初始 n 邊形，因此拿破崙初始 n 邊形並非正 n 邊形壓縮而是正 n 邊形之投影，由此可解釋為何拿破崙初始 n 邊形會和正 n 邊形有共同的性質

柒、未來展望

一、已知利用拿破崙初始 n 邊形向外做不規則相似圖形後，將這些不規則的相似圖形重心相連，可以得到一新拿破崙初始 n 邊形。希望未來能夠研究出原拿破崙初始 n 邊形向外延伸外接多邊形之兩頂點與外接多邊形重心之夾角是否和新拿破崙初始 n 邊形相關。

二、在本文的最後提到:「拿破崙初始 n 邊形是經由正 n 邊形投影而產生的結果。」希望未來能往這個方向做更深入的研究。

三、已知拿破崙多角星的同層交點至同層交點之線段以及多角星頂點至同層交點之線段有固定比例。希望未來能夠以此比例來做出拿破崙初始 n 邊形。

捌、參考資料

一、黃家冠(2015)•拿破崙定理對多邊形之推廣

二、邱華彥(2005)•外接多邊形法及對稱性

【評語】030415

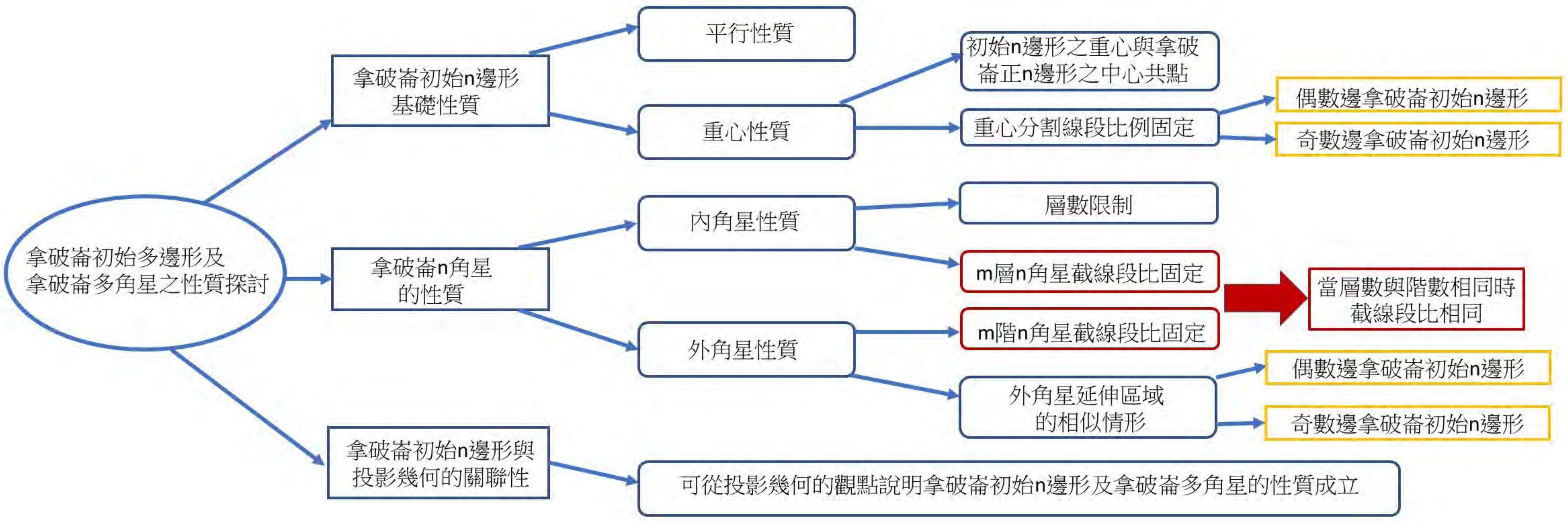
本作品主要探討的主題是拿破崙初始ｎ邊形，有用到複數等工具，可以看出作者們投入了許多的心力在這些問題上，值得稱許。可惜的是有些研究太過廣泛而不夠深入；如果能聚焦在主要的問題上，把一些枝節稍做整理，作品整體給人的感覺應該會更好。此外，有部分的論述稍嫌複雜了些，如果能活用複數的特性,應該可以把一些論證簡化。

作品海報

壹、研究動機

在學習國中數學的歷程中，對幾何產生了興趣，並在因緣際會下看到了一個有趣的定理—拿破崙定理。上網查詢歷屆科展報告時，後來看到了一篇有關拿破崙定理的研究，發現要使拿破崙定理能推廣到其他n邊形中，其關鍵在於能找出拿破崙初始n邊形，使其各邊向外所作的正n邊形重心相連能產生新的正n邊形。所以展開了拿破崙初始n邊形的研究 。

貳、研究架構



參、研究過程與方法

一、名詞定義

(一)拿破崙初始n邊形

給定一個n邊形(在此研究中所討論的n邊形均為凸n邊形)，以各邊分別向外作外接正n邊形(因為邊長不一定等長，所以各外接正n邊形不一定全等)，連接相鄰兩正n邊形中心，形成一個新的n邊形，若此新的n邊形為正n邊形，則稱給定的n邊形為拿破崙初始n邊形，而中心連出的正n邊形為拿破崙正n邊形。(如圖一，藍色五邊形為拿破崙初始n邊形，綠色正五邊形為拿破崙正五邊形)

(二)拿破崙n角星

由拿破崙初始n邊形而產生的星形，可因畫法的不同分為內角星及外角星。

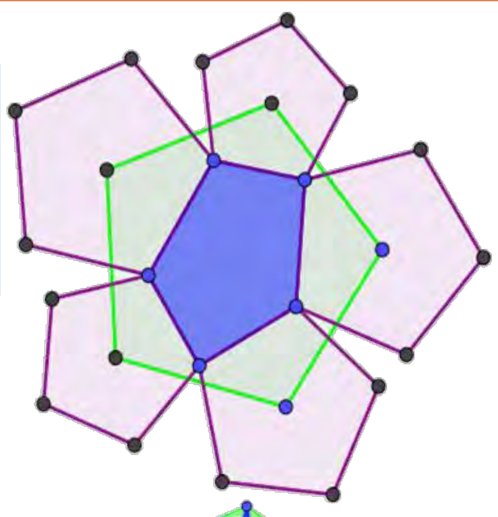
1. 內角星
   在拿破崙初始n邊形中以固定規律依順時針或逆時針將頂點相連。將每次跳m個頂點後連線所產生的星形稱為m層n角星(n≥5，$[\frac{n}{2}]$+1≥m≥0)。 (如圖二、三)
2. 外角星
   將拿破崙初始n邊形鄰邊中點相連向外延伸後，形成的星形即為拿破崙外角星 。(如圖四)

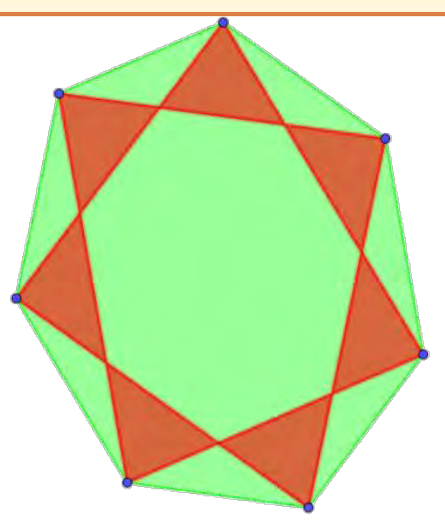
(三)m層交點與m階交點

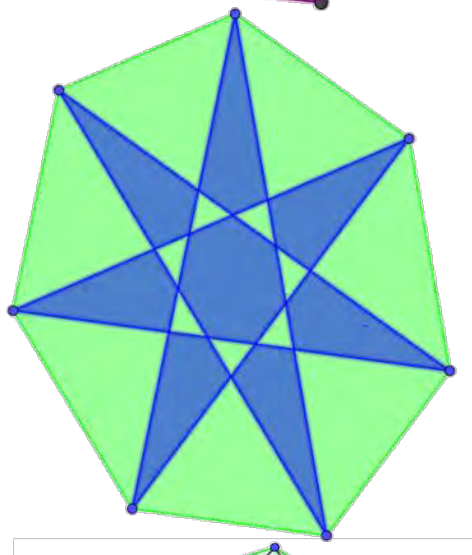
1. m層交點
   將拿破崙初始n邊形頂點連線，連線間格m個頂點所形成之內n角星，離拿破崙初始n邊形頂點最短距離之交點即為m層交點。 (如圖二，紅色交點為一層交點；如圖三，藍色交點為二層交點)
2. m階交點
   將拿破崙初始n邊形以鄰邊中點連線向外延伸，相交的第一個交點為一階交點，第二個交點為二階交點，依此類推。 (如圖四，紅色交點為一階交點)

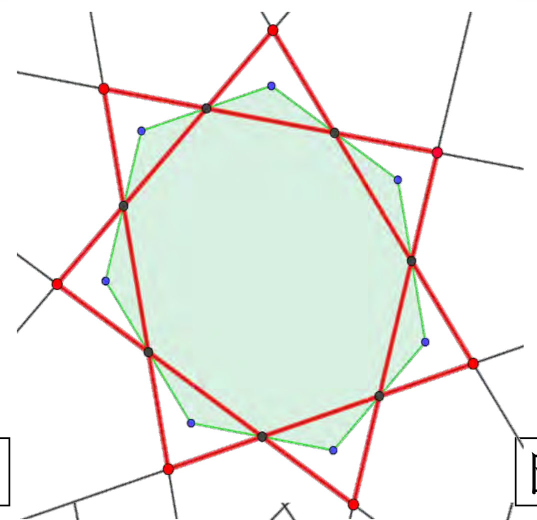
(四)拿破崙內外角星所截線段比

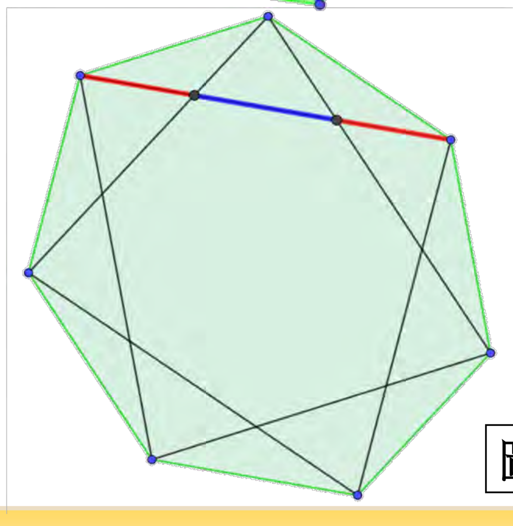
1. 拿破崙內n角星截線段比
   拿破崙內角星上同一直線同層交點至同層交點和同層交點至頂點所截之線段比。(如圖五，藍色線段比紅色線段)
2. 拿破崙外角星截線段比
   拿破崙外角星上同一直線兩鄰邊中點連線段和同階交點至兩鄰邊中點線段所截之線段比。(如圖六，藍色線段比紅色線段)

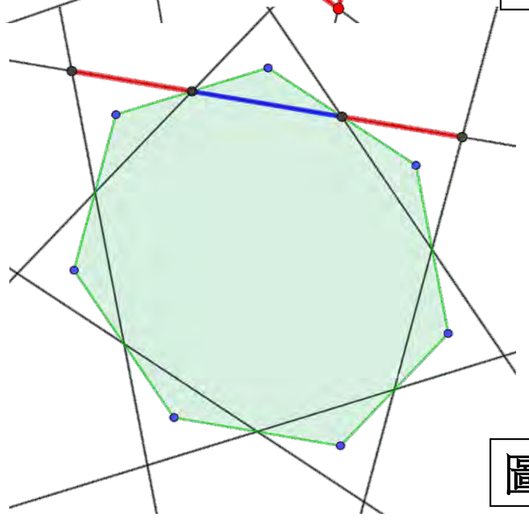

圖一


圖二


圖三


圖四


圖五


圖六

二、拿破崙初始n邊形基本性質

(一)拿破崙初始n邊形平行性質

性質1：指定拿破崙初始n邊形一邊相鄰兩點作一線段，其兩點分別向順時針及逆時針各推m點後將其相連，其產生直線會與原線段平行(關係式:$\overline{P_0P_{n-1}}//\overline{P_mP_{n-m-1}}$，黑色直線)

性質2：拿破崙初始n邊形在n=2k且k∈Z時，其對邊平行且等長、對角相等

性質1證明:在複數平面中，假設此正n邊形$A_1A_2A_3A_4\ldots\ldots A_n$內接於半徑1單位的圓(如圖六)。將正n邊形重心設為原點，則可假設其頂點座標分別為
$A_1(\omega)\ A_2(\omega^2)\ A_3(\omega^3)\ldots A_n(\omega^n=1)$，其中ω=。

假設P_0的座標為z_0，可知$\overrightarrow{A_1P_0}$=(z_0- ω)。又根據已cos($\frac{2\pi}{n}$)+ i sin($\frac{2\pi}{n}$)知條件可得，$\overrightarrow{A_1P_1}$= ω · $\overrightarrow{A_1P_0}$= ω · (z_0 − ω)，P_1點座標z_1=$\overrightarrow{OA_1}$+$\overrightarrow{A_1P_1}$ = ω + ω · z_0 − ω)。同理可得，P_2點座標z_2=1+ ω · (z_1 − 1)。以此類推拿破崙初始n邊形一頂點P_a的座標z_a=ω^{n-a+2}+ ω ·($z_{a-1}-\omega^{n-a+2}$)

$Z_m=\omega^{n-m+2}+\omega(Z_{m-1}-\omega^{n-m+2})$

$\because \omega^n=\cos(2\pi)=1$

$\therefore Z_m=\omega^{-m+2}+\omega(Z_{m-1}-\omega^{-m+2})$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} Z_m \\ \omega^{-m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega & \omega-\omega^2 \\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_{m-1} \\ \omega^{-(m-1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega & \omega-\omega^2 \\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix}^m\begin{pmatrix} Z_0 \\ 1\end{pmatrix}$

設$Z_m=A\omega^m+B\omega^{-m}$

當$m=0$，$Z_0=A\omega^0+B\omega^0=A+B$

$A=-B$

$Z=1$，$Z_1=A\omega+B\omega^{-1}=\omega+\omega(Z_0-\omega)$

$\mathrm{B}=\omega+\omega(Z_0-\omega)\omega^{-1}+(Z_0-B)\omega$

$=Z_0\omega+\omega-\omega^2-B\omega+\dfrac{B}{\omega}=\omega(1-\omega)$

$A=Z_0-\dfrac{\omega^2}{\omega+1}$，$B=\dfrac{\omega^2}{\omega+1}$

$Z_m=\left(Z_0-\frac{\omega^2}{\omega+1}\right)\omega^m+\left(\frac{\omega^2}{\omega+1}\right)\omega^{-m}=Z_0\omega^m+\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-m}-\omega^m)$

$Z_{n-m-1}-Z_m=Z_0\omega^{n-m-1}+\frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-(n-m-1)}-\omega^{(n-m-1)}\right)-Z_0\omega^m-\frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-m}-\omega^m)$

$=Z_0(\omega^{n-m-1}-\omega^m)+\omega^2(\omega^m-\omega^{n-m-1})$

$=(Z_0-\omega^2)(\omega^{n-m-1}-\omega^m)$

設$m=0$，$Z_{n-1}-Z_0=(Z_0-\omega^2)(\omega^{n-1}-\omega^0)$

$\Rightarrow \frac{Z_{n-1}-Z_0}{Z_{n-m-1}-Z_m}=\frac{(Z_0-\omega^2)(\omega^{n-1}-\omega^0)}{(Z_0-\omega^2)(\omega^{n-m-1}-\omega^m)}=\frac{(\omega^{n-1}-\omega^0)}{(\omega^{n-m-1}-\omega^m)}$，故平行性質1推廣至拿破崙初始n邊形成立。

性質2證明:

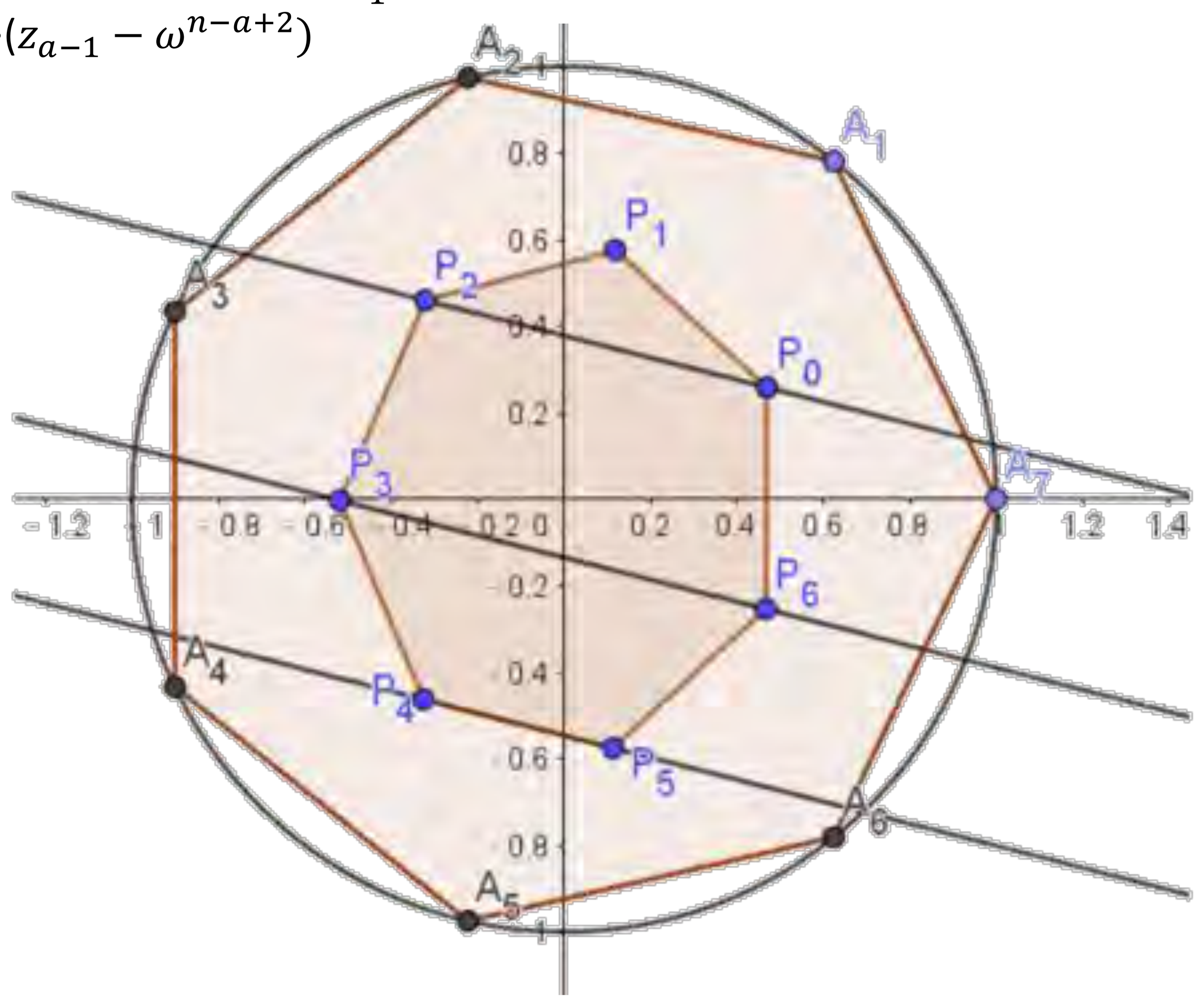
∵由性質1證明可得知$\overline{P_0P_1}//\overline{P_5P_4}$，$\overline{P_0P_5}//\overline{P_1P_4}$ (如圖七)

∴四邊形$P_0P_1P_5P_4$為平行四邊形(綠色區域)

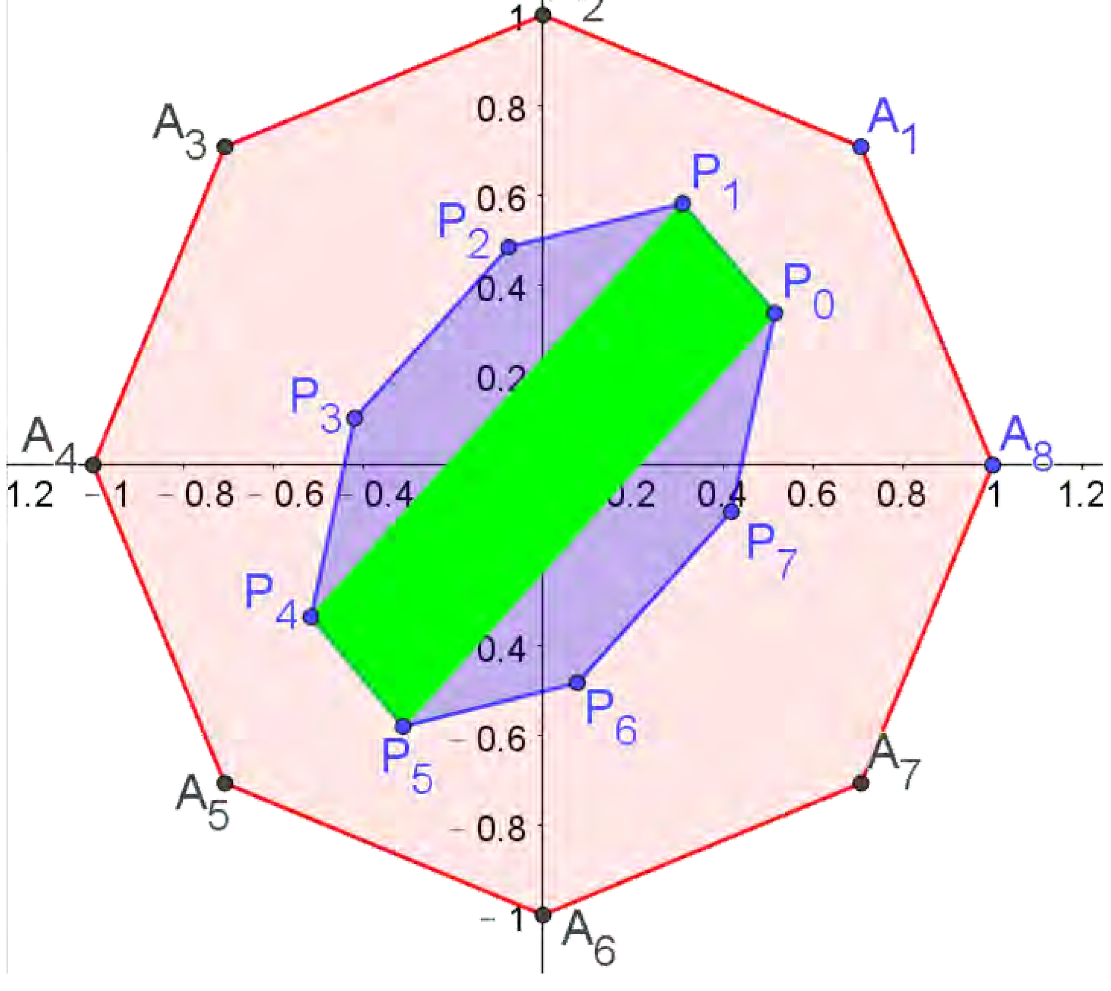
∴$\overline{P_0P_1}$=$\overline{P_5P_4}$同理可證，所有偶數n邊形對邊等長

∵ n邊形對邊平行且等長

∴此n邊形對角相等



圖七



圖八

(二)拿破崙初始n邊形重心性質

性質3：拿破崙正n邊形中心與拿破崙初始n邊形重心之關係性
拿破崙正n邊形中心會和拿破崙初始n邊形的重心共點

性質3證明:

已知:拿破崙初始n邊形重心為G(g)，拿破崙正n邊形中心為O(0)(如圖八)
試証: G(g)= O(0)
證明:
∵G為拿破崙初始n邊形之重心
∴拿破崙初始n邊形任意點座標為$Z_m = Z_0\omega^m + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-m} - \omega^m)$...(平行性質中以證畢)

$\overrightarrow{GP_0} + \overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2} + \overrightarrow{GP_3} + \cdots + \overrightarrow{GP_n} = 0$

$\rightarrow (z_0 - g) + (z_1 - g) + (z_2 - g) + (z_3 - g) + \cdots + (z_{n-1} - g) = 0$

$(z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_{n-1}) - ng = 0$

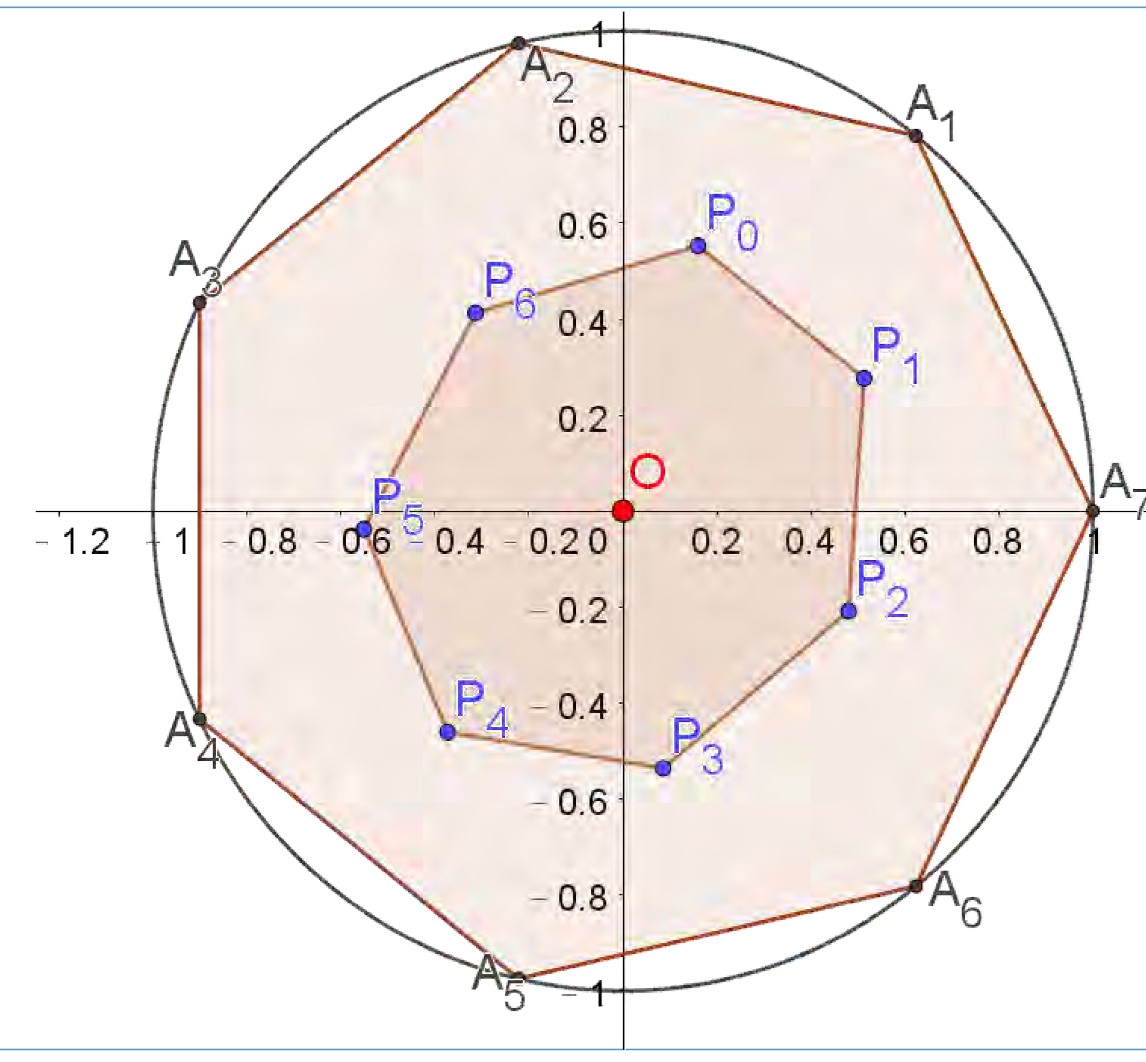
$Z_0(\omega + \omega^2 + \cdots + 1) + \frac{\omega^2}{\omega+1}[(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \cdots + 1) - (\omega + \omega^2 + \cdots + 1)] - ng = 0$

$Z_0(\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n) + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left[\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}\right) - (\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n)\right] - ng = 0$

$Z_0(\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n) + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left[\left(\frac{\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n}{\omega^n}\right) - (\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n)\right] - ng = 0$

$Z_0 * 0 + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left[\left(\frac{0}{\omega^n}\right) - (0)\right] - ng = 0$.................................$(\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n = 0)$

$-ng = 0$
$\because n \neq 0$
$\therefore g = 0$
$\Rightarrow$ G點與O點共點


圖九

性質4：拿破崙初始n邊形的特殊連線段交於重心
偶數邊拿破崙初始n邊形中，固定一頂點P_1以順時針方向依序為P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8、...、P_n，P_x所連對角線$\overline{P_xP_{x+\frac{n}{2}}}$交於重心；奇數邊拿破崙初始n邊形中固定一頂點$P_1$以順時針方向依序為$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$、⋯、$P_n$，從$\overline{P_1P_2}$取中點$M_1$，之後依序為$M_2$、$M_3$、$M_4$、$M_5 \cdots M_n$，$P_x$所連$\overline{P_xM_{x+\frac{n-1}{2}}}$(若$x+\frac{n-1}{2} > n$，即為$\overline{P_xM_{x+\frac{n-1}{2}-n}}$)亦交於重心

性質4證明:偶數邊拿破崙初始n邊形

已知:一拿破崙初始n邊形$P_0P_1P_2P_3P_4 \cdots P_{n-1}$(n=2k)，以拿破崙法向外作圖，正n邊形$A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$(如圖九)
試證:對角線$\overline{P_xP_{x+\frac{n}{2}}}$過正n邊形$A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$之重心
證明:
1. 在複數平面中，假設此正n邊形$A_1A_2A_3A_4 \ldots\ldots A_n$內接於半徑1單位的圓。將正n邊形中心設為原點O，則可假設其頂點座標分別為$A_1(\omega)$、$A_2(\omega^2)$、$A_3(\omega^3)$、...$A_n(\omega^n = 1)$，其$\omega = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$，而拿破崙初始n邊形任一頂點$P_x$座標為$z_x$
利用向量可得頂點通式

$\Rightarrow Z_x = \omega^{n-x+2} + \omega(Z_{x-1} - \omega^{n-x+2})$

$\Rightarrow Z_x = Z_0\omega^x + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x} - \omega^x)$..(平行性質已證畢，此處省略)

2. 宣告:$\frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}}} = C$
若宣告正確
$\because \overrightarrow{P_xO} = C * \overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}}$
$\therefore \overline{P_xO} // \overline{OP_{x+\frac{n}{2}}}$
P_x、O、$P_{x+\frac{n}{2}}$三點共線
$\Rightarrow \overline{P_xP_{x+\frac{n}{2}}}$過正n邊形$A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$之重心

3. 宣告證明:

Part 1
P_x座標

$Z_x = Z_0\omega^x + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x} - \omega^x)$

$P_{x+\frac{n}{2}}$座標:

$Z_{x+\frac{n}{2}} = Z_0\omega^{x+\frac{n}{2}} + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x-\frac{n}{2}} - \omega^{x+\frac{n}{2}})$

$\overrightarrow{P_xO} = -Z_x$

$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}}} = \frac{-Z_x}{Z_{x+\frac{n}{2}}} = \frac{Z_0\omega^x + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x} - \omega^x)}{Z_0\omega^{x+\frac{n}{2}} + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x-\frac{n}{2}} - \omega^{x+\frac{n}{2}})}$

Part 2
若$\frac{\omega^x}{\omega^{x+\frac{n}{2}}} = \frac{(\omega^{-x} - \omega^x)}{(\omega^{-x-\frac{n}{2}} - \omega^{x+\frac{n}{2}})}$，則$C = \frac{\omega^x}{\omega^{x+\frac{n}{2}}}$

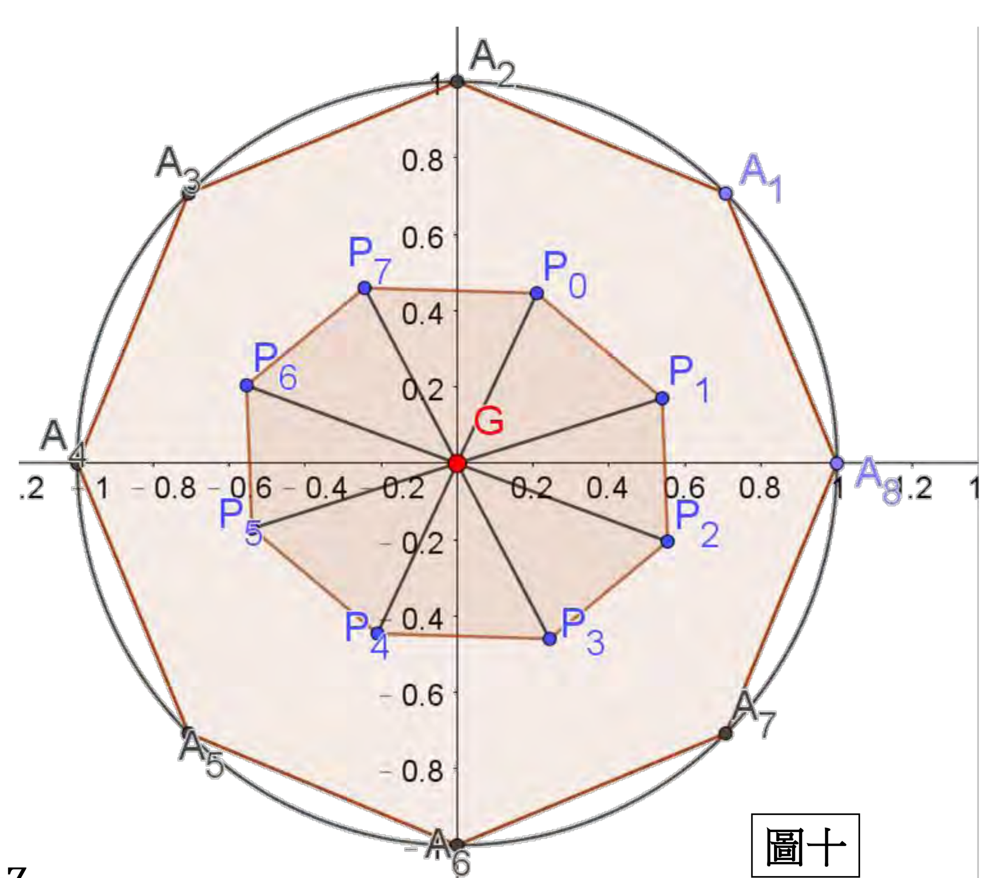
$\omega^x * (\omega^{-x-\frac{n}{2}} - \omega^{x+\frac{n}{2}}) = \omega^{x+\frac{n}{2}} * (\omega^{-x} - \omega^x)$

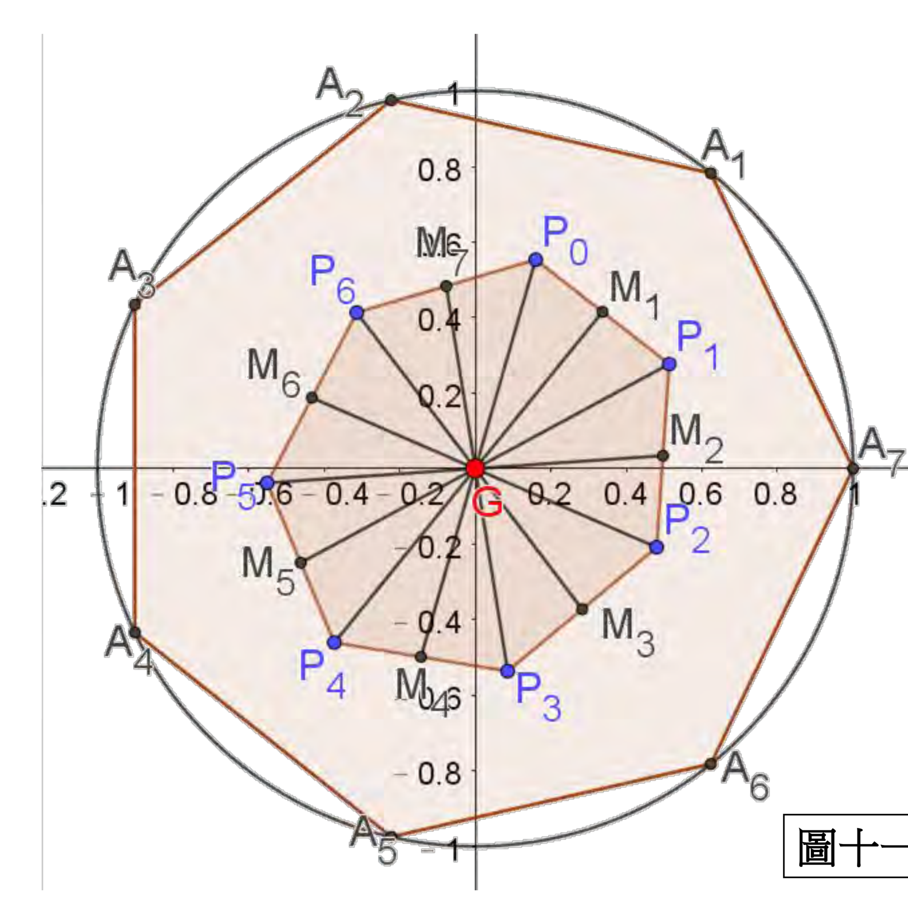
左式$= \omega^{-\frac{n}{2}} - \omega^{2x+\frac{n}{2}} =$

右式$= \omega^{\frac{n}{2}} - \omega^{2x+\frac{n}{2}}$

左式=右式，所以$\frac{\omega^x}{\omega^{x+\frac{n}{2}}} = \frac{(\omega^{-x} - \omega^x)}{(\omega^{-x-\frac{n}{2}} - \omega^{x+\frac{n}{2}})}$ $\overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}} = Z_{x+\frac{n}{2}}$

$\frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OP_{x+\frac{n}{2}}}} = C = \frac{\omega^x}{\omega^{x+\frac{n}{2}}}$(宣告證畢)


圖十


圖十一

性質4證明:奇數邊拿破崙初始n邊形

已知:一拿破崙初始n邊形$P_0P_1P_2P_3P_4 \cdots P_{n-1}$(n=2k+1)以拿破崙法向外作圖，做出正n邊形$A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$。從$\overline{P_0P_1}$取中點$M_1$，之後依序為$M_2$、$M_3$、$M_4$、$M_5 \cdots M_n$(如圖十)
試證:對角線$\overline{P_xM_{x+\frac{n+1}{2}}}$過正n邊形$A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$之重心
證明:
1.在複數平面中，假設此正n邊形$A_1A_2A_3A_4 \ldots\ldots A_n$內接於半徑1單位的圓。將正n邊形中心設為原點O，則其頂點座標依序假設為$A_1(\omega)$、$A_2(\omega^2)$、$A_3(\omega^3)$、...$A_n(\omega^n = 1)$，其中$\omega = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$，而拿破崙初始n邊形任一頂點$P_x$座標為$z_x$
利用向量可得頂點通式

$\Rightarrow Z_x = \omega^{n-x+2} + \omega(Z_{x-1} - \omega^{n-x+2})$

$\Rightarrow Z_x = Z_0\omega^x + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x} - \omega^x)$..(平行性質已證畢，此處省略)

利用線段兩端點找到中點座標通式

$\Rightarrow M_x = \frac{P_x + P_{x-1}}{2}$

2. 宣告:$\frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OM_{x+\frac{n-1}{2}}}} = C$
若宣告正確
$\because \overrightarrow{P_xO} = C * \overrightarrow{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}$
$\therefore \overline{P_xO} // \overline{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}$
$\Rightarrow P_x$、O、$M_{x+\frac{n+1}{2}}$三點共線
$\Rightarrow \overline{P_xM_{x+\frac{n+1}{2}}}$過正n邊形$A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$之重心

3. 宣告證明:
Part 1
P_x座標:

$Z_x = Z_0\omega^x + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x} - \omega^x)$

對邊中點座標:

$M_{x+\frac{n+1}{2}} = \frac{Z_{x+\frac{n-1}{2}} + Z_{x+\frac{n+1}{2}}}{2}$

$= \frac{Z_0\omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}} - \omega^{x+\frac{n-1}{2}}\right) + Z_0\omega^{x+\frac{n+1}{2}} + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-x-\frac{n+1}{2}} - \omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)}{2}$

$= \frac{Z_0\left(\omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right) + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}} - \omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{-x-\frac{n+1}{2}} - \omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)}{2}$

$\overrightarrow{P_xO} = -Z_x = Z_0\omega^x + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x} - \omega^x)$

$\overrightarrow{OM_{x+\frac{n+1}{2}}} = \frac{Z_{x+\frac{n-1}{2}} + Z_{x+\frac{n+1}{2}}}{2}$

$= \frac{Z_0\left(\omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right) + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}} - \omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{-x-\frac{n+1}{2}} - \omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)}{2}$

$\frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}} = \frac{-2[Z_0\omega^x + \frac{\omega^2}{\omega+1}(\omega^{-x} - \omega^x)]}{Z_0\left(\omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right) + \frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}} - \omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{-x-\frac{n+1}{2}} - \omega^{x+\frac{n+1}{2}}\right)}$

Part2
若$\frac{\omega^x}{\omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{x+\frac{n+1}{2}}} = \frac{(\omega^{-x} - \omega^x)}{(\omega^{-x-\frac{n-1}{2}} - \omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{-x-\frac{n+1}{2}} - \omega^{x+\frac{n+1}{2}})}$，則$C = \frac{-2*\omega^x}{\omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{x+\frac{n+1}{2}}}$

$\omega^x * (\omega^{-x-\frac{n-1}{2}} - \omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{-x-\frac{n+1}{2}} - \omega^{x+\frac{n+1}{2}}) = (\omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{x+\frac{n+1}{2}}) * (\omega^{-x} - \omega^x)$

左式$= \omega^{-\frac{n-1}{2}} - \omega^{2x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{-\frac{n+1}{2}} - \omega^{2x+\frac{n+1}{2}}$

右式$= \omega^{\frac{n-1}{2}} - \omega^{2x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{\frac{n+1}{2}} - \omega^{2x+\frac{n+1}{2}}$

左式$+\omega^{2x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{2x+\frac{n+1}{2}} = \omega^{-\frac{n-1}{2}} + \omega^{-\frac{n+1}{2}} = \cos(-\pi+\frac{\pi}{n}) + i\sin(-\pi+\frac{\pi}{n}) + \cos(-\pi-\frac{\pi}{n}) + i\sin(-\pi-\frac{\pi}{n})$

右式$+\omega^{2x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{2x+\frac{n+1}{2}} = \omega^{\frac{n-1}{2}} + \omega^{\frac{n+1}{2}} = \cos(\pi-\frac{\pi}{n}) + i\sin(\pi-\frac{\pi}{n}) + \cos(\pi+\frac{\pi}{n}) + i\sin(\pi+\frac{\pi}{n})$

又$\because -\pi+\frac{\pi}{n} = \pi+\frac{\pi}{n}$、$-\pi-\frac{\pi}{n} = \pi-\frac{\pi}{n}$(同界角)

$\therefore \cos(-\pi+\frac{\pi}{n}) + i\sin(-\pi+\frac{\pi}{n}) = \cos(\pi+\frac{\pi}{n}) + i\sin(\pi+\frac{\pi}{n})$、$\cos(-\pi-\frac{\pi}{n}) + i\sin(-\pi-\frac{\pi}{n}) = \cos(\pi-\frac{\pi}{n}) + i\sin(\pi-\frac{\pi}{n})$

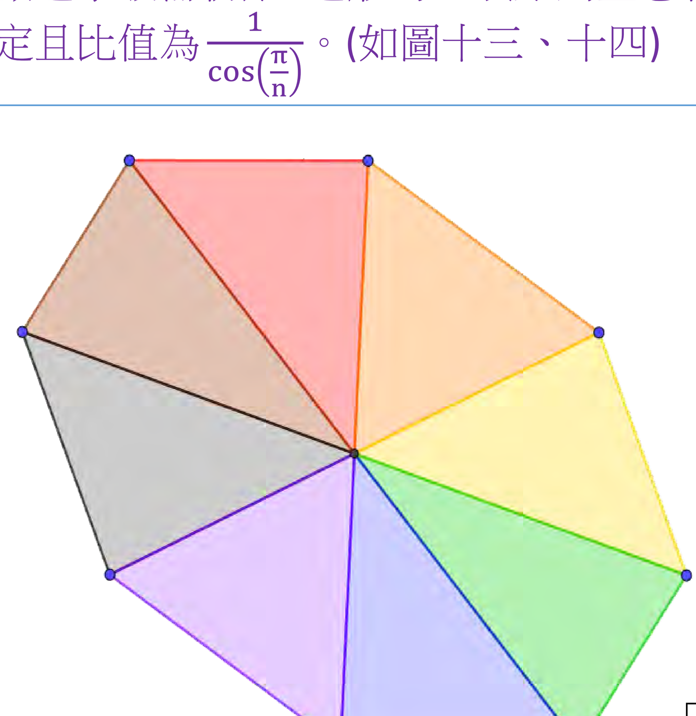
$\Rightarrow$ 左式 $+ \omega^{2x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{2x+\frac{n+1}{2}} =$ 右式 $+ \omega^{2x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{2x+\frac{n+1}{2}}$

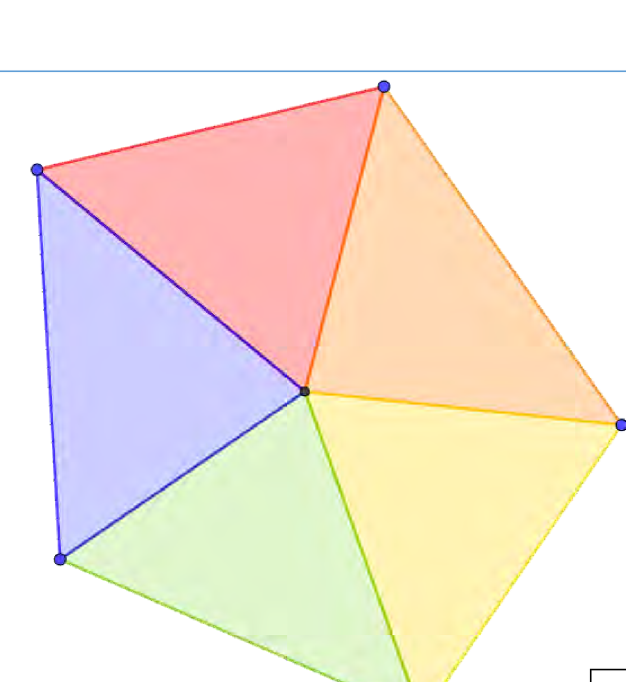
$\Rightarrow$ 左式 = 右式

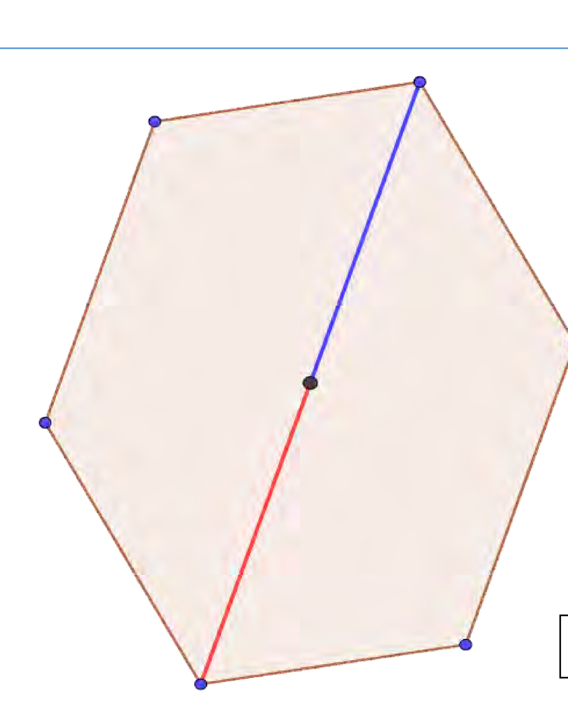
$\frac{\overrightarrow{P_xO}}{\overrightarrow{OM_{x+\frac{n+1}{2}}}} = C = \frac{-2*\omega^x}{\omega^{x+\frac{n-1}{2}} + \omega^{x+\frac{n+1}{2}}}$(宣告證畢)

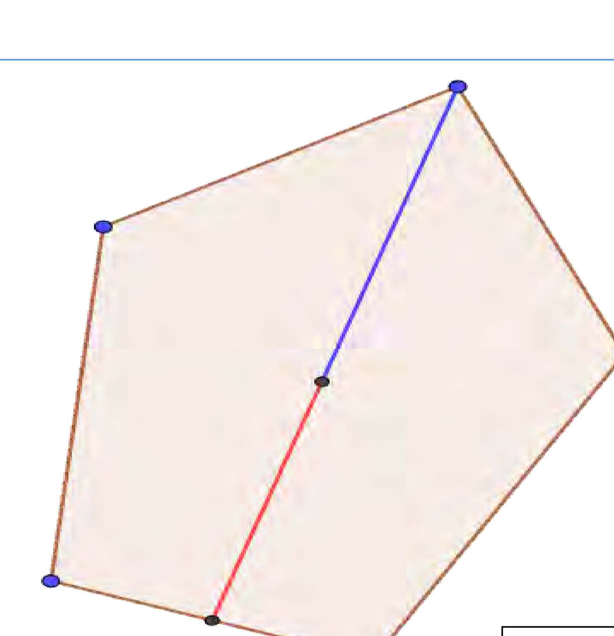
性質5：拿破崙初始n邊形過重心的特殊連線平分面積
拿破崙初始n邊形重心至各頂點的連線切割出n 個面積相等三角形(如圖十一、十二)

性質6：拿破崙初始n邊形過重心的特殊連線具特定比例
偶數邊拿破崙初始n邊形的一頂點到重心和重心到對邊頂點比例為1:1(都和正n邊形以同方法連線後結果相同);奇數邊拿破崙初始n邊形的一頂點到重心連線段和重心到對邊中點連線段的比值固定且比值為$\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{n})}$。(如圖十三、十四)


圖十二


圖十三


圖十四


圖十五

肆、研究結果與討論

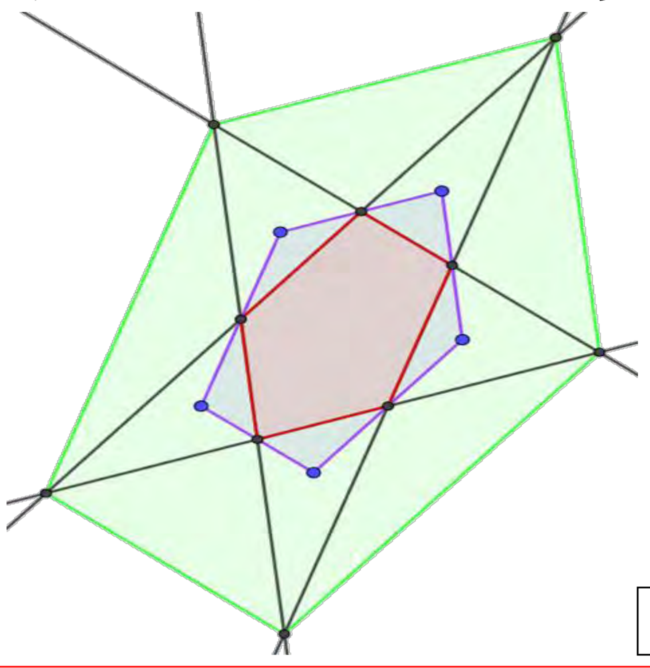
一、拿破崙n角星

(一)拿破崙內角星

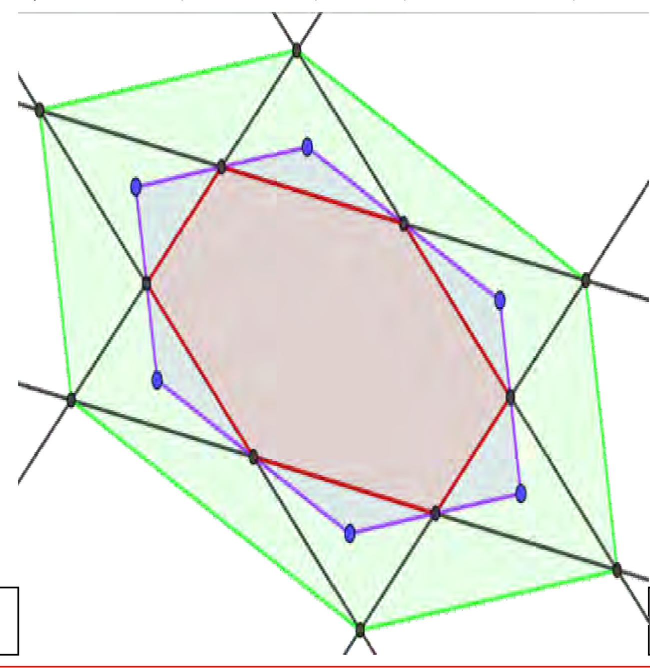
1. 拿破崙初始n邊形中內n角星若不重複，最高層數的規律為n/2-2四捨五入後的結果
2. 拿破崙內n角星同一線段上兩m層交點至頂點所截線段不論層數和邊數比例皆為1:1

(二)拿破崙外角星

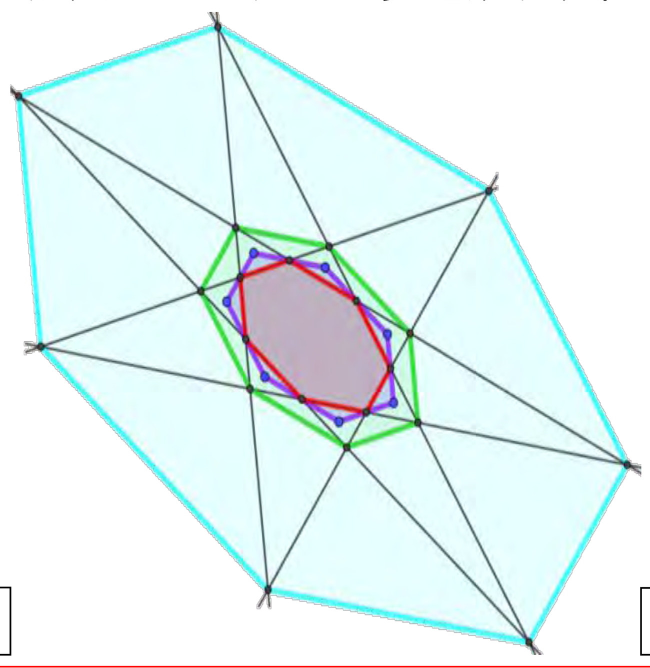
奇數邊拿破崙初始n邊形、m階交點圖形、中點連線圖形皆相似。偶數邊初始n邊形和奇數階交點圖形相似，中點連線圖形和偶數階交點圖形相似。(如圖十五、十七中，紅色、紫色、綠色、藍色多邊形皆相似、圖十六、十八中，紫色和綠色多邊形相似；紅色和藍色多邊形相似)



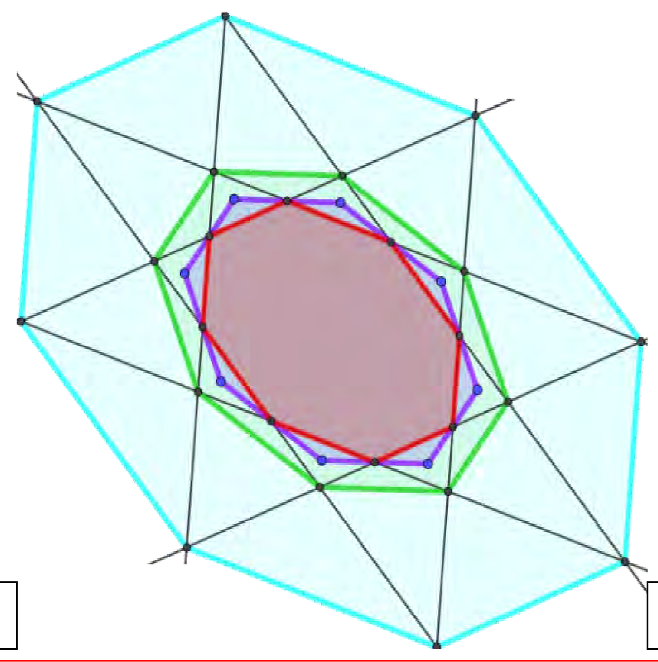
圖十六



圖十七



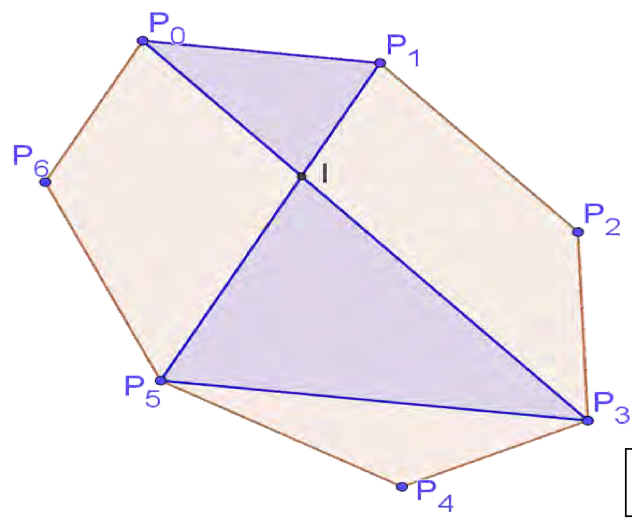
圖十八



圖十九

(三)拿破崙內角星及外角星之共同性

拿破崙內外角星在層數和階數相同的情況下，兩者具相同線段比例，比值為$\dfrac{\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}-1$



圖二十

已知:拿破崙初始n邊形$P_0P_1P_2\ldots P_n$(如圖十九)

試証:拿破崙m層n角星截線段比值為$\dfrac{\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}-1$

證明:

在拿破崙初始n邊形中，令$\overline{P_0P_{n-1}}:\overline{P_mP_{n-m-1}}=K_m$，其中m為層數或階數。

假設$\overline{P_0P_{n-m-1}}$與$\overline{P_{n-1}P_m}$之交點為I

$\because \overline{P_0P_{n-1}}//\overline{P_mP_{n-m-1}}$

$\triangle P_0IP_{n-1}\sim\triangle P_mIP_{n-m-1}$(AA相似)

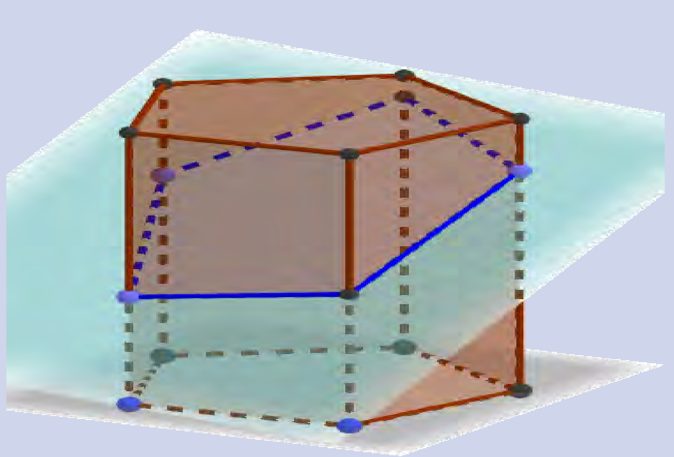
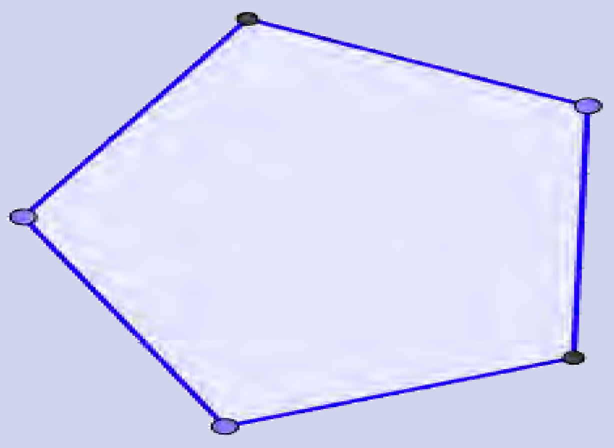
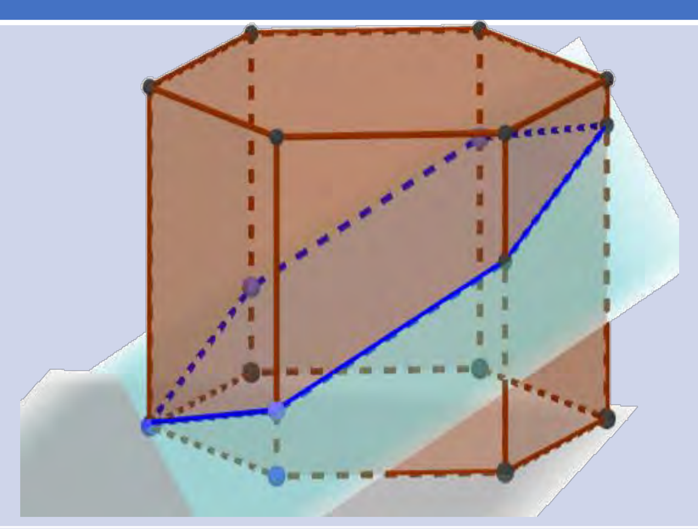
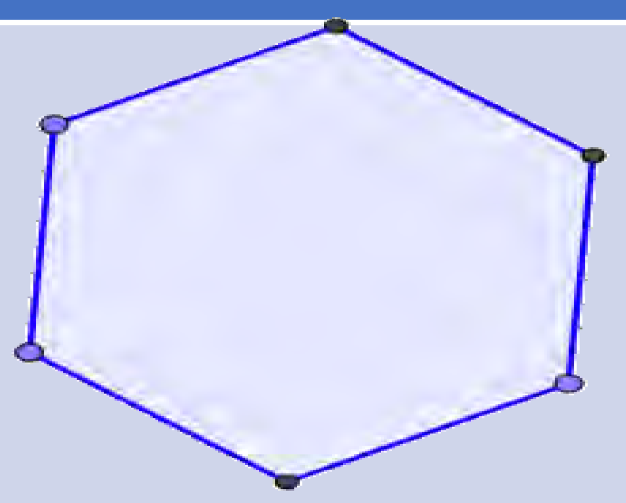
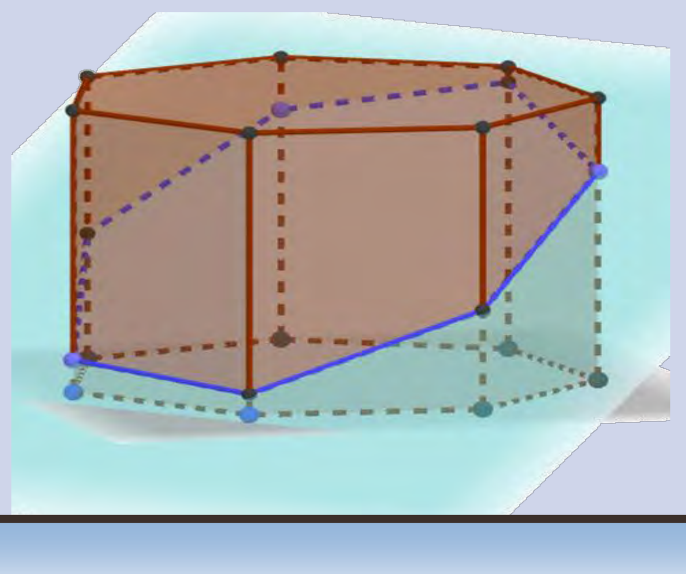
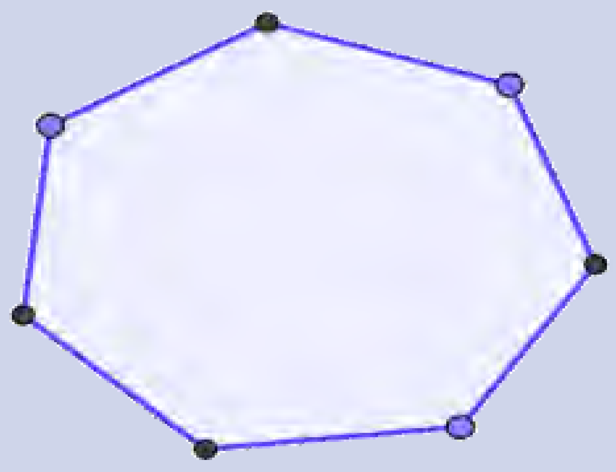
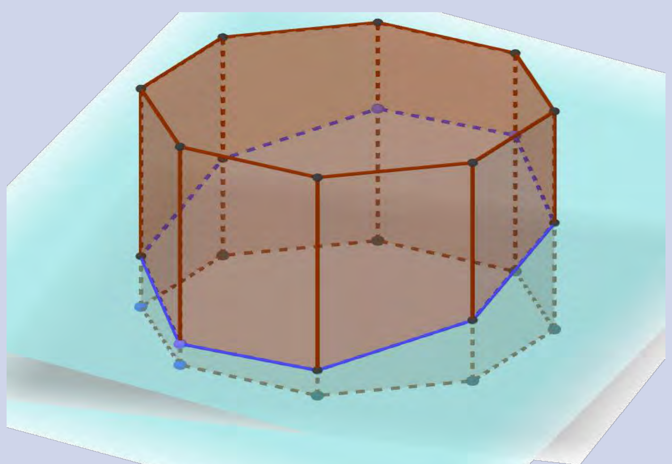
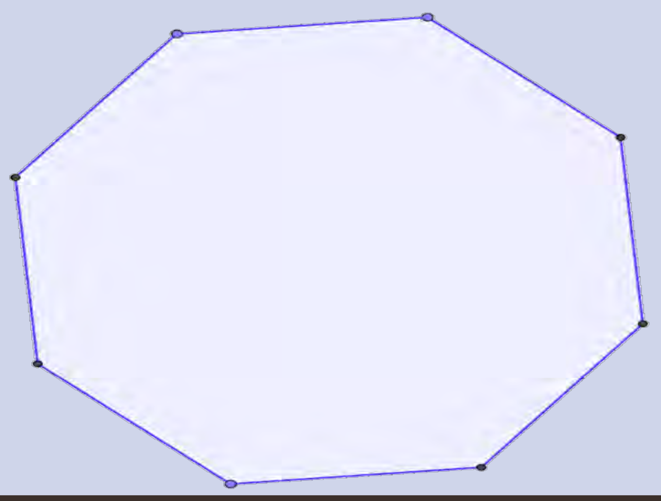
$\overline{P_0P_{n-1}}:\overline{P_mP_{n-m-1}}=\overline{P_0I}:\overline{P_{n-m-1}I}$=m層交點至頂點所截線段:(m層交點至m層交點所截線段+ m層交點至頂點所截線段)= K_m:1

根據平行性質的證明，$\overline{P_0P_{n-1}}:\overline{P_mP_{n-m-1}}=\dfrac{Z_{n-1}-Z_0}{Z_{n-m-1}-Z_m}=\dfrac{\omega^{n-1}-1}{\omega^{n-m-1}-\omega^m}=K_m$

發現所截線段比例
$$\frac{1-K_m}{K_m}=\frac{1-\frac{\omega^{n-1}-1}{\omega^{n-m-1}-\omega^m}}{\frac{\omega^{n-1}-1}{\omega^{n-m-1}-\omega^m}}=\frac{1-\frac{(\cos\frac{2*(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2*(n-1)\pi}{n})-1}{(\cos\frac{2*(n-m-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2*(n-m-1)\pi}{n})-(\cos\frac{2*m\pi}{n}+i\sin\frac{2*m\pi}{n})}}{\frac{(\cos\frac{2*(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2*(n-1)\pi}{n})-1}{(\cos\frac{2*(n-m-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2*(n-m-1)\pi}{n})-(\cos\frac{2*m\pi}{n}+i\sin\frac{2*m\pi}{n})}}=\frac{1-\frac{\left(-2*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)+i(2*\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n})}{\left(-2*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-m-1)\pi}{2n}\right)+i\,(2*\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{2n})}}{\frac{\left(-2*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)+i(2*\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n})}{\left(-2*\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-m-1)\pi}{2n}\right)+i\,(2*\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}*\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{2n})}}=\frac{1-\frac{\sin\frac{2*(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{2*(n-2m-1)\pi}{2n}}}{\frac{\sin\frac{2*(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{2*(n-2m-1)\pi}{2n}}}=\boxed{\frac{\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}-1}$$

二、拿破崙初始n邊形及投影幾何的關聯性

在紙板上切割出正五邊形，並以平行光從不同角度照入，發現投影在平面上的五邊形即為初始五邊形。我們以GGB軟體繪出正n角柱與平面相交的狀況來討論。(如下表)由於從正n邊形平行照射至投影面上，因此出現的n邊形有拿破崙初始n邊形的平行性質，可由判別性質證明此n邊形為拿破崙初始n邊形。觀察到平面和正n角柱所截的n邊形為拿破崙初始n邊形，因此判定拿破崙初始n邊形並非正n邊形壓縮而是正n邊形之投影。故可得知拿破崙初始n邊形重心和正n邊形中心共點，亦代表拿破崙初始n邊形的重心即為中心，且重心至兩端點的比值和正n邊形中心至兩端點的比值相同，也可以解釋拿破崙n角星為何會具有特殊線段比例。

五邊形		六邊形	
			
七邊形		八邊形	
			

伍、結論

一、拿破崙初始n邊形基本性質

(一)拿破崙初始n邊形平行性質

以任意拿破崙初始n邊形一邊為指定邊，其兩頂點分別向順時針及逆時針各推m個頂點後將其相連，其產生直線會與原線段平行。此性質亦為拿破崙初始n邊形判別性質

(二)偶數邊拿破崙初始n邊形的對邊平行且等長、對角相等

在偶數邊拿破崙初始n邊形中，對邊平行且等長、對角相等

(三)拿破崙初始n邊形的重心性質

1. 拿破崙初始n邊形之重心

偶數邊拿破崙初始n邊形中，對角線相連可以產生n個面積相等三角形；奇數邊拿破崙初始n邊形頂點至對邊中點相連可產生2n個面積相等三角形，由於連線交點向量和為零，因此此點為重心

2. 拿破崙正n邊形中心與拿破崙初始n邊形重心關係

拿破崙正n邊形中心和拿破崙初始n邊形重心共點

(四)拿破崙初始n邊形重心分割線段比例固定

1. 奇數邊拿破崙初始n邊形

奇數邊拿破崙初始n邊形的重心至一頂點和對邊中點的比值會和正n邊形相等比值為$\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

2. 偶數邊拿破崙初始n邊形

偶數邊拿破崙初始n邊形對角線互相平分重心至各頂點線段比為1:1

二、拿破崙內角星

(一)內n角星層數限制

拿破崙初始n邊形中內n角星若不重複，最高層數的規律為n/2-2四捨五入後的結果

(二)不同層n角星截線段比之關聯性

1. 拿破崙初始n邊形內n角星同一線段上兩n層交點至頂點所截線段不論層數和邊數比例皆為1:1

2. 拿破崙初始n邊形內m層n角星所截線段比值為$\dfrac{\sin\frac{(n-2m-1)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}-1$

三、拿破崙外角星

(一)外n角星之相似情形

奇數邊拿破崙初始n邊形、n階交點圖形、中點連線圖形皆相似。偶數邊初始n邊形和奇數階交點圖形相似，中點連線圖形和偶數階交點圖形相似。

四、拿破崙內角星及外角星之關聯性

(一)內外角星線段比例

拿破崙內外角星在層數和階數相同的情況下，兩者具相同線段比例

五、拿破崙初始n邊形及投影幾何之關聯性

(一)正n角柱投影切面性質

利用切割角柱可產生拿破崙初始n邊形，因此拿破崙初始n邊形非正n邊形壓縮而是正n邊形之投影，由此可解釋為何拿破崙初始n邊形會和正n邊形有共同的性質

陸、未來展望(略)

柒、參考資料(略)