中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030413

正直四邊形之最佳擺棋策略

學校名稱：新北市立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 賴威任 國二 杜承哲	謝政達

關鍵詞：正直四邊形、最少棋子數、最多棋子數

摘要

本篇作品之主旨為研究在任一個$n \times m$棋盤中$(n \leq m)$，任意擺放數顆棋子，使棋盤中任四顆棋子之排列均不構成正直四邊形之最多與最少棋子數(最佳擺棋策略)。我們利用發現的四種方法: 控制$n \times n$棋盤的第一列與第一行的棋子顆數、行與行或列與列之間的互換、增加一行一列多擺三顆和排一直行的特殊排法，得到$n \times n$棋盤最少與最多棋子數，並延伸至$n \times m$棋盤做探討。

壹、 研究動機

在上數學課時，有一次老師提到 2015 年的科學月刊中的一道題目「正直三角形」，聽老師敘述完操作方法後，實際去解題，我們發現操作有一些特殊的規律，引起了我們的好奇心，於是決定深入研究，並將主題擴展至正直四邊形做討論。

貳、 研究目的

一、$n \times n$棋盤內最少棋子數與最多棋子數

二、$n \times m$棋盤$(n \leq m)$內最少棋子數與最多棋子數

參、 研究設備及器材

紙、筆、圍棋、圍棋棋盤

肆、 研究過程或方法

一、名詞定義

(一) 正直四邊形:

在棋盤方格中，任選四個方格擺放棋子，若形成每一個角都為直角的四邊形，且四個邊皆與棋盤格線平行，我們稱之為「正直四邊形」，如(圖 1)。(圖 2)所形成的四邊形因不符合定義，因此非正直四邊形。

(二) $n \times m$棋盤:

$n \times m$棋盤共有 m 行 n 列，在此我們假設$2 \leq n \leq m$且$m, n \in N$，如(圖 3)。

(三) 最少可擺放之棋子數:

在$n \times m$棋盤$(n \le m)$中，若已擺放 k 顆棋子，其中任四顆棋子皆不構成正直四邊形，且於剩下可擺放棋子的空位中任意擺放一顆棋子，皆會構成正直四邊形，則滿足此情形之最小 k 值，簡稱為「最少棋子數」，記為$s_{n \times m} = k$。

(四) 最多可擺放之棋子數：

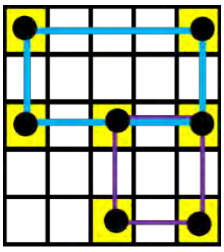
在$n \times m$棋盤中$(n \le m)$，若已擺放 p 顆棋子，其中任四顆棋子皆不構成正直四邊形，且於剩下可擺放棋子的空位中任意擺放一顆棋子，皆會構成正直四邊形，則滿足此情形之最大 p 值，簡稱為「最多棋子數」，記為$b_{n \times m} = p$。

(五) 死棋:

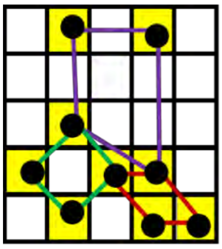
在$n \times m$棋盤中$(n \le m)$，若於剩下可擺放棋子的空位中任意擺放一顆棋子，就會構成正直四邊形的棋子，我們稱此棋為死棋，如)圖 4(。

(六) 棋子:

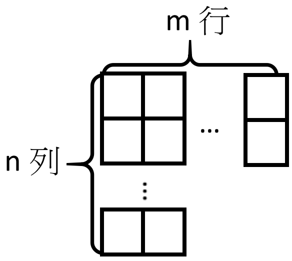
棋子在$n \times m$棋盤中$(n \le m)$，只能擺放在棋盤方格內，不能擺放在棋盤格線上，以黃色表示，如(圖 4)。



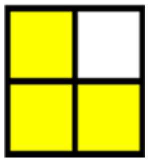
(圖 1)



(圖 2)



(圖 3)

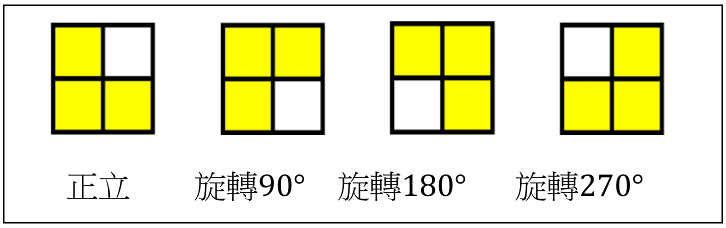


(圖 4)

二、$n \times n$棋盤內最少棋子數與最多棋子數之證明

(一) 2×2棋盤:

在(圖 5)排法中，若於空位中任意擺放一顆棋子，皆會構成正直四邊形。因為棋盤旋轉後改變方向，但排法不改變，故一種排法只需排出其中一種方向即可。



(圖 5)

故得:在2×2棋盤中，$s_{2\times2} = 3$，$b_{2\times2} = 3$

(二) 3×3棋盤:

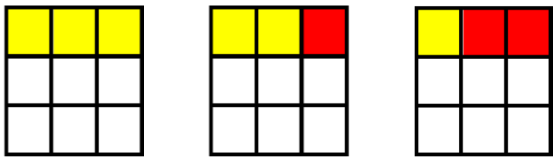
發現一:

藉由控制$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$棋盤的第一列的棋子顆數，更有效率的得到我們所排出的結果。

說明:

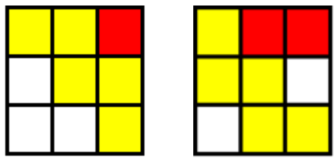
我們將3×3棋盤的所有情形做分類，發現可以藉由控制第一列的棋子顆數，並分成第一種情形(第一列排滿棋子)、第二種情形(第一列一個位置不擺放棋子)和第三種情形(第一列兩個位置不擺放棋子)，如(圖 6)。

因為$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$棋盤為正方形，如果只限制第一列，有可能做出重複的圖形，如(圖 7)。故我們也要控制第一行。但如果第一列都不擺放棋子，則棋盤會變成$(\mathrm{n}-1) \times \mathrm{n}$棋盤，故在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$棋盤中，我們控制第一列和第一行不擺放$0 \sim (\mathrm{n}-1)$顆棋子。



第一種情形　第二種情形　第三種情形

(圖 6)



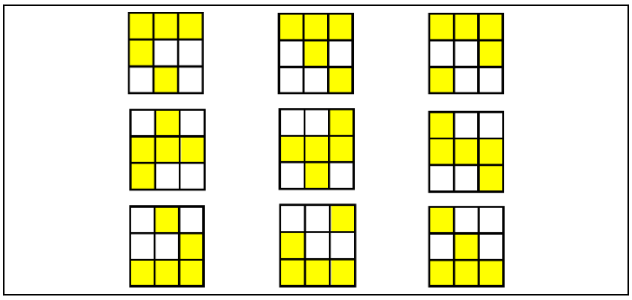
(圖 7)

發現二:

將排好的棋盤進行行與行或列與列之間的互換，也可使其棋盤中在相同棋子數的情形下，排出更多種不同的排法。

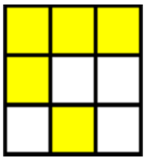
說明:

我們實際操作的時候，無法一一列出所有的情形。然而，我們發現將排好的棋盤進行行與行或列與列之間的互換，如(圖 8)，也可使其棋盤中在相同棋子數的情形下，排出更多種不同的排法。因此一種排法只需排出其中一種即可。



(圖 8)

1. 第一種情形: 第一列皆擺放棋子

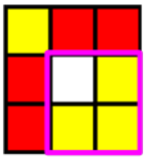


五顆棋子

2. 第二種情形: 第一列與第一行一個位置不擺放棋子

六顆棋子　　或　　五顆棋子

3. 第三種情形: 第一列與第一行兩個位置不擺放棋子



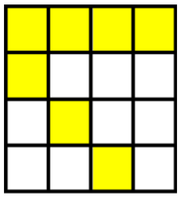
無法控制

在此情形下，2×2棋盤(粉色矩形)中的棋子無法藉由空位控制棋子，故不會出現最多棋子數或最少棋子數，且如果於控制不擺放棋子的區域擺放棋子，會變回其他種情形，故我們不再討論此種情形。所以在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$棋盤中，我們改成控制第一列和第一行不擺放$0 \sim (\mathrm{n}-2)$顆棋子。

故得:在3×3棋盤中，$s_{3\times3} = 5$，$b_{3\times3} = 6$

(三) 4×4棋盤:

1. 第一種情形: 第一列皆擺放棋子



七顆棋子

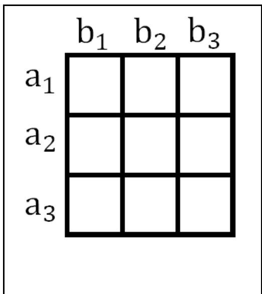
2. 第二種情形: 第一列與第一行一個位置不擺放棋子

為了推廣至$n \times n$棋盤，我們嘗試利用3×3棋盤的情形作為基礎去擴充，可得到發現三。

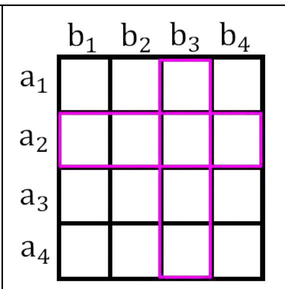
> 發現三:
>
> 我們利用3×3棋盤的第二種情形，增加一行一列後，並多擺放棋子，便可排出4×4棋盤的第二種情形。

說明:

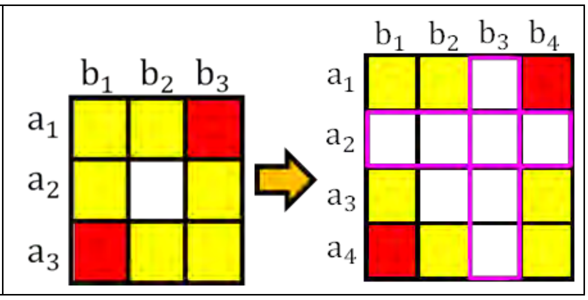
我們將3×3棋盤座標化，將第 x 列標示成(a,x)，第 y 行標示成(b,y)，如(圖 9)。在a_1列和a_2列中間插入一行，在b_2行和b_3行中間插入一列，使棋盤變成(圖 10)的4×4棋盤，且將新的4×4棋盤重新座標化。有了以上的標示，我們便可以更具體的說明。利用原本3×3棋盤的第二種情形，插入一行一列，使3×3棋盤變成4×4棋盤，如(圖 11)。



(圖9)



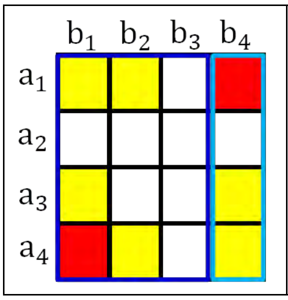
(圖10)



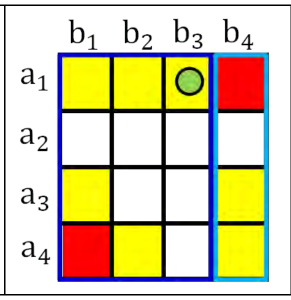
(圖 11)

將棋盤切割成兩個部分:淺藍色區域和深藍色區域，如(圖 12)。因為是4×4棋盤的第二種情形，所以(a_1, b_3)必擺放棋子，如(圖 13)。若要使棋盤中有最多棋子數，則要讓深藍色部分和淺藍色區域同時有最多棋子數。由於a_1列擺滿棋子，所以a_2列、a_3列、a_4列都只能擺放一顆棋子，因一列若擺放超過一顆棋子時，便會形成正直四邊形，故只能從a_2列中選擇一格擺放(紅色區域)，如(圖 14)。因

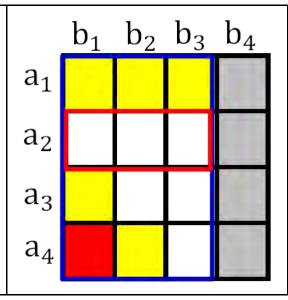
旗子擺放於(a_2, b_1)或(a_2, b_2)時，淺藍色區域沒有最多棋子數，故不能形成4×4棋盤的最多棋子數。擺放在(a_2, b_3)時，(a_2, b_4)是可以擺放棋子的，就可使4×4棋盤有最多棋子數，如(圖 15)。



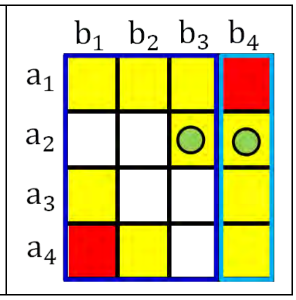
(圖 12)



(圖 13)



(圖 14)



(圖 15)

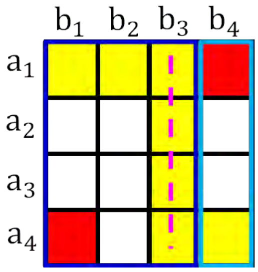
另外在這種情形下，我們也發現可以擺出最少棋子數的情形。

發現四:

當控制深藍色區域擺放一直行的棋子時，會形成最少棋子數，我們稱這種擺放法為特殊排法。

說明:

若要讓棋盤中有最少棋子數，則要讓深藍色部分和淺藍色區域同時有最少棋子數。因此我們控制深藍色區域形成最少棋子數，又最多棋子數與最少棋子數相同，如果讓棋子排成一直行(粉色虛線)，淺藍色的區域只能擺放一顆棋子，形成最少棋子數，使整個4×4棋盤有最少棋子數，如下圖。為了之後的討論，特殊排法中淺藍色區域的棋子，均擺放在最後一列。

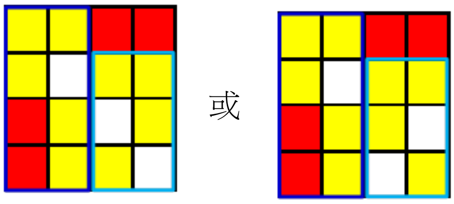


七顆棋子

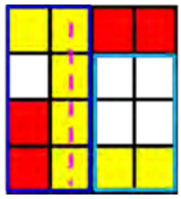
3. 第三種情形: 第一列與第一行兩個位置不擺放棋子

雖然此情形無法利用3×3棋盤的第三種情形作推廣，但我們可以控制深藍色部分和淺藍色區域同時有最多棋子數，如(圖 16)，得最多棋子數。利用特殊排法(深

藍色區域排一直線，淺藍色區域只擺兩顆)，可得最少棋子數，如(圖 17)。



(圖 16)九顆棋子



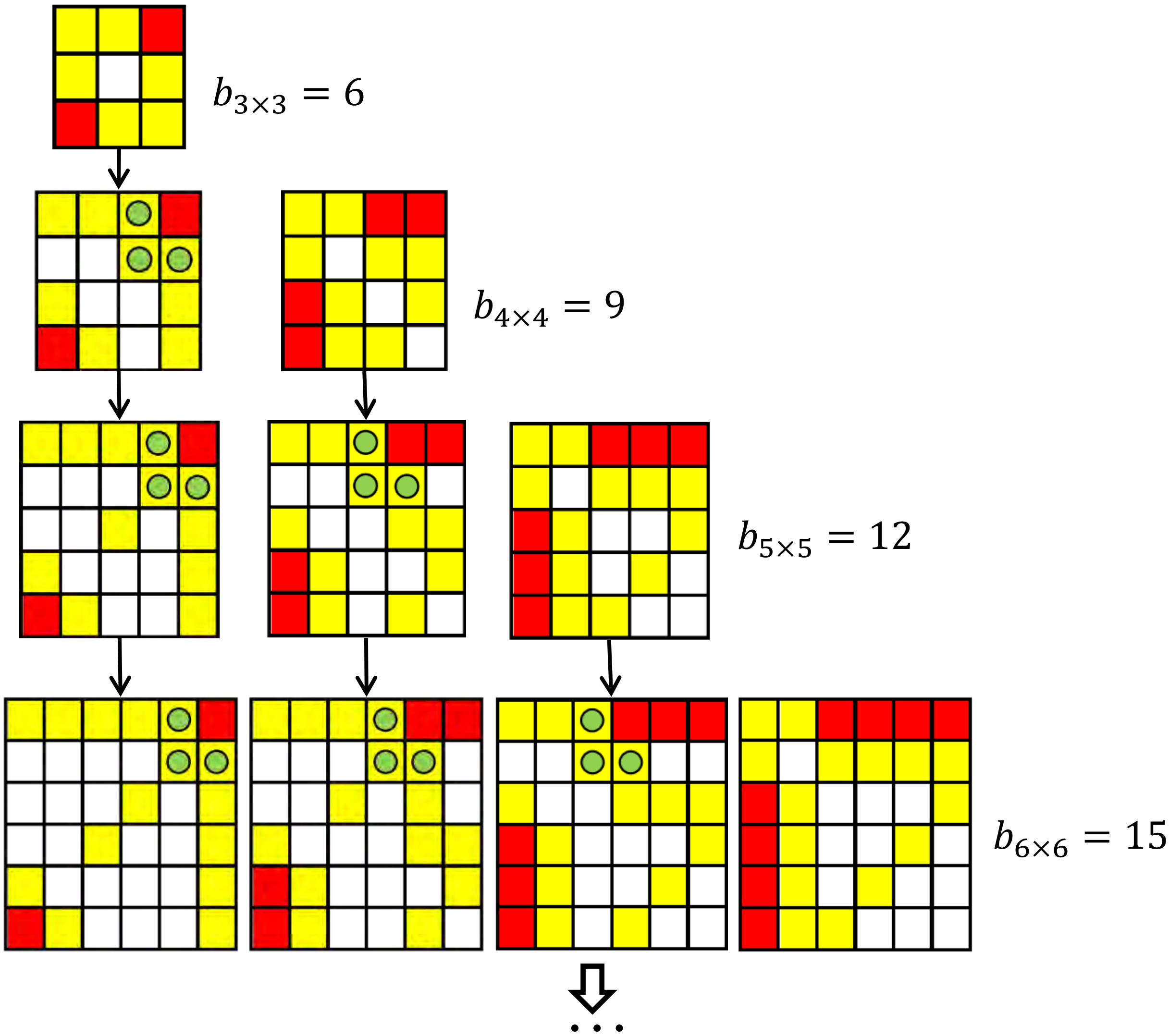
(圖 17)七顆棋子

故得:在4×4棋盤中，$s_{4\times4} = 7$，$b_{4\times4} = 9$

(四) $n \times n$棋盤:

利用發現的方法和特殊排法，我們便可以將$n \times n$棋盤的最多棋子數和最少棋子數擺放出來。

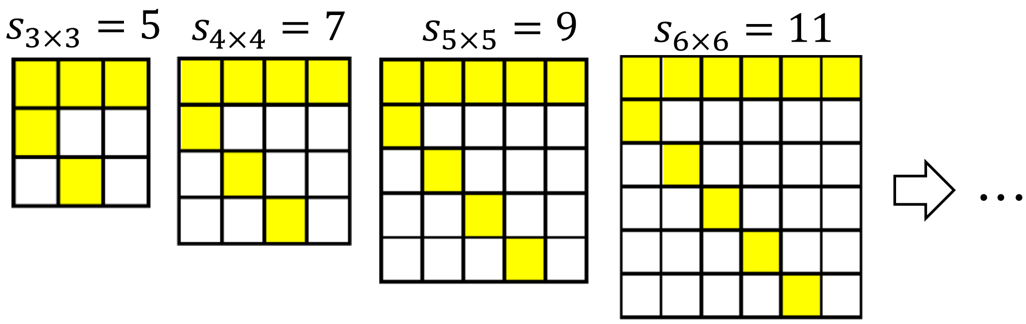
1. $n \times n$棋盤最多棋子數的推廣方法



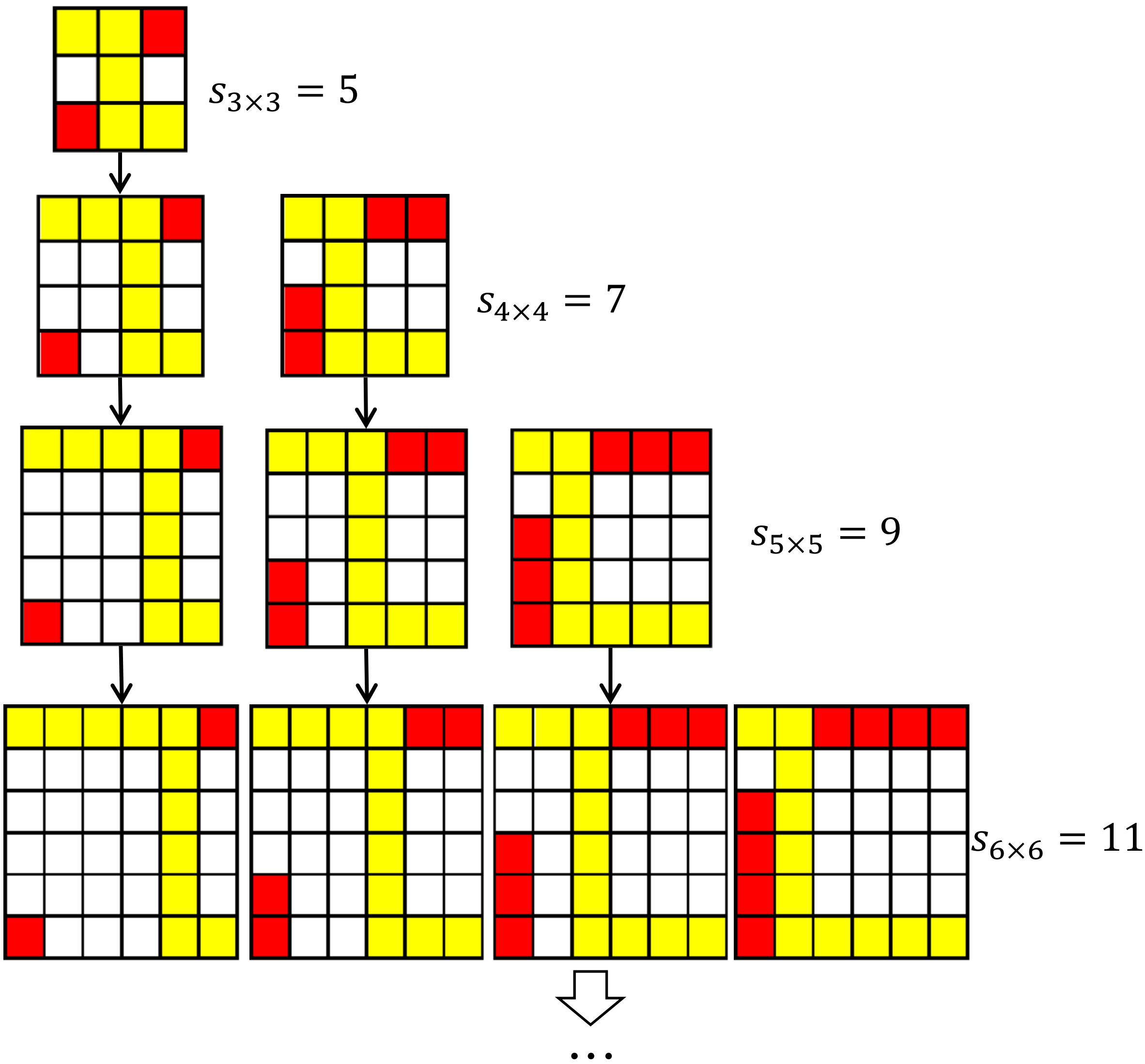
(圖 18)

2. n × n棋盤最少棋子數的推廣方法

(1) 第一種:每種棋盤的第一種情形



(2) 第二種:每種棋盤的特殊排法(發現四)



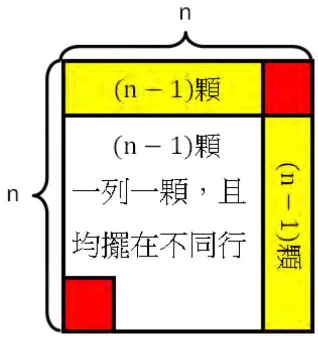
3. 由以上的方法，我們得到以下的推論:

(1) 在n × n棋盤中，$b_{n\times n} = 3n - 3$

（2）在n × n棋盤中，$s_{n\times n} = 2n - 1$

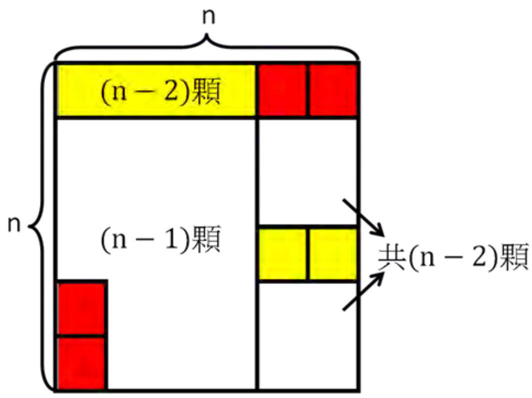
4. n × n棋盤最多棋子數證明:

（1）第一種: 第一列與第一行一個位置不擺放棋子



總共(n − 1) + (n − 1) + (n − 1) = (3n − 3)顆棋子

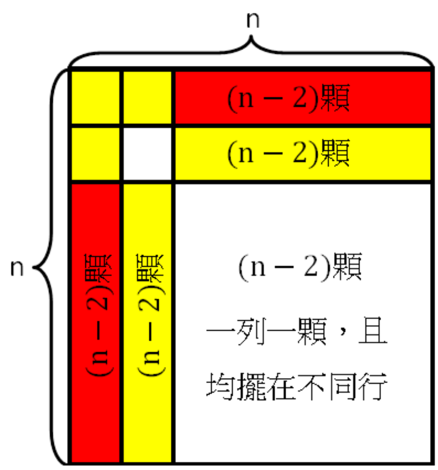
（2）第二種: 第一列與第一行兩個位置不擺放棋子



總共(n − 2) + (n − 1) + 2 + (n − 2) = (3n − 3)顆棋子

⋮

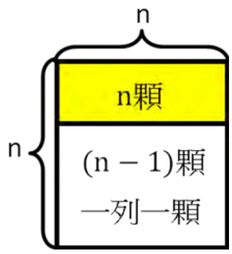
（3）第(n − 2)種: 第一列與第一行(n − 2)個位置不擺放棋子



總共2 + 1 + (n − 2) + (n − 2) + (n − 2) = (3n − 3)顆棋子

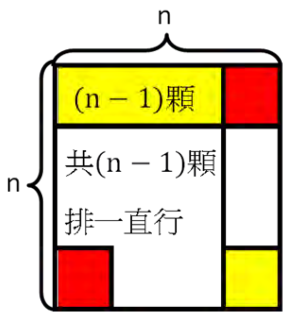
5. $n \times n$棋盤最少棋子數之證明:

（1）第一種: 第一列皆擺放棋子



總共$n + (n - 1) = (2n - 1)$顆棋子

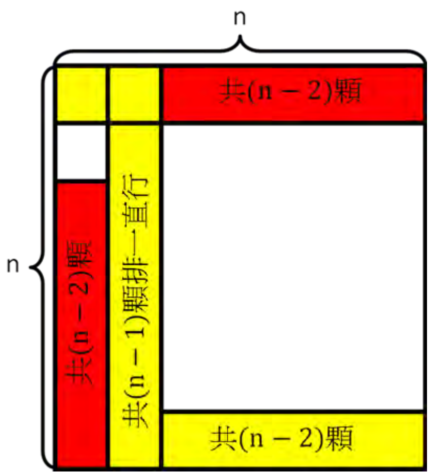
（2）第二種: 第一列與第一行一個位置不擺放棋子 (特殊排法)



總共$(n - 1) + (n - 1) + 1 = (2n - 1)$顆棋子

⋮

（3）第$(n - 1)$種: 第一列與第一行$(n - 2)$個位置不擺放棋子 (特殊排法)



總共$2 + (n - 1) + (n - 2) = (2n - 1)$顆棋子

證明了我們的推論後，我們得到以下的結論:

結論一:在$n \times n$棋盤中，$b_{n\times n} = 3n - 3$

結論二: 在$n \times n$棋盤中，$s_{n\times n} = 2n - 1$

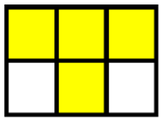
三、$n \times m$棋盤內最少棋子數與最多棋子數之證明

(一) $2 \times m$棋盤:

利用發現一的做法，因為棋盤不是正方形，故不用限制相對位置。故在$n \times m$棋盤($n < m$)中，我們控制第一列不擺放0~$(m - 1)$顆棋子。

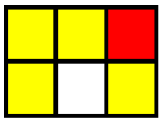
1. 2×3棋盤:

(1) 第一種情形: 第一列皆擺放棋子



四顆棋子

(2) 第二種情形: 第一列一個位置不擺放棋子



四顆棋子

(3) 第三種情形: 第一列兩個位置不擺放棋子

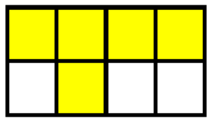
重複

此情形重複第一種情形，故之後的說明中，我們不再討論此種情形。在$n \times m$棋盤($n < m$)中，我們控制第一列不擺放0~$(m - 2)$ 顆棋子。

故得:在2×3棋盤中，$s_{2\times 3} = 4$，$b_{2\times 3} = 4$

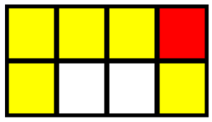
2. 2×4棋盤:

(1) 第一種情形: 第一列皆擺放棋子



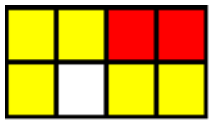
五顆棋子

（2）第二種情形：第一列一個位置不擺放棋子



五顆棋子

（3）第三種情形：第一列兩個位置不擺放棋子

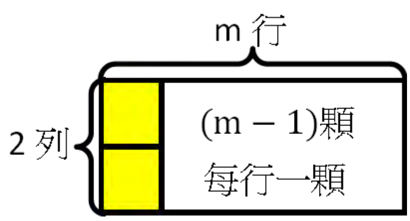


五顆棋子

故得：在2×4棋盤中，$s_{2\times4} = 5$，$b_{2\times4} = 5$

3. $2 \times \mathrm{m}$棋盤:

由之前(1)~(3)的討論，我們可知$2 \times \mathrm{m}$棋盤最多棋子數和最少棋子數相同



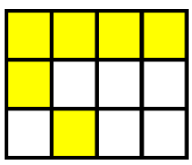
總共$2 + (\mathrm{m} - 1) = (\mathrm{m} + 1)$顆棋子

結論:在$2 \times \mathrm{m}$棋盤中，$s_{2\times m} = \mathrm{m} + 1$，$b_{2\times m} = m + 1$

(二) $3 \times \mathrm{m}$棋盤:

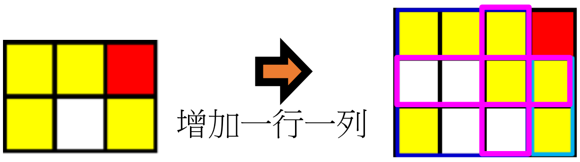
1. 3×4棋盤:

（1）第一種情形：第一列皆擺放棋子



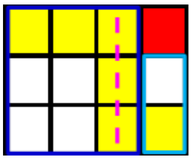
六顆棋子

（2）第二種情形: 第一列一個位置不擺放棋子



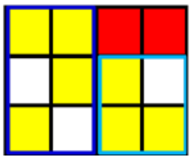
四顆棋子　　　　七顆棋子

也可以利用特殊排法(發現四)，得到最少棋子數。



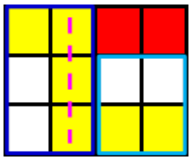
六顆棋子

（3）第三種情形: 第一列兩個位置不擺放棋子



七顆棋子

也可以利用特殊排法(發現四)，得到最少棋子數。

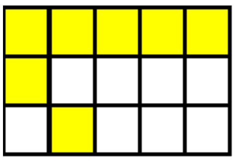


六顆棋子

故得: 在3×4棋盤中，$s_{3\times4} = 6$，$b_{3\times4} = 7$

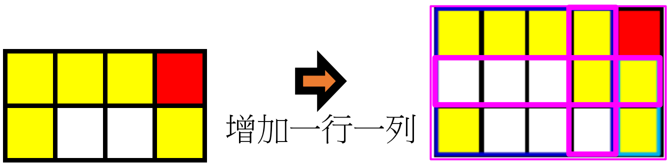
2. 3×5棋盤:

（1）第一種情形: 第一列皆擺放棋子



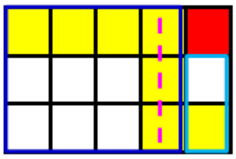
七顆棋子

（2）第二種情形: 第一列一個位置不擺放棋子



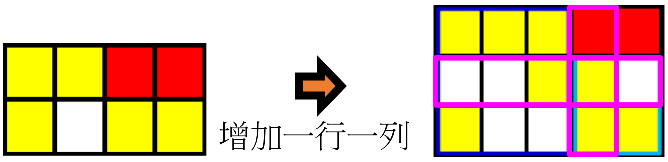
五顆棋子　　　　　　八顆棋子

也可以利用特殊排法(發現四)，得到最少棋子數。



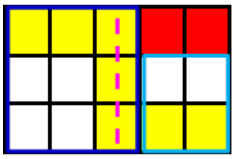
七顆棋子

（3）第三種情形: 第一列兩個位置不擺放棋子



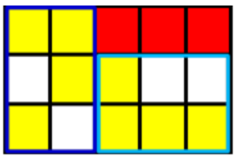
五顆棋子　　　　　　八顆棋子

也可以利用特殊排法(發現四)，得到最少棋子數。



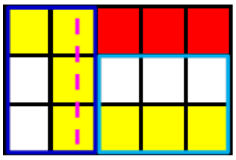
七顆棋子

（4）第四種情形: 第一列三個位置不擺放棋子



八顆棋子

也可以利用特殊排法(發現四)，得到最少棋子數。



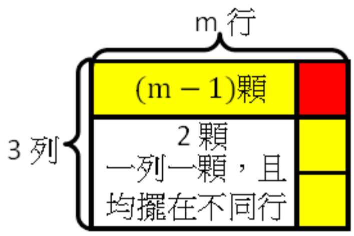
七顆棋子

故得: 在3×5棋盤中，$s_{3\times5} = 7$，$b_{3\times5} = 8$

3. $3 \times \mathrm{m}$棋盤:

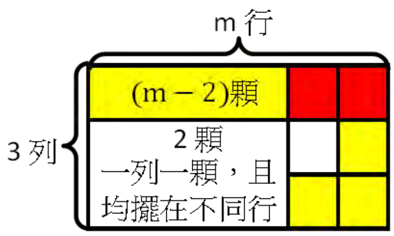
我們由之前3×3棋盤到3×5棋盤的討論，我們可知$3 \times \mathrm{m}$棋盤最多棋子數:

(1) 第一種情形: 第一列一個位置不擺放棋子



總共$(\mathrm{m}-1)+2+2=(\mathrm{m}+3)$顆棋子

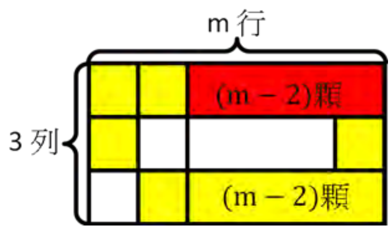
(2) 第二種情形: 第一列兩個位置不擺放棋子



總共$(\mathrm{m}-2)+2+3=(\mathrm{m}+3)$顆棋子

⋮

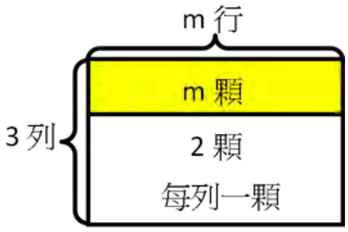
(3) 第$(\mathrm{m}-2)$種情形: 第一列$(\mathrm{m}-2)$個位置不擺放棋子



總共$2+2+(\mathrm{m}-2)+1=(\mathrm{m}+3)$顆棋子

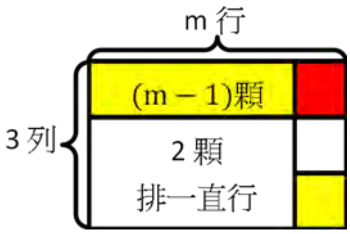
$3 \times \mathrm{m}$棋盤最少棋子數:

(1) 第一種情形: 第一列皆擺放棋子



總共$m+2=(m+2)$顆棋子

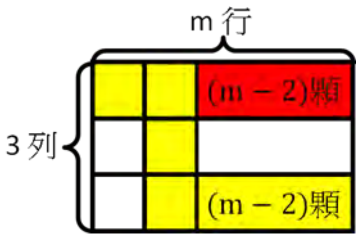
（2）第二種情形: 第一列一個位置不擺放棋子



總共$(m-1)+2+1=(m+2)$顆棋子

⋮

（3）第$(m-1)$種情形: 第一列$(m-2)$個位置不擺放棋子



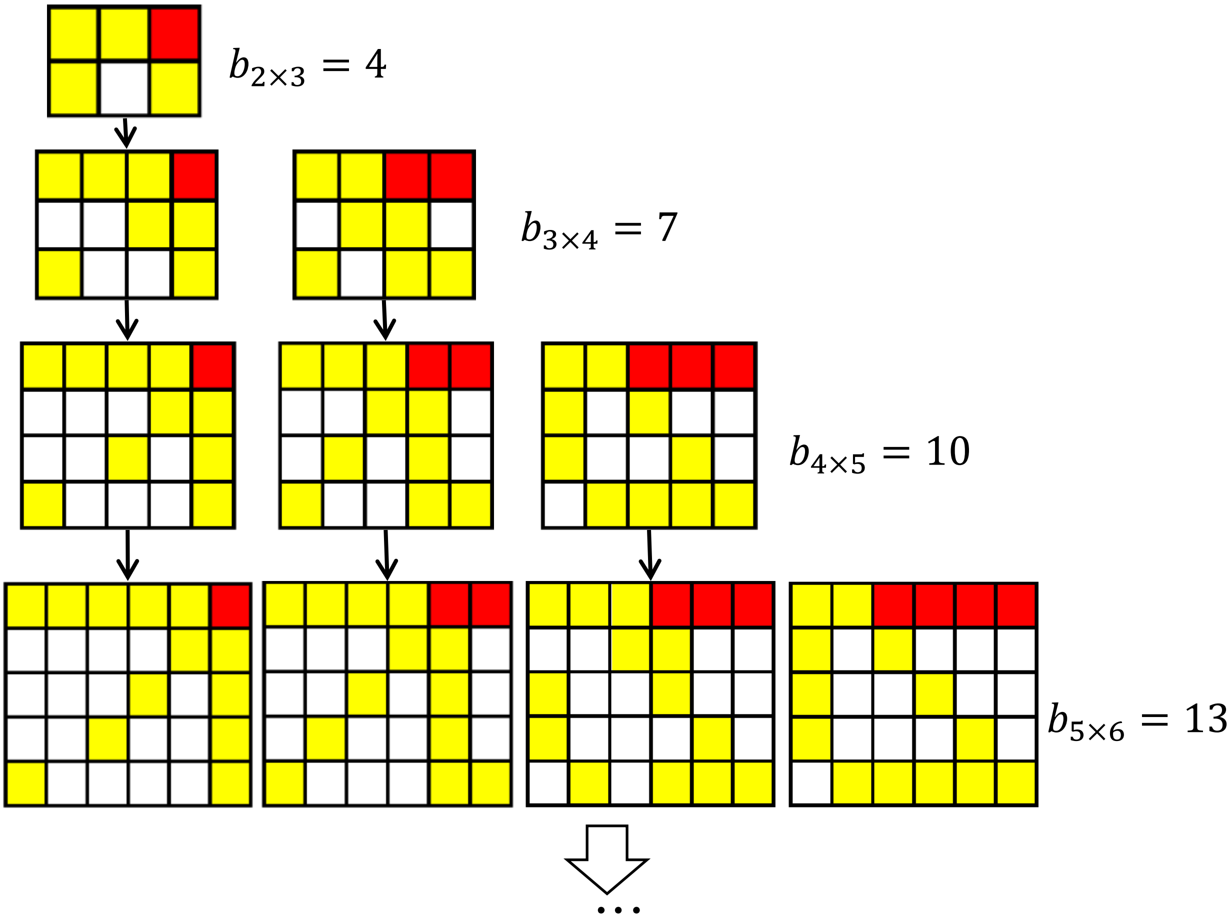
總共$4+(m-2)=(m+2)$顆棋子

結論:在$3\times m$棋盤中，$s_{3\times m}=m+2$，$b_{3\times m}=m+3$

(三) $n\times m$棋盤:

利用發現一~四的方法，我們便可以將$n\times m$棋盤$(n<m)$的最多棋子數和最少棋子數擺放出來。

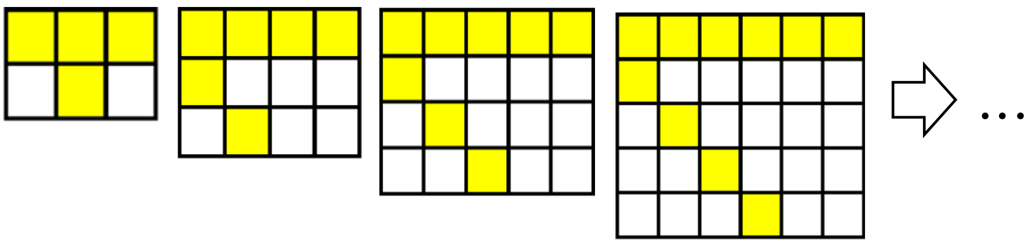
1. $n\times m$棋盤最多棋子數的推廣方法



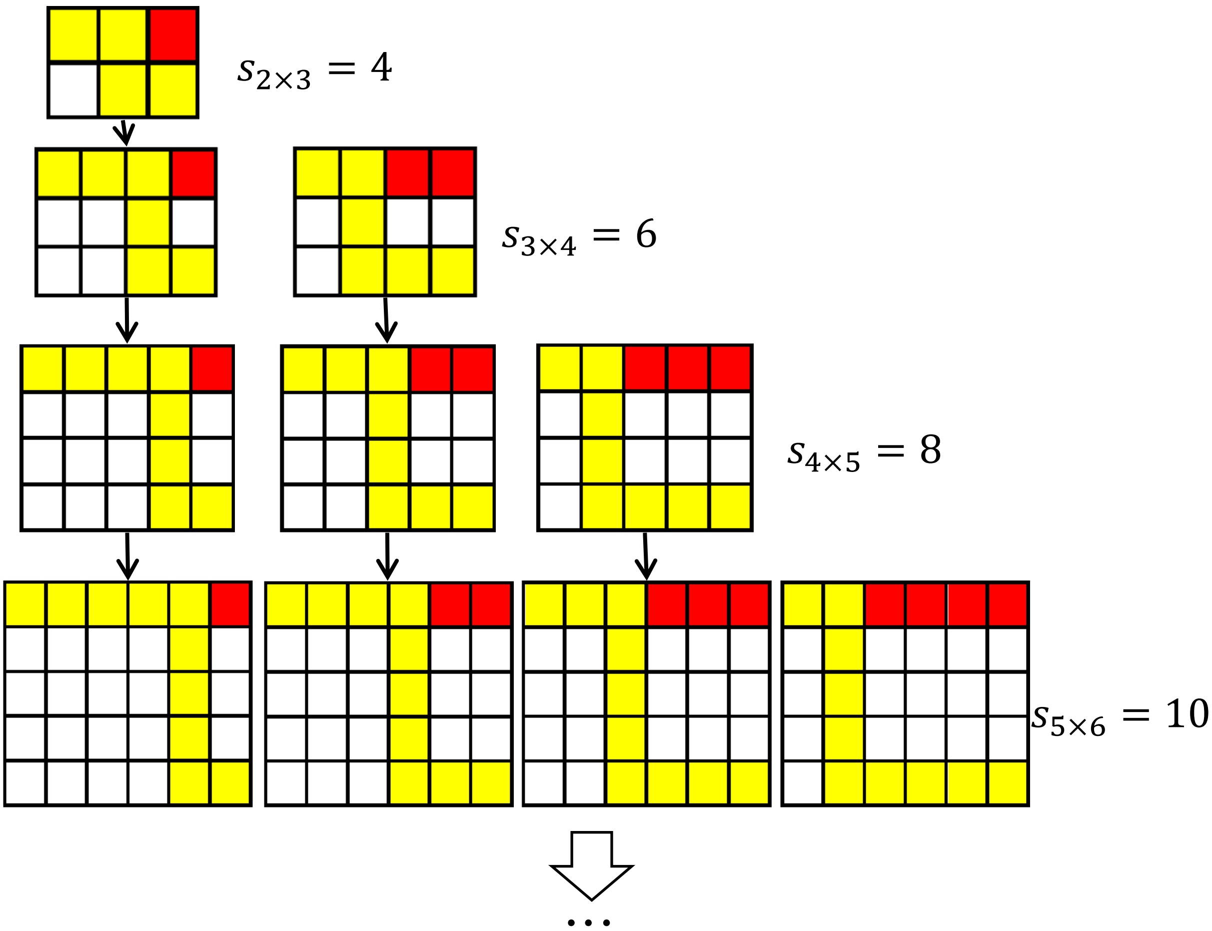
2. $n \times m$棋盤最少棋子數的推廣方法

(1) 每種棋盤的第一種情形:

$s_{2\times 3} = 4$ $s_{3\times 4} = 6$ $s_{4\times 5} = 8$ $s_{5\times 6} = 10$



(2) 每種棋盤的特殊排法(發現四):



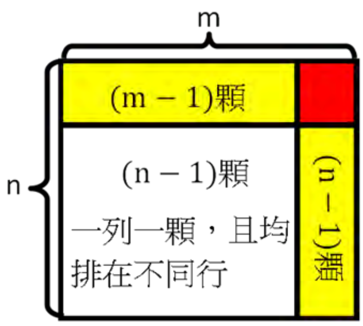
3. 由以上的方法，我們得到以下的推論:

（1）在$n \times m$棋盤$(n < m)$中，$b_{n\times m} = 2n + m - 3$

（2）在$n \times m$棋盤$(n < m)$中，$s_{n\times m} = n + m - 1$

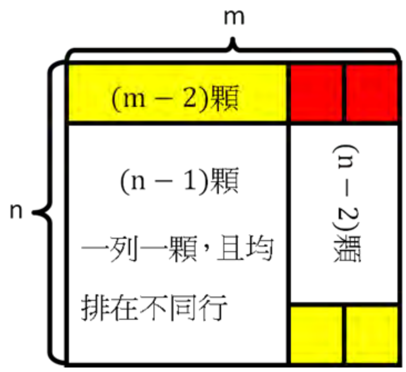
4. 證明:

（1）第一種: 一個位置不擺放棋子



總共$(m - 1) + (n - 1) + (n - 1) = 2n + m - 3$顆棋子

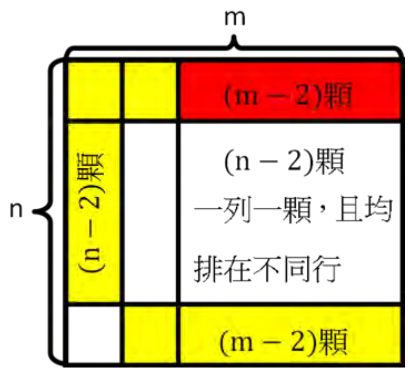
（2）第二種: 兩個位置不擺放棋子



總共$(m-2)+(n-1)+(n-2)+2=2n+m-3$顆棋子

⋮

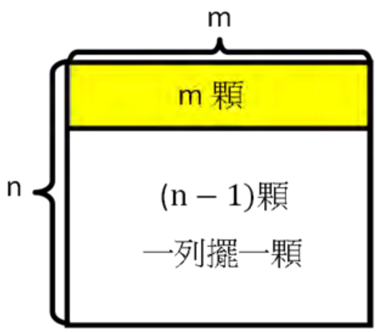
（3）第$(n-2)$種: $(n-2)$個位置不擺放棋子



總共$2+(n-2)+1+(n-2)+(m-2)=2n+m-3$顆棋子

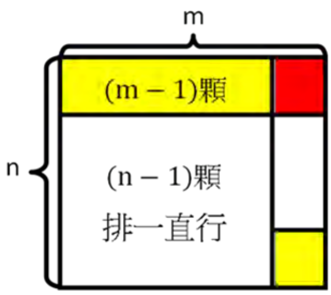
5. $n\times m$棋盤最少棋子數之證明:

（1）第一種: 每種棋盤的第一種情形



總共$m+(n-1)=n+m-1$顆棋子

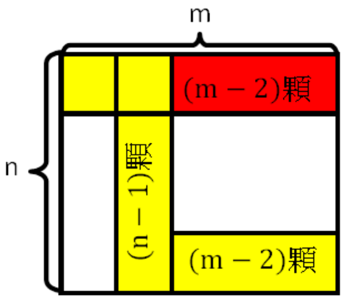
（2）第二種: 特殊排法



總共$(m-1)+(n-1)+1=n+m-1$顆棋子

⋮

（3）第$(n-1)$種: 特殊排法



總共$2+(n-1)+(m-2)=n+m-1$顆棋子

從以上的討論中，我們得到以下的結論:

結論三:在$n\times m$棋盤$(n<m)$中，$b_{n\times m}=2n+m-3$

結論四:在$n\times m$棋盤$(n<m)$中，$s_{n\times m}=n+m-1$

伍、討論

因為目前我們只研究$n\times m$棋盤中不會形成正直四邊形的最多棋子數和最少棋子數的數目，但從我們的研究中我們發現擺放為最多棋子數和最少棋子數的方法數有很多種，未來我們可以加以研究，找出方法將最多棋子數和最少棋子數的擺放方式總數計算出來。這樣一來，我們便可以把作品表達得更完整。

陸、結論

一、在$n\times n$棋盤中$(n\geq 2$，且$n\in N)$，最多棋子數為$(3n-3)$顆棋子

二、在$n\times n$棋盤中$(n\geq 2$，且 $n\in N)$，最少棋子數為$(2n-1)$顆棋子

三、在$n\times m$棋盤中$(2\leq n\leq m$，且$n,m\in N)$，最多棋子數為$(2n+m-3)$顆棋子

四、在$n \times m$棋盤中($2 \leq n \leq m$，且$n, m \in N$)，最少棋子數為$(n+m-1)$顆棋子

五、當$n \times m$ 棋盤中 $n > m$的時候，可旋轉棋盤，使得行數多於列數，就可用上述公式。

柒、 參考資料及其他

一、科學月刊 2015 年 8 月份(第 548 期)-沙灘球的數學／游森棚

二、新北市 103 學年度科展--正直三角形遊戲之最佳策略

【評語】030413

探討在格點圖上放置若干棋子，在限制不會有四個頂點均放置棋子的長方形產生的前提下，棋子個數的最大可能值與最小可能值為何的問題。針對一般化的情況給出了答案。這是一個有趣的問題。作者們針對一些小的格點圖作了分析，找出了在這些格點圖上放置棋子，要達到最大值和最小值，棋子放置方式的規律，並以此為基礎，推論最佳的擺放方式，針對這樣的方式，給出了棋子個數的結果。想法不錯，由作品說明書看來，作者們確實也下了一番功夫，值得嘉許。可惜的是，在說明的過程中用到了感覺上理所當然，但其實是有著邏輯上的瑕疵的說法來得出結論（較大的格點圖的最佳解必然是由較小的格點圖的最佳解往上架構的），這也使得在最大值的部分所給出的結果其實是不正確的。也因為如此，即便最小值的結果正確，論述仍然有著瑕疵。如果能修正這些問題，給出清楚而且正確的論述，會是一個不錯的作品。有點可惜。

作品海報

摘要

本篇作品之主旨為研究在任一個棋盤方格中，任意擺放數個棋子，如何使$n \times m$棋盤方格中($m \geq n$)任四個棋子之排列**均不構成**正直四邊形之最佳策略(最多棋子數與最少棋子數)。

壹.研究動機

在上數學課時，有一次老師們講到 2015 年的科學月刊中有一道題目叫作正直三角形之討論，聽老師敘述完遊戲方法後，實際去玩此遊戲，我們發現這個遊戲有一些特殊的規律，引起了我們的好奇心，於是決定加以深入研究，並將主題擴展至正直四邊形之討論。

貳.研究目的

一、 $n \times n$棋盤內最少棋子數與最多棋子數
二、 $n \times m$棋盤內最少棋子數與最多棋子數

參. 研究設備及器材

紙、筆、圍棋棋盤、圍棋

肆. 研究過程與方法

一、名詞定義:

(一)正直四邊形:

在棋盤方格中，任選四個方格擺放棋子，若形成每一個角都是直角的四邊形，且四個邊皆與棋盤格線平行，我們稱為「正直四邊形」。

(二)$n \times m$棋盤:

$n \times m$棋盤共有 m 行 n 列($m \geq n \geq 2$，且$n, m \in N$)

(三)最少可擺放之棋子數:

在$n \times m$棋盤中，若已擺放 k 顆棋子，其中任四顆棋子皆不構成正直四邊形，且剩下可擺放的空位中，任意擺放 1 個棋子，皆會構成正直四邊形，此最少的 k 顆棋子，簡稱為「最少棋子數」，代號為$s_{n \times m} = k$。

(四)最多可擺放之棋子數:

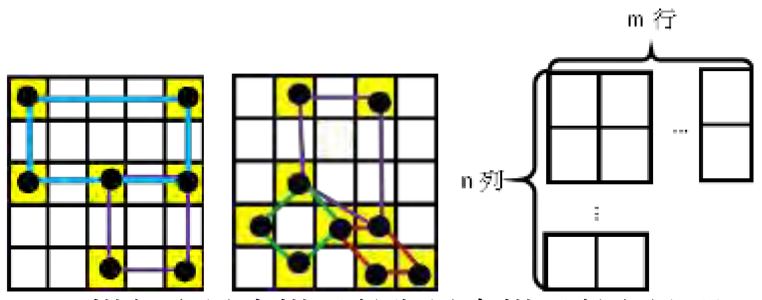
在$n \times m$棋盤中，若已放入 p 顆棋子，其中任四個棋子皆不構成正直四邊形，且剩下可擺放的空位中，任意擺放 1 個棋子，皆會構成正直四邊形，此最多的 p 顆棋子，稱為「最多棋子數」，代號為$b_{n \times m} = p$。

(五)死棋:

在棋盤中，若在剩下的空格中擺入棋子，會使棋盤中產生正直四邊形，我們稱此棋為死棋。

(六)棋子:

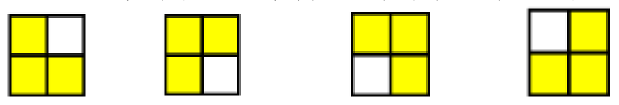
在棋盤中，只能擺在方格內，不能擺在格線上，以黃色表示。



三、 $n \times n$棋盤內最少棋子數與最多棋子數之證明:

(一)2×2棋盤:

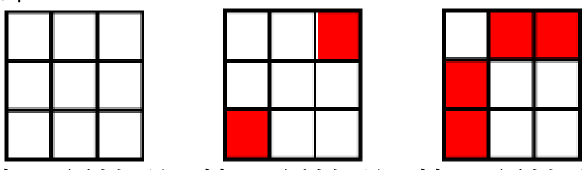
以下排法中，若於空白處(空位)再放一顆棋子，會形成正直四邊形。又因為旋轉後改變方向，但不影響排法，故一種排法只需做出其中一個方向即可。



正立 順時針旋轉90°旋轉180° 逆時針旋轉90°

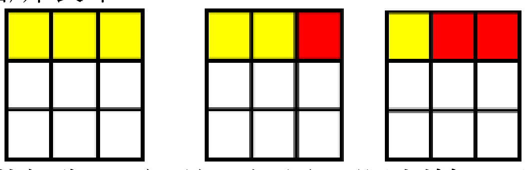
(二)3×3棋盤:

發現一:
藉由控制$n \times n$棋盤的第一列的棋子顆數，得到我們所做出的結果。

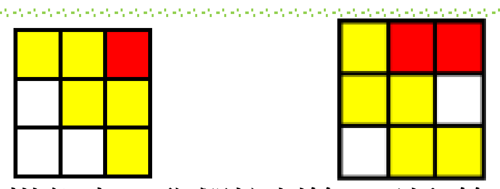


第一種情形 第二種情形 第三種情形

說明:我們將3×3棋盤的所有情形做分類，發現我們可以統一擺滿第一列，藉由控制第一列就可排出所有情形，如下圖所表示。

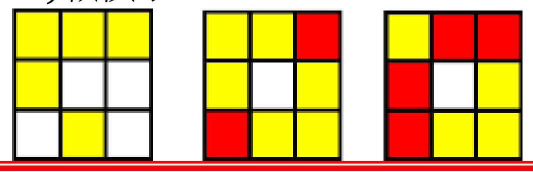


因為$n \times n$棋盤為正方形，如果只限制第一列，有可能做出重複的圖形，如下圖。



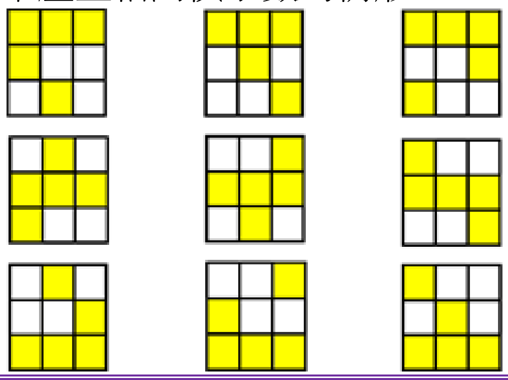
所以在$n \times n$棋盤中，我們控制第一列和第一行 $0 \sim (n-1)$顆棋子。

1. 第一種情形
2. 第二種情形: 一個位置不擺放棋子
3. 第三種情形: 兩個位置不擺放棋子(無法控制)
   在$n \times n$棋盤中，我們改成控制第一列和第一行 $0 \sim (n-2)$顆棋子。



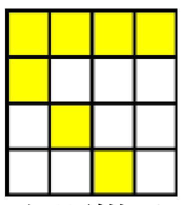
結論: 在3×3棋盤，$s_{3 \times 3} = 5$，$b_{3 \times 3} = 6$

發現二:
我們實際操作的時候，因為無法一一列出所有的情形，然而，我們發現將排好的棋盤進行行列互換，也可使其棋盤中產生相同棋子數的情形。



(三)4×4棋盤:

1. 第一種情形:



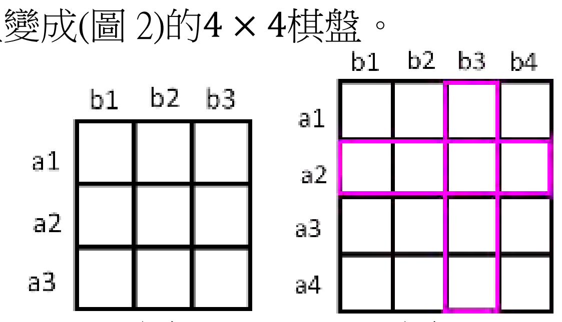
七顆棋子

2. 第二種情形: 一個位置不擺放棋子
   如果只利用發現一任意放方式擺放，情況很難控制，因此我們利用3×3棋盤的情形作為基礎去擴充。

發現三:
我們可以利用3×3棋盤的第二種情形，增加一行一列，便可創造出4×4棋盤的第二種情形，排法如下圖。

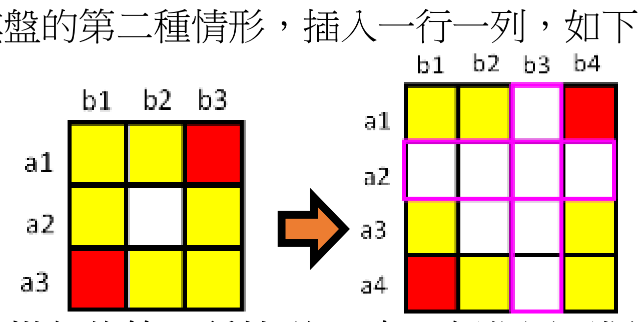
六顆棋子 九顆棋子

說明:我們將3×3棋盤座標化，將第 x 列標示成(a,x)，第 y 行標示成(b,y)。將3×3棋盤表示如下(圖 1)。在a_1列和a_2列中間插入一列，在b_2行和b_3行中間插入一行，使棋盤變成(圖 2)的4×4棋盤。

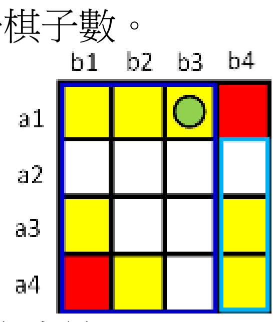


(圖 1) (圖 2)

有了以上的標示，我們便可以更具體的說明。利用原本3×3棋盤的第二種情形，插入一行一列，如下圖。



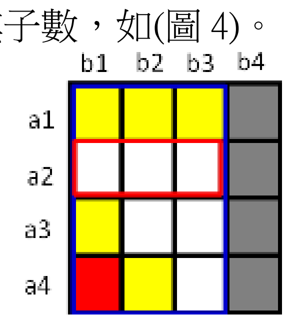
配合4×4棋盤的第二種情形(只有一個位置不擺)所以(a_1, b_3)必擺放棋子，之後將其盤切割成兩個部分:淺藍色區域和深藍色區域，如下圖。若要讓棋盤盡量有最多棋子數，則要控制深藍色部分有最多棋子數，而且淺藍色區域也有最多棋子數。



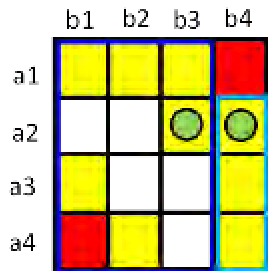
(1) 控制深藍色區域棋子數:由於(a_1, b_1)、(a_1, b_2)、(a_1, b_3)有擺放棋子，所以a_2列、a_3列、a_4列都只能擺放一顆棋

子，因一列若擺放超過一顆棋子，便會形成正直四邊形，故只能從(a_2, b_1)、(a_2, b_2)、(a_2, b_3)選擇一格擺放(紅色區域)，如(圖 3)。

(2) 創造淺藍色區域棋子數:由於放(a_2, b_1)或(a_2, b_2)時，淺藍色區域的不能擺放，會形成正直四邊形，淺藍色區域不是最多棋子，故不能形成最多棋子數。當擺放在(a_2, b_3)時，(a_2, b_4)是可以擺放的，就可使得4×4棋盤有最多棋子數，如(圖 4)。



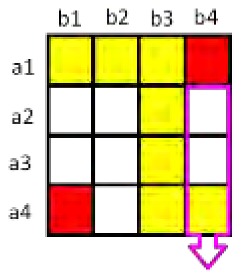
(圖 3)



(圖 4)

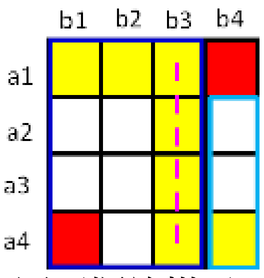
另外，在這種情形下，我們也發現最少棋子數的情形

發現四:
當在此情形下，控制深藍色區域擺放棋子為一直行時，會產生最少棋子數，我們稱這種擺放法為特殊排法，如下圖。



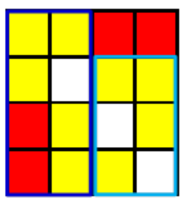
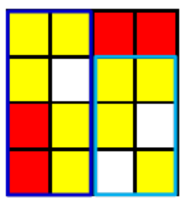
此行選一格擺放

說明:如同發現三的說明，我們控制深藍色區域的最多棋子數，巧妙的排成一直行(粉色虛線)，淺藍色的區域只能擺放一顆棋子，做出最少棋子數，使整個4×4棋盤有最少棋子數。



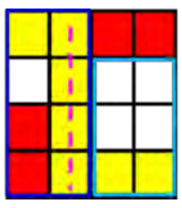
3. 第三種情形:兩個位置不擺放棋子

雖然在此情形無法利用3×3棋盤的情形作推廣，但我們可以控制深藍色部分有最多棋子數，且淺藍色區域也有最多棋子數，而得第三種情形的最多棋子數。

 或  均形成最多棋子數

九顆棋子

特殊排法(深藍色區域排一直線，淺藍色區域只擺兩顆)

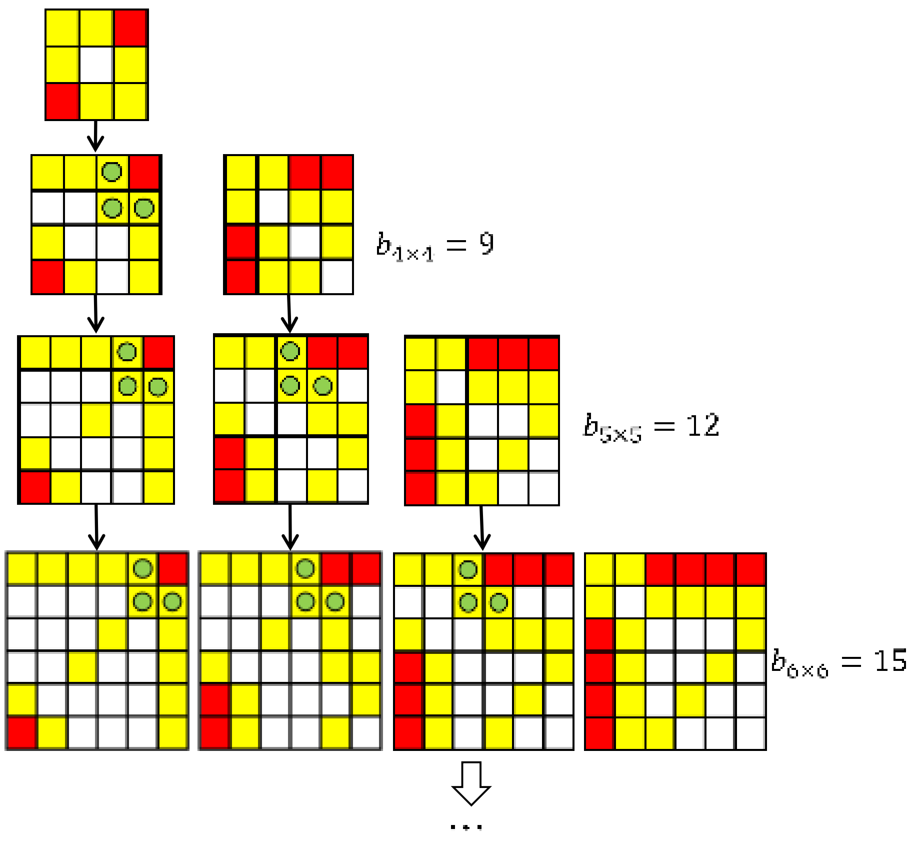
 形成最少棋子數

七顆棋子

結論: 在4×4棋盤中，$s_{4\times4} = 7$，$b_{4\times4} = 9$

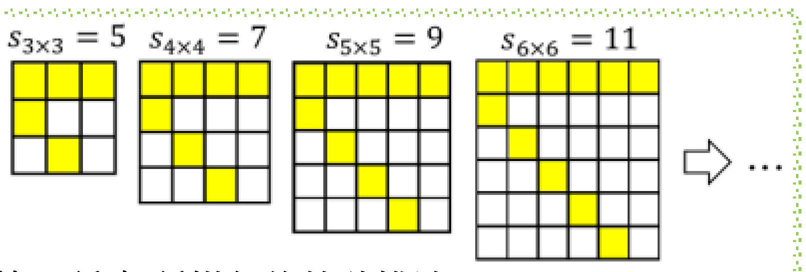
(四)$n \times n$棋盤:

1. $n \times n$棋盤最多棋子數的推廣方法

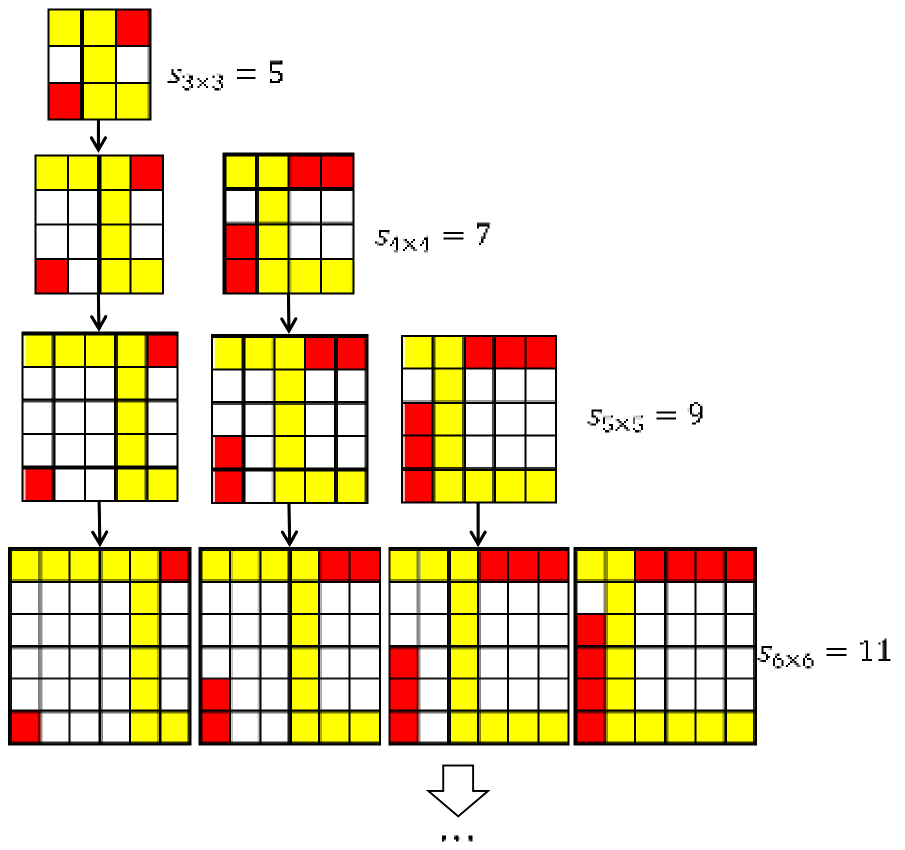


2. $n \times n$棋盤最少棋子數的推廣方法

(1) 第一種:每種棋盤的第一種情形



(2) 第二種:每種棋盤的特殊排法

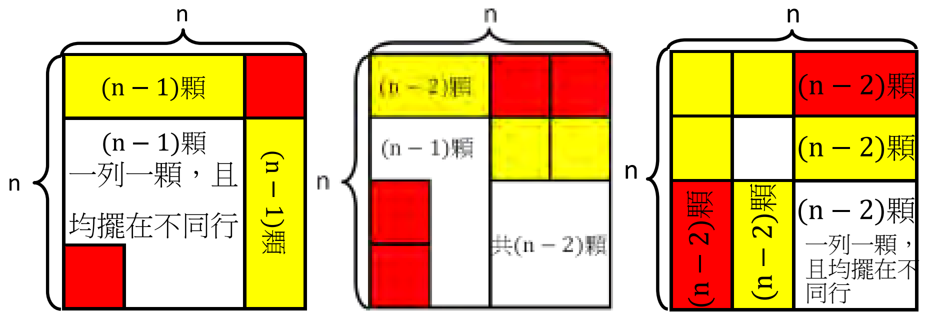


從以上的推導方法中，我們歸納出以下的結果

結果一:在$n \times n$棋盤中，$b_{n\times n} = 3n - 3$
結果二: 在$n \times n$棋盤中，$s_{n\times n} = 2n - 1$

說明:

1. 從之前的討論，我們可知在$n \times n$棋盤，若要得到最多棋子數，可由之前的推廣方式去分割棋盤

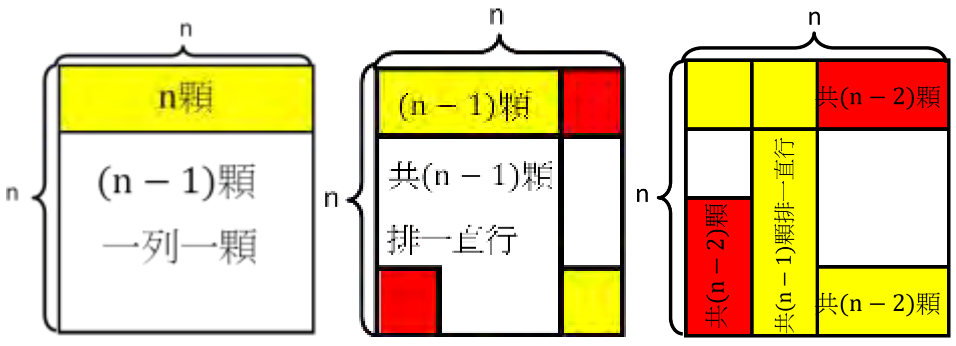


第一種:共$(n-1)+(n-1)+(n-1) = (3n-3)$顆棋子

第二種:共$(n-2)+(n-1)+2+(n-2) = (3n-3)$顆棋子

第$(n-2)$種:共$2+1+(n-2)+(n-2)+(n-2) = (3n-3)$顆棋子

2. 從之前的討論，我們可知在$n \times n$棋盤，若要得到最少棋子數，可由之前的推廣方式去分割棋盤



第一種: 共$n+(n-1) = (2n-1)$顆棋子

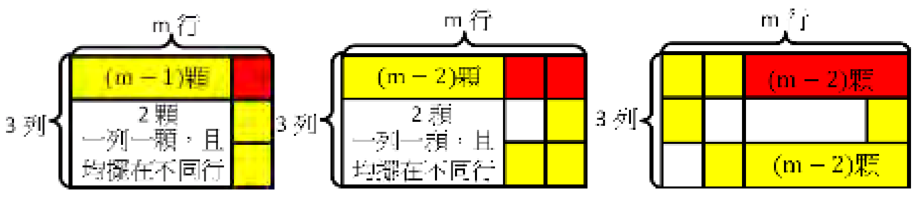
第二種: 共$(n-1)+(n-1)+1 = (2n-1)$顆棋子

第$(n-2)$種: 共$2+(n-1)+(n-2) = (2n-1)$顆棋子

四、 $n \times m$棋盤內最少棋子數與最多棋子數之證明

(一)$3 \times m$棋盤:

$3 \times m$棋盤最多棋子數:

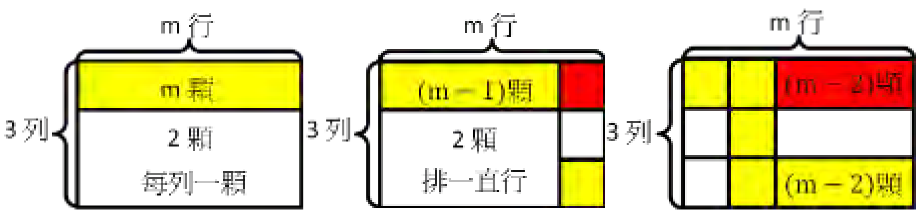


第一種: 共$(m-1)+2+2 = (m+3)$顆棋子

第二種: 共$(m-2)+2+3 = (m+3)$顆棋子

第$(m-2)$種: 共$2+2+(m-2)+1 = (m+3)$顆棋子

$3 \times m$棋盤最少棋子數:



第一種: 共$m+2 = (m+2)$顆棋子

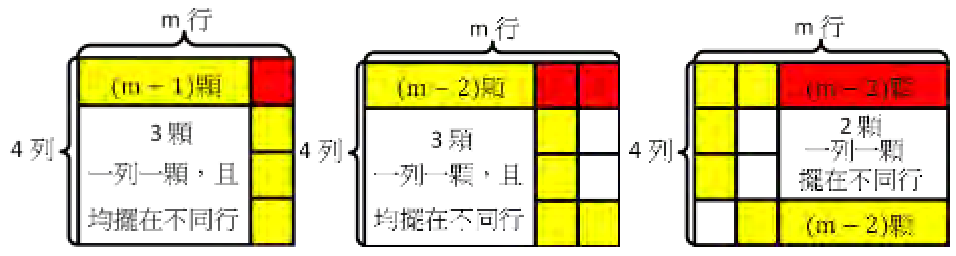
第二種: 共$(m-1)+2+1 = (m+2)$顆棋子

第$(m-2)$種: 共$4+(m-2) = (m+2)$顆棋子

結論:在3 × m棋盤，$s_{3\times m} = m + 2$，$b_{3\times m} = m + 3$

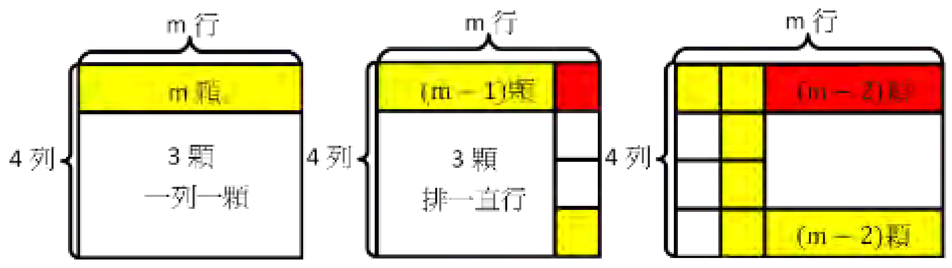
(二)4 × m棋盤:

1. 4 × m棋盤最多棋子數:



第一種:共(m − 1) + 3 + 3 = (m + 5)顆棋子
第二種:共(m − 2) + 3 + 4 = (m + 5)顆棋子
第(m − 2)種: 共5 + 2 + (m − 2) = (m + 5)顆棋子

2. 4 × m棋盤最少棋子數:



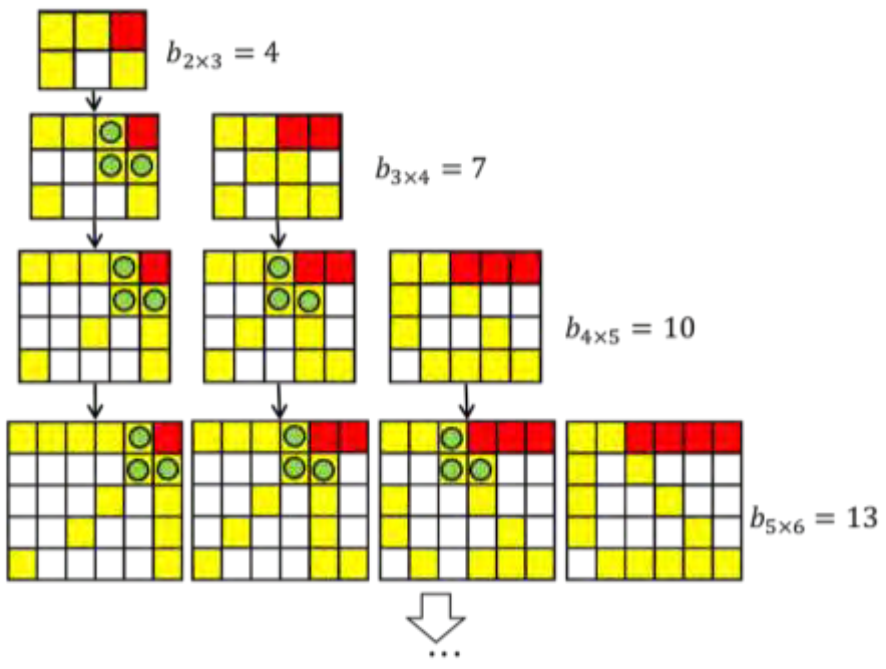
第一種:共m + 3 = (m + 3)顆棋子
第二種:共(m − 1) + 3 + 1 = (m + 3)顆棋子
第(m − 2)種:共5 + (m − 2) = (m + 3)顆棋子

結論:在4 × m棋盤，$s_{4\times m} = m + 3$，$b_{4\times m} = m + 5$

(三)n × m棋盤:

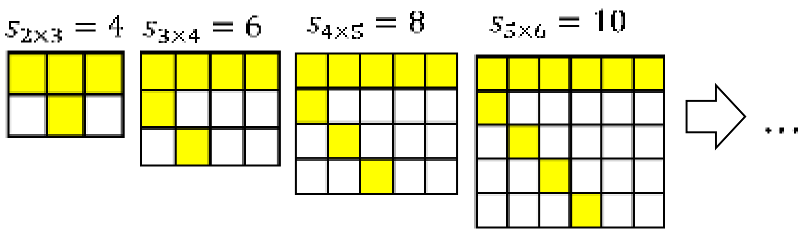
利用發現的方法和特殊排法，我們便可以將棋盤的最多棋子數和最少棋子數擺放出來。

1. n × m棋盤最多棋子數的推廣方法

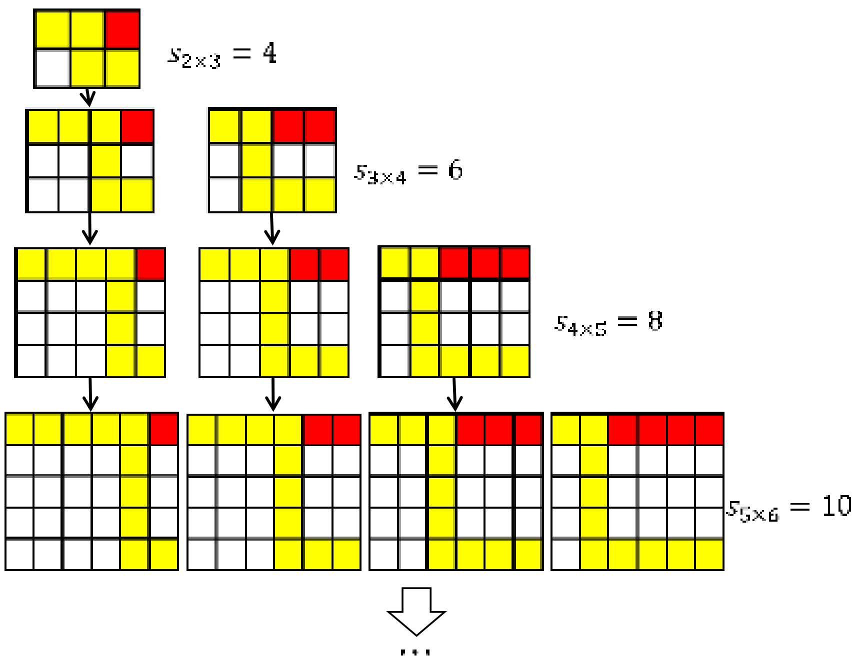


2. n × m棋盤最少棋子數的推廣方法

(1) 第一種:每種棋盤的第一種情形



(2) 第二種:每種棋盤的特殊排法

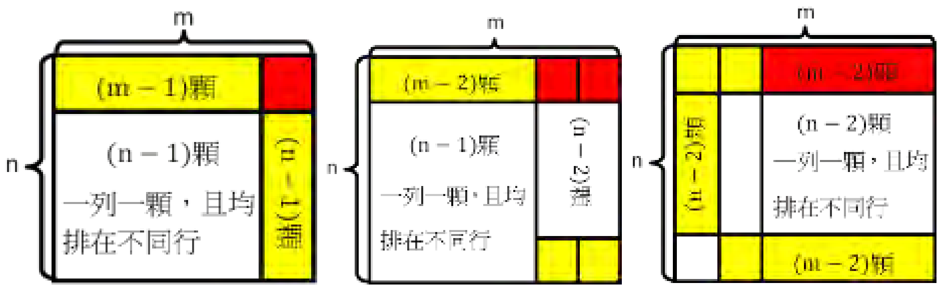


從以上的推導方法中，我們歸納出以下的結果

結果三:在n × m棋盤中，$b_{n\times m} = 2n + m - 3$
結果四:在n × m棋盤中，$s_{n\times m} = n + m - 1$

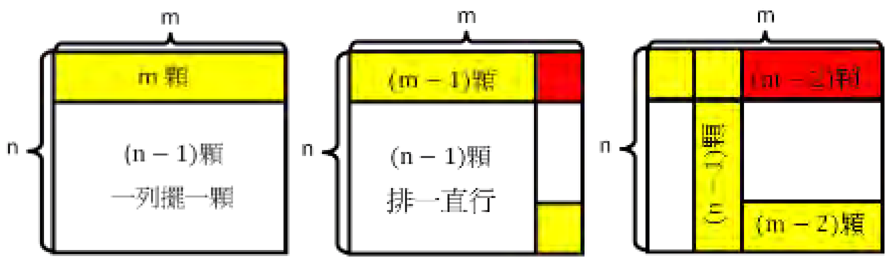
說明:

1. 從討論中，我們可知在n × m棋盤，若要得到最多棋子數，可由之前的推廣方式去分割棋盤



第一種: 共(m − 1) + (n − 1) + (n − 1) =
(2n + m − 3)顆棋子
第二種:共(m − 2) + (n − 1) + (n − 2) + 2 =
(2n + m − 3)顆棋子
第(m − 2)種:共2 + (n − 2) + 1 + (n − 2) +
(m − 2) = (2n + m − 3)顆棋子

2. 從討論中，我們可知在n × m棋盤，若要得到最少棋子數，可由之前的推廣方式去分割棋盤。



第一種:共m + (n − 1) = (n + m − 1)顆棋子
第二種:共(m − 1) + (n − 1) + 1 = (n + m − 1)顆棋子
第(m − 1)種:共2 + (n − 1) + (m − 2) = (n + m − 1)顆棋子

陸、結論

(一)在n × n棋盤中(n ≥ 2，且n ∈ N)，最多棋子數為(3n − 3)顆棋子

(二)在n × n棋盤中(n ≥ 2，且 n ∈ N)，最少棋子數為(2n − 1)顆棋子

(三)在n × m棋盤中(m ≥ n ≥ 2，且n, m ∈ N)，最多棋子數為(2n + m − 3)顆棋子

(四)在n × m棋盤中(m ≥ n ≥ 2，且n, m ∈ N)，最少棋子數為(n + m − 1)顆棋子

(五)當n × m棋盤中(n ≥ m)的時候，可旋轉棋盤，使得行數多於列數，就可用上述公式。

柒、未來展望

因為目前我們只研究n × m棋盤中不會形成正直四邊形的最多棋子數和最少棋子數的數目，但從我們的研究中我們發現同一個排放棋子的數目有很多種方式，未來我們可以加以研究並系統化。這樣一來，我們便可以把作品表達得更完整。

捌、參考資料

(一)科學月刊 2015 年 8 月份(第 548 期)-沙灘球的數學／游森棚

(二)新北市 103 學年度科展--正直三角形遊戲之最佳策略