中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

團隊合作獎

030414

探究『本原畢氏三元數組、直角△內切圓半徑及多角數』之關聯與延伸

學校名稱：桃園市立大竹國民中學

作者：	指導老師：
國二 呂祐傑 國二 魏廣誠	林樂酈

關鍵詞：本原畢氏三元數組、直角△內切圓半徑、多角數

摘　　要

此作品研究「本原畢氏三元數組與直角△內切圓半徑為自然數所對應三邊長亦自然數，及多角數三者之間的關係。我們先由本原畢氏三元數組經由推導過程，找出本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 與直角△內切圓半徑 r 之彼此關聯性；其次，藉由生成元 m、n 與多角數之通式導出彼此連結性；給定任意的直角△內切圓半徑，其中三邊長為本原畢氏三元數組，其生成元為 m、n，則可找到第 y 個 k 角數等於 b／4，反之亦成立，所以三者彼此關係都與生成元 m、n 息息相關。另外，我們發現多角數與多角數間之關聯和雙曲線有關，利用線性變換之矩陣解以坐標表示，並從遞迴關係式再找下一組解。」再由觀察這些解的規律性，延伸探討雙曲線上的格子點問題。

壹、研究動機

老師在數理研究社團的課堂上，要大家利用**畢氏定理(Pythagorean theorem)**拼湊出**畢氏三元數(Pythagorean triple)**，我們找到了(3, 4, 5)、(5, 12, 13)、(7, 24, 25)、(8, 15, 17)、(9, 40, 41)、(11, 60, 61)，這引發了我們對畢氏三元數的興趣。接著，老師給我們一道數學競賽試題：當正整數 a,b,c 滿足 $a^2+b^2=c^2$ 時，稱 a,b,c 為一組「畢氏三元數」(此時，a,b,c 與 b,a,c 視為相同的畢氏三元數)。試問有多少組畢氏三元數，使其成為直角三角形的三邊長，且內切圓半徑等於 2014？更進一步，尋找共有幾組本原畢氏三元數組，亦可成為直角三角形的三邊長，同時內切圓半徑亦等於 2014？我們開始找尋從**全國中小學科展網站查詢到相關系列議題的資料**：第 47 屆全國科展高中組數學科第三名「勾股鐵路網」與第 53 屆全國科展高中組數學科佳作「大珠小珠落玉盤－正多邊形的兩個性質」…等參考文獻，將其研究「直角三角形內切圓定理」，藉由素勾股數的表達式 $(n^2-m^2, 2mn, m^2+n^2)$ 即是本原畢氏三元數組之生成公式，**我們把問題轉變成給定任何的直角△內切圓半徑 r，尋求共有幾組不同的外切直角三角形？**

透過藉由回想起小學閱讀過的**「貪心的三角形」數學繪本**，與數理研究社團閱讀到數理類進階課外書籍**『數學樂園-從胚騰 Pattern 學好數學』**，書中相關涉及的數型，如：三角數、四角數及五角數的定義，只使用了簡單的幾何圖形、計數的技巧以及等差級數求和的公式，並查詢到**國立台灣科學教育館網站【科學研習月刊】：「森棚教官的數學題-三角數和四角數」**，再加上國中課程也學習到**數列與級數**，於是我們便開始著手研究繪製圖形，並把點數

擴充去尋找多角數的一般式及**多角數與多角數彼此間和雙曲線的關聯進行探討**。

再者，我們亦從**全國中小學科展網站搜尋到相關系列議題的資料**：第 45 屆全國科展國中組數學科第三名「方格遊戲的探討」其研究是：將行數延伸至 n 行，研究其可行解，又將著色方法改變，使著色格至多角數，並應用整數同餘觀念研究其可行解。同時推廣找出二階等差數列之可行解，並以直接證題法、矛盾證題法、數學歸納法來證明結果之正確性。第 51 屆全國科展國中組數學科「現在幾「點」了一探討多角數、多面體數之通式」其研究是：探討多角數(或多邊形數)的一般式及關係式，並將其從平面推廣至立體的多面體數及多角錐數，並分別求得它們的一般式及相關性質。第 52 屆全國科展高中組數學科第三名「驚奇的數」其研究是：邊長為平方數的三邊形數亦為四邊形數，並將問題轉換成連續股的直角三角形問題。2013 台灣國際科展數學科三等獎「特殊型 pell 方程式之矩陣解研究」的是：接續研究主題”驚奇的數”，推廣到利用 Pell 方程式與矩陣計算，來求哪些邊長的 p 邊形數亦同時為四邊形數。綜合上述這 4 屆，**我們透過不同思維想法，以雙曲線標準式，藉由線性變換過程列出一階線性遞迴關係式及平移方程式，導出計算結果與程式執行是否吻合一致？同時察覺矩陣解以坐標表示所呈現之狀況，用 GGB 輔助呈現，進一步探討雙曲線上的格子點問題。**

藉由全國中小學科展**文獻的評審評語大部分都建議在題材創新度及作品內容有提升空間，使得這樣地結果仍有很大的研究性價值**。因此，**我們將多角數問題轉換成本原畢氏三元數組來討論，探究出相關具延伸創意的兩大新論點:『本原畢氏三元數組分別與直角△內切圓半徑 r 以及多角數，三者之間的關係；同時更試著朝多角數及多角數彼此間與雙曲線之問題，探究其線性變換的過程與矩陣解以坐標表示所呈現之狀況』**，做更為深入且一般性的探究，期盼讓結果更加廣義且完備外，輔以使用者操作的友善介面呈現，故我們以此作為主題，做以下一系列的探討及研究。

貳、研究目的

一、本原畢氏三元數組、直角△內切圓半徑及多角數三者之間的關聯性：

(一)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 與直角△內切圓半徑 r 之彼此間的關係：

1.由本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 求直角△內切圓半徑 r。

2.由直角△內切圓半徑 r 求得本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n。

(二)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 與多角數之通式導出其彼此的連結性：

1.本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 找第 y 個 k 角數 K_y 。

2.由第 y 個 k 角數 K_y 找本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n。

(三)探討給定任意的直角△內切圓半徑 r，其三邊長為本原畢氏三元數組(a,b,c)，其生成元為 m、n，則可找到第 y 個 k 角數 K_y ，滿足 $4K_y = b$ ，反之亦成立：

1.直角△內切圓半徑 r 找第 y 個 k 角數 K_y 。

2. 第 y 個 k 角數 K_y 找直角△內切圓半徑 r 。

二、透過多角數及多角數彼此間與圓錐曲線的關聯性：

(一)探討多角數及多角數彼此間與雙曲線之關係。

(二)探討多角數及多角數彼此間與拋物線之關係。

(三)探討多角數及多角數彼此間與橢圓之關係。

三、經由觀察這些矩陣解的規律性，延伸探究關於雙曲線上的格子點問題。

參、研究設備及器材

一、筆記本、筆(記錄用)、USL 連接方塊積木

二、筆記型電腦、自備隨身碟

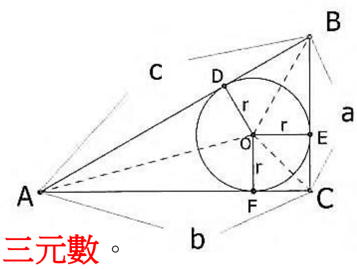
三、Microsoft Excel VBA 2016

四、Microsoft Visual Studio Community 2017 微軟合法免費軟體

五、GeoGebra 動態幾何繪圖軟體

肆、研究過程及方法

一、名詞定義：



(一)在 ΔABC 中，令 $\overline{AB}=c,\overline{BC}=a,\overline{CA}=b$，且當它是 $\angle C=90^\circ$ 的直角三角形，c 為斜邊，$s=a+b+c$ 為其周長。

(二)自然數組 (a,b,c) 滿足 $a^2+b^2=c^2$ 的關係者，稱 (a,b,c) 為**畢氏三元數**。

(三)若 (a,b,c) 為畢氏三元數組，且 a,b,c 互質時，其中 $m>n\geq 1$，m、n 互質且 m、n 為一奇一偶， 即奇偶性相反，則稱 (a,b,c) 為**本原畢氏三元數組**。

(四)對於多角數或多角錐數之意義解說如下:

1.多角數：

(1)第 y 個三角數定義成 $3_y=1+2+3+\cdots+y=\dfrac{y(y+1)}{2}$ ，$y\geq 1$，$3_0=0$ 。

(2).第 y 個四角數定義成 $4_y=1+3+5+\cdots+(2y-1)=\dfrac{y[2\times 1+(y-1)\times 2]}{2}=y^2$ 。

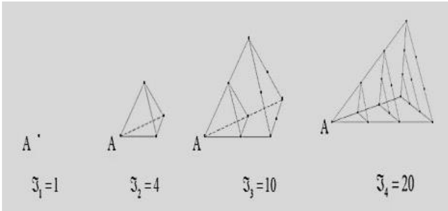
(3).第 y 個五角數定義成 $5_y=1+4+7+\cdots+(3y-2)=\dfrac{y[2\times 1+(y-1)\times 3]}{2}=\dfrac{y(3y-1)}{2}$ ，$y\geq 1$ 。

(4).由以上 3_y 、4_y 及 5_y 的計算方法，可推導出第 y 個 K 角數的通式：

$$K_y=1+[1+(k-2)]+[1+2(k-2)]+[1+3(k-2)]+\ldots+[1+(n-1)(k-2)]$$

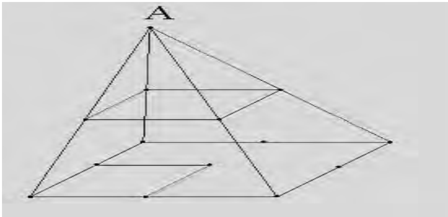
$$=1+(k-1)+\cdots+[(k-2)y-(k-3)]=\frac{y[2\times 1+(y-1)\times(k-2)]}{2}=\frac{y[(k-2)\times y-(k-4)]}{2}$$ ，$y\geq 1$，$k\geq 3$ 。

2.多角錐數：



(1)第 y 個三角錐數定義成 $\Im_y=1+3+6+\cdots+\dfrac{y(y+1)}{2}=\displaystyle\sum_{k=1}^{y}\frac{k(k+1)}{2}$

亦是前 y 個三角數之和 $1+3+6+\cdots+\dfrac{y(y+1)}{2}=\dfrac{y(y+1)(y+2)}{6}$



(2)第 y 個四角錐數定義成 $\Omega_y=1+2^2+3^2+4^2+\cdots+y^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{y}k^2$

亦是前 y 個平方數之和 $1^2+2^2+3^2+\cdots+y^2=\dfrac{y(y+1)(2y+1)}{6}$

定理一：一般邊長 a、b、c 的直角三角形，甚至一般的三角形，其內切圓半徑公式為：

三角形內切圓半徑等於其面積的 2 倍除以周長。

$r=\dfrac{ab}{a+b+c}=$ 2△ABC 面積／△ABC 周長$=\dfrac{2\Delta ABC}{s}$

定理二：以 (a,b,c) 為畢氏三元數組當邊長所形成的直角三角形，其內切圓半徑公式的另一形式 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$，即所謂的『直角三角形內切圓定理』。

定理三：本原畢氏三元數組 (a,b,c) 之一組生成的公式：$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，

其中 $m>n\geq 1$，m、n 互質且 m、n 為一奇一偶， 即奇偶性相反。

二、本原畢氏三元數組、直角△內切圓半徑及多角數三者之間的關聯性：

(一)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 與直角△內切圓半徑 r 之彼此間的關係：

首先，從老師給我們的競賽試題：當正整數 a, b, c 滿足 $a^2+b^2=c^2$ 時，稱 a, b, c 為一組「畢氏三元數」(此時，a, b, c 與 b, a, c 視為相同的畢氏三元數)。試問有多少組畢氏三元數，使其成為直角三角形的三邊長，且內切圓半徑等於 2014？更進一步，尋找共有幾組本原畢氏三元數組，亦可成為直角三角形的三邊長，同時內切圓半徑 r 亦等於 2014？

【解題過程】： $\because r=\dfrac{a+b-c}{2} \Rightarrow 2r=a+b-c \Leftrightarrow c=a+b-2r(a>2r,b>2r)$

由$a^2+b^2=c^2$，得 $a^2+b^2=(a+b-2r)^2=a^2+b^2+(-2r)^2+2ab-4br-4ar$
$\Leftrightarrow 4ar+4br-2ab=4r^2 \Leftrightarrow ab-2ar-2br+4r^2=2r^2$ 代入$r=2014$得：

$(a-4028)(b-4028)=2\times 2014^2=2^3\times 1007^2=2^3\times(19\times 53)^2=2^3\times 19^2\times 53^2$

令$a>b$，則$(a-4028)$、$(b-4028)$為二正整數，且$(a-4028)(b-4028)=2^3\times 19^2\times 53^2$，

而2,19,53都是質數，故此時a,b為正整數解的個數有$\dfrac{(3+1)(2+1)(2+1)}{2}=18$ (組)。

綜合上述討論，得知：$r=2014$時，共有18 組畢氏三元數所形成的直角三角形，而其中共有幾組本原畢氏三元數組，亦可成為直角三角形的三邊長呢？

1.由本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n求直角△內切圓半徑r：

我們藉由回想起小學閱讀過「貪心的三角形」數學繪本，促動我們的思維，而引發我們探究圓形與多角數之關係，從一般三角形中的直角△之生成奧秘，更有興趣。我們先透過本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n，利用直角△內切圓半徑公式，找出相對應的直角△內切圓半徑。

定理四：直角ΔABC三邊長生成本原畢氏三元數組時，當邊長$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，其中$m>n\geq 1$，m、n 互質且 m、n 為一奇一偶，其內切圓半徑為$r=n(m-n)$。

【證明】： $\because r=\dfrac{ab}{a+b+c}=\dfrac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)}=\dfrac{ab(a+b-c)}{2ab}=\dfrac{a+b-c}{2}$

又$(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2=2ab$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+b-c)=2ab \Rightarrow a+b-c=\dfrac{2ab}{a+b+c}=2r \Rightarrow r=\dfrac{ab}{a+b+c}=\dfrac{a+b-c}{2}$

以$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$代入得：

$\therefore r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{m^2-n^2+2mn-m^2-n^2}{2}=\dfrac{-2n^2+2mn}{2}=-n^2+mn=n(m-n)$ 得證

例子一：本原畢氏三元數組(a,b,c)為(3,4,5)，m=2、n=1，代入$r=n(m-n)$，得解 r 為 1。

例子二：三邊長$(1,\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{3})$和$(1,1,\sqrt{2})$ a、b 為兩股，c 為斜邊的直角Δ用內切圓半徑公式 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ 也可得其內切圓半徑r分別為 $\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ 。

2.由直角△內切圓半徑 r 求得本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n：

定理五：給定任意正整數r，至少有一組本原畢氏三元數組為邊長的直角Δ，具有內切圓半徑r。即探索有多少組本原畢氏三元數組為邊長的直角Δ，有同樣的內切圓半徑r？

【證明】：利用定理三，令$m=n+1$得到一系列的特殊本原畢氏三元數組：:

$a=m^2-n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$，$b=2mn=2(n+1)n=2n^2+2n$，$c=m^2+n^2=(n+1)^2+n^2=2n^2+2n+1$

n 替換成 r 代入$a=2r+1$，$b=2r^2+2r$，$c=2r^2+2r+1$為邊長的本原畢氏三元數組且內切圓半徑恰為 r 的直角三角形。

引理 5.1： $r=2^x \cdot t_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot t_\ell^{x_\ell}$，$t_1<t_2<\ldots<t_\ell$為由小到大的奇質因數$x_1,x_2,\ldots,x_\ell \ge 1$的正整數$\Rightarrow$恰有$2^\ell$個本原畢氏三元數組為邊長且內切圓半徑恰為r的直角三角形，其中$\ell \ge 0$。

【推導過程說明】：因為$r=2^x \cdot t_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot t_\ell^{x_\ell}$，

其中$x \ge 0$之整數，$t_1<t_2<\ldots<t_\ell$為由小到大的奇質因數$x_1,x_2,\ldots,x_\ell \ge 1$的正整數。在特別$\ell=0$時，則$r=2^x$。例如：$21=2^0\times3\times7$，$100=2^2\times5^2$等等狀況中，我們針對$r=1$，$r=2$，$r=3$，$r=4$，$r=5$，$r=2\times3$，$r=2\times3\times5$等例子，尋求推理出答案的規律性：

(1)當$r=1$時，由定理四公式$r=n(m-n)$，其中 m>n，m 與 n 的最大公因數為 1 且 m、n 有不同的奇偶性，此時僅有$n=1$，$m=n+1=2 \Rightarrow (3,4,5)$一組解。

(2)當$r=2$時，由$r=n(m-n)$及m、n的條件，也僅得$n=2$，$m=2+1=3 \Rightarrow (5,12,13)$一組解。

(3)當$r=3$時，由m、n之條件，得到下列二組解：

①$n=1$，$m=3+1=4 \Rightarrow (15,8,17)$；　②$n=3$，$m=3+1=4 \Rightarrow (7,24,25)$。

(4)當$r=4=2^2$時，由m、n之條件僅能取$n=4$，$m=4+1=5 \Rightarrow (9,40,41)$一組解。

(5)當$r=5$時，由m、n之條件，得到下列二組解：

①$n=1$，$m=5+1=6 \Rightarrow (35,12,37)$；　②$n=5$，$m=1+5=6 \Rightarrow (11,60,61)$。

(6)當$r=6=2\times3$時，由m、n之條件，得到下列二組解：

①$n=2$，$m=3+2=5 \Rightarrow (21,20,29)$；②$n=6$，$m=1+6=7 \Rightarrow (13,84,85)$。

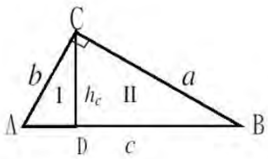
(7)當$r=2\times3\times5$時，由m、n之條件，得到下列四組解：

①$n=2$，$m=15+2=17 \Rightarrow (285,68,293)$；　②$n=6$，$m=5+6=11 \Rightarrow (85,132,157)$；

③$n=10$，$m=3+10=13 \Rightarrow (69,260,269)$；④$n=30$，$m=1+30=31 \Rightarrow (61,1860,1861)$。

引理 5.2： 利用直角三角形母子相似定理，在任意直角ΔABC，斜邊上的高$h_c=\overline{CD}$分成三個大小不同的直角Δ，令r_I、r_{II}、r_{III}分別為ΔACD、ΔCBD、ΔABC內切圓半徑，可得：(1) $r_I=\dfrac{b}{c}r_{III}$；　(2) $r_{II}=\dfrac{a}{c}r_{III}$；

(3) $h_c=r_I+r_{II}+r_{III}$；(4) $r_I{}^2+r_{II}{}^2=r_{III}{}^2$；



(5)三個內切圓半徑可以做成一個以三半徑為邊長的直角Δ，則可再求下一組內切圓半徑。

(二)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 與多角數之通式導出其彼此的連結性：

在前人的作品中他們提出了，本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 滿足$m=n+1$

的狀況下，猜測 $b=4\times 3_y$ (他們並未做出)？以下是我們提出尋找的方式：

1.本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 找第 y 個 k 角數 K_y ：

給定自然數 m、n，$m>n>1$ 且互質、一奇一偶、$\frac{m-(n+1)}{n-1}$ 為非負整數，則當 $k=\frac{m-(n+1)}{n-1}+3$、$y=n$ 時，我們會得到 $(m^2-n^2,4K_y,m^2+n^2)$ 會是本原畢氏三元數組。

【說明】：給定本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 時，我們如何找到 k 角數數列中的第 y 個 K_y，滿足 $4K_y=b$，我們覺得這個現象很有趣，於是我們尋找 k 和 y 的步驟如下：

第 1 步驟：先令 $b=4K_y$，將 $b=2mn$ 代入得到 $2mn=4K_y$，經化簡後得到 $\frac{mn}{2}=K_y$ 。

第 2 步驟：因為多角數的通式 $K_y=\frac{y[(k-2)y-(k-4)]}{2}$，我們會得到 $\frac{mn}{2}=\frac{y[(k-2)y-(k-4)]}{2}$ 。

第 3 步驟：$k\geq 3$ 的狀況下 $(k-2)y-(k-4)$ 必定大於 y，本原畢氏三元數組中 m 必定大於 n，我們令 $(k-2)y-(k-4)=m$、$y=n$

第 4 步驟：解得 $k=\frac{m-(n+1)}{n-1}+3$、$y=n$ 。

我們用 Excel 得出的結果如下：(紅色:符合生成元 m、n 條件；黃色: k 為正整數)

m	n	k	y
6	5	3	5
7	5	3.25	5
8	5	3.5	5
9	5	3.75	5
10	5	4	5
11	5	4.25	5
12	5	4.5	5
13	5	4.75	5
14	5	5	5
15	5	5.25	5
16	5	5.5	5
17	5	5.75	5
18	5	6	5
19	5	6.25	5
20	5	6.5	5
21	5	6.75	5
22	5	7	5
23	5	7.25	5
24	5	7.5	5
25	5	7.75	5

m	n	k	y
7	6	3	6
8	6	3.2	6
9	6	3.4	6
10	6	3.6	6
11	6	3.8	6
12	6	4	6
13	6	4.2	6
14	6	4.4	6
15	6	4.6	6
16	6	4.8	6
17	6	5	6
18	6	5.2	6
19	6	5.4	6
20	6	5.6	6
21	6	5.8	6
22	6	6	6
23	6	6.2	6
24	6	6.4	6
25	6	6.6	6
26	6	6.8	6

在圖表中第一組可得到正整數 k 值的(m、n)出現在(6、5)、第二組出現在(10、5)、第三組出現在(14、5) 。第一組可得 k 為正整數的本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元 m、n 中，m 我們稱為 m_1，以此類推，則 $m_1=n+1$ 時的 k 值必為 3，而當 k 為 4 時，其 m 值我們稱為 m_2，我們進一步發現了 $m_2=m_1+(n-1)$，所以 $m_3=m_1+2(n-1)$，$\frac{m-(n+1)}{n-1}$ 算出來的值為非負整數解，則 k 為正整數。因為第一組多角數的 k 值都會為 3，所以只要加 3 就能得到 k 值，將式子寫

成$\dfrac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$，而此式亦可從本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 找多角數的式子 $m=(k-2)y-(k-4)$及$n=y$簡化推導出來。

【例子說明】：我們以 n=5 以及 n=6 做討論：

n=5 時，$m_1=6$，$m_4=m_1+3(n-1)=18$，將$(m,n)=(18,5)$代入$\dfrac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$，得到的 k 值為 6；n=6 時，$m_1=7$，$m_3=m_1+2(n-1)=17$，我們將$(m,n)=(17,6)$代入$\dfrac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$，得到的 k 值為 5，與上述圖表結果完全吻合。

2.由第 y 個 k 角數 K_y 找本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n：

給定在 k 角數數列中的第 y 個 K_y，y 不為 k-4 質因數的正整數倍數，則$m=(k-2)y-(k-4)$、$n=y$時，我們會得到$(m^2-n^2,4K_y,m^2+n^2)$為本原畢氏三元數組。

我們發掘由多角數找本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 可以透過$(k-2)y-(k-4)=m$、$y=n$找出 m、n 並得 b，使畢氏三元數甚至是本原畢氏三元數組的 b 除以 4 為多角數，於是利用$(k-2)y-(k-4)=m$、$y=n$並以 Excel 做計算求得以下規律：(紅色:不符合生成元 m、n 條件)

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)		
y	k	Ky		m	n		a	b	c
1	3	1		2	1		3	4	5
2	3	3		3	2		5	12	13
3	3	6		4	3		7	24	25
4	3	10		5	4		9	40	41
5	3	15		6	5		11	60	61
6	3	21		7	6		13	84	85
7	3	28		8	7		15	112	113
8	3	36		9	8		17	144	145
9	3	45		10	9		19	180	181
10	3	55		11	10		21	220	221
11	3	66		12	11		23	264	265
12	3	78		13	12		25	312	313
13	3	91		14	13		27	364	365
14	3	105		15	14		29	420	421
15	3	120		16	15		31	480	481
16	3	136		17	16		33	544	545
17	3	153		18	17		35	612	613
18	3	171		19	18		37	684	685
19	3	190		20	19		39	760	761
20	3	210		21	20		41	840	841
21	3	231		22	21		43	924	925
22	3	253		23	22		45	1012	1013

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)		
y	k	Ky		m	n		a	b	c
1	7	1		2	1		3	4	5
2	7	7		7	2		45	28	53
3	7	18		12	3		135	72	153
4	7	34		17	4		273	136	305
5	7	55		22	5		459	220	509
6	7	81		27	6		693	324	765
7	7	112		32	7		975	448	1073
8	7	148		37	8		1305	592	1433
9	7	189		42	9		1683	756	1845
10	7	235		47	10		2109	940	2309
11	7	286		52	11		2583	1144	2825
12	7	342		57	12		3105	1368	3393
13	7	403		62	13		3675	1612	4013
14	7	469		67	14		4293	1876	4685
15	7	540		72	15		4959	2160	5409
16	7	616		77	16		5673	2464	6185
17	7	697		82	17		6435	2788	7013
18	7	783		87	18		7245	3132	7893
19	7	874		92	19		8103	3496	8825
20	7	970		97	20		9009	3880	9809
21	7	1071		102	21		9963	4284	10845
22	7	1177		107	22		10965	4708	11933

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)		
y	k	Ky		m	n		a	b	c
1	10	1		2	1		3	4	5
2	10	10		10	2		96	40	104
3	10	27		18	3		315	108	333
4	10	52		26	4		660	208	692
5	10	85		34	5		1131	340	1181
6	10	126		42	6		1728	504	1800
7	10	175		50	7		2451	700	2549
8	10	232		58	8		3300	928	3428
9	10	297		66	9		4275	1188	4437
10	10	370		74	10		5376	1480	5576
11	10	451		82	11		6603	1804	6845
12	10	540		90	12		7956	2160	8244
13	10	637		98	13		9435	2548	9773
14	10	742		106	14		11040	2968	11432
15	10	855		114	15		12771	3420	13221
16	10	976		122	16		14628	3904	15140
17	10	1105		130	17		16611	4420	17189
18	10	1242		138	18		18720	4968	19368
19	10	1387		146	19		20955	5548	21677
20	10	1540		154	20		23316	6160	24116
21	10	1701		162	21		25803	6804	26685
22	10	1870		170	22		28416	7480	29384

利用代入$y=n$，$m=(k-2)y-(k-4)$得到 m、n，但是當 n 為$(k-4)$的質因數的正整數倍數時，找出的 m、n 會不符合 m、n 互質、奇偶相反，所以找出的(a,b,c)是畢氏三元數，而不是本原畢氏三元數組，我們就不在這方面做探討。

【說明】：當x恰好為$k-4$ $(k\geq 6)$質因數的正整數倍數時，則第x個k角數找出的 m,n 不符合互質和一奇一偶。為何是$k-4$的質因數的正整數倍數？ 我們先由第 y 個 k 角數的通式：$\dfrac{y[(k-2)y-(k-4)]}{2}=\dfrac{nm}{2}$ 得知，$m=(k-2)y-(k-4)$，$y=n$

(1)當 k=7 時，代入上式可得知，m=5n-3，如果 m 與 n 不互質，則會形成畢氏三元數，所以

當 n=3，6…也就是 k-4 的質因數倍數時，m 與 n 就會不互質。

(2)當 k=10 時，代入上式可得知，m=8n-6，如果 m 與 n 不互質，則會形成畢氏三元數，所以當 n=2，3，4，6…也就是 k-4 的質因數倍數時，m 與 n 就會不互質。

【總結】：n=k-4 的質因數倍數時，m 與 n 彼此不互質，則 m 與 n 會形成畢氏三元數。

(三)探討給定任意的直角△內切圓半徑 r(r 為自然數)，其中三邊長為本原畢氏三元數組(a,b,c)，其生成元為 m、n，則可找到第 y 個 k 角數 K_y，滿足 $4K_y=b$，反之亦成立：

1.直角△內切圓半徑 r 找第 y 個 k 角數 K_y：

先由直角△內切圓半徑 r 找本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n，再從本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 去找多角數，進而將直角△內切圓半徑 r 分 3 種類型探討：

本原畢氏三元數組(a,b,c)的內切圓半徑r	→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的內切圓半徑r		
r		n	m		y	k	Ky
2		2	3		2	3	3
3		1	4		1	#DIV/0!	2
3		3	4		3	3	6
4		4	5		4	3	10
5		1	6		1	#DIV/0!	3
5		5	6		5	3	15
6		2	5		2	5	5
6		6	7		6	3	21
7		1	8		1	#DIV/0!	4
7		7	8		7	3	28
8		8	9		8	3	36
9		1	10		1	#DIV/0!	5
9		9	10		9	3	45
10		2	7		2	7	7
10		10	11		10	3	55
11		1	12		1	#DIV/0!	6
11		11	12		11	3	66
12		4	7		4	3.666667	14
12		12	13		12	3	78
13		1	14		1	#DIV/0!	7
13		13	14		13	3	91
14		2	9		2	9	9

(1)直角△內切圓半徑 r 為扣除 2 以外的質數，都有 2 組本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n，但其中有一組 n 為 1 不符合 m 與 n 找 k 的通式，所以 k 為正整數的只有一組，且 k 值必為 3，舉例: r=3,5,7。

(2)直角△內切圓半徑 r 的質因數分解為2^x時，因 n 要全取2^x，所以$r=n$，m 的通式為$m=\frac{r}{n}+n$，會得到$m=n+1$的情況，代入到本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 找 k 的通式 $\frac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$ ，由此可知，k 為正整數時只有一組，且 k 值必為 3。

(3)直角△內切圓半徑 r 的質因數分解$=2^x \bullet t_1^{x_1} \bullet t_2^{x_2} \bullet \cdots \bullet t_\ell^{x_\ell}$：

①當$x=1$時，由於 n 全取的性質，n 一定能取得 2 或 r (可能還有其它種)，當 n 為 2 時，代入 $\frac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$ 得到$m=k$，本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 的 m 為正整數，所以 k 值也為正整數；當$n=r$時，由(2)可知$k=3$；而 n 取不為 2 或 r 時，得出的 m 可能會與 n 找到正整數 k 值，如 r=190,1770。可知 x 為 1 時，2≤k 組數≤本原畢氏三元數組。

②當$x=2$時，n 一定會有 4 或 r (可能還有其它種)，當$n=4$時代入$\frac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$ (k 為正整數)，得到$m\div 3$ 會餘 2，則 m 符合這個情況時，求得的 k 必為正整數，反之，不符合時，k 值不為正整數；而$n=r$時，由(2)可得知 $k=3$ ；當 n 取不為 4 或 r 時，得出的 m 可能會與 n 找到正整數 k 值，如:r=220,1540,12100，1≤k 組數≤本原畢氏三元數組。

③當$x=3$時，n 一定會有 8 或 r (可能還有其它種)，當$n=8$時代入 $\frac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$ (k 為正整數)，得到$m\div 7$會餘 2，則 m 符合這個情況時，求得的 k 必為正整數，反之，不符合時，k 值不為正整數；而$n=r$時，由(2)可得知$k=3$；當 n 取不為 8 或 r 時，得出的 m 可能會與 n 找到正整數 k 值，如:r=120,5720,24200，1≤k 組數≤本原畢氏三元數組。

【證明】：m、n 找 k 的通式為：$\frac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$ ，將$m=\frac{r}{n}+n$代入 m、n 找 k 的通式，經化簡後得到$\frac{\frac{r}{n}-1}{n-1}+3=k$，所以給定 r 值時，$r=2^x \bullet t_1^{x_1} \bullet t_2^{x_2} \bullet \cdots \bullet t_\ell^{x_\ell}$ ，利用 n 全取的性質，把 n 值與 r 值代入 $\frac{\frac{r}{n}-1}{n-1}+3=k$，則可求得 k 值；由$\frac{nm}{2}=K_y$，將$m=\frac{r}{n}+n$代入$\frac{nm}{2}=K_y$，經化簡後得到$\frac{r+n^2}{2}=K_y$，把 n 值與 r 值代入$\frac{r+n^2}{2}=K_y$，則可求得$K_y$的值。

【總結】：k 的組數至少有一組，至多與本原畢氏三元數組的組數一樣多，且每組 r 裡一定會找到$k=3$這種情況。

2.第 y 個 k 角數K_y找直角△內切圓半徑 r：

接著，我們由多角數去找本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n，再從本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 去找出直角△內切圓半徑 r。

【證明】：藉由$n=y$ ，$m=(k-2)y-(k-4)$，代入$n(m-n)=r \Rightarrow y\{[(k-2)y-(k-4)]-y\}=r$ $\Rightarrow y[(k-3)y-(k-4)]=r$ ，$\therefore y[(k-3)y-(k-4)]=r$ 。

(1) k=3 時，已知$y=n$ ，將這兩者代入$m=(k-2)y-(k-4)$ ，得到$m=n+1$(m 與 n 為連續數字)，代入$n(m-n)=r$ 會得到$n(n+1-n)=r \Rightarrow n=y=r$ ，而 k=3 代入$y[(k-3)y-(k-4)]=r$也可得到$y=r$ ，可知 k=3 時，y 為 r，例如:k=3，y=2 得到(m,n)=(3,2)，r 為 2。如下圖(一)

(2) k=4 時，已知 $y=n$ ，將這兩者代入$m=(k-2)y-(k-4)$ ，得到$m=2n$ ，所以僅有一組(m,n)=(2,1)是符合 m 與 n 互質的條件，代入$n(m-n)=r$ 可得到 r=1，可知在 k=4，y=1 時，可找出在 k=4 中唯一能找出的 r 值。如下圖(二) <紅色:不符合生成元 m、n 條件>

(3) k=5 時，已知$y=n$ ，將這兩者代入$m=(k-2)y-(k-4)$，得到$m=3n-1$，由找出的 m 與 n 都符合本

原畢氏三元數組 m、n 的條件，即可直接經由 m 與 n 求出 r，也可代入式子 $y\left[(k-3)y-(k-4)\right]=r$ 得到 y(2y-1)=r，即 k=5 時找直角△內切圓半徑 r 的通式，代入 k=5，y=2，得 r=6。如下圖(三)

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的內切圓半徑r
y	k	Ky		m	n		r
1	3	1		2	1		1
2	3	3		3	2		2
3	3	6		4	3		3
4	3	10		5	4		4
5	3	15		6	5		5
6	3	21		7	6		6
7	3	28		8	7		7
8	3	36		9	8		8
9	3	45		10	9		9
10	3	55		11	10		10
11	3	66		12	11		11
12	3	78		13	12		12
13	3	91		14	13		13
14	3	105		15	14		14
15	3	120		16	15		15
16	3	136		17	16		16
17	3	153		18	17		17
18	3	171		19	18		18
19	3	190		20	19		19
20	3	210		21	20		20
21	3	231		22	21		21
22	3	253		23	22		22

圖(一)

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的內切圓半徑r
y	k	Ky		m	n		r
1	4	1		2	1		1
2	4	4		4	2		4
3	4	9		6	3		9
4	4	16		8	4		16
5	4	25		10	5		25
6	4	36		12	6		36
7	4	49		14	7		49
8	4	64		16	8		64
9	4	81		18	9		81
10	4	100		20	10		100
11	4	121		22	11		121
12	4	144		24	12		144
13	4	169		26	13		169
14	4	196		28	14		196
15	4	225		30	15		225
16	4	256		32	16		256
17	4	289		34	17		289
18	4	324		36	18		324
19	4	361		38	19		361
20	4	400		40	20		400
21	4	441		42	21		441
22	4	484		44	22		484

圖(二)

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的內切圓半徑r
y	k	Ky		m	n		r
1	5	1		2	1		1
2	5	5		5	2		6
3	5	12		8	3		15
4	5	22		11	4		28
5	5	35		14	5		45
6	5	51		17	6		66
7	5	70		20	7		91
8	5	92		23	8		120
9	5	117		26	9		153
10	5	145		29	10		190
11	5	176		32	11		231
12	5	210		35	12		276
13	5	247		38	13		325
14	5	287		41	14		378
15	5	330		44	15		435
16	5	376		47	16		496
17	5	425		50	17		561
18	5	477		53	18		630
19	5	532		56	19		703
20	5	590		59	20		780
21	5	651		62	21		861
22	5	715		65	22		946

圖(三)

(4) 當 k≥6 且為偶數時，則 k-4 時值必為偶數，所以 n 為奇數，m 為偶數，則 r 必為奇數，例:k=6，y=5，得 r 為 65。如下圖(四) <紅色:不符合生成元 m、n 條件>

(5) 當 k≥6 且為奇數時，只要 y 不為 k-4 質因數的倍數時，皆可代入 $y\left[(k-3)y-(k-4)\right]=r$ 算出其直角△內切圓半徑 r，而 r 則沒有奇偶限制。例如:k=10 代入 $y\left[(k-3)y-(k-4)\right]=r$ 得到 $y(7y-6)=r$ 如下圖(五&六) <紅色:不符合生成元 m、n 條件>

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的內切圓半徑r
y	k	Ky		m	n		r
1	6	1		2	1		1
2	6	6		6	2		8
3	6	15		10	3		21
4	6	28		14	4		40
5	6	45		18	5		65
6	6	66		22	6		96
7	6	91		26	7		133
8	6	120		30	8		176
9	6	153		34	9		225
10	6	190		38	10		280
11	6	231		42	11		341
12	6	276		46	12		408
13	6	325		50	13		481
14	6	378		54	14		560
15	6	435		58	15		645
16	6	496		62	16		736
17	6	561		66	17		833
18	6	630		70	18		936
19	6	703		74	19		1045
20	6	780		78	20		1160
21	6	861		82	21		1281
22	6	946		86	22		1408

圖(四)

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的內切圓半徑r
y	k	Ky		m	n		r
1	7	1		2	1		1
2	7	7		7	2		10
3	7	18		12	3		27
4	7	34		17	4		52
5	7	55		22	5		85
6	7	81		27	6		126
7	7	112		32	7		175
8	7	148		37	8		232
9	7	189		42	9		297
10	7	235		47	10		370
11	7	286		52	11		451
12	7	342		57	12		540
13	7	403		62	13		637
14	7	469		67	14		742
15	7	540		72	15		855
16	7	616		77	16		976
17	7	697		82	17		1105
18	7	783		87	18		1242
19	7	874		92	19		1387
20	7	970		97	20		1540
21	7	1071		102	21		1701
22	7	1177		107	22		1870

圖(五)

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的內切圓半徑r
y	k	Ky		m	n		r
1	10	1		2	1		1
2	10	10		10	2		16
3	10	27		18	3		45
4	10	52		26	4		88
5	10	85		34	5		145
6	10	126		42	6		216
7	10	175		50	7		301
8	10	232		58	8		400
9	10	297		66	9		513
10	10	370		74	10		640
11	10	451		82	11		781
12	10	540		90	12		936
13	10	637		98	13		1105
14	10	742		106	14		1288
15	10	855		114	15		1485
16	10	976		122	16		1696
17	10	1105		130	17		1921
18	10	1242		138	18		2160
19	10	1387		146	19		2413
20	10	1540		154	20		2680
21	10	1701		162	21		2961
22	10	1870		170	22		3256

圖(六)

【**總結**】：k 與可得出的直角△內切圓半徑 r 在 k=4 以外時，可得出的數量是由 y 的數量決定的，所以 k 對 r 為 1 對多，而一組 k,y 也就是第 y 個 k 角數對 r 時，則是 1 對 1。所以不論由直角△內切圓半徑 r 找多角數或者是多角數找直角△內切圓半徑 r，都必須經過本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n，其三者關係圖為：

直角△內切圓半徑 r ⇄ 本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n ⇄ 第 y 個 k 角數 K_y 。

三、透過多角數及多角數彼此間與圓錐曲線的關聯性：

(一)探討多角數及多角數彼此間與雙曲線之關係：

以解線性變換的技巧，透過程序系統化的方法，找尋一組聯立二次丟番圖方程最小正整數解，求得基本矩陣且分別得其自然數列的所有解，並導出它們一階線型遞迴關係式的通解。

1.三角平方數： $\dfrac{x(x+1)}{2}=y^2 \Rightarrow 4(x+\dfrac{1}{2})^2-8y^2=1$ 有最小的正整數解 $(1,1)$

$$\Rightarrow 4x'^2-8y'^2=1$$

$\begin{cases} x''=ax'+by' \\ y''=cx'+dy' \end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 滿足 $4(ax'+by')^2-8(cx'+dy')^2=1$

$\begin{cases} 4a^2-8c^2=4 \\ 8ab-16cd=0 \\ 4b^2-8d^2=-8 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a^2-2c^2=1 \\ ab=2cd \\ b^2-2d^2=-2 \end{cases}$ 之最小正整數解 $\Rightarrow (a,b,c,d)=(3,4,2,3)$

$$\therefore \text{方陣} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

一階線性遞迴關係式：$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n' \\ y_n' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{n+1}' \\ y_{n+1}' \end{bmatrix}$ 　　平移方程式：$\begin{cases} x'=x+\dfrac{1}{2} \\ y'=y \end{cases}$

當 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{17}{2} \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$，即第 8 個三角數就是第 6 個平方數

$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{17}{2} \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{99}{2} \\ 35 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 49 \\ 35 \end{bmatrix}$，即第 49 個三角數就是第 35 個平方數

這個計算的結果與程式設計執行計算的正整數解是吻合一致且無遺漏的。

綜合上面的結果我們可以得到下面的定理：

定理 6.1 設 $x_1=1, y_1=1$，則正整數 x_n, y_n 滿足下列矩陣等式：$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$，$n=1,2,3,\ldots$

其一階線型遞迴關係式：$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$n\geq 1$，則第 x_n 個三角數為第 y_n 個平方數。

【**證明**】：僅須再證明其一階線型遞迴關係式。

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{n}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故一階線型遞迴關係式成立。

引理 6.1 在自然數中，有無限多個三角平方數 $\dfrac{x(x+1)}{2}=y^2$，例如：$\dfrac{8\times 9}{2}=6^2$ 。

2.五角三角數： $\dfrac{x(x+1)}{2}=\dfrac{3y^2-y}{2}\Rightarrow 6(x+\frac{1}{2})^2-18(y-\frac{1}{6})^2=1$ 有最小的正整數解 $(1,1)$

$$\Rightarrow 6x'^2-18y'^2=1$$

$\begin{cases}x''=ax'+by'\\ y''=cx'+dy'\end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ 滿足 $6(ax'+by')^2-18(cx'+dy')^2=1$

$\Rightarrow\begin{cases}a^2-3c^2=1\\ ab=3cd\\ b^2-3d^2=-3\end{cases}$ 之最小正整數解 $\Rightarrow(a,b,c,d)=(2,3,1,2)$ $\therefore$ 方陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$

一階線性遞迴關係式：$\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'_n\\y'_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_{n+1}\\y'_{n+1}\end{bmatrix}$ 平移方程式：$\begin{cases}x'=x+\frac{1}{2}\\ y'=y-\frac{1}{6}\end{cases}$

當 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'_1\\y'_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$； $\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{2}\\\frac{19}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_2\\y'_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\\frac{10}{3}\end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{11}{2}\\\frac{19}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{41}{2}\\\frac{71}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_3\\y'_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\12\end{bmatrix}$，即第 20 個三角數就是第 12 個五角數

$\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{41}{2}\\\frac{71}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{153}{2}\\\frac{265}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_4\\y'_4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}76\\\frac{266}{6}\end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{153}{2}\\\frac{265}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{571}{2}\\\frac{989}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_5\\y'_5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_5\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}285\\165\end{bmatrix}$，即第 285 個三角數就是第 165 個五角數

這個計算的結果與程式設計執行計算的正整數解也是吻合一致且無遺漏的。

綜合上面的結果我們可以得到下面的定理：

定理 6.2 設 $x_1=1, y_1=1$，則 x_{2n-1}, y_{2n-1} 滿足下列矩陣等式：$\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$，$n=1,2,3,\ldots$

其一階線型遞迴關係式：$\begin{bmatrix}x_{2n+1}\\y_{2n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&12\\4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$n\geq 1$，則第 x_{2n-1} 個三角數為第 y_{2n-1} 個五角數。

【**證明**】：僅須再證明其一階線型遞迴關係式。

$$\begin{bmatrix}x_{2n+1}\\y_{2n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^{2n}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^{2}\left(\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&12\\4&7\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&12\\4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

故一階線型遞迴關係式成立。

引理 6.2 在自然數中，有無限多個五角三角數 $\dfrac{x(x+1)}{2}=\dfrac{3y^2-y}{2}$，例如：$\dfrac{20(20+1)}{2}=\dfrac{3\times 12^2-12}{2}=210$。

3.五角平方數： $x^2=\dfrac{3y^2-y}{2}\Rightarrow -24x^2+36(y-\dfrac{1}{6})^2=1$ 有最小的正整數解 $(1,1)$

$$\Rightarrow -24x'^2+36y'^2=1$$

$\begin{cases} x''=ax'+by' \\ y''=cx'+dy' \end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 滿足 $-24(ax'+by')^2+36(cx'+dy')^2=1$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2-3c^2=2 \\ 2ab=3cd \\ 2b^2-3d^2=-3 \end{cases}$ 之最小正整數解 $\Rightarrow (a,b,c,d)=(5,6,4,5)$ $\therefore$ 方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

一階線性遞迴關係式：$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n' \\ y_n' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{n+1}' \\ y_{n+1}' \end{bmatrix}$ 平移方程式：$\begin{cases} x'=x \\ y'=y-\dfrac{1}{6} \end{cases}$

當 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$； $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ \frac{49}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ \frac{50}{6} \end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ \frac{49}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 99 \\ \frac{485}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 99 \\ 81 \end{bmatrix}$，即第 99 個平方數就是第 81 個五角數

$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 99 \\ \frac{485}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 980 \\ \frac{4801}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_4' \\ y_4' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 980 \\ \frac{4802}{6} \end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 980 \\ \frac{4801}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9701 \\ \frac{47525}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_5' \\ y_5' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9701 \\ 7921 \end{bmatrix}$，即第 9701 個平方數就是第 7921 個五角數

這個計算的結果與程式設計執行計算的正整數解也是吻合一致且無遺漏的。

綜合上面的結果我們可以得到下面的定理：

定理 6.3 設 $x_1=1,y_1=1$，則 x_{2n-1},y_{2n-1} 滿足下列矩陣等式：$\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$，$n=1,2,3,\ldots$

其一階線型遞迴關係式：$\begin{bmatrix} x_{2n+1} \\ y_{2n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 49 & 60 \\ 40 & 49 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -10 \\ -8 \end{bmatrix}$，$n\ge 1$，則第 x_{2n-1} 個平方數為第 y_{2n-1} 個五角數。

【**證明**】：僅須再證明其一階線型遞迴關係式。

$$\begin{bmatrix} x_{2n+1} \\ y_{2n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{2n}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{2}\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 49 & 60 \\ 40 & 49 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 49 & 60 \\ 40 & 49 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

故一階線型遞迴關係式成立。

引理 6.3 在自然數中，有無限多個五角平方數 $\dfrac{3y^2-y}{2}=x^2$，例如：$\dfrac{3\times 81^2-81}{2}=99^2$ 。

4.七角三角數： $\dfrac{x(x+1)}{2}=\dfrac{5y^2-3y}{2}\Rightarrow -5(x+\dfrac{1}{2})^2+25(y-\dfrac{3}{10})^2=1$ 有兩組基本解 $(1,1)$ 及 $(10,5)$

$$\Rightarrow -5x'^2+25y'^2=1$$

$\begin{cases} x''=ax'+by' \\ y''=cx'+dy' \end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 滿足 $-5(ax'+by')^2+25(cx'+dy')^2=1$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-5c^2=1 \\ ab=5cd \\ b^2-5d^2=-5 \end{cases}$ 之最小正整數解 $\Rightarrow (a,b,c,d)=(9,20,4,9)$ $\therefore$ 方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

一階線性遞迴關係式：$\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n' \\ y_n' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{n+1}' \\ y_{n+1}' \end{bmatrix}$ 平移方程式：$\begin{cases} x'=x+\dfrac{1}{2} \\ y'=y-\dfrac{3}{10} \end{cases}$

(1). 當 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}$； $\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{55}{2} \\ \frac{123}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 27 \\ \frac{126}{10} \end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{55}{2} \\ \frac{123}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{987}{2} \\ \frac{2207}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 493 \\ 221 \end{bmatrix}$，即第 493 個三角數就是第 221 個七角數

$\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{987}{2} \\ \frac{2207}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{17711}{2} \\ \frac{39603}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_4' \\ y_4' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8855 \\ \frac{39606}{10} \end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{17711}{2} \\ \frac{39603}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{317811}{2} \\ \frac{710647}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_5' \\ y_5' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 158905 \\ 71065 \end{bmatrix}$，即第 158905 個三角數就是第 71065 個七角數

(2). 當 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{21}{2} \\ \frac{47}{10} \end{bmatrix}$； $\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{21}{2} \\ \frac{47}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{377}{2} \\ \frac{843}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 188 \\ \frac{846}{10} \end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{377}{2} \\ \frac{843}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{6765}{2} \\ \frac{15127}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3382 \\ 1513 \end{bmatrix}$，即第 3382 個三角數就是第 1513 個七角數

$\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{6765}{2} \\ \frac{15127}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{121393}{2} \\ \frac{271443}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_4' \\ y_4' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 60696 \\ \frac{271446}{10} \end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{121393}{2} \\ \frac{271443}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2178309}{2} \\ \frac{4870847}{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_5' \\ y_5' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1089154 \\ 487085 \end{bmatrix}$，第 1089154 個三角數是第 487085 個七角數

這個計算的結果與程式設計執行計算的正整數解也是吻合一致且無遺漏的。

綜合上面的結果我們可以得到下面的定理：

定理 6.4(1) 設 $x_1=1, y_1=1$，則 x_{2n-1}, y_{2n-1} 滿足下列矩陣等式：$\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$，$n=1,2,3,\ldots$

(2) 設 $x_1=10, y_1=5$，則 x_{2n-1}, y_{2n-1} 滿足下列矩陣等式：$\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{2n-2} \begin{bmatrix} \frac{21}{2} \\ \frac{47}{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$，$n=1,2,3,\ldots$

其一階線型遞迴關係式：$\begin{bmatrix} x_{2n+1} \\ y_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -28 \\ -12 \end{bmatrix}$，$n \ge 1$，則第 x_{2n-1} 個三角數為第 y_{2n-1} 個七角數。

【**證明**】：僅須再證明其一階線型遞迴關係式。

(1). $\begin{bmatrix} x_{2n+1} \\ y_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{2n} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{2} \left(\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{2n-2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -28 \\ -12 \end{bmatrix}$

(2). $\begin{bmatrix} x_{2n+1} \\ y_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{2n} \begin{bmatrix} \frac{21}{2} \\ \frac{47}{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{2} \left(\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{2n-2} \begin{bmatrix} \frac{21}{2} \\ \frac{47}{10} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -28 \\ -12 \end{bmatrix}$

故一階線型遞迴關係式皆成立。

引理 6.4 在自然數中，有無限多個七角三角數 $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{5y^2-3y}{2}$，例如：$\frac{10(10+1)}{2} = \frac{5\times5^2-3\times5}{2} = 55$。

5.七角平方數：$\frac{y(5y-3)}{2} = x^2 \Rightarrow -\frac{40}{9}x^2 + \frac{100}{9}(y-\frac{3}{10})^2 = 1$ 有三組基本解 $(1,1)$、$(9,6)$、$(77,49)$

$$\Rightarrow -\frac{40}{9}x'^2 + \frac{100}{9}y'^2 = 1$$

$\begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy' \end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 滿足 $-\frac{40}{9}(ax'+by')^2 + \frac{100}{9}(cx'+dy')^2 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{40}{9}a^2 + \frac{100}{9}c^2 = -\frac{40}{9} \\ -\frac{80}{9}ab + \frac{200}{9}cd = 0 \\ -\frac{40}{9}b^2 + \frac{100}{9}d^2 = \frac{100}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 5c^2 = 2 \\ 2ab = 5cd \\ 2b^2 - 5d^2 = -5 \end{cases}$ 之最小正整數解 $\Rightarrow (a,b,c,d) = (19,30,12,19)$

$$\therefore \text{方陣} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 30 \\ 12 & 19 \end{bmatrix}$$

一階線性遞迴關係式：$\begin{bmatrix} 19 & 30 \\ 12 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_n \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix}$ 平移方程式：$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - \frac{3}{10} \end{cases}$

(1). 當 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}$； $\begin{bmatrix} 19 & 30 \\ 12 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ \frac{253}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ \frac{256}{10} \end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix} 19 & 30 \\ 12 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ \frac{253}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1519 \\ \frac{9607}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1519 \\ 961 \end{bmatrix}$，即第 1519 個平方數就是第 961 個七角數

$\begin{bmatrix} 19 & 30 \\ 12 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1519 \\ \frac{9607}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57682 \\ \frac{364813}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_4 \\ y'_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57682 \\ \frac{364816}{10} \end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix} 19 & 30 \\ 12 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 57682 \\ \frac{364813}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2190397 \\ \frac{13853287}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_5 \\ y'_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2190397 \\ 1385329 \end{bmatrix}$，第 2190397 個平方數是第 1385329 個七角數

(2). 當 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'_1\\y'_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\57\\\hline 10\end{bmatrix}$； $\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\57\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}342\\2163\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_2\\y'_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}342\\2166\\\hline 10\end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}342\\2163\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12987\\82137\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_3\\y'_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12987\\8214\end{bmatrix}$，即第 12987 個平方數就是第 8214 個七角數

$\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12987\\82137\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}493164\\3119043\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_4\\y'_4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}493164\\3119046\\\hline 10\end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}493164\\3119043\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18727245\\118441497\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_5\\y'_5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_5\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18727245\\11844150\end{bmatrix}$，第 18727245 個平方數是第 11844150 個七角數

(3). 當 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}77\\49\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'_1\\y'_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}77\\487\\\hline 10\end{bmatrix}$； $\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}77\\487\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2924\\18493\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_2\\y'_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2924\\18496\\\hline 10\end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2924\\18493\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}111035\\702247\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_3\\y'_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}111035\\70225\end{bmatrix}$，即第 111035 個平方數就是第 70225 個七角數

$\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}111035\\702247\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4216406\\26666893\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_4\\y'_4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4216406\\26666896\\\hline 10\end{bmatrix}$，不合

$\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4216406\\26666893\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}160112393\\1012639687\\\hline 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_5\\y'_5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_5\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}160112393\\101263969\end{bmatrix}$，第 160112393 個平方數是第 101263969 個七角數

這個計算的結果與程式設計執行計算的正整數解也是吻合一致且無遺漏的。

綜合上面的結果我們可以得到下面的定理：

定理 6.5(1) 設 $x_1=1, y_1=1$，則 x_{2n-1}, y_{2n-1} 滿足下列矩陣等式：$\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}1\\\frac{7}{10}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}$，$n=1,2,3,\ldots$

(2) 設 $x_1=9, y_1=6$，則 x_{2n-1}, y_{2n-1} 滿足下列矩陣等式：$\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}9\\\frac{57}{10}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}$，$n=1,2,3,\ldots$

(3) 設 $x_1=77, y_1=49$，則 x_{2n-1}, y_{2n-1} 滿足下列矩陣等式：$\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}77\\\frac{487}{10}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}$，$n=1,2,3,\ldots$

其一階線型遞迴關係式:$\begin{bmatrix}x_{2n+1}\\y_{2n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}721&1140\\456&721\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-342\\-216\end{bmatrix}$，$n\ge 1$，則第 x_{2n-1} 個平方數為第 y_{2n-1} 個七角數。

【**證明**】：僅須再證明其一階線型遞迴關係式。

(1). $\begin{bmatrix}x_{2n+1}\\y_{2n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2n}\begin{bmatrix}1\\\frac{7}{10}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2}\left(\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}1\\\frac{7}{10}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}721&1140\\456&721\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}721&1140\\456&721\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-342\\-216\end{bmatrix}$

(2). $\begin{bmatrix}x_{2n+1}\\y_{2n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2n}\begin{bmatrix}9\\\frac{57}{10}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2}\left(\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}9\\\frac{57}{10}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}721&1140\\456&721\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}721&1140\\456&721\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-342\\-216\end{bmatrix}$

(3). $\begin{bmatrix}x_{2n+1}\\y_{2n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2n}\begin{bmatrix}77\\\frac{487}{10}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2}\left(\begin{bmatrix}19&30\\12&19\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}77\\\frac{487}{10}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}721&1140\\456&721\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}721&1140\\456&721\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{2n-1}\\y_{2n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-342\\-216\end{bmatrix}$

故一階線型遞迴關係式皆成立。

引理 6.5 在自然數中，有無限多個七角平方數 $\frac{y(5y-3)}{2}=x^2$，例如：$\frac{5\times 6^2-3\times 6}{2}=9^2$ 。

事實上，七角數以上的三角數或平方數之找法，其基本方陣是固定形式，而須用到的基本解情況亦會隨角數增加而增加。同樣地，我們可以推得下列更廣泛的系理：

引理 6.6 d 角三角數：$\frac{x(x+1)}{2}=\frac{y\left[(d-2)y-(d-4)\right]}{2}$，$d\geq 4$

在自然數中，當 $d\neq l^2+2$ $(l\geq 3)$，即 $d\neq 11$ 或 $d\neq 18$ 或 $d\neq 27\cdots$等，有無限多個 d 角三角數。

【說明】：將 $d=l^2+2$ 代入式子，整理後呈現出：$l^2(2x+1)^2-[2l^2y-(l^2-2)]^2=-(l^2-1)(l^2-4)\cdots(*)$

(1)當 $l=3$ 即 $d=11$，而(*)至多含有 $x=1,\ y=1$ 的有限個正整數解 1；

(2)當 $l=4$ 即 $d=18$，而(*)至多含有 $x=1,\ y=1$ 的有限個正整數解 1；

(3)當 $l=5$ 即 $d=27$，而(*)含有 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 與 $\begin{cases}x=12\\y=3\end{cases}$ 的有限個正整數解 1 及 78。

引理 6.7 k 角平方數：$x^2=\frac{y\left[(k-2)y-(k-4)\right]}{2}$，$k\geq 5$

在自然數中，當 $k\neq 2l^2+2$ $(l\geq 2)$，即 $k\neq 10$ 或 $k\neq 20$ 或 $k\neq 34\cdots$等，有無限多個 k 角平方數。

【說明】：將 $k=2l^2+2$ 代入式子，整理後呈現出：$(2l)^2x^2-[2l^2y-(l^2-1)]^2=-\left(l^2-1\right)^2\cdots(**)$

(1)當 $l=2$ 即 $k=10$，而(**)至多含有 $x=1,\ y=1$ 的有限個正整數解 1；

(2)當 $l=3$ 即 $k=20$，而(**)至多含有 $x=1,\ y=1$ 的有限個正整數解 1；

(3)當 $l=4$ 即 $k=34$，而(**)含有 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 與 $\begin{cases}x=14\\y=4\end{cases}$ 的有限個正整數解 1 及 196。

更進一步，既是多邊形數也是平方數又是三角數的自然數，稱為多角平方三角數，而自然數 1 是多角平方三角數，1225 是六角平方三角數，因為有無限多個六角平方三角數。然而，在求解多角平方三角數的問題相當於須利用到二次丟番圖聯立方程是否有正整數解？

引理 6.8 p 角平方三角數：$\frac{x(x+1)}{2}=y^2=\frac{z\left[(p-2)z-(p-4)\right]}{2}$，$p\geq 5$

在自然數中，一般的 p 角平方三角數($p\geq 5$ 但 $p\neq 6$)，其 1 是僅有的 p 角平方三角數！

【說明】：

p=5，即五角平方三角數：$\frac{x(x+1)}{2}=y^2=\frac{z(3z-1)}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x(x+1)}{2}=y^2\\ \frac{z(3z-1)}{2}=y^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'^2-8y'^2=1\\ z'^2-24y'^2=1\end{cases}\cdots(***)$

p=7，即七角平方三角數：$\frac{x(x+1)}{2}=y^2=\frac{z(5z-3)}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x(x+1)}{2}=y^2\\ \frac{z(5z-3)}{2}=y^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'^2-8y'^2=1\\ z'^2-40y'^2=9\end{cases}\cdots(****)$

則我們得到 $(x,\ y,\ z)=(1,1,1)$ 皆為其最小正整數解，即 $(x',\ y',\ z')=(3,1,5)$ 是(***)的正整數解，$(x',\ y',\ z')=(3,1,7)$ 是(****)的正整數解，用各程式執行可得在兆以內的自然數都沒有其它的解。

(二)探討多角數及多角數彼此間與拋物線之關係：

僅在探討第 y 個 k 角數 K_y 時，圖形是呈現拋物線型式，而多角數與多角數間則無拋物線之關係。

(三)探討多角數及多角數彼此間與橢圓之關係：

因橢圓型式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 與多角數及多角數間型式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 完全不同，故無橢圓之關係。

伍、研究結果

一、本原畢氏三元數組、直角△內切圓半徑及多角數三者之間的關聯性：

(一)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 與直角△內切圓半徑 r 之彼此間的關係：

1.由本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 求直角△內切圓半徑 r，並得圓外切直角△生成組數之關係表：

m	n	a	b	c	直角三角形內切圓半徑r	直角三角形內切圓半徑r的因式分解	構成直角△(a,b,c)邊長的組數
2	1	3	4	5	1	2^0	1
3	2	5	12	13	2	2	1
4	1	15	8	17	3	$2^0\times3$	2
4	3	7	24	25	3	$2^0\times3$	2
5	2	21	20	29	6	2×3	2
5	4	9	40	41	4	2^2	1
6	1	35	12	37	5	$2^0\times5$	2
6	5	11	60	61	5	$2^0\times5$	2
7	2	45	28	53	10	2×5	2
7	4	33	56	65	12	$2^2\times3$	2
7	6	13	84	85	6	2×3	2
8	1	63	16	65	7	$2^0\times7$	2
8	3	55	48	73	15	$2^0\times3\times5$	4
8	5	39	80	89	15	$2^0\times3\times5$	4
8	7	15	112	113	7	$2^0\times7$	2
9	2	77	36	85	14	2×7	2
9	4	65	72	97	20	$2^2\times5$	2
9	8	17	144	145	8	2^3	1
10	1	99	20	101	9	$2^0\times3^2$	2
10	3	91	60	109	21	$2^0\times3\times7$	4
10	7	51	140	149	21	$2^0\times3\times7$	4
10	9	19	180	181	9	$2^0\times3^2$	2
11	2	117	44	125	18	2×3^2	2
11	4	105	88	137	28	$2^2\times7$	2
11	6	85	132	157	30	$2\times3\times5$	4
11	8	57	176	185	24	$2^3\times3$	2
11	10	21	220	221	10	2×5	2
12	1	143	24	145	11	$2^0\times11$	2
12	5	119	120	169	35	$2^0\times5\times7$	4
12	7	95	168	193	35	$2^0\times5\times7$	4
12	11	23	264	265	11	$2^0\times11$	2
13	2	165	52	173	22	2×11	2
13	4	153	104	185	36	$2^2\times3^2$	2
13	6	133	156	205	42	$2\times3\times7$	4
13	8	105	208	233	40	$2^3\times5$	2
13	10	69	260	269	30	$2\times3\times5$	4
13	12	25	312	313	12	$2^2\times3$	2
14	1	195	28	197	13	$2^0\times13$	2
14	3	187	84	205	33	$2^0\times3\times11$	4
14	5	171	140	221	45	$2^0\times3^2\times5$	4
14	9	115	252	277	45	$2^0\times3^2\times5$	4
14	11	75	308	317	33	$2^0\times3\times11$	4
14	13	27	364	365	13	$2^0\times13$	2
15	2	221	60	229	26	2×13	2
15	4	209	120	241	44	$2^2\times11$	2
15	8	161	240	289	56	$2^3\times7$	2
15	14	29	420	421	14	2×7	2

經由上表的規律推導後，我們統整出以本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 求其直角△內切圓半徑 r 的方式：**m、n 求 r 的通式：** $n(m-n)=r$

(1)若由本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n，亦可求出其直角△內切圓半徑 r。

(2)當 m、n 為連續數字，$n=r$。

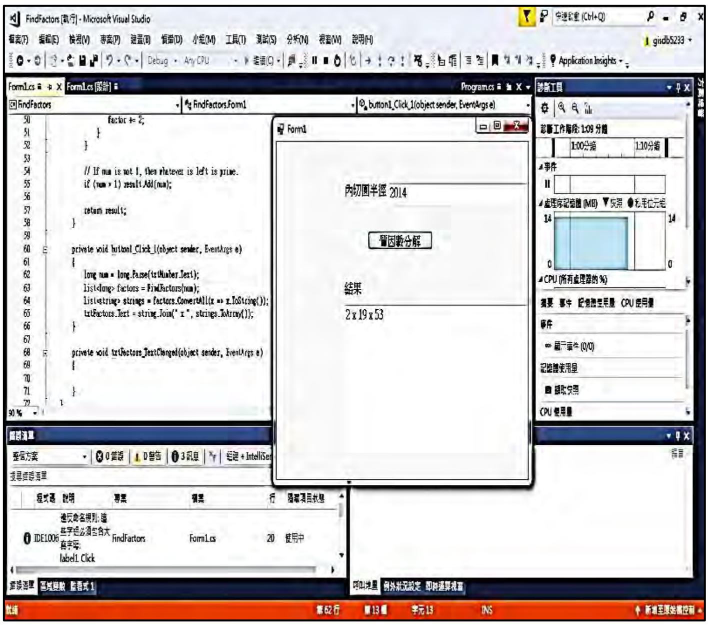
(3)當 m 為奇數，n 為偶數，則 r 為偶數；而 m 為偶數，n 為奇數，則 r 為奇數。

(4)當 m 為偶數且 n 為 1，則$m-1=r$。

(5)在兩組(m,n)中，當 m 相等且為偶數，若其中一組 n=1，另一組 n=m-1 時，求得的 r 值必相等；若這兩組 n 值相加等於 m 值時，則 r 值必相等。

2.由直角△內切圓半徑 r 求得本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n，並寫出程式 Visual C#執行運算：

直角三角形內切圓半徑r	r的質因數分解	n	m	a	b	c
1	2^0	1	2	3	4	5
2	2	2	3	5	12	13
3	$2^0\times 3$	1	4	15	8	17
3	$2^0\times 3$	3	4	7	24	25
4	2^2	4	5	9	40	41
5	$2^0\times 5$	1	6	35	12	37
5	$2^0\times 5$	5	6	11	60	61
6	2×3	2	5	21	20	29
6	2×3	6	7	13	84	85
7	$2^0\times 7$	1	8	63	16	65
7	$2^0\times 7$	7	8	15	112	113
8	2^3	8	9	17	144	145
9	$2^0\times 3^2$	1	10	99	20	101
9	$2^0\times 3^2$	9	10	19	180	181
10	2×5	2	7	45	28	53
10	2×5	10	11	21	220	221
11	$2^0\times 11$	1	12	143	24	145
11	$2^0\times 11$	11	12	23	264	265
12	$2^2\times 3$	4	7	33	56	65
12	$2^2\times 3$	12	13	25	312	313
13	$2^0\times 13$	1	14	195	28	197
13	$2^0\times 13$	13	14	27	364	365
14	2×7	2	9	77	36	85
14	2×7	14	15	29	420	421
15	$2^0\times 3\times 5$	1	16	255	32	257
15	$2^0\times 3\times 5$	3	8	55	48	73
15	$2^0\times 3\times 5$	5	8	39	80	89
15	$2^0\times 3\times 5$	15	16	31	480	481



【探究過程統整】：

(1)先將 r 的標準分解式寫出來：$r=2^x\bullet t_1^{x_1}\bullet\ldots\bullet t_\ell^{x_\ell}$，其中 $x\ge 0$ 之整數，$t_1<t_2<\ldots<t_\ell$ 為由小到大的奇質因數 $x_1,x_2,\ldots,x_\ell\ge 1$ 的正整數。$\ell\ge 0, \ell=0$ 時，則 $r=2^x$。

(2)其次求互質的正整數 (m,n) $m>n$ 且 m、n 之奇偶性相反(恰好一奇一偶)，其符合的組數與 n 的可能取法數相同。

(3)當 $r=2^x\times t_i^{xi}$ 時，取 n 時，由於 n 必須取 2^x 之全部次方，所以 n 能取 2^x 或 $2^x\times t_i^{xi}$ 之全部次方，t_i^{xi} 可以取也可以不取，則恰好有兩組解。

(4)當 $r=2^x$ 時，n 就只能取 2^x，而 $m=2^x+1$ 一組解。

(5)當 $r=2^x\bullet t_1^{x_1}$ 時，n 就只能取到 2^x 或 $2^x\bullet t_1^{x_1}$ 兩種。

(6)當 $r=2^x\bullet t_1^{x_1}\bullet t_2^{x_2}$ 時，n 可以取到 2^x，$2^x\bullet t_1^{x_1}$，$2^x\bullet t_2^{x_2}$ 及 $2^x\bullet t_1^{x_1}\bullet t_2^{x_2}$ 共四組解。

(7)一般來說，$r=2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot t_\ell^{x_\ell}$，則 n 可以取到 2^x，$2^x\cdot t_1^{x_1}$，$2^x\cdot t_2^{x_2}$，…，$2^x\cdot t_\ell^{x_\ell}$；$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}$，…，$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_\ell^{x_\ell}\cdot$；…，$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\ldots t_{\ell-1}{}^{x_{\ell-1}}$，$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot t_\ell^{x_\ell}$，$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot t_{\ell-1}{}^{x_\ell-1}\cdot t_\ell^{x_\ell}$ 共有 2^ℓ 組解，相應的 (a,b,c) 就有 2^ℓ 組本原畢氏三元數組解，因此，共有 2^ℓ 個本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形，它們的內切圓半徑都是原給定的正整數 r。

綜合比較討論，當直角△內切圓半徑 r 為質數或是合數時，將分別呈現的規律整理如下：①r 為扣除 2 以外的質數，都只有兩組解；②當 r 的質因數分解為 2^x 時，則就只有一組解；③當 r 的質因數分解為 $r=2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot t_{\ell-1}^{x_{\ell-1}}\cdot t_\ell^{x_\ell}$，其中 $x\ge 0$ 之整數，$t_1<t_2<\ldots<t_\ell$ 為由小到大的正奇質因數 $x_1,x_2,\ldots,x_\ell\ge 1$ 的正整數，則會有 2^ℓ 組解。

最後解決老師給我們的競賽試題問題：當正整數 a, b, c 滿足 $a^2+b^2=c^2$ 時，尋找共有幾組本原畢氏三元數組，亦可成為直角三角形的三邊長，同時內切圓半徑 r 亦等於 2014？

【解題過程】：先把r做質因數分解得到 $r=2\times 19\times 53$，利用n全取的特性可取出n=2、38、106、2014，再將已知的r值與求出的n值代入 $m=\frac{r}{n}+n$ 求得m值為1009、91、125、2015，則 $(m,n)=(1009,2)\to(a,b,c)=(1018077,4036,1018085)$、$(m,n)=(91,38)\to(a,b,c)=(6837,6916,9725)$、$(m,n)=(125,106)\to(a,b,c)=(4389,26500,26861)$、$(m,n)=(2015,2014)\to(a,b,c)=(4029,8116420,8116421)$，共有4組本原畢氏三元數組。

(二)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 與多角數之通式導出其彼此的連結性：

1.本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 找第 y 個 k 角數 K_y：

透過這兩個式子 $m=(k-2)y-(k-4)$、$n=y$ 經由化簡到 m、n 求 k 的通式: $\frac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$，

(1)在 m、n 為連續數字時[(m,n)=(2,1)時例外]，找出的 k 必為 3，反之亦然。

(2)只有在(m,n)=(2,1)代入 $m=(k-2)y-(k-4)$ 時可找出 k=4。

2.由第 y 個 k 角數 K_y 找本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n：

大部分的 k 和 y 都可利用 k-4 的質因數和 y 的關係判別找出的 m、n 是否符合奇偶性與互質關係，但在 $k<6$ 時，則較為特別。

以下是本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n 與多角數兩者彼此互相求解的通式：

已知 ＼ 欲求	k角數數列的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n
k角數數列的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)		m,n代入 $n=y$、$\frac{m-(n+1)}{n-1}=k$、$\frac{mn}{2}=Ky$
本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n	代入 $y=n$、$(k-2)y-(k-4)=m$、$\frac{2Ky}{y}=m$	

(三)探討給定任意的直角△內切圓半徑 r(r 為自然數)，其中三邊長為本原畢氏三元數組(a,b,c)，其生成元為 m、n，則可找到第 y 個 k 角數 K_y，滿足 $4K_y=b$，反之亦成立：

1.直角△內切圓半徑 r 找第 y 個 k 角數 K_y：

(1)我們可以先把 r 做質因數分解，利用 n 全取的特性挑 n，將 r 值與 n 值代入

$\dfrac{\frac{r}{n}-1}{n-1}+3=k$ 以及 $\dfrac{r+n^2}{2}=K_y$ 這兩個式子中，即可求得 k 值以及 K_y。

(2)每一個 r 皆可以找到正整數的 k 值、y 值和 K_y。並將 r 取出的 n 與所得的 k 值關係做探討：

<table>
<tr><th rowspan="2">直角三角形內切圓半徑r為扣除2以外的質數</th><th rowspan="2">直角三角形內切圓半徑r的質因數分解為 2^x</th><th colspan="3">直角三角形內切圓半徑r的質因數分解 $2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot t_l^{x_l}$</th></tr>
<tr><th>x=1</th><th>x=2</th><th>x=3</th></tr>
<tr><td rowspan="5">k為正整數只有一組，且必為3。</td><td rowspan="5">k為正整數時只有一組解，且k必為3。</td><td>再有可能的本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n中的n，以全取的性質，可能會有n=2、n=r的狀況</td><td>再有可能的本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n中的n，以全取的性質，可能會有n=4、n=r的狀況</td><td>再有可能的本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n中的n，以全取的性質，可能會有n=8、n=r的狀況</td></tr>
<tr><td>(1)n=2，k為正整數。</td><td>(1)n=4代入$\frac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$得m除3餘2，當m符合這個情況時k必為正整數。</td><td>(1)n=8代入$\frac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$得m除7餘2，當m符合這個情況時k為正整數。</td></tr>
<tr><td>(2)n=r時k=3</td><td>(2)n=r時，可得k=3</td><td>(2)n=r時，可得k=3</td></tr>
<tr><td>(3)n取不為2或r時得出的m與n可能會找到正整數k，如:r=190,1770</td><td>(3)n取不為4或r時得出的m可能與n找到正整數k，如:r=220,1540,12100</td><td>(3)n取不為8或r時得出的m可能與n找到正整數k，如:r=120,5720,24200</td></tr>
<tr><td>2 ≦ k組數 ≦ 本原畢氏三元數組</td><td>1 ≦ k組數 ≦ 本原畢氏三元數組</td><td>1 ≦ k組數 ≦ 本原畢氏三元數組</td></tr>
</table>

2.第 y 個 k 角數 K_y 找直角△內切圓半徑 r：

給定 k 和 y 可得本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元 m、n，即可代入 k 和 y，求直角△內切圓半徑 r 通式，得其 r 值。

解的狀況 / k的值	在固定k值時，k角數數列第y個Ky中y值的狀況	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n
k=3	可為任何數	為連續數字
k=4	僅在y為1時，求出的m,n為本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元	僅有一組(m,n)=(2,1)
k=5	可為任何數	都為本原畢氏三元數組
k>5的偶數k	不可為k-4質因數的倍數，且必為奇數	在符合互質且一奇一偶的m,n中，m必為偶數，n必為奇數
k>5的奇數k	不可為k-4質因數的倍數，無奇偶限制	在符合互質且一奇一偶的m,n中無奇偶限制

解的狀況 / k的值	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n	直角三角形內切圓半徑r
k=3	為連續數字	n=r
k=4	僅有一組(m,n)=(2,1)	僅可得到r=1
k=5	都為本原畢氏三元數組	可通過y(2y-1)得r
k>5的偶數k	在符合互質且一奇一偶的m,n中，m必為偶數，n必為奇數	r必為奇數
k>5的奇數k	在符合互質且一奇一偶的m,n中無奇偶限制	r可能為任何數

以下是**第 y 個 k 角數 K_y 和直角△內切圓半徑 r 兩者彼此關係的通式**：

已知 / 欲求	k角數數列的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)	直角三角形內切圓半徑r
k角數數列的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)		以r做質因數分解，得n並代入 $n=y$、$\frac{\frac{r}{n}-1}{n-1}+3=k$、$\frac{r+n^2}{2}=Ky$
直角三角形內切圓半徑r	代入 $y[(k-3)y-(k-4)]=r$	

二、透過多角數及多角數彼此間與圓錐曲線的關聯性：

探討多角數及多角數彼此間與雙曲線之關係，利用線性變換之矩陣解的研究，從遞迴關係式再找下一組解：

1.寫出程式 Visual C# 及 Excel VBA，執行運算並以圖形使用者介面來呈現所有解的情況：

將方法推廣到找尋 d 角三角數、k 角平方數或 p 角平方三角數($d \ge 4, k \ge 5, p \ge 5$)。以線性變換的技巧，推導這些關係式都取 a,b,c,d 為互質的自然數解，使得$a+b+c+d$為最小的正整數解，其原因是：(1)若$a+b+c+d$不是最小，恐怕在迭代過程，跳過雙曲線的一些有理數解(x,y)，而無法得到全部正整數解。(2)如果能找到一組正整數解，就可由遞迴關係得到無限多組正整數解。(3)其實(a,b,c,d)還有其他的整數解，此時(a,b,c,d)有正有負，會得到(x,y)是雙曲線在<II><III><IV>象限的有理數解，甚至於跳回原來的起始解，不符合正有理數解的要求。再者，經由求得基本矩陣且得其自然數列的所有解，並得到它們一階線型遞迴關係式的通解。

找尋d角三角數的遞迴方陣

$$\frac{(d-2)y^2-(d-4)y}{2}=\frac{x(x+1)}{2}$$

x到哪個數止 1000000

開始計算

算完了

請輸入d：7

x平方係數 l：-5

y平方係數 m：-25

平移 u：-0.5

平移 v：3/10

$$l(x-u)^2-m(y-v)^2=q$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_n \\ y'_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix}$$

a	b	c	d
1	0	0	1
9	20	4	9
161	360	72	161
2889	6460	1292	2889
51841	115920	23184	51841
930249	2080100	416020	930249

a	b	c	d				
161	360	72	161				
x_n	y_n	x'_n	y'_n	x'_{n-1}	y'_{n-1}	x_{n+1}	y_{n+1}
1	1	1.5	0.7	493.5	220.7	493	221
10	5	10.5	4.7	3382.5	1512.7	3382	1513
493	221	493.5	220.7	158905.5	71064.7	158905	71065
3382	1513	3382.5	1512.7	1089155	487084.7	1089154	487085
158905	71065	158905.5	71064.7	51167078	22882613	51167077	22882613
1089154	487085	1089155	487084.7	3.51E+08	1.57E+08	3.51E+08	156839761
51167077	22882613	51167078	22882613	1.65E+10	7.37E+09	1.65E+10	7.368E+09
		0.5	-0.3	-27.5	-12.3	-28	-12
		0.5	-0.3	-27.5	-12.3	-28	-12
		0.5	-0.3	-27.5	-12.3	-28	-12
		0.5	-0.3	-27.5	-12.3	-28	-12
		0.5	-0.3	-27.5	-12.3	-28	-12
		0.5	-0.3	-27.5	-12.3	-28	-12
		0.5	-0.3	-27.5	-12.3	-28	-12
		0.5	-0.3	-27.5	-12.3	-28	-12

【七角三角數】

找尋k角平方數的遞迴方陣

$$\frac{(k-2)y^2-(k-4)y}{2}=x^2$$

x到哪數為止 1000000

開始計算

算完了

請輸入k：7

x平方係數 l：-40

y平方係數 m：-100

平移 u：0

平移 v：3/10

$$l(x-u)^2-m(y-v)^2=q$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_n \\ y'_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix}$$

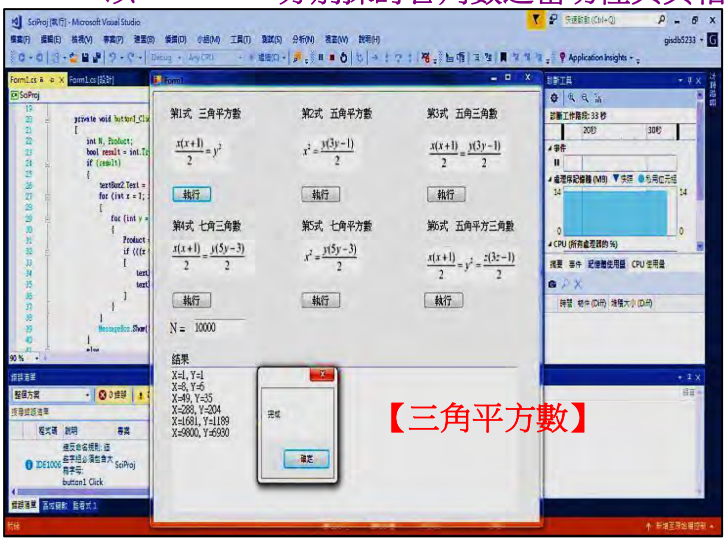
a	b	c	d
1	0	0	1
19	30	12	19
721	1140	456	721
27379	43290	17316	27379
1039681	1643880	657552	1039681

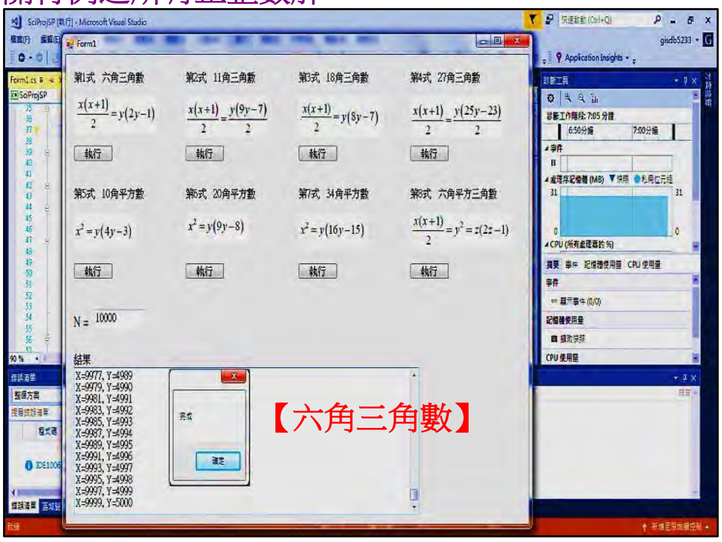
a	b	c	d				
721	1140	456	721				
x_n	y_n	x'_n	y'_n	x'_{n-1}	y'_{n+1}	x_{n+1}	y_{n+1}
1	1	1	0.7	1519	960.7	1519	961
9	6	9	5.7	12987	8213.7	12987	8214
77	49	77	48.7	111035	70224.7	111035	70225
1519	961	1519	960.7	2190397	1385328.7	2190397	1385329
12987	8214	12987	8213.7	18727245	11844150	18727245	11844150
111035	70225	111035	70224.7	160112393	101263969	160112393	101263969
2190397	1385329	2190397	1385329	3.159E+09	1.998E+09	3.159E+09	1.998E+09
18727245	11844150	18727245	11844150	2.7E+10	1.708E+10	2.7E+10	1.708E+10
1.6E+08	1.01E+08	1.6E+08	1.01E+08	2.309E+11	1.46E+11	2.309E+11	1.46E+11
3.16E+09	2E+09	3.16E+09	2E+09	4.555E+12	2.881E+12	4.555E+12	2.881E+12
2.7E+10	1.71E+10	2.7E+10	1.71E+10	3.894E+13	2.463E+13	3.894E+13	2.463E+13
2.31E+11	1.46E+11	2.31E+11	1.46E+11	3.329E+14	2.106E+14	3.329E+14	2.106E+14
4.55E+12	2.88E+12	4.55E+12	2.88E+12	6.568E+15	4.154E+15	6.568E+15	4.154E+15
3.89E+13	2.46E+13	3.89E+13	2.46E+13	5.615E+16	3.551E+16	5.615E+16	3.551E+16
3.33E+14	2.11E+14	3.33E+14	2.11E+14	4.801E+17	3.036E+17	4.801E+17	3.036E+17

【七角平方數】

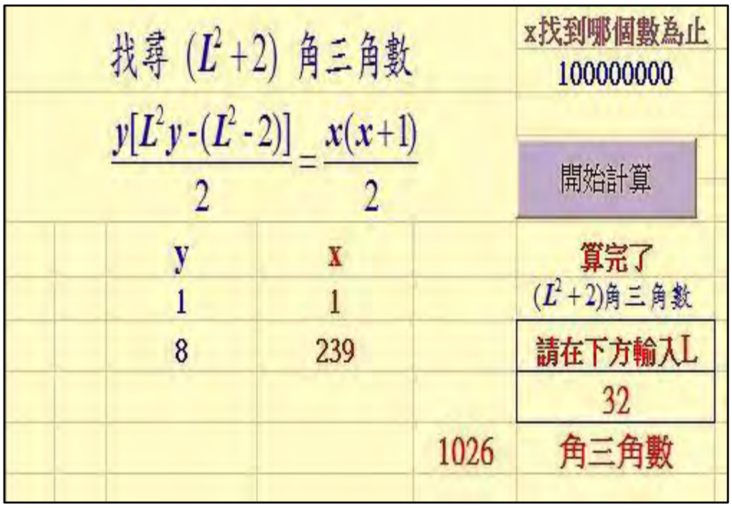
2.以 Excel VBA 分別探討滿足 d 角三角數與 k 角平方數之所有正整數解：

3.以 Visual C#分別探討各角數之密切性與其相關特例之所有正整數解：





4.分別探討在符合引理 6.6 與引理 6.7 之條件下，其所有正整數解為有限個：



5.在符合引理 6.8 之條件下，分別探討各狀況之所有正整數解：

【六角平方三角數】

找尋六角平方三角數

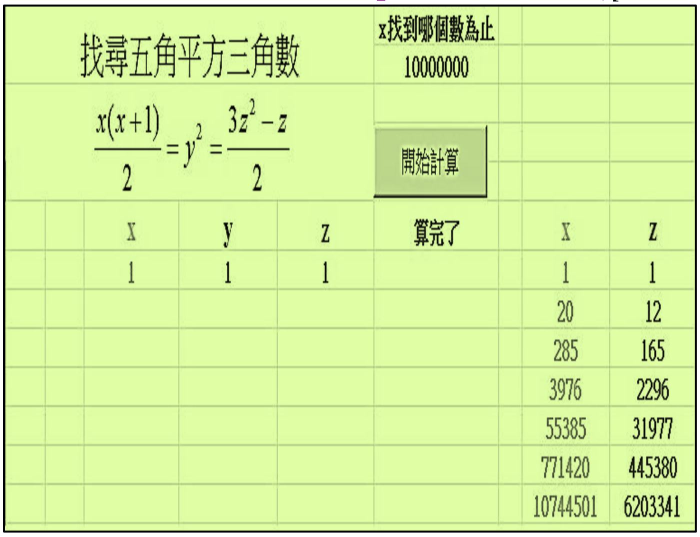
x找到哪個數為止：100000000

$$\frac{x(x+1)}{2}=y^2=\frac{z(4z-2)}{2}$$

開始計算　算完了

x	y	z
1	1	1
49	35	25
1681	1189	841
57121	40391	28561
1940449	1372105	970225
65918161	46611179	32959081

6.在自然數中，一般的 p 角平方三角數($p\geq 5$ 但 $p\neq 6$)，其 1 是僅有的 p 角平方三角數：



找尋五角平方三角數

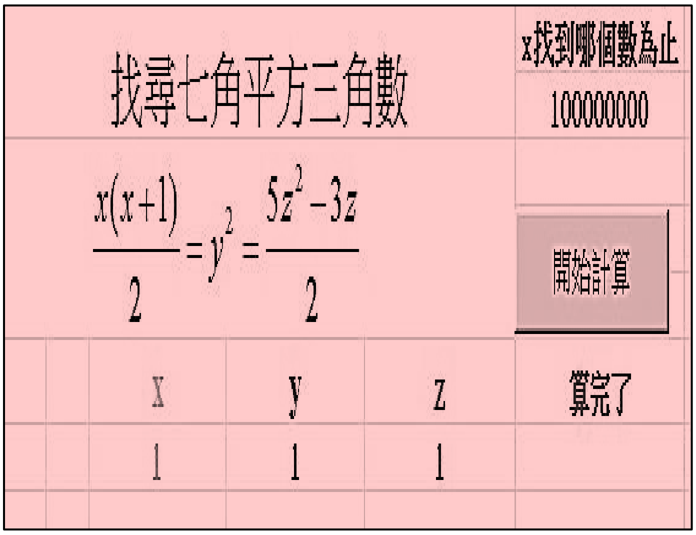
x找到哪個數為止：10000000

$$\frac{x(x+1)}{2}=y^2=\frac{3z^2-z}{2}$$

開始計算　算完了

x	y	z
1	1	1

x	z
1	1
20	12
285	165
3976	2296
55385	31977
771420	445380
10744501	6203341



找尋七角平方三角數

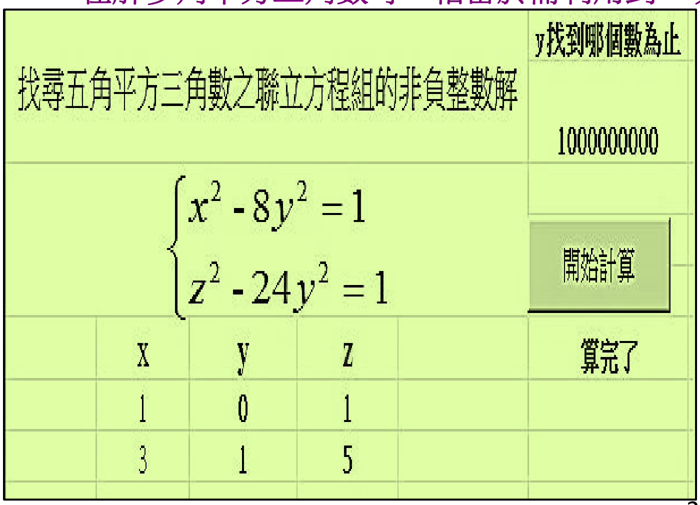
x找到哪個數為止：100000000

$$\frac{x(x+1)}{2}=y^2=\frac{5z^2-3z}{2}$$

開始計算　算完了

x	y	z
1	1	1

7.在解多角平方三角數時，相當於需利用到二次丟番圖聯立方程，找尋是否有正整數解：



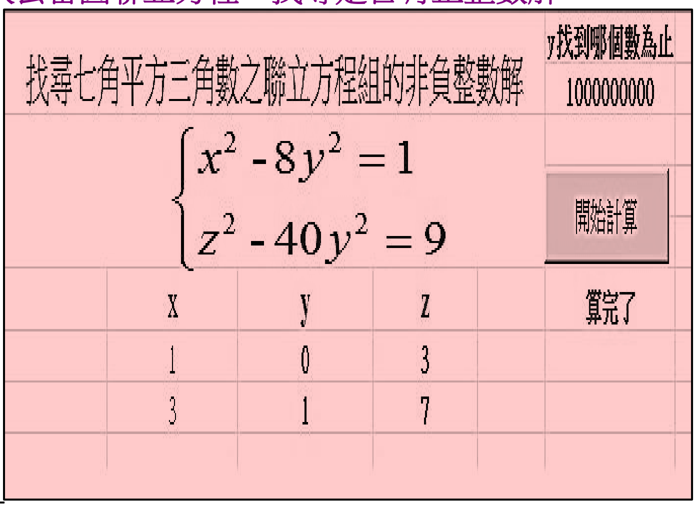
找尋五角平方三角數之聯立方程組的非負整數解

y找到哪個數為止：1000000000

$$\begin{cases} x^2-8y^2=1 \\ z^2-24y^2=1 \end{cases}$$

開始計算　算完了

x	y	z
1	0	1
3	1	5



找尋七角平方三角數之聯立方程組的非負整數解

y找到哪個數為止：1000000000

$$\begin{cases} x^2-8y^2=1 \\ z^2-40y^2=9 \end{cases}$$

開始計算　算完了

x	y	z
1	0	3
3	1	7

三、經由觀察這些矩陣解的規律性，延伸探究關於雙曲線上的格子點問題：

(一)雙曲線上的格子點(正整數解)與多角數及多角數間彼此之關係，以坐標表示：

三角平方數						五角三角數						五角平方數					
Ky	36		解為(8,6)			Ky	210		解為(20,12)			Ky	8281		解為(91,81)		
(y,k)	→	m	n	→	r	(y,k)	→	m	n	→	r	(y,k)	→	m	n	→	r
(8,3)	→	9	8	→	8	(20,3)	→	21	20	→	20	(91,4)	→	182	91	→	91^2
(6,4)	→	12	6	→	6^2	(12,5)	→	35	12	→	276	(81,5)	→	204	81	→	10001
Ky	1225		解為(49,35)			Ky	40755		解為(285,165)			Ky	94109401		解為(9701,7921)		
(49,3)	→	50	49	→	49	(285,3)	→	286	285	→	285	(9701,4)	→	19402	9701	→	9701^2
(35,4)	→	70	35	→	35^2	(165,5)	→	494	165	→	54285	(7921,5)	→	23762	7921	→	125476561
六角平方數						七角三角數						七角平方數					
Ky	1225		解為(35,25)			Ky	55		解為(10,5)			Ky	9114		解為(6,9)		
(35,4)	→	70	35	→	35^2	(10,3)	→	11	10	→	10	(6,4)	→	3038	6	→	1519^2
(25,6)	→	98	25	→	1825	(5,7)	→	22	5	→	85	(9,7)	→	2025	9	→	18147
Ky	1413721		解為(1189,841)			Ky	121771		解為(493,221)			Ky	2401		解為(49,77)		
(1189,4)	→	2378	1189	→	1189^2	(493,3)	→	494	493	→	493	(49,4)	→	98	49	→	2190397^2
(841,6)	→	3362	841	→	2120161	(221,7)	→	1102	221	→	194701	(77,7)	→	62	77	→	1127
Ky	1631432881		解為(40391,28561)			Ky	5720653		解為(3382,1513)			Ky	923521		解為(961,1519)		
(40391,4)	→	80782	40391	→	40391^2	(3382,3)	→	3383	3382	→	3382	(961,4)	→	1922	961	→	111085^2
(28561,6)	→	114242	28561	→	2447135041	(1513,7)	→	7562	1513	→	9152137	(1519,7)	→	1216	1519	→	460319
Ky	5074282756		解為(71234,19740)			Ky	12625478965		解為(158905,71065)			Ky	67469796		解為(8214,12987)		
(71234,4)	→	142468	71234	→	1089164^2	(158905,3)	→	158906	158905	→	158905	(8214,4)	→	16428	8214	→	160112393^2
(19740,6)	→	514112	19740	→	9758897912	(71065,7)	→	355322	71065	→	20200723705	(12987,7)	→	10390	12987	→	33722577

(1)三角平方數中，K_y值相同的兩組(k,y)，兩組(k,y)中僅有一組能找到符合互質且一奇一偶條件的 m、n，再找到 r。

(2)在 d 角三角數中，$d=5$時，兩組(k,y)都能找到符合互質且一奇一偶條件的 m、n，再找到 r。

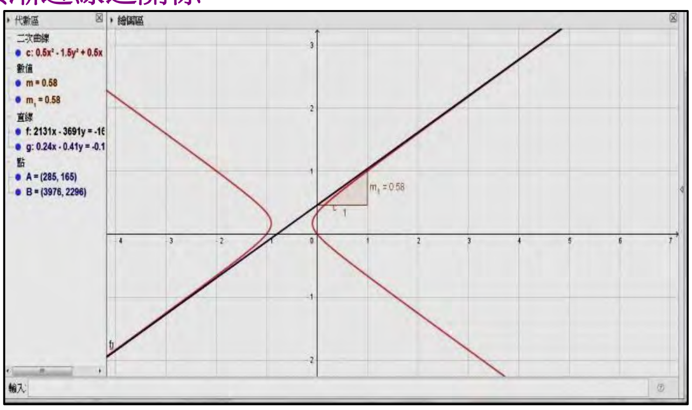
(3)在 d 角三角數中，$d>5$時，兩組(k,y)中必有一組(k,y)可找到本原畢氏三元數組的生成元 m、n，而另外一組(k,y)只要符合 y 不為$k-4$質因數的正整數倍數，即可找到本原畢氏三元數組的生成元 m、n，反之則找不到本原畢氏三元數組的生成元 m、n。

(4)在 k 角平方數，$k=5$時，兩組(k,y)中僅有一組能找到符合互質且一奇一偶條件的 m、n，再找到 r。

(5)在 k 角平方數中，$k>5$時，兩組(k,y)至多有一組(k,y)可找到本原畢氏三元數組的生成元 m、n，但也可能兩組皆找不到本原畢氏三元數組的生成元 m、n，即找不到符合互質且一奇一偶條件的 m、n。

(二)雙曲線上的格子點(正整數解)所形成直線與漸近線之關係：

【三角平方數】



【五角三角數】

上圖中紅色的圖形為多角數與多角數兩者關係所形成的雙曲線，黑線是雙曲線上的格子點所連成的直線，藍線則是雙曲線的漸近線，而 m 則是雙曲線上格子點連線的斜率：

在三角平方數的作圖中，$m_1 = 0.71$，而漸近線的斜率$m = 1$，兩直線僅交於雙曲線的中心點。

在五角三角數的作圖中，漸近線與雙曲線上格子點所成的直線重合，其斜率$m = 0.58$，而五角平方數、七角三角數和七角平方數也呈現漸近線與雙曲線上格子點所成的直線重合，三者斜率分別為 0.82，0.45，和 0.63。

(三)、探究關於三角平方數之雙曲線上的格子點問題，分為兩類討論：

1.**第一類(X是奇數)**：滿足 $x^2 = \frac{y^2+1}{2}$ ，$\because \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{y^2\cdot(y^2+1)}{2} = (yx)^2$ 左邊是三角數，右邊是平方數，它的點坐標(x,y)出現在雙曲線 $2x^2 - y^2 = 1$ 上。例如(5,7)代表 $\frac{7^2(7^2+1)}{2} = (7\times5)^2$ 。

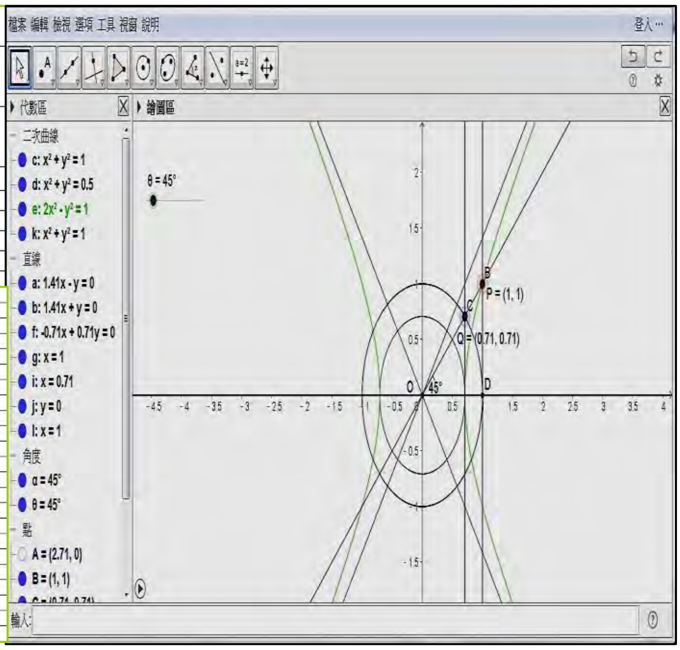
目前我們找到的有 A(1,1)，B(5,7)，C(29,41)，D(169,239)，E(985,1393)，F(5741,8119)，G(33461,47321)，H(195025,275807)，I(1136689,1607521)，其中相連的格子點，它的 Y 坐標的比值，愈來愈趨近於 r =5.828427125；$\frac{7}{1}$=7，$\frac{41}{7}$=5. 857142，$\frac{239}{41}$=5. 829268，$\frac{1393}{239}$=5. 828451，$\frac{8119}{1393}$=5. 828427，$\frac{47321}{8119}$=5. 828427146，$\frac{275807}{47321}$=5. 828427125，$\frac{1607521}{275807}$=5. 828427125 。

2.**第二類(X是偶數)**：滿足 $x^2 = \frac{y^2-1}{2}$ ，$\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{(y^2-1)\cdot y^2}{2} = (xy)^2$ ，它的點坐標(x,y)出現在共軛雙曲線 $2x^2 - y^2 = -1$ 上，其也有相同的結果。

在下方 Excel 表格中，黑色的數字(x,y)是開始找到的幾個起始值，藍色、紅色的數字都是把每一個前面的 y 坐標，乘上 5.828427125 再四捨五入取整數，就得到後續的 y 坐標，而 x 坐標求法亦相同，第 15 列以後因為數字太大，所以用科學記號表示，因此可得所有的格子點（即所有的三角平方數）。

雙曲線上的格子點(關於三角平方數)

$\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{y^2\cdot(y^2+1)}{2} = (yx)^2$		$\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{(y^2-1)\cdot y^2}{2} = (xy)^2$	
$x^2 = \frac{y^2+1}{2}$		$x^2 = \frac{y^2-1}{2}$	
x(奇數)	y	x(偶數)	y
1	1	2	3
5	7	12	17
29	41	70	99
169	239	408	577
985	1393	2378	3363
5741	8119	13860	19601
33461	47321	80782	114243
195025	275807	470832	665857
1136689	1607521	2744210	3880899
6625109	9369319	15994428	22619537
38613965	54608393	93222358	131836323
225058681	318281039	543339720	768398401
1311738121	1855077841	3166815962	4478554083
7645370045	10812186007	18457556052	26102926097
44560482149	63018038201	1.07579E+11	1.52139E+11
2.59718E+11	3.67296E+11	6.27014E+11	8.86731E+11
1.51374E+12	2.14076E+12	3.6545E+12	5.16825E+12
8.82275E+12	1.24773E+13	2.13E+13	3.01228E+13
5.14228E+13	7.27228E+13	1.24146E+14	1.75568E+14
2.99714E+14	4.23859E+14	7.23573E+14	1.02329E+15
1.74686E+15	2.47043E+15	4.21729E+15	5.96415E+15
1.01814E+16	1.43987E+16	2.45802E+16	3.47616E+16
5.93418E+16	8.3922E+16	1.43264E+17	2.02606E+17
3.45869E+17	4.89133E+17	8.35003E+17	1.18087E+18
2.01587E+18	2.85088E+18	4.86675E+18	6.88263E+18
1.17494E+19	1.66161E+19	2.83655E+19	4.01149E+19
6.84804E+19	9.68459E+19	1.65326E+20	2.33807E+20
3.99133E+20	5.64459E+20	9.63592E+20	1.36273E+21



陸、討論

雖然我們更深入地探究、發掘並解決相當部分的問題，而還未解決或未來可繼續研究的問題，我們做出以下的討論：

一、透過本原畢氏三元數組，得到以內切圓半徑為邊長的直角Δ，可再求下一組內切圓半徑，亦可找多角數與多角數彼此關係，從參考資料(一)『三角平方數定理』，其所得的解有可能就是全部的解，至少對三角平方數的情形是完全符合的，進而日後我們皆可試著利用『無窮遞降法』證明，甚至其它情形應該也可用類似方法得證。這將可作為我們未來繼續研究的方向(參考資料十四)。

二、對於其他 d 角三角數與 k 角平方數之雙曲線上的格子點問題，同樣可用矩陣之推導， 找尋其格子點，但非所有雙曲線都有格子點，有些是沒有格子點的！值得我們進一步探究。

三、關於三角平方數之雙曲線上的格子點問題，尤其是 $r=5.828427125=3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$，恰好是漸近線 $y=\sqrt{2}x$ 的斜率所成的直角三角形，短股與長股和的平方，我們覺得這個很有趣，不知道是否與雙曲線 $2x^2-y^2=1$ 的參數式 $(\frac{\sec(\theta)}{\sqrt{2}},\tan(\theta))$ 有關？目前我們還沒有辦法證明它，對此將是我們日後繼續研究精進其完備的方向之一。

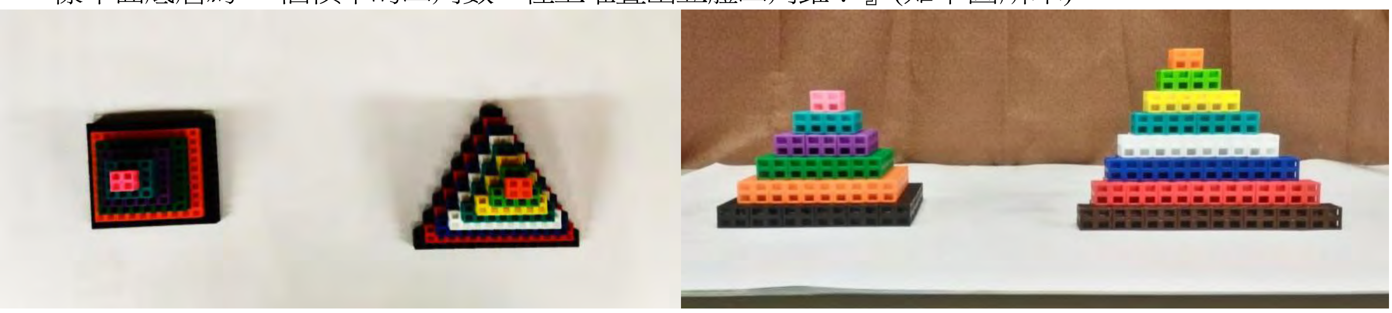
柒、結論

全國科展 or 台灣國際科展	組 別	作 品 名 稱	研 究 範 疇 與 貢 獻
第45屆	國中組	方格遊戲的探討	將著色方法改變，使著色格為四角數、五角數至多角數，並應用整數同餘觀念研究其可行解。也推廣找出二階等差數列之可行解，且整理出一些規律，並以直接證題法、矛盾證題法、數學歸納法來證結果之正確性。
第47屆	高中組	勾股鐵路網	對任何已知股差的素勾股數$(s^2-m^2,2mn,m^2+n^2)$皆可藉由衍生數對(m,n)產生一條數列，利用股差及數列性質，找到合成法則與共軛法則，來對同一股差的數列予以衍生，並將所有的數列集結在一起，便成了一網路。
第51屆	國中組	現在幾「點」了- 探討多角數、多面體數之通式	探討多角數(或多邊形數)的一般式及關係式，並將其從平面推廣至立體的多面體數與多角錐數，並分別求得它們的一般式及相關性質。
第52屆	高中組	驚奇的數	找出以 d為邊長的三邊形數是平方數，將問題轉換成邊長為d股的直角三角形問題後，利用Pell方程式與矩陣計算來求出哪些邊長的 β邊形數亦同時為四邊形數。
2013年 台灣國際科展	國高中	特殊型Pell方程式之矩陣解研究	接續研究主題『驚奇的數』，對於處理的兩種方法，嘗試改進矩陣計算的兩解問題以及對數據做詳細分析、歸納。
第53屆	高中組	大珠小珠落玉盤— 正多邊形的兩個性質	任意邊數之正多邊形具備「這兩個性質」，而其之間的橋樑是「直角三角形內切圓定理」，並分別對奇數邊與偶數邊作探討。
第58屆	國中組	探究『本原畢氏三元數組、直角Δ內切圓半徑及多角數』之關聯與延伸 (本作品是我們所研究的)	1.本原畢氏三元數組與直角Δ內切圓半徑為自然數所對應三邊長亦自然數，及多角數三者之間的關聯性: (1)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n與直角Δ內切圓半徑r之彼此間的關係給定任何的直角Δ圓半徑，挖掘以本原畢氏三元數(a,b,c)中的生成元m、n，結合我們研發出的程序性方法，並探討在[illegible]時，尋求共有幾組不同的外切直角Δ另得到以內切圓半徑為邊長的直角Δ，可再求下一組內切圓半徑。 (2)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n與多角數之通式導出其彼此的連結性 (3)探討給定任意的直角Δ內切圓半徑r，其三邊長為本原畢氏三元數組(a,b,c)，其生成元為m、n，則可找到第y個k角數 K_y，滿足 $4K_y=b$，反之亦成立。 2.多角數與多角數間之關聯和雙曲線有關，利用線性變換之矩陣解以坐標表示，並從遞迴關係式再找下一組解： (4)找尋聯立二次丟番圖方程最小正整數解，求得基本矩陣及其所有解，並得一階線型遞迴關係式的通解。 (5)推廣到找d角三角數、k角平方數或p角平方三角數$(d\geq4,k\geq5,p\geq5)$，並用Visual C#及Excel VBA寫出程式執行，且以友善介面呈現所有解的情況。 3.由觀察這些矩陣解的規律性，以GGB動態數學軟體輔助呈現，延伸探究關於三角平方數之雙曲線上的格子點問題。

數學的奧妙之處在尋求其解決問題的過程中，又引發出此新的問題，讓我們發現可再對討論所列出的進行探究。此過程推導磨練我們耐力與毅力，也遇到許多困難與挫折，還要拚命想出解釋的方法與為什麼會這樣，可是，當我們試驗導出時，也就顯得格外愉悅！在我們的努力和老師的協助下，我們成功地完成了這個試驗，清楚的解釋了為什麼，並從這次的試驗，我們不斷地假設、推導、觀察、驗證和統整歸納的過程中，我們獲得了更多的知識，從中發掘到了數學樂趣，也更能體會「團結就是力量」！仔細剖析探索，不難發現在日常生活中的每樣東西都有它的規律，相當有趣而奇妙；而**我們的研究結合離散幾何與代數，進而延伸是個純粹數論的一種有趣研究，在實用性上，如一大堆圓球堆疊出三角垛、平方垛、五角垛、…等等。**另外，我們也發現了**本原畢氏三元數組(a,b,c)生成的 m、n 妙用及其限制**，與**直角△內切圓半徑 r** 以及**多角數**，三者互相求解的密切關係。

已知條件 / 欲求的結果	本原畢氏三元數組(a,b,c)	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n	直角三角形內切圓半徑r	k角數數列中的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)
本原畢氏三元數組(a,b,c)		$m^2-n^2=a$ 、 $2mn=b$ 、 $m^2+n^2=c$	求出m,n後求出	求出m,n後求出
本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n	$a=m^2-n^2$ 、$b=2mn$ 、$c=m^2+n^2$		由r做質因式分解得n 再代入 $\frac{r}{n}+n=m$	代入 $y=n$ 、$(k-2)y-(k-4)=m$ 、$\frac{2Ky}{y}=m$
直角三角形內切圓半徑r	$\frac{a+b-c}{2}=r$	m,n代入 $n(m-n)=r$		透過 $y[(k-3)y-(k-4)]=r$ 求出
k角數數列中的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)	求出m,n後求出	m,n代入 $n=y$ 、$\frac{m-(n+1)}{n-1}=k$ 、$\frac{mn}{2}=Ky$	以r做質因式分解，得n並代入 $n=y$ 、$\frac{\frac{r}{n}-1}{n-1}+3=k$ 、$\frac{r+n^2}{2}=Ky$	

對這些多角數與多角數彼此有著密切之關係：(1) $K_n=\frac{n[(k-3)n-(k-5)]}{2}+T_{n-1}$ ，$n\geq 1$，即第 n 個 k 角數等於第 n 個(k－1)角數加上第(n－1)個三角數($k\geq 3$)；所以三角數是最基本而重要的多角數。(2)第 n 個三角數與第 n 個平方數的比值為 $\frac{n+1}{2n}$，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ 符合直觀結果。(3)前 n 個三角數之和與前 n 個平方數之和的比值為 $\frac{n+2}{2n+1}$，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}$。(4)延伸多角數與多角錐彼此關係為『如何將平面底層為 36 個積木的三角數，往上堆疊出立體三角錐？轉成同樣平面底層為 36 個積木的四角數，往上堆疊出立體四角錐？』(如下圖所示)。



捌、參考資料及其他

一、參考資料：

(一)、Silverman, J. H. (2006). A Friendly Introduction to Number Theory (3rd ed.) (pp.204-221). Pearson Education International, 新北市：高立圖書有限公司代行

(二)、邱礽瑆、林薏馨、張芷芹，第五十三屆全國科展高中組數學科佳作「大珠小珠落玉盤－正多邊形的兩個性質」

(三)、黃敏書、謝昀佐，2013 台灣國際科展數學科三等獎「特殊型 pell 方程式之矩陣解研究」

(四)、黃敏書、謝昀佐、黃育賢，第五十二屆全國科展高中組數學科第三名「驚奇的數」

(五)、黃禹傑、王貫宇、洪靖哲，第五十一屆全國科展國中組數學科「現在幾「點」了—探討多角數、多面體數之通式」

(六)、王重臻，第四十七屆全國科展高中組數學科第三名「勾股鐵路網」

(七)、陳璿宇、沈昇勳、張毓哲、洪嘉翎，第四十五屆全國科展國中組數學科第三名「方格遊戲的探討」

(八)、馬榮喜、陳大魁、陳世易，國中數學第三&四冊，康軒文教事業股份有限公司，2013

(九)、李明芳、李信仲、吳秉鋒、邱繼輝、陳宏清、黃士哲、繆友勇，國中數學第五冊，翰林出版事業股份有限公司，2013

(十)、許志農 主編，高中數學第二&三&四冊，龍騰文化事業股份有限公司，2011

(十一)、游森棚(2015)，三角數和四角數，科學研習月刊，No.54-02，pp.62

(十二)、李政憲、陳昭地(2014)，畢氏三元數組，國民中學數學教材原型 C 冊，pp.87-106，新北市：國家教育研究院

(十三)、瑪瑞琳．伯恩斯 著，冶海孜 譯，貪心的三角形，遠流出版公司，2004 初版

(十四)、林壽福 著，數學樂園-從胚騰 Pattern 學好數學，如何出版社有限公司，2006 初版

(十五)、克里斯昂．赫塞 著，何秉樺+黃建綸 譯，德國一流大學教你數學家的 22 個思考工具，漫遊者文化出版，2016 初版

(十六)、蔡文龍、 歐志信、張傑瑞、何叡、張力元 著，Visual C# 2017 基礎必修課，碁峯出版社，2017

二、附錄：程式碼【p 角平方三角數的一般式 $\frac{x(x+1)}{2}=y^2=\frac{z[(p-2)z-(p-4)]}{2}$ ，$p\geq 5$】

```
long N, Product, p; double dX, dY, dZ, dP; bool result = long.TryParse(textBox4.Text, out N);
bool result2 = long.TryParse(textBox3.Text, out p);
if (result && result2){ textBox5.Text = "";
for (long y = 1; y <= N; y++){ Product = 2 * y * y;
for (long z = 1; z <= N; z++){
if (Product == z * ((p - 2) * z - (p - 4))){
for (long x = 1; x <= N; x++){dX = (double)x; dY = (double)y; dZ = (double)z;dP = (double)p;
        if ((dX * (dX + 1.0)) == Product){ textBox5.Text += "X=" + x.ToString() + ", ";
        textBox5.Text += "Y=" + y.ToString() + ", ";
        textBox5.Text += "Z=" + z.ToString() + Environment.NewLine;}  } }  }   }
   MessageBox.Show("完成");}
 else{MessageBox.Show("N 必須為正整數, p 必須 >= 5.");}
```

【評語】030414

給定一個正整數 r，探討有多少組本原畢氏三元數組所形成的的直角三角形其內切圓半徑等於給定的 r 值的問題。針對此問題給出了分析。對於有多少 k 角數同時也會是 l 角數這樣的問題，也作了一些討論。作者們所考慮的問題其實是蠻有趣的，花了許多探索的功夫,但是說明的過程有點太過於凌亂,讓人很難掌握作者想要表達的重點。前半部和後半部看起來沒有太多的關連，感覺上好像是把兩個獨立的問題放在一個作品中,沒有明確的主軸。以本作品來說，如果能重新整理，從兩部分選出其中之一把它說明的更清楚而且完整，會比目前作品所呈現的形式看起來更有價值。有點可惜了。

作品海報

摘　要

此作品研究「本原畢氏三元數組與直角▵內切圓半徑為自然數所對應三邊長亦自然數，及多角數三者之間的關係。我們先由本原畢氏三元數組經由推導過程，找出本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n與直角▵內切圓半徑r之彼此關聯性；其次，藉由生成元m、n與多角數之通式導出彼此連結性；給定任意的直角▵內切圓半徑，其中三邊長為本原畢氏三元數組，其生成元為m、n，則可找到第y個k角數等於b / 4，反之亦成立，所以三者彼此關係都與生成元m、n息息相關。另外，我們發現多角數與多角數間之關聯和雙曲線有關，利用線性變換之矩陣解以坐標表示，並從遞迴關係式再找下一組解。」再由觀察這些解的規律性，延伸探討雙曲線上的格子點問題。

壹、研究動機

1. 老師給我們一道教育部數學能力競賽獨立研究試題：「當正整數 a, b, c滿足$a^2+b^2=c^2$時，試問有多少組畢氏三元數，使其成為直角三角形的三邊長，且內切圓半徑等於 2014？」
2. 藉由回想起小學閱讀過的「貪心的三角形」數學繪本，促動我們的思維，把問題轉變成給定任何的圓半徑，尋求共有幾組不同的外切直角三角形？
3. 經由數理研究社團，閱讀數理類進階課外書籍『數學樂園-從胚騰Pattern學好數學』，書中相關涉及的數型，如：三角數、四角數及五角數的定義，只使用了簡單的幾何圖形、計數的技巧以及等差級數求和的公式。
4. 查詢到國立台灣科學教育館網站的【科學研習月刊】：「森棚教官的數學題-三角數和四角數」，再加上國中課程也學習到數列與級數，於是我們便開始去尋找多角數的一般式及多角數與多角數彼此間和雙曲線的關聯進行探討。
5. 同時從全國中小學科展網站查詢到相關系列(第 45 & 47 & 51 & 52 & 53 屆)與2013年台灣國際科展-試著結合【直角△內切圓半徑 & 本原畢氏三元數組 & 多角數】議題的資料做探討。
6. 加上歷屆全國科展作品之評審評語也是建議在題材創新度及作品內容有提升空間，使得這樣地結果仍有很大的研究性價值同時與本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m、n來討論，做更為深入且一般性的探究。

貳、研究目的

一、本原畢氏三元數組、直角▵內切圓半徑及多角數三者之間的關聯性：

(一)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n與直角▵內切圓半徑r之彼此間的關係：

1.由本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n求直角▵內切圓半徑r。　2.由直角▵內切圓半徑r求得本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n。

(二)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n與多角數之通式導出其彼此的連結性：

1.本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n找第y個k角數K_y。　2.由第y個k角數K_y找本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n。

(三)探討給定任意的直角▵內切圓半徑r，其三邊長為本原畢氏三元數組(a,b,c)，其生成元為m、n，則可找到第y個k角數K_y，滿足$4K_y$=b，反之亦成立：　1.直角▵內切圓半徑r 找第y個k角數K_y。　2. 第y個k角數K_y找直角▵內切圓半徑r。

二、透過多角數及多角數彼此間與圓錐曲線的關聯性：

(一)探討多角數及多角數彼此間與雙曲線之關係。(二)探討多角數及多角數彼此間與拋物線之關係。(三)探討多角數及多角數彼此間與橢圓之關係。

三、經由觀察這些矩陣解的規律性，延伸探究關於雙曲線上的格子點問題。

參、研究設備及器材

筆記本、筆(記錄用)、USL連接方塊積木、筆記型電腦、自備隨身碟、Microsoft Excel VBA 2016、Microsoft Visual Studio Community 2017微軟合法免費軟體、GeoGebra 動態幾何繪圖軟體

肆、研究過程與方法

一、名詞定義與公式:

(一)自然數組(a,b,c)滿足$a^2+b^2=c^2$的關係者，稱(a,b,c)為畢氏三元數。　(二)若(a,b,c)為畢氏三元數，且a,b,c互質時，則稱(a,b,c)為本原畢氏三元數組。

(三)對於多角數或多角錐數之意義解說:

(1)第y個三角數之一般式 $3_y=1+2+3+\cdots+y=\frac{y(y+1)}{2}$，$y\geq 1$，$3_0=0$　(2)第y個四角數之一般式 $4_y=1+3+5+\cdots+(2y-1)=y^2$

(3)第y個五角數之一般式 $5_y=1+4+7+\cdots+(3y-2)=\frac{y(3y-1)}{2}$，$y\geq 1$　(4)第y個k角數之一般式 $K_y=\frac{y[(k-2)\times y-(k-4)]}{2}$，$y\geq 1$，$k\geq 3$

(5)第y個三角錐數之一般式$\Im_y=1+3+6+10+\ldots+\frac{y(y+1)}{2}=\sum_{k=1}^{y}\frac{k(k+1)}{2}$=前y個三角數之和 $1+3+6+\cdots+\frac{y(y+1)}{2}=\frac{y(y+1)(y+2)}{6}$

(6)第y個四角錐數之一般式$\Omega_y=1+2^2+3^2+\ldots+y^2=\sum_{k=1}^{y}k^2$=前y個平方數之和 $1^2+2^2+3^2+\cdots+y^2=\frac{y(y+1)(2y+1)}{6}$

定理1:本原畢氏三元數組(a,b,c)之一組生成的公式: $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，其中m>n≥ 1，m、n互質且m、n為一奇一偶，即奇偶性相反。

二、本原畢氏三元數組、直角▵內切圓半徑及多角數三者之間的關聯性：

(一)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n與直角▵內切圓半徑r之彼此間的關係：

1.由本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n求直角▵內切圓半徑r：

定理2:直角▵ABC三邊長生成本原畢氏三元數組時，當邊長$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，其中m>n≥ 1，m、n互質且m、n為一奇一偶，其內切圓半徑為 $r=n(m-n)$。

【證明】: 以三邊長 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$ 代入得: $\therefore r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{a+b-c}{2}=\frac{m^2-n^2+2mn-m^2-n^2}{2}=\frac{-2n^2+2mn}{2}=-n^2+mn=n(m-n)$得證

例子:本原畢氏三元數組(a,b,c)為(3,4,5)，m=2、n=1，代入 $r=n(m-n)$，得解r為1。

2.由直角▵內切圓半徑r求得本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n：

定理3:給定任意正整數r，至少有一組本原畢氏三元數組為邊長的直角▵，具有內切圓半徑r。即探索有多少組本原畢氏三元數組為邊長的直角▵，有同樣的內切圓半徑r。

【證明】:利用定理1，令m=n+1得到一系列的特殊本原畢氏三元數組：$a=m^2-n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$，$b=2mn=2(n+1)n=2n^2+2n$，$c=m^2+n^2=(n+1)^2+n^2=2n^2+2n+1$ n替換成r代入$a=2r+1$，$b=2r^2+2r$，$c=2r^2+2r+1$為邊長的本原畢氏三元數組且內切圓半徑恰為r的直角三角形。

引理3.1: $r=2^x\bullet t_1^{x_1}\bullet\ldots\bullet t_\ell^{x_\ell}$，$t_1<t_2<\ldots<t_\ell$ 為由小到大的奇質因數 $x_1,x_2,\ldots,x_\ell\geq 1$ 的正整數$\Rightarrow$ 恰有 2^ℓ 個本原畢氏三元數組為邊長且內切圓半徑恰為 r 的直角三角形，其中 $\ell\geq 0$。

【推導過程說明】: 因為$r=2^x\bullet t_1^{x_1}\bullet\ldots\bullet t_\ell^{x_\ell}$，其中$x\geq 0$之整數，$t_1<t_2<\ldots<t_\ell$為由小到大的奇質因數$x_1,x_2,\ldots,x_\ell\geq 1$ 的正整數。在特別 $\ell=0$時，則 $r=2^x$。

例如：$21=2^0\times 3\times 7$，$100=2^2\times 5^2$ 等等狀況中，我們針對r=1, r=2, r=3, r=4, r=2x3x5 等例子，尋求推理出答案的規律性：

(1)當r=1時，由定理2公式r=n(m-n)，其中m>n，m與n的最大公因數為1且m、n有不同的奇偶性，此時僅有n=1，m=n+1=2$\Rightarrow$(3,4,5)一組解。

(2)當r=2時，由r=n(m-n)及m、n的條件，也僅得n=2，m=2+1=3$\Rightarrow$(5,12,13)一組解。

(3)當r=3時，由m、n之條件，得到下列二組解：① n=1，m=3+1=4 $\Rightarrow$ (15,8,17)；② n=3， m=3+1=4 $\Rightarrow$ (7,24,25)。

(4)當$r=4=2^2$時，由m、n之條件僅能取n=4，m=4+1=5$\Rightarrow$ (9,40,41)一組解。

(5)當r=2x3x5時，由m、n之條件，得到下列四組解：① n=2，m=15+2=17 $\Rightarrow$ (285,68,293)；② n=6， m=5+6=11 $\Rightarrow$ (85,132,157)；
③ n=10，m=3+10=13 $\Rightarrow$ (69,260,269)；④ n=30， m=1+30=31 $\Rightarrow$ (61,1860,1861)；

(二)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n與多角數之通式導出其彼此的連結性：

1.本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n找第y個k角數K_y。

給定自然數m、n，$m>n>1$且互質，一奇一偶，$\frac{m-(n+1)}{n-1}$為非負整數，則當$k=\frac{m-(n+1)}{n-1}+3$、y=n 時，得到$(m^2-n^2,4K_y,m^2+n^2)$是本原畢氏三元數組。

第 1 步驟：先令$b=4K_y$，將$b=2mn$代入得到$2mn=4K_y$，經化簡後得到$\frac{mn}{2}=K_y$。

第 2 步驟：因為多角數的通式$K_y=\frac{y[(k-2)y-(k-4)]}{2}$，我們會得到$\frac{mn}{2}=\frac{y[(k-2)y-(k-4)]}{2}$。

第 3 步驟：$k\geq 3$的狀況下$(k-2)y-(k-4)$必定大於y，本原畢氏三元數組中 m 必定大於 n，我們令$(k-2)y-(k-4)=m$、$y=n$

第 4 步驟：解得$k=\frac{m-(n+1)}{n-1}+3$、$y=n$。

m	n	k	y
6	5	3	5
7	5	3.25	5
8	5	3.5	5
9	5	3.75	5
10	5	4	5
11	5	4.25	5
12	5	4.5	5
13	5	4.75	5
14	5	5	5
15	5	5.25	5
16	5	5.5	5
17	5	5.75	5
18	5	6	5
19	5	6.25	5
20	5	6.5	5
21	5	6.75	5
22	5	7	5
23	5	7.25	5
24	5	7.5	5
25	5	7.75	5

m	n	k	y
7	6	3	6
8	6	3.2	6
9	6	3.4	6
10	6	3.6	6
11	6	3.8	6
12	6	4	6
13	6	4.2	6
14	6	4.4	6
15	6	4.6	6
16	6	4.8	6
17	6	5	6
18	6	5.2	6
19	6	5.4	6
20	6	5.6	6
21	6	5.8	6
22	6	6	6
23	6	6.2	6
24	6	6.4	6
25	6	6.6	6
26	6	6.8	6

2.由第y個k角數K_y找本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n。

給定在k角數數列中的第y個K_y，y不為k-4質因數的正整數倍數，則$m=(k-2)y-(k-4)$、n=y時，得到$(m^2-n^2,4K_y,m^2+n^2)$為本原畢氏三元數組。

【說明】：當x恰好為$k-4$ $(k\geq 6)$質因數的正整數倍數時，則第x個k角數找出的 m,n 不符合互質或一奇一偶。為何是$k-4$的質因數的正整數倍數？ 我們先由第 y 個 k 角數的通式：$\frac{y[(k-2)y-(k-4)]}{2}=\frac{nm}{2}$ 得知，$m=(k-2)y-(k-4)$，$y=n$

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)		
y	k	Ky		m	n		a	b	c
1	3	1		2	1		3	4	5
2	3	3		3	2		5	12	13
3	3	6		4	3		7	24	25
4	3	10		5	4		9	40	41
5	3	15		6	5		11	60	61
6	3	21		7	6		13	84	85
7	3	28		8	7		15	112	113
8	3	36		9	8		17	144	145
9	3	45		10	9		19	180	181
10	3	55		11	10		21	220	221
11	3	66		12	11		23	264	265
12	3	78		13	12		25	312	313
13	3	91		14	13		27	364	365
14	3	105		15	14		29	420	421
15	3	120		16	15		31	480	481
16	3	136		17	16		33	544	545
17	3	153		18	17		35	612	613
18	3	171		19	18		37	684	685
19	3	190		20	19		39	760	761
20	3	210		21	20		41	840	841
21	3	231		22	21		43	924	925
22	3	253		23	22		45	1012	1013

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)		
y	k	Ky		m	n		a	b	c
1	7	1		2	1		3	4	5
2	7	7		7	2		45	28	53
3	7	18		12	3		135	72	153
4	7	34		17	4		273	136	305
5	7	55		22	5		459	220	509
6	7	81		27	6		693	324	765
7	7	112		32	7		975	448	1073
8	7	148		37	8		1305	592	1433
9	7	189		42	9		1683	756	1845
10	7	235		47	10		2109	940	2309
11	7	286		52	11		2583	1144	2825
12	7	342		57	12		3105	1368	3393
13	7	403		62	13		3675	1612	4013
14	7	469		67	14		4293	1876	4685
15	7	540		72	15		4959	2160	5409
16	7	616		77	16		5673	2464	6185
17	7	697		82	17		6435	2788	7013
18	7	783		87	18		7245	3132	7893
19	7	874		92	19		8103	3496	8825
20	7	970		97	20		9009	3880	9809
21	7	1071		102	21		9963	4284	10845
22	7	1177		107	22		10965	4708	11933

k角數數列中的第y個Ky值			→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	本原畢氏三元數組(a,b,c)		
y	k	Ky		m	n		a	b	c
1	10	1		2	1		3	4	5
2	10	10		10	2		96	40	104
3	10	27		18	3		315	108	333
4	10	52		26	4		660	208	692
5	10	85		34	5		1131	340	1181
6	10	126		42	6		1728	504	1800
7	10	175		50	7		2451	700	2549
8	10	232		58	8		3300	928	3428
9	10	297		66	9		4275	1188	4437
10	10	370		74	10		5376	1480	5576
11	10	451		82	11		6603	1804	6845
12	10	540		90	12		7956	2160	8244
13	10	637		98	13		9435	2548	9773
14	10	742		106	14		11040	2968	11432
15	10	855		114	15		12771	3420	13221
16	10	976		122	16		14628	3904	15140
17	10	1105		130	17		16611	4420	17189
18	10	1242		138	18		18720	4968	19368
19	10	1387		146	19		20955	5548	21677
20	10	1540		154	20		23316	6160	24116
21	10	1701		162	21		25803	6804	26685
22	10	1870		170	22		28416	7480	29384

【總結】: n=k-4的質因數倍數時，m與n彼此不互質，則m與n會形成畢氏三元數。

(三)探討給定任意的直角△內切圓半徑r(r為自然數)，其中三邊長為本原畢氏三元數組(a,b,c)，其生成元為m、n，則可找到第y個k角數K_y，滿足$4K_y$=b，反之亦成立：1.直角△內切圓半徑r 找第y個k角數K_y。

本原畢氏三元數組(a,b,c)的內切圓半徑r	→	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元(m,n)		→	第y個k角數Ky		
r		n	m		y	k	Ky
2		2	3		2	3	3
3		1	4		1	#DIV/0!	2
3		3	4		3	3	6
4		4	5		4	3	10
5		1	6		1	#DIV/0!	3
5		5	6		5	3	15
6		2	5		2	5	5
6		6	7		6	3	21
7		1	8		1	#DIV/0!	4
7		7	8		7	3	28
8		8	9		8	3	36
9		1	10		1	#DIV/0!	5
9		9	10		9	3	45
10		2	7		2	7	7
10		10	11		10	3	55
11		1	12		1	#DIV/0!	6
11		11	12		11	3	66
12		4	7		4	3.6666667	14
12		12	13		12	3	78
13		1	14		1	#DIV/0!	7
13		13	14		13	3	91
14		2	9		2	9	9
14		14	15		14	3	105
15		1	16		1	#DIV/0!	8
15		3	8		3	5	12
15		5	8		5	3.5	20
15		15	16		15	3	120

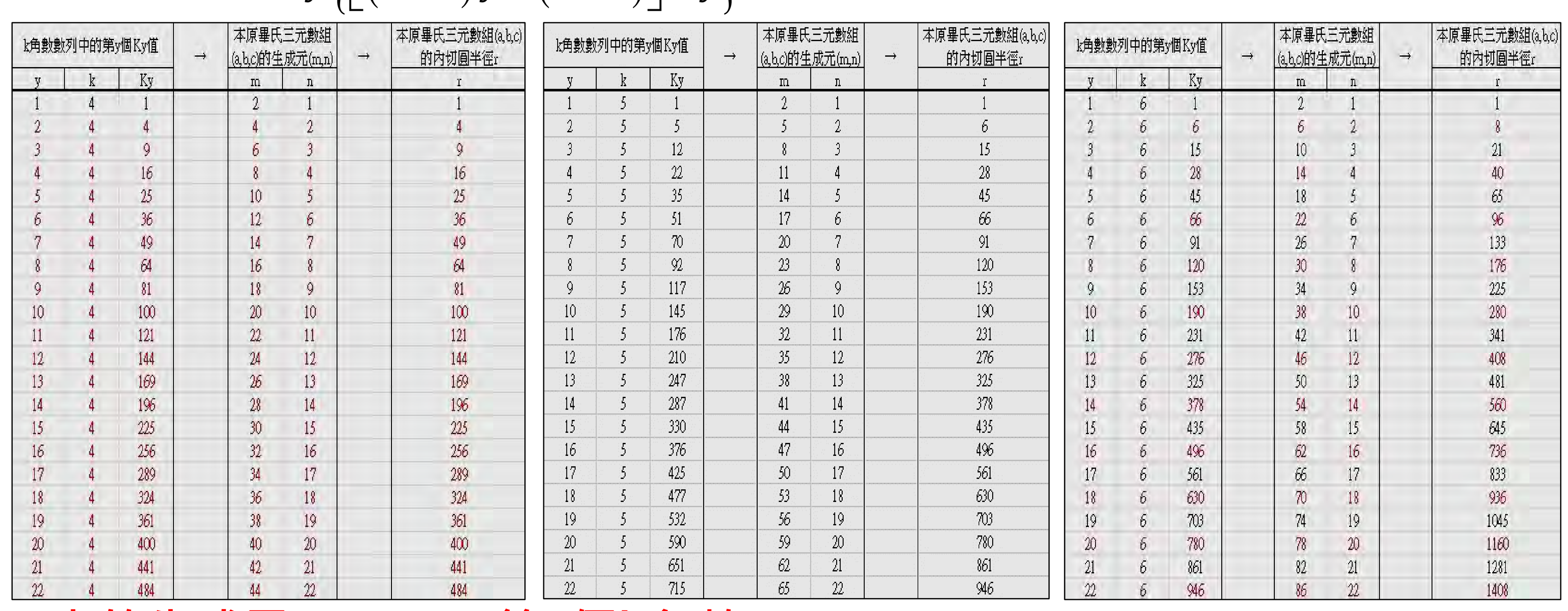
【**總結**】：k的組數至少有一組，至多與本原畢氏三元數組的組數一樣多，且每組r裡一定會找到k=3這種情況。

綜合上述，其三者關係為：直角△內切圓半徑r ⇄ 本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n ⇄ 第y個k角數K_y

2. 第y個k角數K_y找直角△內切圓半徑r。

【通式】：藉由 $n=y$，$m=(k-2)y-(k-4)$，代入 $n(m-n)=r$

$$\Rightarrow y\{[(k-2)y-(k-4)]-y\}=r \quad \therefore y[(k-3)y-(k-4)]=r$$



三、透過多角數及多角數彼此間與圓錐曲線的關聯性：

(一)探討多角數及多角數彼此間與雙曲線之關係：即探討是否可找到x表示第幾個w角數，y表示第幾個s角數(例如三角四角數，即w=3, s=4)，同時是否滿足型如雙曲線$l(x+u)^2-m(y+v)^2=\pm1$，其中l,m為有理數。透過方程組的最小正整數解求得基本矩陣進而得其自然數列的所有解，並導出一階線型遞迴的通解。

1.三角四角數: $\frac{x(x+1)}{2}=y^2 \Rightarrow 4(x+\frac{1}{2})^2-8y^2=1$ 有最小正整數解(1,1)

滿足$4(Ax'+By')^2-8(Cx'+Dy')^2=1$最小正整數 $\Rightarrow (A,B,C,D)=(3,4,2,3)$

平移方程式: $\begin{cases} x'=x+\frac{1}{2} \\ y'=y \end{cases}$ 一階線型遞迴關係式: $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, n\geq1$

其中(x, y)為其解，則透過一階線型遞迴可找到下一組(x', y')的解。

2.三角七角數: $\frac{x^2+x}{2}=\frac{5y^2-3y}{2} \Rightarrow -5(x+\frac{1}{2})^2+25(y-\frac{3}{10})^2=1$ 有兩組基本解(1,1)，(10,5)

滿足 $-5(Ax'+By')^2+25(Cx'+Dy')^2=1$最小正整數 $\Rightarrow (A,B,C,D)=(9,20,4,9)$

平移方程式: $\begin{cases} x'=x+\frac{1}{2} \\ y'=y-\frac{3}{10} \end{cases}$ 一階線型遞迴關係式: $\begin{bmatrix} x_{2n+1} \\ y_{2n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -28 \\ -12 \end{bmatrix}, n\geq1$

其中(x, y)為其解，則透過一階線型遞迴可找到下一組(x', y')的解。

3. d角三角數: $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{y\lfloor(d-2)y-(d-4)\rfloor}{2}$，$d\geq4$

經帶入整理後: $l^2(2x+1)^2-[2l^2y-(l^2-2)]^2=-(l^2-1)(l^2-4)$

在自然數中，當 $d\neq l^2+2(l\geq3)$，即 $d\neq11$ 或$d\neq18$ 或$d\neq27\cdots$等，有無限多個d角三角數。

4. k角平方數(即四角數): $x^2=\frac{y\lfloor(k-2)y-(k-4)\rfloor}{2}$，$k\geq5$

經帶入整理後: $(2l)^2x^2-[2l^2y-(l^2-1)]^2=-(l^2-1)^2$

在自然數中，當 $k\neq2l^2+2(l\geq2)$，即$k\neq10$或$k\neq20$或$k\neq34\cdots$等，有無限多個k角平方數。

(二)探討多角數及多角數彼此間與拋物線之關係：僅在探討第y個k角數K_y時，圖形是呈現拋物線型式，而多角數與多角數間則無拋物線之關係。

(三)探討多角數及多角數彼此間與橢圓之關係：因橢圓型式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$為與多角數及多角數間型式$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$完全不同，故無橢圓之關係。

伍、研究結果

一、本原畢氏三元數組、直角△內切圓半徑及多角數三者之間的關聯性：

(一)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n與直角△內切圓半徑r之彼此間的關係：

1.由本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n求直角△內切圓半徑r，並得圓外切直角△生成組數之關係表：

m	n	a	b	c	直角△內切圓半徑r	直角△內切圓半徑r的因式分解	構成直角△(a,b,c)邊長的組數
2	1	3	4	5	1	2^0	1
3	2	5	12	13	2	2	1
4	1	15	8	17	3	$2^0\times3$	2
4	3	7	24	25	3	$2^0\times3$	2
5	2	21	20	29	6	2×3	2
5	4	9	40	41	4	2^2	1
6	1	35	12	37	5	$2^0\times5$	2
6	5	11	60	61	5	$2^0\times5$	2
7	2	45	28	53	10	2×5	2
7	4	33	56	65	12	$2^2\times3$	2
7	6	13	84	85	6	2×3	2
8	1	63	16	65	7	$2^0\times7$	2
8	3	55	48	73	15	$2^0\times3\times5$	4
8	5	39	80	89	15	$2^0\times3\times5$	4
8	7	15	112	113	7	$2^0\times7$	2
9	2	77	36	85	14	2×7	2
9	4	65	72	97	20	$2^2\times5$	2
9	8	17	144	145	8	2^3	1
10	1	99	20	101	9	$2^0\times3^2$	2
10	3	91	60	109	21	$2^0\times3\times7$	4
10	7	51	140	149	21	$2^0\times3\times7$	4
10	9	19	180	181	9	$2^0\times3^2$	2

經由左表的規律推導後，我們統整出以本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n求其直角△內切圓半徑r的方式：m、n求r的通式：$n(m-n)=r$

(1)若由本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n，亦可求出其直角△內切圓半徑r。

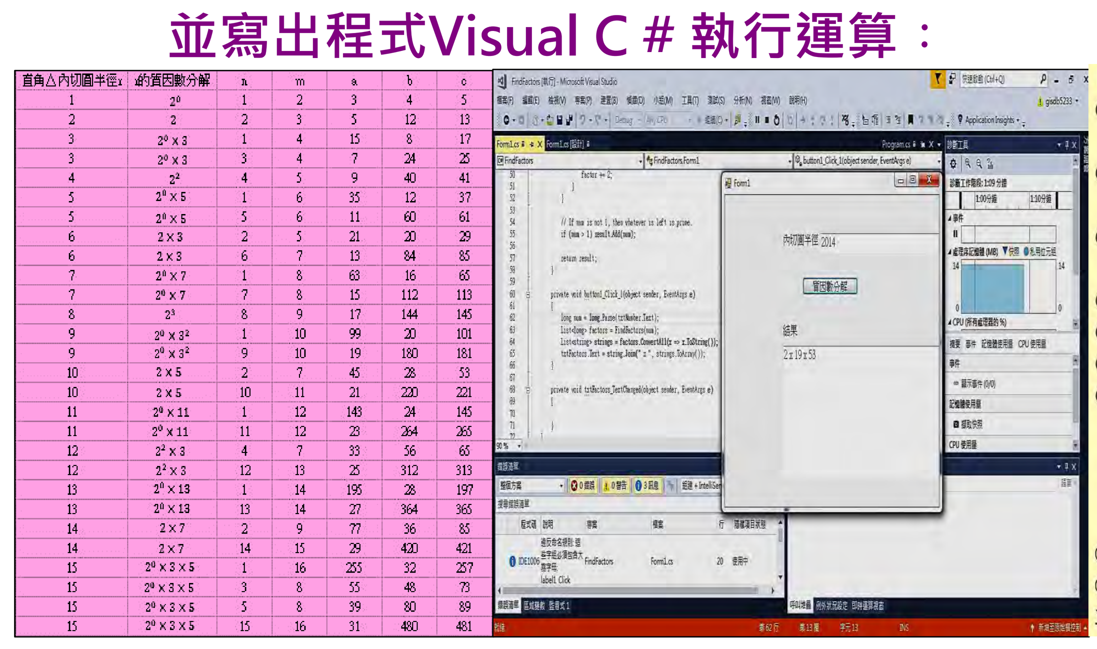
(2)當m、n為連續數字，$n=r$。

(3)當m為奇數，n為偶數，則r為偶數；而m為偶數，n為奇數，則r為奇數。

(4)當m為偶數且n為1，則$m-1=r$。

(5)在兩組(m,n)中，當m相等且為偶數，若其中一組n=1，另一組n=m-1時，求得的r值必相等；若這兩組n值相加等於m值時，則r值必相等。

2.由直角△內切圓半徑r求得本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n，並寫出程式Visual C # 執行運算：



【探究過程統整】：

(1)先將r的標準分解式寫出來：$r=2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot\ldots\cdot t_\ell^{x_\ell}$，其中$x\geq0$之整數，$t_1<t_2<\ldots<t_\ell$為由小到大的奇質因數$x_1,x_2,\ldots,x_\ell\geq1$的正整數。$\ell\geq0,\ell=0$時，則$r=2^x$。

(2)其次求互質的正整數(m,n) $m>n$且m、n之奇偶性相反(恰好一奇一偶)，其符合的組數與n的可能取法數相同。

(3)當$r=2^x\times t_i^{xi}$時，取n時，由於n必須取2^x之全部次方，所以n能取2^x或$2^x\times t_i^{xi}$之全部次方，t_i^{xi}可以取也可以不取，則恰好有兩組解。

(4)當$r=2^x$時，n就只能取2^x，而$m=2^x+1$一組解。

(5)當$r=2^x\cdot t_1^{x_1}$時，n就只能取到2^x或$2^x\cdot t_1^{x_1}$兩種。

(6)當$r=2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}$時，n可以取到$2^x$，$2^x\cdot t_1^{x_1}$，$2^x\cdot t_2^{x_2}$及$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}$共四組解。

(7)一般來說，$r=2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot t_\ell^{x_\ell}$，則n可以取到$2^x$，$2^x\cdot t_1^{x_1}$，$2^x\cdot t_2^{x_2}$，…，$2^x\cdot t_\ell^{x_\ell}$；$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}$，…，$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_\ell^{x_\ell}$；…，$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\ldots t_{\ell-1}^{x_{\ell-1}}$，$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\ldots t_\ell^{x_\ell}$，$2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot t_{\ell-1}^{x_{\ell-1}}\cdot t_\ell^{x_\ell}$共有$2^\ell$組解，相應的$(a,b,c)$就有$2^\ell$組本原畢氏三元數組解，因此，共有$2^\ell$個本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形，它們的內切圓半徑都是原給定的正整數r。

綜合比較討論，當直角△內切圓半徑r為質數或是合數時，將分別呈現的規律整理如下：①r為扣除2以外的質數，都只有兩組解；②當r的質因數分解為2^x時，則就只有一組解；③當r的質因數分解為$r=2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot t_{\ell-1}^{x_{\ell-1}}\cdot t_\ell^{x_\ell}$，其中$x\geq0$之整數，$t_1<t_2<\ldots<t_\ell$為由小到大的正奇質因數$x_1,x_2,\ldots,x_\ell\geq1$的正整數，則會有$2^\ell$組解。

(二)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n與多角數之通式導出其彼此的連結性：

1.本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n找第y個k角數K_y：

2.由第y個k角數K_y找本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n：

已知 ＼ 欲求	k角數數列的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n
k角數數列的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)		m,n代入 $n=y$、$\frac{m-(n+1)}{n-1}=k$、$\frac{mn}{2}=Ky$
本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n	代入 $y=n$、$(k-2)y-(k-4)=m$、$\frac{2Ky}{y}=m$	

(三)探討給定任意直角△內切圓半徑r(r為自然數)，其中三邊長為本原畢氏三元數組(a,b,c)而生成元為m、n，則可找到第y個k角數K_y，滿足$4K_y$=b，反之亦成立：1.直角△內切圓半徑r 找第y個k角數K_y：

直角三角形內切圓半徑r為扣除2以外的質數	直角三角形內切圓半徑r的質因數分解為 2^x	直角三角形內切圓半徑r的質因數分解 $2^x\cdot t_1^{x_1}\cdot t_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot t_\ell^{x_\ell}$		
		x=1	x=2	x=3
k為正整數只有一組，且必為3。	k為正整數時只有一組解，且k必為3。	在有可能的本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n中的n，以全取的性質，可能會有n=2、n=r的狀況	在有可能的本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n中的n，以全取的性質，可能會有n=4、n=r的狀況	在有可能的本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n中的n，以全取的性質，可能會有n=8、n=r的狀況
		(1)n=2，k為正整數。	(1)n=4代入$\frac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$得m除3餘2，當m符合這個情況時k必為正整數。	(1)n=8代入$\frac{m-(n+1)}{n-1}+3=k$得m除7餘2，當m符合這個情況時k為正整數。
		(2)n=r時，k=3	(2)n=r時，可得k=3	(2)n=r時，可得k=3
		(3)n取不為2或r時得出的m與n可能會找到正整數k，如:r=190,1770	(3)n取不為4或r時得出的m可能與n找到正整數k，如:r=220,1540,12100	(3)n取不為8或r時得出的m可能與n找到正整數k，如:r=120,5720,24200
		2 ≦ k組數 ≦ 本原畢氏三元數組	1 ≦ k組數 ≦ 本原畢氏三元數組	1 ≦ k組數 ≦ 本原畢氏三元數組

2. 第y個k角數K_y找直角△內切圓半徑r：

解的狀況 ＼ k的值	在固定k值時，k角數數列第y個Ky中y值的狀況	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n	直角三角形內切圓半徑r
k=3	可為任何數	為連續數字	n=r
k=4	僅在y為1時，求出的m,n為本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元	僅有一組(m,n)=(2,1)	僅可得到r=1
k=5	可為任何數	都為本原畢氏三元數組	可通過y(2y-1)得r
k>5的偶數k	不可為k-4質因數的倍數，且必為奇數	在符合互質且一奇一偶的m,n中，m必為偶數，n必為奇數	r必為奇數
k>5的奇數k	不可為k-4質因數的倍數，無奇偶限制	在符合互質且一奇一偶的m,n中無奇偶限制	r可能為任何數

以下是第y個k角數K_y和直角△內切圓半徑r兩者彼此關係的通式：

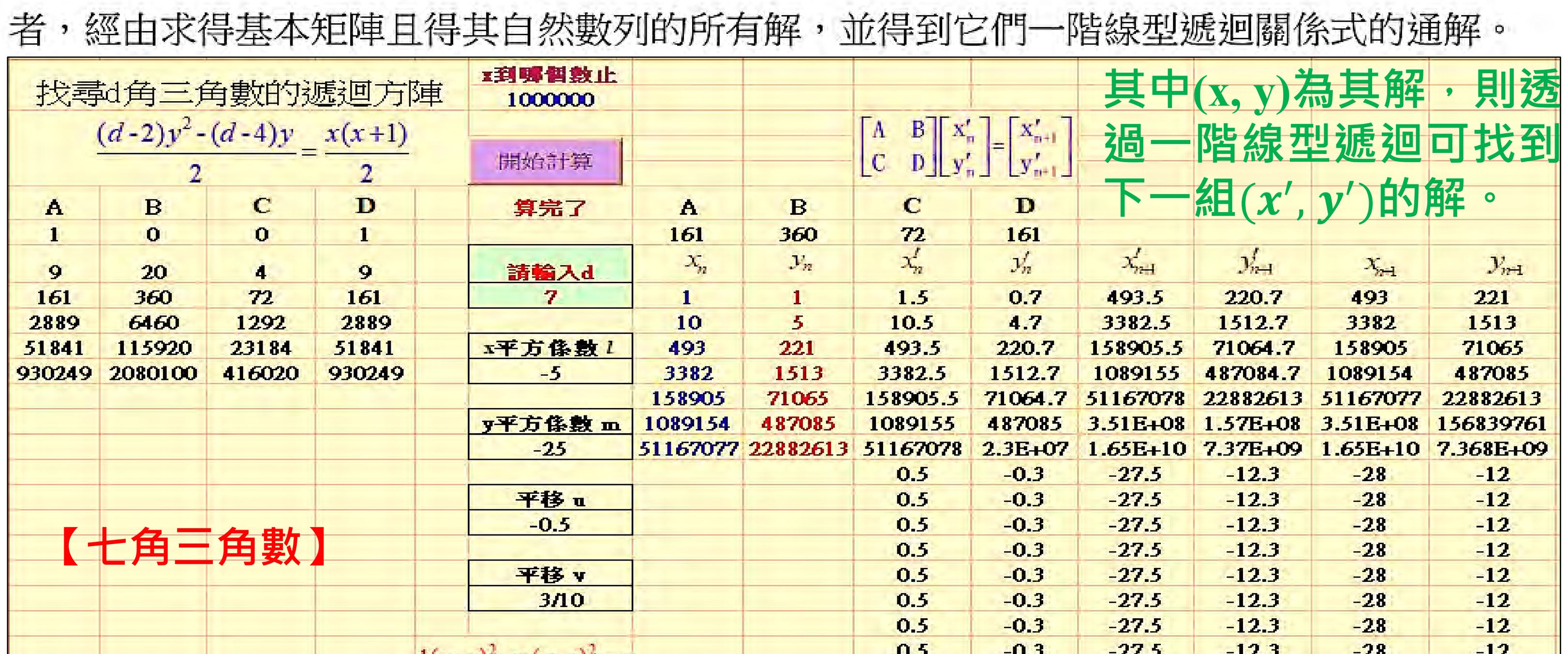
已知 ＼ 欲求	k角數數列的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)	直角三角形內切圓半徑r
k角數數列的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)		以r做質因數分解，得n並代入 $n=y$、$\frac{\frac{r}{n}-1}{n-1}+3=k$、$\frac{r+n^2}{2}=Ky$
直角三角形內切圓半徑r	代入 $y[(k-3)y-(k-4)]=r$	

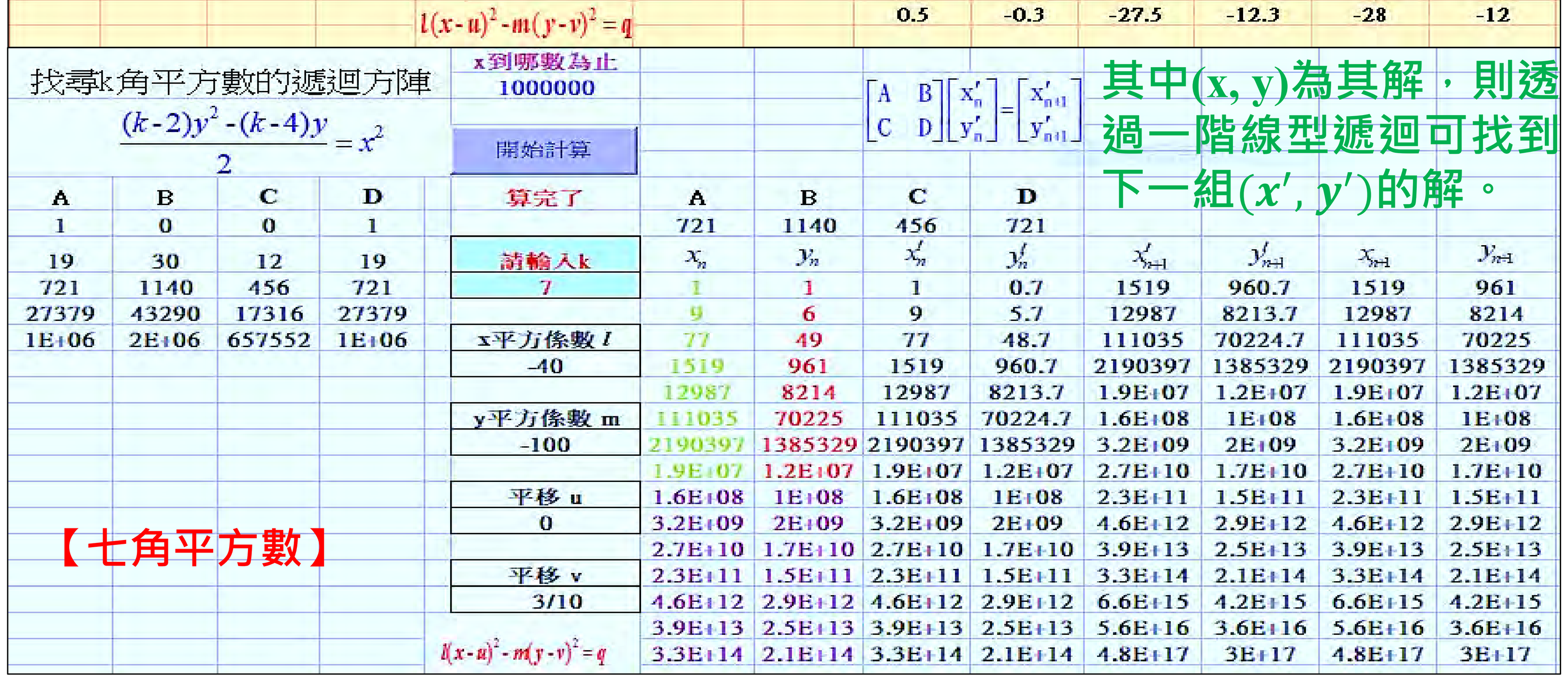
二、透過多角數及多角數彼此間與圓錐曲線的關聯性：

探討多角數及多角數彼此間與雙曲線之關係，利用線性變換之矩陣解的研究，從遞迴關係式再找下一組解：

1.寫出程式Visual C # 及Excel VBA，執行運算並以圖形使用者介面來呈現所有解的情況：

將方法推廣到找尋d角三角數、k角平方數或p角平方三角數($d\geq4,k\geq5,p\geq5$)。以線性變換的技巧，推導這些關係式都取A,B,C,D為互質的自然數解，使得$A+B+C+D$為最小的正整數解，其原因是：(1)若$A+B+C+D$不是最小，恐怕在迭代過程，跳過雙曲線的一些有理數解(x,y)，而無法得到全部正整數解。(2)如果能找到一組正整數解，就可由遞迴關係得到無限多組正整數解。(3)其實(A,B,C,D)還有其他的整數解，此時(A,B,C,D)有正有負，會得到(x,y)是雙曲線在<II><III><IV>象限的有理數解，甚至於跳回原來的起始解，不符合正有理數解的要求。再者，經由求得基本矩陣且得其自然數列的所有解，並得到它們一階線型遞迴關係式的通解。





2.分別探討符合d角三角數與k角平方數之條件，其所有正整數解為有限個：

三、經由觀察這些矩陣解的規律性，延伸探究關於雙曲線上的格子點問題：

(一)格子點(正整數解)與多角數及多角數間彼此之關係，以坐標化表示：

三角平方數

Ky	36		解為(8,6)		
(y,k)	→	m	n	→	r
(8,3)	→	9	8	→	8
(6,4)	→	12	6	→	6^2
Ky	1225		解為(49,35)		
(49,3)	→	50	49	→	49
(35,4)	→	70	35	→	35^2

五角三角數

Ky	210		解為(20,12)		
(y,k)	→	m	n	→	r
(20,3)	→	21	20	→	20
(12,5)	→	35	12	→	276
Ky	40755		解為(285,165)		
(285,3)	→	286	285	→	285
(165,5)	→	494	165	→	54285

五角平方數

Ky	8281		解為(91,81)		
(y,k)	→	m	n	→	r
(91,4)	→	182	91	→	91^2
(81,5)	→	204	81	→	10001
Ky	94109401		解為(9701,7921)		
(9701,4)	→	19402	9701	→	9701^2
(7921,5)	→	23762	7921	→	125476561

六角平方數

Ky	1225		解為(35,25)		
(35,4)	→	70	35	→	35^2
(25,6)	→	98	25	→	1825
Ky	1413721		解為(1189,841)		
(1189,4)	→	2378	1189	→	1189^2
(841,6)	→	3362	841	→	2120161
Ky	1631432881		解為(40391,28561)		
(40391,4)	→	80782	40391	→	40391^2
(28561,6)	→	114242	28561	→	2447135041
Ky	5074282756		解為(71234,19740)		
(71234,4)	→	142468	71234	→	1089154^2
(19740,6)	→	514112	19740	→	9758897912

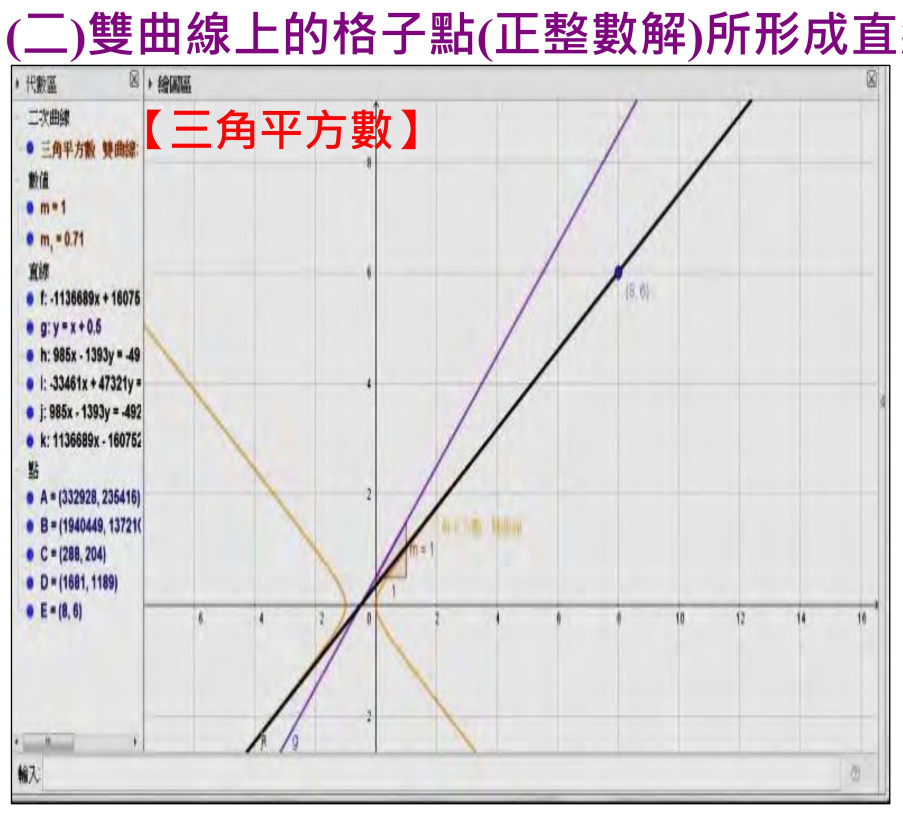
七角三角數

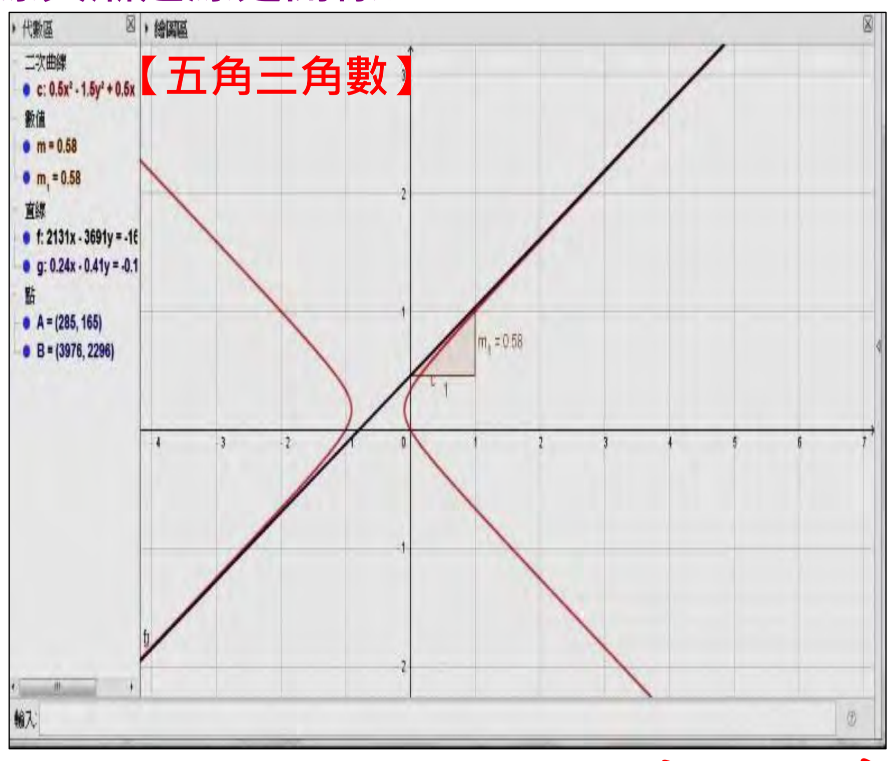
Ky	55		解為(10,5)		
(10,3)	→	11	10	→	10
(5,7)	→	22	5	→	85
Ky	121771		解為(493,221)		
(493,3)	→	494	493	→	493
(221,7)	→	1102	221	→	194701
Ky	5720653		解為(3382,1513)		
(3382,3)	→	3383	3382	→	3382
(1513,7)	→	7562	1513	→	9152137
Ky	12625478965		解為(158905,71065)		
(158905,3)	→	158906	158905	→	158905
(71065,7)	→	355322	71065	→	20200723705

七角平方數

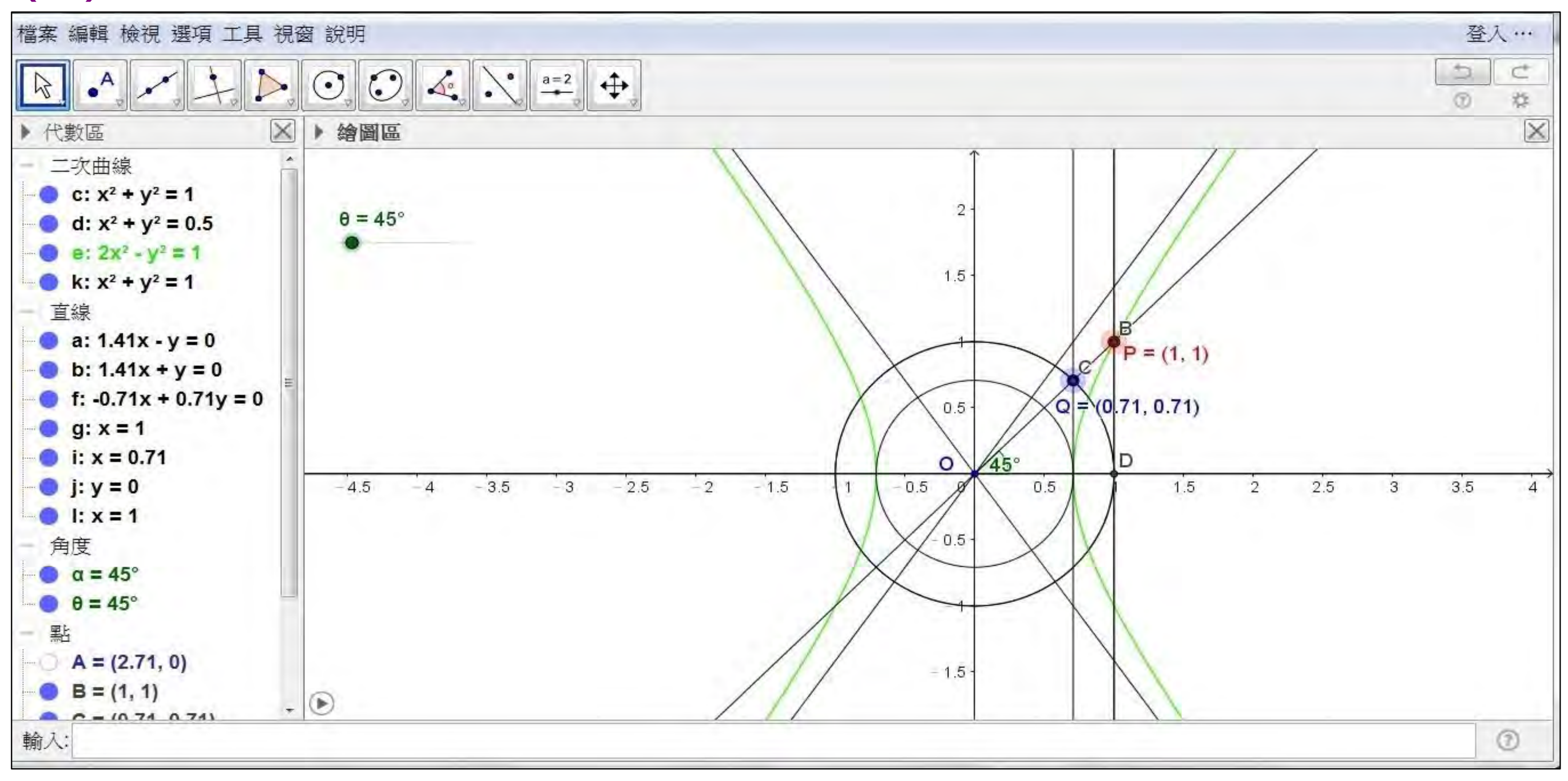
Ky	9114		解為(6,9)		
(6,4)	→	3038	6	→	1519^2
(9,7)	→	2025	9	→	18147
Ky	2401		解為(49,77)		
(49,4)	→	98	49	→	2190397^2
(77,7)	→	62	77	→	1127
Ky	923521		解為(961,1519)		
(961,4)	→	1922	961	→	111035^2
(1519,7)	→	1216	1519	→	460319
Ky	67469796		解為(8214,12987)		
(8214,4)	→	16428	8214	→	160112393^2
(12987,7)	→	10390	12987	→	33722577

(二)雙曲線上的格子點(正整數解)所形成直線與漸近線之關係:





(三)探究關於三角平方數之雙曲線上的格子點問題，其可分為奇數和偶數:



雙曲線上的格子點(關於三角平方數)

$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{y^2\cdot(y^2+1)}{2}=(yx)^2$		$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{(y^2-1)\cdot y^2}{2}=(xy)^2$	
$x^2=\frac{y^2+1}{2}$		$x^2=\frac{y^2-1}{2}$	
x(奇數)	y	x(偶數)	y
1	1	2	3
5	7	12	17
29	41	70	99
169	239	408	577
985	1393	2378	3363
5741	8119	13860	19601
33461	47321	80782	114243
195025	275807	470832	665857
1136689	1607521	2744210	3880899
6625109	9369319	15994428	22619537
38613965	54608393	93222358	131836323
225058681	318281039	543339720	768398401
1311738121	1855077841	3166815962	4478554083
7645370045	10812186007	18457556052	26102926097
44560482149	63018038201	1.07579E+11	1.52139E+11
2.59718E+11	3.67296E+11	6.27014E+11	8.86731E+11
1.51374E+12	2.14076E+12	3.6545E+12	5.16825E+12
8.82275E+12	1.24773E+13	2.13E+13	3.01228E+13
5.14228E+13	7.27228E+13	1.24146E+14	1.75568E+14
2.99714E+14	4.23859E+14	7.23573E+14	1.02329E+15
1.74686E+15	2.47043E+15	4.21729E+15	5.96415E+15
1.01814E+16	1.43987E+16	2.45802E+16	3.47616E+16
5.93418E+16	8.3922E+16	1.43264E+17	2.02606E+17
3.45869E+17	4.89133E+17	8.35003E+17	1.18087E+18
2.01587E+18	2.85088E+18	4.86675E+18	6.88263E+18
1.17494E+19	1.66161E+19	2.83655E+19	4.01149E+19
6.84804E+19	9.68459E+19	1.65326E+20	2.33807E+20
3.99133E+20	5.64459E+20	9.63592E+20	1.36273E+21

陸、討論

雖然我們更深入地探究、發掘並解決相當部分的問題，而還未解決或未來可繼續研究的問題，我們做出以下的討論：

一、關於三角平方數之雙曲線上的格子點問題，尤其是 $r=5.828427125=3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$，恰好是漸近線 $y=\sqrt{2}x$ 的斜率所成的直角三角形，短股與長股和的平方，我們覺得這個很有趣，不知道是否與雙曲線的參數式 $(\frac{\sec(\theta)}{\sqrt{2}},\tan(\theta))$ 有關？目前我們還沒有辦法證明它，對此將是我們日後繼續研究精進其完備的方向之一。

二、對於其他的 d角三角數與 k角平方數之雙曲線上的格子點問題，同樣可用矩陣之推導，找尋其格子點，但非所有雙曲線都有格子點，有些是沒有格子點的！這是值得我們進一步探究的。

三、透過本原畢氏三元數組，得到以內切圓半徑為邊長的直角∆，可再求下一組內切圓半徑，同時亦可找出與多角數之關係，從參考資料(一)的『三角平方數定理』，其所得的解有可能就是全部的解，至少對三角平方數的情形是完全符合的，進而日後我們皆可試著利用『無窮遞降法』證明，甚至其它情形應該也可用類似手法得證。這將可作為我們未來繼續研究的方向(參考資料十五)。

柒、結論

我們的研究結合離散、幾何與代數，進而延伸是個純粹數論的一種有趣研究，在實用性上，如一大堆圓球堆疊出三角垛、平方垛、五角垛、...等等。另外，我們也發現了本原畢氏三元數組(a,b,c)生成的m、n妙用及其限制，與直角▵內切圓半徑r以及多角數，三者互相求解的密切關係。

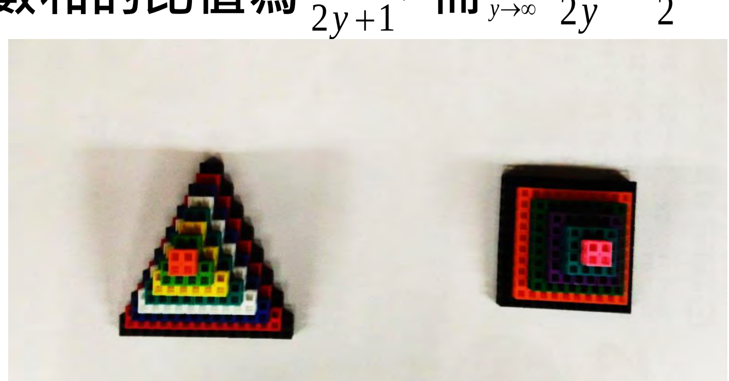
已知條件 ＼ 欲求的結果	本原畢氏三元數組(a,b,c)	本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n	直角三角形內切圓半徑r	k角數數列中的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)
本原畢氏三元數組(a,b,c)		$m^2-n^2=a$ 、 $2mn=b$ 、 $m^2+n^2=c$	求出m,n後求出	求出m,n後求出
本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n	$a=m^2-n^2$ 、 $b=2mn$ 、 $c=m^2+n^2$		由r做質因式分解得n 再代入 $\frac{r}{n}+n=m$	代入 $y=n$ 、 $(k-2)y-(k-4)=m$ 、 $\frac{2Ky}{y}=m$
直角三角形內切圓半徑r	$\frac{a+b-c}{2}=r$	m,n代入 $n(m-n)=r$		透過 $y[(k-3)y-(k-4)]=r$ 求出
k角數數列中的第y個Ky(可找出本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m,n解的多角數)	求出m,n後求出	m,n代入 $n=y$ 、 $\frac{m-(n+1)}{n-1}=k$ 、 $\frac{mn}{2}=Ky$	以r做質因式分解，得n並代入 $n=y$ 、 $\frac{\frac{r}{n}-1}{n-1}+3=k$ 、 $\frac{r+n^2}{2}=Ky$	

對這些多角數與多角錐數彼此有著密切之關係：

(1) $K_y=\frac{y[(k-3)y-(k-5)]}{2}+3_{y-1}$，$y\geq 1$，即第y個k角數等於第y個(k－1)角數加第(y－1)個三角數($k\geq 3$)；所以三角數是最基本而重要的多角數。

(2)第y個三角數與第y個平方數的比值為 $\frac{y+1}{2y}$，而 $\lim_{y\to\infty}\frac{y+1}{2y}=\frac{1}{2}$ 符合直觀結果。

(3)前y個三角數和與前 y 個平方數和的比值為 $\frac{y+2}{2y+1}$，而 $\lim_{y\to\infty}\frac{y+2}{2y}=\frac{1}{2}$。



全國科展 or 台灣國際科展	組別	作品名稱	研究範疇與貢獻
第45屆	國中組	方格遊戲的探討	將著色方法改變，使著色格為四角數、五角數至多角數，並應用整數同餘觀念研究其可行解。也推廣找出二階等差數列之可行解，且整理出一些規律，並以直接證題法、矛盾證題法、數學歸納法來證結果之正確性。
第47屆	高中組	勾股鐵路網	對任何已知股差的素勾股數 $(n^2-m^2,2mn,m^2+n^2)$ 皆可藉由衍生數對 (m,n) 產生一條數列，利用股差及數列性質，找到合成法則與共軛法則，來對同一股差的數列予以衍生，並將所有的數列集結在一起，便成了一網絡。
第51屆	國中組	現在幾「點」了-探討多角數、多面體數之通式	探討多角數(或多邊形數)的一般式及關係式，並將其從平面推廣至立體的多面體數與多角錐數，並分別求得它們的一般式及相關性質。
第52屆	高中組	驚奇的數	找出以 a^2 為邊長的三邊形數是平方數，將問題轉換成連續股的直角三角形問題後，利用Pell方程式與矩陣計算來求出哪些邊長的p 邊形數亦同時為四邊形數。
2013年台灣國際科展	國高中	特殊型Pell方程式之矩陣解研究	接續研究主題『驚奇的數』，對於處理的兩種方法，嘗試改進矩陣計算的漏解問題以及對數據做詳細分析、歸納。
第53屆	高中組	大珠小珠落玉盤－正多邊形的兩個性質	任意邊數之正多邊形具備「這兩個性質」，而其之間的橋樑是「直角三角形內切圓定理」，並分別對奇數邊與偶數邊作探討。
第58屆	國中組	探究『本原畢氏三元數組、直角▵內切圓半徑及多角數』之關聯與延伸 (本作品是我們所研究的)	1.本原畢氏三元數組與直角▵內切圓半徑為自然數所對應三邊長亦自然數，及多角數三者之間的關聯性: (1)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m、n與直角▵內切圓半徑r之彼此間的關係。給定任何直角▵內切圓半徑，挖掘以本原畢氏三元數組(a,b,c)的生成元m、n，結合我們研發出的程序性方法，並探討在質數或合數時，尋求共有幾組不同的外切直角△，另得到以內切圓半徑為邊長的直角△，可再求下一組內切圓半徑。 (2)探討本原畢氏三元數組(a,b,c)中的生成元m、n與多角數之通式導出其彼此的連結性 (3)探討給定任意直角▵內切圓半徑r，其三邊長為本原畢氏三元數組(a,b,c)，其生成元為m、n，則可找到第y個k角數 K_y，滿足 $4K_y=b$，反之亦成立。 2.多角數與多角數間之關聯和雙曲線有關，利用線性變換之矩陣解以坐標化表示，並從遞迴關係式再找下一組解： (1)找尋聯立二次丟番圖方程最小正整數解，求得基本矩陣及其所有解，並得一階線型遞迴關係式的通解。 (2)推廣到找d角三角數、k角平方數或p角平方三角數($d\geq 4,k\geq 5,p\geq 5$)，並用Visual C#及Excel VBA寫出程式執行，且以友善介面呈現所有解的情況。 3.由觀察這些矩陣解的規律性，以GGB動態數學軟體輔助呈現，延伸探究關於三角平方數之雙曲線上的格子點(正整數解)問題。

捌、參考資料及其他

一、參考資料:

(一)、Silverman, J. H. (2006). A Friendly Introduction to Number Theory (3rd ed.) (pp.204-221). Pearson Education International, 新北市：高立圖書有限公司代行

(二)、邱研璒、林薏馨、張芷芹，第五十三屆全國科展高中組數學科佳作「大珠小珠落玉盤－正多邊形的兩個性質」

(三)、黃敏書、謝昀佐，2013台灣國際科展數學科三等獎「特殊型pell方程式之矩陣解研究」

(四)、黃敏書、謝昀佐、黃育賢，第五十二屆全國科展高中組數學科第三名「驚奇的數」

(五)、黃禹傑、王貫宇、洪靖哲，第五十一屆全國科展國中組數學科「現在幾「點」了—探討多角數、多面體數之通式」

(六)、王重臻，第四十七屆全國科展高中組數學科第三名「勾股鐵路網」

(七)、陳璿宇、沈昇勳、張毓哲、洪嘉翎，第四十五屆全國科展國中組數學科第三名「方格遊戲的探討」

(八)、馬榮喜、陳大魁、陳世易，國中數學第三&四冊，康軒文教事業股份有限公司，2013

(九)、李明芳、李信仲、吳秉鋒、邱繼輝、陳宏清、黃士哲、繆友勇，國中數學第五冊，翰林出版事業股份有限公司，2013

(十)、許志農 主編，高中數學第二&三&四冊，龍騰文化事業股份有限公司，2011

(十一)、游森棚(2015)，三角數和四角數，科學研習月刊，No.54-02，pp.62

(十二)、李政憲、陳昭地(2014)，畢氏三元數組，國民中學數學教材原型C冊，pp.87-106，新北市：國家教育研究院

(十三)、瑪瑞琳•伯恩斯 著，冶海孜 譯，貪心的三角形，遠流出版公司，2004初版

(十四)、林壽福 著，數學樂園-從胚騰Pattern學好數學，如何出版社有限公司，2006初版

(十五)、克里斯昂•赫塞 著，何秉樺+黃建綸 譯，德國一流大學教你數學家的22個思考工具，漫遊者文化出版，2016初版

(十六)、蔡文龍、歐志信、張傑瑞、何叡、張力元 著，Visual C# 2017基礎必修課，碁峯出版社，2017

二、附錄：程式碼【p 角平方三角數的一般式 $\frac{x(x+1)}{2}=y^2=\frac{z[(p-2)z-(p-4)]}{2}$，$p\geq 5$】

```
long N, Product, p;
double dX, dY, dZ, dP;
   bool result = long.TryParse(textBox4.Text, out N);
   bool result2 = long.TryParse(textBox3.Text, out p);
   if (result && result2){
      textBox5.Text = "";
     for (long y = 1; y <= N; y++){
       Product = 2 * y * y;
       for (long z = 1; z <= N; z++){
          if (Product == z * ((p - 2) * z - (p - 4))){
            for (long x = 1; x <= N; x++){
                 dX = (double)x; dY = (double)y; dZ = (double)z;dP = (double)p;
                  if ((dX * (dX + 1.0)) == Product){
                  textBox5.Text += "X=" + x.ToString() + ", ";
                  textBox5.Text += "Y=" + y.ToString() + ", ";
                  textBox5.Text += "Z=" + z.ToString() + Environment.NewLine;} } } }  }
     MessageBox.Show("完成");}
   else{
     MessageBox.Show("N 必須為正整數, p 必須 >= 5.");}
```