中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030412

從一個投射出的拋物線圖形談起

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 傅奕偉	林耀南
國二 張維中	張淑敏

關鍵詞：投射、圓錐曲線、圓錐曲線製造機

摘要:

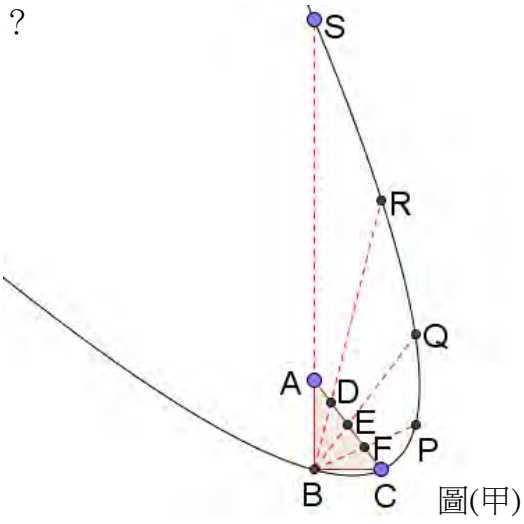
從直角△斜邊上的各等分點，對直角頂依序做1 倍、2 倍…等的長度投射，得一連串投射點，觀察投射點形成的軌跡，文中發現若投射倍率成等差時，投射出的各點軌跡必成拋物線，且發現投射倍率組合做縮放平移時，能保持投射圖形為拋物線。接著將相等的四段改成不一定相等的四段(N=4)，使投射組合的長度$L \geq 4$，從 L=4 到 L=16 做個全面性的觀察，得到的不只拋物線，還有很多不同圖形如雙曲線、橢圓、平行線、交叉直線和一點一線等，但沒發現圓，作者利用代數計算投射和幾何作圖投射畫出圓形。並利用找圓的概念，將 N>4 時的分段組合和投射倍率組合在指定的△中呈現出來。最後藉著改變投射倍率組合成級數狀，竟能將本文中涉及的所有投射圖形(N≥4)都轉成拋物線。

壹、研究動機

在一次學二次函數的單元課程中，老師提到一個有趣的題目：

> 「有一個直角△ ABC，$\angle B = 90°$，如圖(甲)，D、E、F四等分$\overline{AC}$，分別在$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{BA}$上取C、P、Q、R、S，使$\overline{BC} = 1\overline{BC}$、$\overline{BP} = 2\overline{BF}$、$\overline{BQ} = 3\overline{BE}$、$\overline{BR} = 4\overline{BD}$、$\overline{BS} = 5\overline{BA}$，則S、R、Q、P、C五點都落在同一條拋物線上。」

這非常有趣，但老師說國中課本裡的拋物線圖形是二次函數，二次函數是開口向上或向下，但是圖(甲)中的拋物線開口卻向左上，這明顯不是函數圖形，老師說這是一種方程式的圖形，博學的阿中同學立刻提問這方法也能投射出其它的方程式圖形，如橢圓、雙曲線嗎？要如何投射？可以反過來從D、E、F向對面頂點B投射嗎？
老師鼓勵我們當科展題目研究研究



圖(甲)

貳、使用設備及器材

一、電腦
二、Geogebra 繪圖軟體
三、Math app 計算軟體

參、名詞解釋

一、名詞解釋

(一)、分段數N：將△ ABC的一邊，如$\overline{AB}$分成 N 段，則稱分段數為N

(二)、分段組合$(a_1、a_2、a_3、a_4\cdots\cdots a_n)$：其中正整數$n \geq 4$，$a_n$為正整數，此時分段數 N=n。

例如：將$\overline{AB}$分成四段等長的線段，各分段長的比為 1：1：1：1 記為(1、1、1、1)

將$\overline{AB}$分成四段不等長的線段，各分段長比為1：2：1：1，記為(1、2、1、1)

將$\overline{AB}$分成五段不等長的線段，分段長比為4：3：1：2：2，記(4、3、1、2、2)

註：$(2、2、2、2) = (1、1、1、1)$，餘類推。

(三)、分段組合長L：分段組合$(a_1、a_2、a_3、a_4\cdots\cdots a_n)$中，$L=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

例如：若分段組合為$(1、1、1、1)$，則$L=1+1+1+1=4$

若分段組合為$(4、3、1、2、2)$，則$L=4+3+1+2+2=12$

註：為方便起見，將分段組合$(4、3、1、2、2)$簡記為(43122)

(四)、投射倍率r：

在P、O、Q所在直線上，如圖(乙)，$r=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$表示從起點P 經 O 點，作r倍投射，得Q點。

(1)$r>0$時，$r=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$，表從起點P經 O 往前投射r倍到達 Q 點，如圖(乙)。

(2)$r<0$時，$r=-\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$，表從起點P到 O 往後回縮r倍到達 Q 點，如圖(丙)。

(3)$r=0$ 時，表從起點 P 到 O 投射後停在 O 點，即$\overline{OQ}$=0，如圖(乙)。

例如：

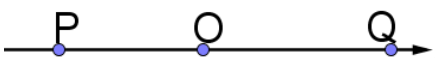
$r=1$，如圖(乙)，$\overline{PO}$從 O 點向前延伸一倍長成為$\overline{OQ}$，$\overline{OQ}=1\times\overline{OP}$

$r=2$，如圖(乙)，$\overline{PO}$從 O 點向前延伸二倍長成為$\overline{OQ}$，$\overline{OQ}=2\times\overline{OP}$

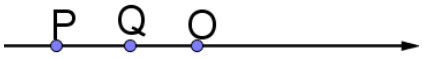
$r=\frac{1}{3}$，如圖(乙)，$\overline{PO}$從 O 點向前延伸了$\frac{1}{3}$倍長成為$\overline{OQ}$，$\overline{OQ}=\frac{1}{3}\times\overline{OP}$

$r=-\frac{1}{3}$，如圖(丙)，$\overline{PO}$從 O 點向後回縮了$\frac{1}{3}$倍長成為$\overline{OQ}$，$\overline{OQ}=\frac{1}{3}\times\overline{OP}$，。

$r=-1$，如圖(丙)，$\overline{PO}$從 O 點向後回縮了一倍長成為$\overline{OQ}$，$\overline{OQ}=1\times\overline{OP}$，即回到該投射起點 P 處，P、Q 重合。



圖(乙)



圖(丙)

(五)、投射倍率組合$[b_1、b_2、b_3、b_4\ldots b_n]$：其中$b_i$表投射倍率 r 的值，$[b_1、b_2、b_3、b_4\ldots b_n]$分別對應分段組合$(a_1、a_2、a_3\ldots a_n)$做各等分點的投射。例如第四頁的圖(1)中的$\overline{Q_iO}=b_i\times\overline{P_iO}$。$i=1、2、3、\cdots、n$

(六)、投射符號~~D~~：表投射運算，如圖(1)的投射簡記為$(1、1、1、1)$~~D~~$[1、2、3、4]$

肆、研究目的

一、在等分線段及等差投射倍率條件下，探討分段數 N 從 4 擴張到 n，對投射圖形的影響。

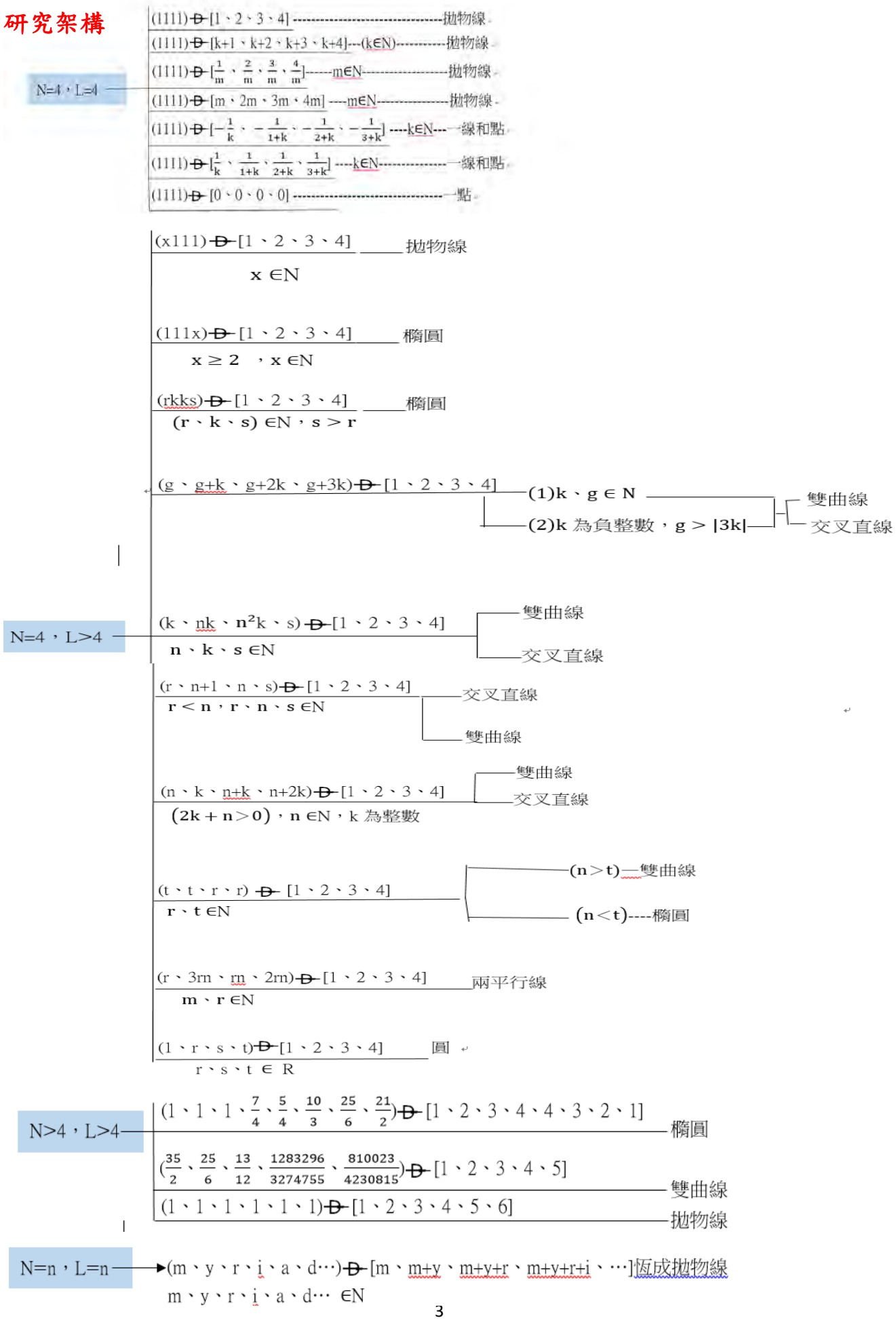
二、在等分線段條件下，探討等差投射倍率的縮放平移對投射圖形的影響。

三、在不等分線段條件下，探討等差投射倍率的縮放平移對投射圖形的影響。

四、在等分線段條件下探討$N>4$時，延伸分段組合和投射倍率組合的搭配可能性及方法。

五、在不等分線段下，探討$N>4$時，延伸分段組合和投射倍率組合的搭配可能性及方法。

研究架構


N=4，L=4
(1111)↛[1、2、3、4]----------拋物線
(1111)↛[k+1、k+2、k+3、k+4]---(k∈N)----------拋物線
(1111)↛[1/m、2/m、3/m、4/m]------m∈N----------拋物線
(1111)↛[m、2m、3m、4m]----m∈N----------拋物線
(1111)↛[-1/k、-1/(1+k)、-1/(2+k)、-1/(3+k)]----k∈N---一線和點
(1111)↛[1/k、1/(1+k)、1/(2+k)、1/(3+k)]----k∈N----------一線和點
(1111)↛[0、0、0、0]----------一點
(x111)↛[1、2、3、4] 拋物線
x ∈N
(111x)↛[1、2、3、4] 橢圓
x ≥ 2 ，x ∈N
(rkks)↛[1、2、3、4] 橢圓
(r、k、s) ∈N，s > r
(g、g+k、g+2k、g+3k)↛[1、2、3、4]
(1)k、g ∈ N
(2)k 為負整數，g > |3k|
雙曲線
交叉直線
N=4，L>4
(k、nk、n²k、s)↛[1、2、3、4]
n、k、s ∈N
雙曲線
交叉直線
(r、n+1、n、s)↛[1、2、3、4]
r < n，r、n、s ∈N
交叉直線
雙曲線
(n、k、n+k、n+2k)↛[1、2、3、4]
(2k + n > 0)，n ∈N，k 為整數
雙曲線
交叉直線
(t、t、r、r)↛[1、2、3、4]
r、t ∈N
(n > t)—雙曲線
(n < t)----橢圓
(r、3rn、rn、2rn)↛[1、2、3、4]
m、r ∈N
兩平行線
(1、r、s、t)↛[1、2、3、4]
r、s、t ∈ R
圓
N>4，L>4
(1、1、1、7/4、5/4、10/3、25/6、21/2)↛[1、2、3、4、4、3、2、1]
橢圓
(35/2、25/6、13/12、1283296/3274755、810023/4230815)↛[1、2、3、4、5]
雙曲線
(1、1、1、1、1、1)↛[1、2、3、4、5、6]
拋物線
N=n，L=n
(m、y、r、i、a、d⋯)↛[m、m+y、m+y+r、m+y+r+i、⋯]恆成拋物線
m、y、r、i、a、d⋯ ∈N

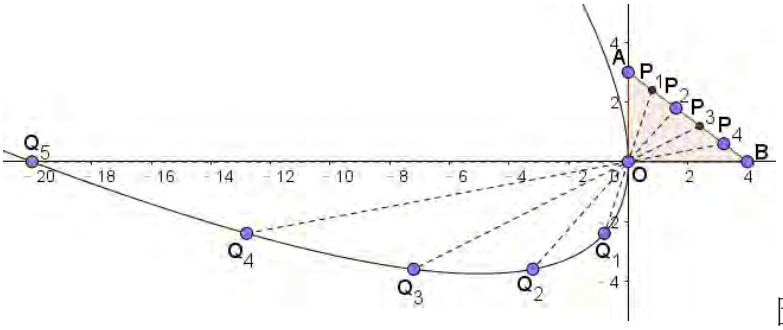
伍、研究過程

在研究動機裡提到的那道題目，我們先將它轉化成往後文章中談及“投射”的語法，敘述如下：先將直角△斜邊四等分，共有 3 個等分點，含線段兩端點總共有 5 個投射點，我們將這 5 點皆當做投射“起點”，分別為A、P_1、P_2、P_3、B。投射是從“起點”向直角頂點的直線方向投射(和動機中的投射方向相反)，投射倍率 r 依次為 0 倍、1 倍、2 倍、3 倍、4 倍，分別得到對應點Q_0、Q_1、Q_2、Q_3、Q_4五點，檢驗這投出的五點是否在同一條拋物線上？當然那答案是肯定的，可是我們馬上有兩個疑問：(一)如果不是直角△，也有這種結果嗎？(二)如果不是四等分，而是五等分、六等分…也有這種結果嗎？我們融合這兩個疑問先試了幾個投射例子。

一、常見的△投射

按常理來說，我們應控制變因，將各種常見△都只先搭配四等分，做投射觀察，以利於歸納結論。但為增加讀者觀察廣度，我們搭配各種等分，這更有利於讀者深入了解。

(一)、在直角坐標平面上，取 O(0，0)、A(0，3)、B(4，0)，將$\overline{AB}$五等分，等分點依序為P_1、P_2、P_3、P_4及末端點 B，從各P_i點做$\overrightarrow{P_iO}$，並在$\overrightarrow{P_iO}$上依序取得Q_i點，使$\overline{Q_1O}=\overline{P_1O}$，$\overline{Q_2O}=2\overline{P_2O}$，$\overline{Q_3O}=3\overline{P_3O}$，$\overline{Q_4O}=4\overline{P_4O}$，$\overline{Q_5O}=5\overline{BO}$，其中投射出來的這些$Q_1$、$Q_2$、$Q_3$、$Q_4$、$Q_5$，被稱為從$P_i$對應過來的投射點，檢驗這些 Q 點是否在同一條圓錐曲線拋物線上？又頂點 O 呢？如圖(1)。



圖(1)，△ ABO為直角△

計算如下：

一開始先求得這五個投射點的座標

$P_1\left(\frac{4}{5}，\frac{12}{5}\right)$、$P_2\left(\frac{8}{5}，\frac{9}{5}\right)$、$P_3\left(\frac{12}{5}，\frac{6}{5}\right)$、$P_4\left(\frac{16}{5}，\frac{3}{5}\right)$、$P_5=B(4，0)$

依投射倍率得

$Q_1\left(-\frac{4}{5}，-\frac{12}{5}\right)$、$Q_2\left(-\frac{16}{5}，-\frac{18}{5}\right)$、$Q_3\left(-\frac{36}{5}，-\frac{18}{5}\right)$、$Q_4\left(-\frac{64}{5}，-\frac{12}{5}\right)$、

$Q_5(-20，0)$等五個投射點

再代入圓錐曲線二元二次方程式$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，得

$$\begin{cases}\frac{16}{25}a+\frac{48}{25}b+\frac{144}{25}c-\frac{4}{5}d-\frac{12}{5}e+f=0 & \text{——①}\\ \frac{256}{25}a+\frac{288}{25}b+\frac{324}{25}c-\frac{16}{5}d-\frac{18}{5}e+f=0 & \text{——②}\\ \frac{1296}{25}a+\frac{648}{25}b+\frac{324}{25}c-\frac{36}{5}d-\frac{18}{5}e+f=0 & \text{——③}\\ \frac{4096}{25}a+\frac{768}{25}b+\frac{144}{25}c-\frac{64}{5}d-\frac{12}{5}e+f=0 & \text{——④}\\ 400a-20d+f=0 & \text{——⑤}\end{cases}$$

若投出的曲線也會通過頂點(0，0)，代入後，得$f=0$。由⑤ $d=20a$

③−② $1040a+360b-100d=0$　得$b=\frac{8}{3}a$

④−① $4080a+720b-300d=0$　得$b=\frac{8}{3}a$，將$b=\frac{8}{3}a$，$d=20a$，代入①、②

$$\begin{cases}16a+128a+144c-400a-60e=0\\256a+768a+324c-1600a-90e=0\end{cases}\therefore\begin{cases}36c-15e=64a\ \text{——⑦}\\54c-15e=96a\ \text{——⑧}\end{cases}$$

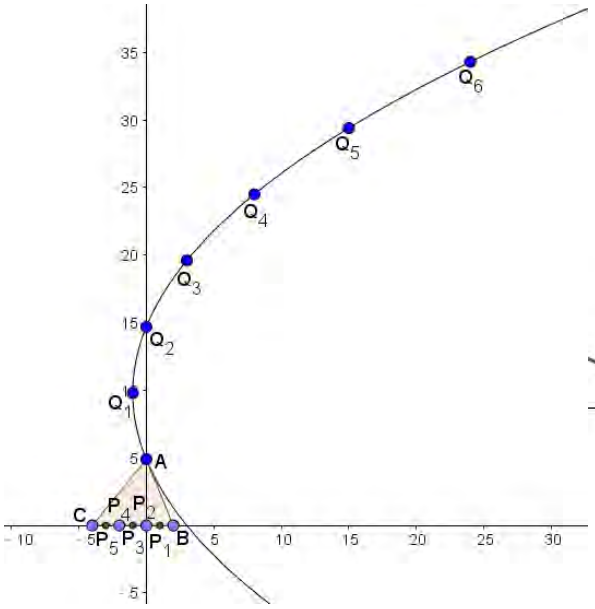
⑧−⑦ $18c=32a$　$\therefore c=\frac{16}{9}a$　　帶回⑦，得 e=0

得二元二次方程式$ax^2+\frac{8}{3}axy+\frac{16}{9}ay^2+20ax=0$，消去 a 後，方程式為

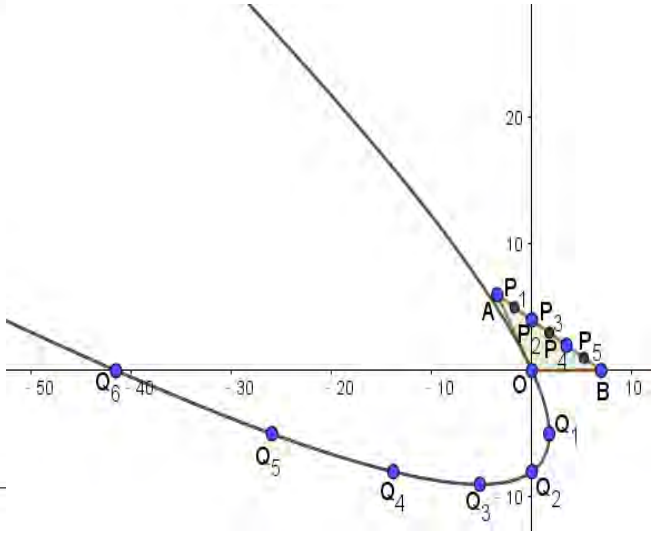
$\therefore 9x^2+24xy+16y^2+180x=0$

驗證$b^2-4ac=24^2-4\times9\times16=576-576=0$為拋物線

驗證未使用的$Q_4\left(-\frac{64}{5}，-\frac{12}{5}\right)$，代入方程式，成立，圖形也通過$Q_4$



圖(2)，△ ABC為銳角△



圖(3)，△ ABO為鈍角△

(二)、銳角△中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=7$，如圖(2)，P_1、P_2、P_3、P_4、P_5六等分$\overline{BC}$，諸P點對△ ABC的頂點A投射，投射倍率 r 仍為連續正整數 1 倍、2 倍、3 倍、4 倍、5 倍…等，得出對應的諸Q點，其中$P_1(1，0)$、$P_2(0，0)$、$P_3(-1，0)$、$P_4(-2，0)$ $P_5(-3，0)$及 $C(-4，0)$

1、先求諸Q點座標$Q_1(-1，2\sqrt{24})$、$Q_2(0，3\sqrt{24})$、$Q_3(3，4\sqrt{24})$、$Q_4(8，5\sqrt{24})$、$Q_5(15，6\sqrt{24})$、$Q_6(24，7\sqrt{24})$

2、再求通過諸Q點的二元二次方程式

代入二元二次方程式$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$得

$a=0$，$b=0$，$c=-\frac{e\sqrt{6}}{48}$，$d=\frac{e\sqrt{6}}{2}$，$f=-\frac{3e\sqrt{6}}{2}$

代入$e=1$：

$c=-\frac{\sqrt{6}}{48}$ ，$d=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，$f=-\frac{3\sqrt{6}}{2}$

代入二元二次方程式後，經計算得方程式為$-\frac{\sqrt{6}}{48}y^2+\frac{\sqrt{6}}{2}x-\frac{3\sqrt{6}}{2}y=0$

驗證$b^2-4ac=0^2-0\times-\frac{\sqrt{6}}{48}\times4=0-0=0$，為拋物線

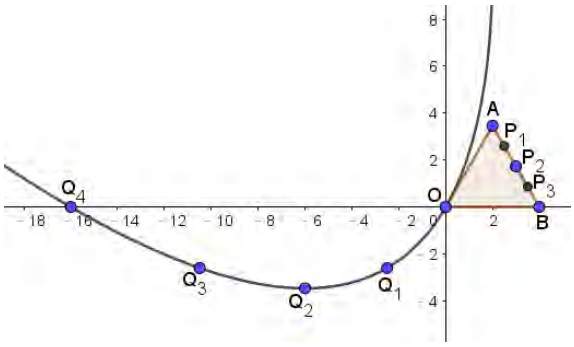
(三)、鈍角△中，$\overline{AB}=12$、$\overline{BO}=4\sqrt{3}$、$\overline{OA}=4\sqrt{3}$，如圖(3)，P_1、P_2、P_3、P_4、P_5六等分$\overline{AB}$。從諸P點對△ ABO的頂點 O 投射，投射倍率 r 仍為連續正整數 1 倍、2 倍、3 倍、4 倍、5 倍等，得出對應的諸Q點，計算得知Q點落在同一條拋物線上

經計算得方程式為$-\frac{7}{24}x^2+\frac{5\sqrt{3}}{12}xy-\frac{3}{8}y^2+\sqrt{3}x+y=0$

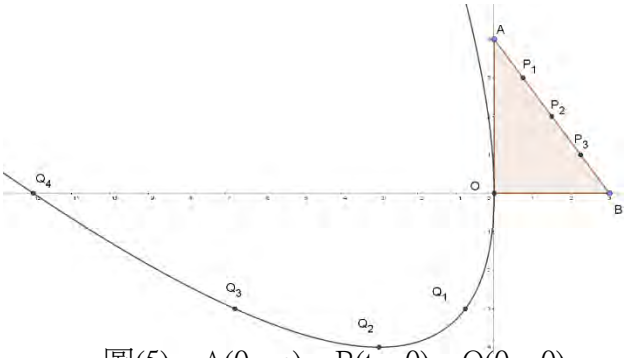
驗證$b^2-4ac=0$為拋物線

(四)、正 △ ABO中，$\overline{AB}=\overline{BO}=\overline{OA}=4$，$P_1$、$P_2$、$P_3$四等分$\overline{AB}$，從諸P點對△ ABO的頂點O做投射，得到諸Q點，如圖(4)。計算得方程式為$-\frac{\sqrt{3}}{16}x^2+\frac{1}{8}xy-\frac{\sqrt{3}}{48}y^2+\sqrt{3}x+y=0$

驗證$b^2-4ac=0^2-0\times-\frac{\sqrt{6}}{48}\times4=0-0=0$，為拋物線



圖(4)，△ ABO為正△



圖(5)，A(0，s)、B(t，0)、O(0，0)

綜合上述計算說明，可推得下列基本性質：

性質一：將任意△的一邊四等分，得 3 個等分點，加上前後兩端點共 5 點，依序配合 0 倍、1 倍、2 倍、3 倍、4 倍到第三頂點 O 點距離的投射，則投射出的 5 個點必落在同一條拋物線上。

證明：1、經過上面各種△及各種不同的等分點的投射例子後，我們還是要用一般式證明看看，不失一般性，取直角△當代表。

2、在座標平面上取 A(0，s)、B(t，0)、O(0，0)，且P_1、P_2、P_3四等分$\overline{AB}$，得

$P_1\left(\frac{1}{4}t，\frac{3}{4}s\right)$、$P_2\left(\frac{2}{4}t，\frac{2}{4}s\right)$、$P_3\left(\frac{3}{4}t，\frac{1}{4}s\right)$、$P_4(t，0)$，其中 B=$P_4$，如圖(5)，再做

$\overline{Q_0O}=0\overline{P_0O}$，$\overline{Q_1O}=\overline{P_1O}$，$\overline{Q_2O}=2\overline{P_2O}$，$\overline{Q_3O}=3\overline{P_3O}$，$\overline{Q_4O}=4\overline{P_4O}$，的投射，得

$Q_0(0，0)$、$Q_1\left(-\frac{1}{4}t，-\frac{3}{4}s\right)$、$Q_2(-t，-s)$、$Q_3\left(-\frac{9}{4}t，-\frac{3}{4}s\right)$、$Q_4(-4t，0)$

3、令二元二次方程式$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，將Q_0、Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5代入，得方程式$s^2x^2+2stxy+t^2y^2+4s^2tx=0$

驗證$b^2-4ac=(2st)^2-4s^2t^2=0$為拋物線

性質二：在性質一的投射中，投射出的拋物線必過該△的第三頂點(上圖中指 O 點)，且該拋物線的對稱軸必平行該△的被分段邊(上圖中指$\overline{AB}$)。

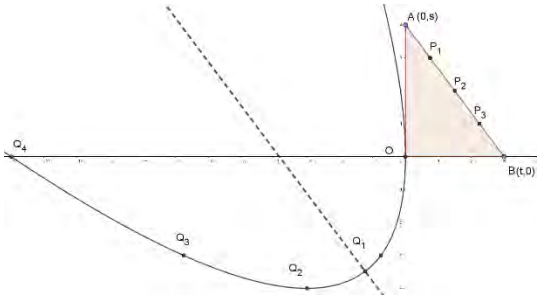
證明：1、將 O(0，0)代入$s^2x^2+2stxy+t^2y^2+4s^2tx=0$成立，即通過△ ABO的頂點 O

2、將$s^2x^2+2stxy+t^2y^2+4s^2tx=0$部分配方成$(sx+ty)^2+4s^2tx=0$

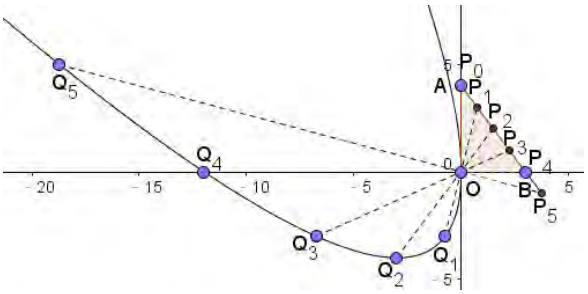
令對稱軸方程式為$sx+ty=k$，又$\overline{AB}$的方程式為$sx+ty=st$ ，$t\neq k$，如圖(6)。

故對稱軸和$\overline{AB}$平行，得證。

註：我們這種等差投射都有通過第三頂點，而第三頂點可看成由起點$A=P_0$，對應的投射倍率$r=0$，投射到第三頂點$O=Q_0$。整串投射倍率為 0、1、2、3、4 倍，仍為等差。



圖(6)



圖(7)

性質三：△ ABO中，$A(0，s)$、$B(t，0)$、$O(0，0)$，P_1、P_2、P_3四等分$\overline{AB}$，令$P_4=B$，$P_0=A$，依序做$\overrightarrow{Q_iO}=i\overrightarrow{P_iO}$、$i=0、1、2、3、4$，按等差 0 倍、1 倍、2 倍、3 倍、4 倍投射，得Q_0、Q_1、Q_2、Q_3、Q_4，其中$Q_0=O$，又在$\overrightarrow{AB}$上取P_5點，使$\overline{P_5P_4}=\overline{P_4P_3}$。並做$\overrightarrow{Q_5O}=5\overrightarrow{P_5O}$，如圖(7)，則第六點$Q_5$亦落在之前$O$、$Q_1$、$Q_2$、$Q_3$、$Q_4$所形成的拋物線上。

證明：由性質一和性質二知，△ ABO中的四等分點的等差倍率投射[1、2、3、4]，所得的拋物線方程式為$s^2x^2+2stxy+t^2y^2+4s^2tx=0$，現在將$Q_5(\frac{-25}{4}t，\frac{5}{4}s)$代入發現亦能滿足方程式，故得證$Q_1$、$Q_2$、$Q_3$、$Q_4$、$Q_5$落在同一條拋物線上。

註：此性質可簡記為在△ ABO中做(1111)~~D~~[1、2、3、4]的拋物線，和延長一等分線段$\overline{P_5P_4}$後，在△ AP_5O中做(11111)~~D~~[1、2、3、4、5]的拋物線是同一條。

性質四：△ ABC中，P_1、P_2、P_3、…、P_{n-1}，n 等分$\overline{AB}$，加上 A、B 兩點共$n+1$個點，依$\overrightarrow{Q_iC}=i\times\overrightarrow{P_iC}$，$i=1、2、3、…、n-1$，加上$\overrightarrow{Q_nC}=n\times\overrightarrow{BC}$投射得 n 個投射點，則這 n 個點都落在同一條拋物線上，且此拋物線也通過 C 點，又對稱軸必平行$\overline{AB}$。

證明：回到性質三的圖(7)中，繼續沿著$\overrightarrow{AB}$方向上一段一段如同$\overline{P_5P_4}$的增加下去，依次得到P_6、P_7、P_8 …… P_n，各按$\overrightarrow{Q_iO}=i\times\overrightarrow{P_iO}$投射，$i=6、7、8、…、n$，獲得$Q_6$、$Q_7$、$Q_8$、…、$Q_n$。由於$P_i=\left(\frac{i}{4}t，\frac{4-i}{4}t\right)$， $4<i\leq n$，投射i倍後，得$Q_i=\left(\frac{i^2}{4}t，\frac{i^2-4i}{4}s\right)$，$4<i\leq n$。

將Q_i代入方程式性質三的二元二次方程式，結果成立。表示Q_i亦落在一開始的那條拋物線上。

因此得證在△ AP_nO中，將$\overline{AP_n}$ n 等分，再依序做i倍投射，所得的n個投射點必落在同一條拋物線上，且這條拋物線必通過第三頂點，其對稱軸平行$\overline{AB}$。(其中 O 點即 C 點)

二、在$N=4$，$L=4$即等分投射邊的條件下，探討投射倍率縮放平移對投射圖形的影響：

為簡化說明起見，我們取等腰直角△ABC，$\overline{AC}=\overline{BC}=4$，$\angle ACB=90°$來說明，

如圖(8)，其中P_1、P_2、P_3、B分別投射出Q_1、Q_2、Q_3、Q_4，簡記為

$(1、1、1、1)$⊅$[1、2、3、4]$得出一條拋物線，方程式為$x^2+2xy+y^2+16x=0$，

對稱軸為$x+y=-4$，有通過C點。

接著對同一個圖，同樣的投射點P_1、P_2、P_3、B做不同的等差投射倍率$[1+1、2+1、3+1、4+1]$計算觀察新投射圖形，連續操作下去，並做成表(一)，歸納得出性質五。

(一)、投射倍率平移K單位運算，列如下表(一)

投射運算	二元二次方程式	對稱軸	通過C
(1111)⊅$[1、2、3、4]$	$x^2+2xy+y^2+16x=0$	$x+y=-4$	√
(1111)⊅$[1+1、2+1、3+1、4+1]$	$x^2+2xy+y^2+20x+4y=0$	$x+y=-8$	√
(1111)⊅$[1+2、2+2、3+2、4+2]$	$x^2+2xy+y^2+24x+8y=0$	$x+y=-12$	√
(1111)⊅$[1+3、2+3、3+3、4+3]$	$x^2+2xy+y^2+28x+12y=0$	$x+y=-16$	√

表(一)

性質五：由表(一)知，在△的一邊上做等分線段及等差投射時，若將投射倍率平移k單位，仍可投射出拋物線，且這群拋物線都通過投射△的第三頂點，諸拋物線對稱軸都平行於投射邊，開口大小不變，如圖(8)。

證明：1、先在△ABC，做(1111)⊅$[1、2、3、4]$，如圖(9-1)

此時的P_1、P_2、P_3、B依序的投射倍率為 1、2、3、4

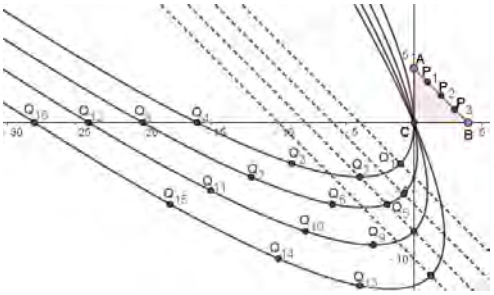
2、在$\overrightarrow{BA}$上，作$\overline{AP_{-1}}=\overline{AP_1}$，連$\overline{P_{-1}C}$

可視為在△$P_{-1}BC$中，做(11111)⊅$[1、2、3、4、5]$

如圖(9-2)，此時的P_1、P_2、P_3、P_4投射倍率依序為 2、3、4、5，平移了 1 單位。

3、再在$\overrightarrow{AP_{-1}}$上作$\overline{P_{-1}P_{-2}}=\overline{AP_{-1}}$，連$\overline{P_{-2}C}$，可視為在△$P_{-2}BC$中，做$(111111)$⊅$[1、2、3、4、5、6]$

如圖(9-3)，此時的P_1、P_2、P_3、P_4投射倍率依序為 3、4、5、6，平移了 2 單位。



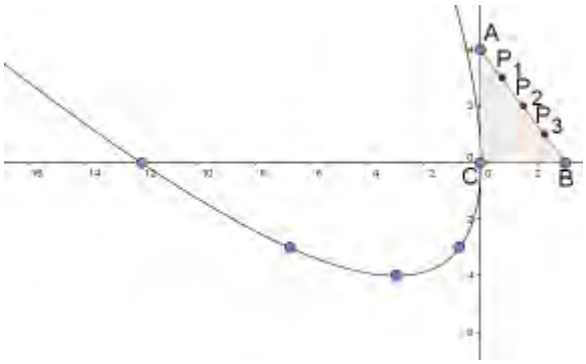
圖(8)(1111)

4、用同法，繼續往外擴充 k 單位，如圖(9-4)

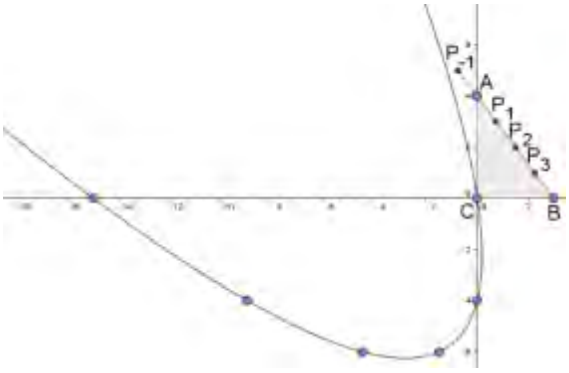
可視為在△$P_{-k}BC$中，做投射，得P_1、P_2、P_3、P_4的投射倍率為$1+k$、$2+k$、$3+k$、$4+k$，平移了 k 單位

又仍為拋物線圖形，得證平移投射倍率後的投射圖形仍為拋物線。

5. 明顯的，從圖(9-1)、圖(9-2)、圖(9-3)來看，投射出的都是同一條拋物線，當然開口大小不變，而圖(8)中的看起來不同的一群拋物線，只是將△$P_{-1}BC$、△$P_{-2}BC$、△$P_{-3}BC$……所投射出的拋物線平移到△ABC的拋物線而已。

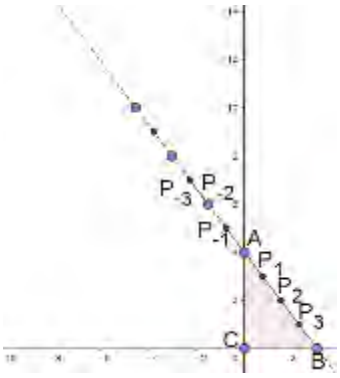


圖(9-1)



圖(9-2)

圖(9-3)



圖(9-4)

(二)、投射倍率放大 K 倍運算，如下表(二)

投射運算	二元一次方程式	對稱軸	通過C
(1111)$\overset{D}{\rightarrow}$[1、2、3、4]	$x^2+2xy+y^2+16x=0$	$x+y=-4$	√
(1111)$\overset{D}{\rightarrow}$[2、4、6、8]	$x^2+2xy+y^2+32x=0$	$x+y=-8$	√
(1111)$\overset{D}{\rightarrow}$[3、6、9、12]	$x^2+2xy+y^2+48x=0$	$x+y=-12$	√

表(二)

性質六：由表(二)知，在等分線段及等差投射中，若將投射倍率放大n倍，仍可投射出拋物線，且這群拋物線都通過投射△的第三頂點，諸拋物線對稱軸都平行於投射邊，開口大小變大，如圖(10-4)。

證明：(1)、令△ ABC中，從$\overline{AB}$等分點向頂點 C 做等差倍率投射，即(1111)$\overset{D}{\rightarrow}$[1、2、3、4]為拋物線。我們要證明(1111)$\overset{D}{\rightarrow}$[2、4、6、8] 亦為拋物線。

取$\overline{AC}$、$\overline{BC}$中點 D、E，連$\overline{DE}$，各交$\overline{P_1C}$、$\overline{P_2C}$、$\overline{P_3C}$於P_1'、P_2'、P_3'。

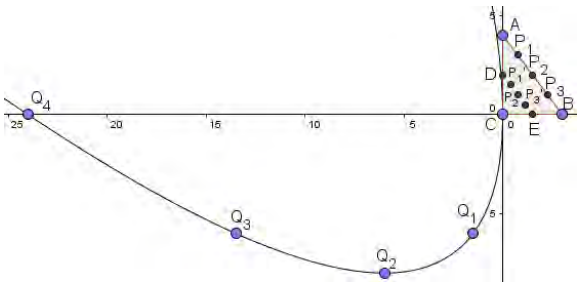
由平行線截比例線段性質知$\overline{Q_1C}=\overline{P_1C}=2\overline{P_1'C}$，同理$\overline{Q_2C}=4\overline{P_2'C}$，$\overline{Q_3C}=6\overline{P_3'C}$，$\overline{Q_4C}=8\overline{CE}$。由圖(10-1)可看出，對△ DEC來說，這條拋物線的投射應寫為(1111)$\overset{D}{\rightarrow}$[2、4、6、8]，為拋物線，得證，明顯的，如果將△ DEC放大成△ ABC來投射，則拋物線開口變大。

(2)、在承(1)的△ ABC中，分別在$\overline{CA}$、$\overline{CB}$上取 F、G，使$\overline{CF}=\frac{1}{3}\overline{CA}$，$\overline{CG}=\frac{1}{3}\overline{CB}$，連$\overline{FG}$，交$\overline{P_1C}$、$\overline{P_2C}$、$\overline{P_3C}$於$P_1''$、$P_2''$、$P_3''$，由比例線段性質知，$\overline{Q_1C}=\overline{P_1C}=3\overline{P_1''C}$，$\overline{Q_2C}=2\overline{P_2C}=6\overline{P_2''C}$，同理$\overline{Q_3C}=9\overline{P_3''C}$，$\overline{Q_4C}=12\overline{P_4''C}$。

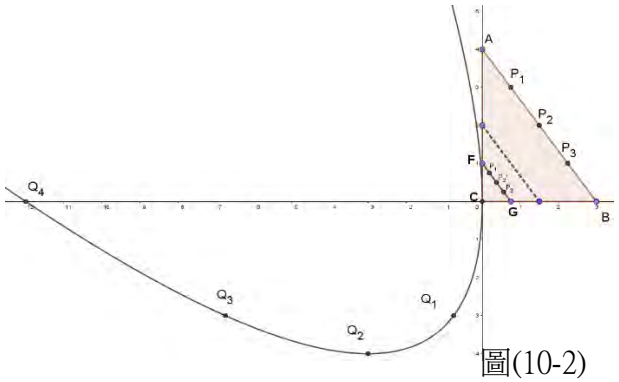
由圖(10-2)可看出，對△ FGC來說，這條拋物線的投射應寫為(1111)$\overset{D}{\rightarrow}$[3、6、9、12] ，為拋物線，得證。

(3)、承(1)同理在$\overline{CA}$、$\overline{CB}$上取 H、I，使$\overline{CH}=\frac{1}{k}\overline{CA}$，$\overline{CI}=\frac{1}{k}\overline{CB}$，連$\overline{HI}$，分別交於$P_1^k$、$P_2^k$、$P_3^k$，由比例線段性質知，$\overline{Q_1C}=k\overline{P_1^kC}$，$\overline{Q_2C}=2k\overline{P_2^kC}$，$\overline{Q_3C}=3k\overline{P_3^kC}$，$\overline{Q_4C}=4k\overline{P_4^kC}$。

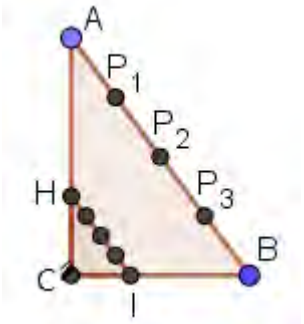
由圖(10-3)可看出，對△ HIC來說，這條拋物線的投射應寫為(1111)~~D~~ [k、2k、3k、4k] ，仍為拋物線，得證。



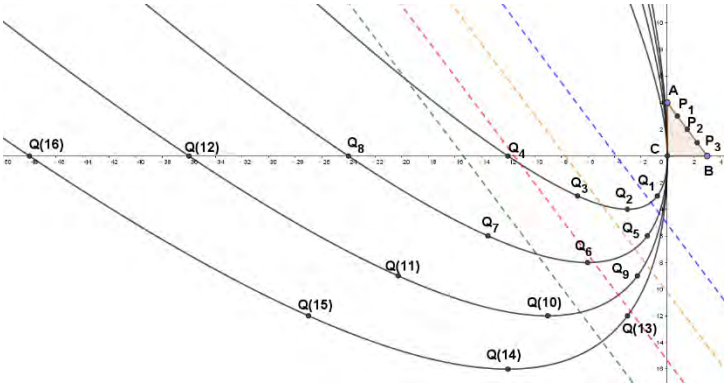
圖(10-1)



圖(10-2)



圖(10-3)



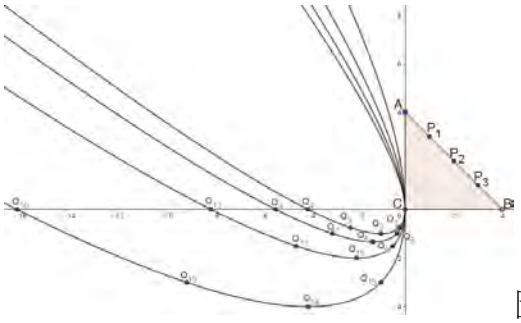
圖(10-4)

(三)、縮小為$\frac{1}{k}$倍投射倍率運算，列如下表(三)

投射運算	二元二次方程式	對稱軸	通過C
(1111)~~D~~[1、2、3、4]	$x^2+2xy+y^2+16x=0$	$x+y=-4$	√
(1111)~~D~~$[\frac{1}{2}、\frac{2}{2}、\frac{3}{2}、\frac{4}{2}]$	$x^2+2xy+y^2+8x=0$	$x+y=-2$	√
(1111)~~D~~$[\frac{1}{3}、\frac{2}{3}、\frac{3}{3}、\frac{4}{3}]$	$x^2+2xy+y^2+\frac{16}{3}x=0$	$x+y=\frac{-4}{3}$	√

表(三)

性質七：由表(三)知，在等分線段及等差投射中，若將投射倍率縮為原來的$\frac{1}{k}$倍，仍可投射出拋物線，且這群拋物線都通過投射△的第三頂點，諸拋物線對稱軸都平行於投射邊，開口大小變小，如圖(11-1)。



圖(11-1)

證明：(1)、同性質六之證明，只是作△ $CA'B'$為△ CAB的兩倍放大圖，此時

$\overline{Q_1C} = 1\overline{CP_1} = \frac{1}{2}\overline{CP'_1}$，$\overline{Q_2C} = 2\overline{CP_2} = \frac{2}{2}\overline{CP'_2}$

$\overline{Q_3C} = 3\overline{CP_3} = \frac{3}{2}\overline{CP'_3}$， $\overline{Q_4C} = \overline{CP_4} = \frac{4}{2}\overline{CB'}$

由圖(11-2)，對△ $A'B'C$來說，這條拋物線投射可記為(1111)$\not{D}$[$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{4}{2}$]

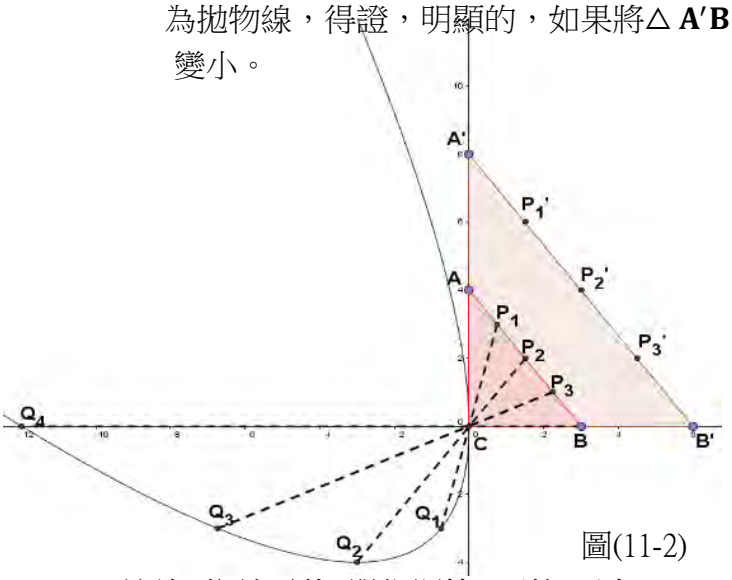
仍為拋物線

(2)、同理，在$\overline{CA''}$、$\overline{CB''}$上，作$\overline{CA} = \frac{1}{k}\overline{CA''}$，$\overline{CB} = \frac{1}{k}\overline{CB''}$

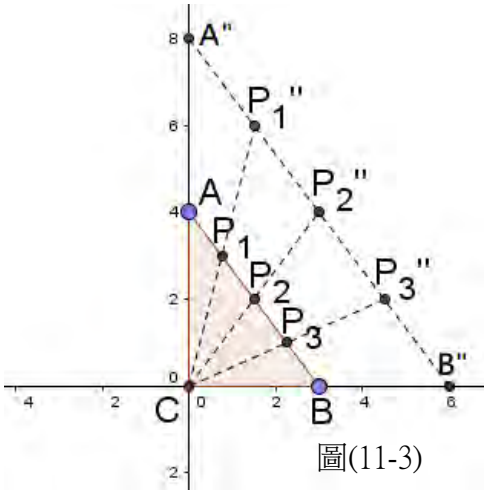
$\overline{CQ_1} = \overline{CP_1} = \frac{1}{k}\overline{CP_1''}$、$\overline{CQ_2} = 2\overline{CP_2} = \frac{2}{k}\overline{CP_2''}$、$\overline{CQ_3} = 3\overline{CP_3} = \frac{3}{k}\overline{CP_3''}$、$\overline{CQ_4} = 4\overline{CP_4} = \frac{4}{k}\overline{CB''}$

由圖(11-3)，對△ $A''B''C''$來說，這條拋物線可記為(1111)$\not{D}$[$\frac{1}{k}$、$\frac{2}{k}$、$\frac{3}{k}$、$\frac{4}{k}$]

為拋物線，得證，明顯的，如果將△ **A′B′C**縮小成△ ABC來投射，則拋物線開口變小。



圖(11-2)



圖(11-3)

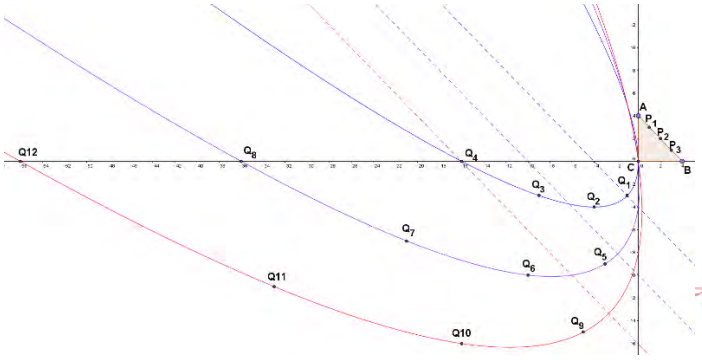
(四)、縮放n倍並平移k單位運算，到如下表(四)

投射運算	二元一次方程式	對稱軸	通過C
(1111)$\not{D}$[1、2、3、4]	$x^2 + 2xy + y^2 + 16x = 0$	$x + y = -4$	√
(1111)$\not{D}$ [2×1+1、2×2+1、2×3+1、2×4+1]	$x^2 + 2xy + y^2 + 36x + 4y = 0$	$x + y = -8$	√
(1111)$\not{D}$ [3×1+2、3×2+2、3×3+2、3×4+2]	$x^2 + 2xy + y^2 + 56x + 8y = 0$	$x + y = -20$	√
(1111)$\not{D}$ [4×1+3、4×2+3、4×3+3、4×4+3]	$x^2 + 2xy + y^2 + 57x = 0$	$x + y = -112$	√

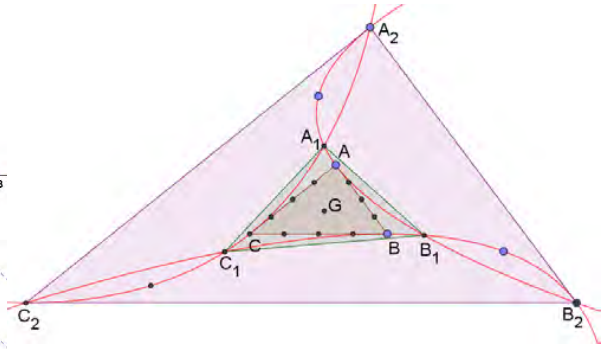
表(四)

性質八：由表(四)知，在等分線段及等差投射倍率中，若將投射倍率同時縮放平移，仍可投射出圓錐曲線中的拋物線圖形，且這群拋物線都通過投射△的第三頂點，諸拋物線對稱軸都平行於投射邊，如圖(12)。

證明：結合上面兩個性質的證明即可。



圖(12)



圖(13)

性質九：在△三邊上皆做N等分，並在各邊上同順時針(或同逆時針方向)做等差倍率投射，恆可投射出圓錐曲線中拋物線圖形，且這些圖形兩兩之間各有兩個交點，這六個交點依對應位置組成兩個△，這兩個△和原△ ABC共用重心，如圖(13)。

證明：如圖(13)，用計算可證明△ $A_2B_2C_2$和△ $A_1B_1C_1$和△ ABC三重心重合。(見研究日誌)

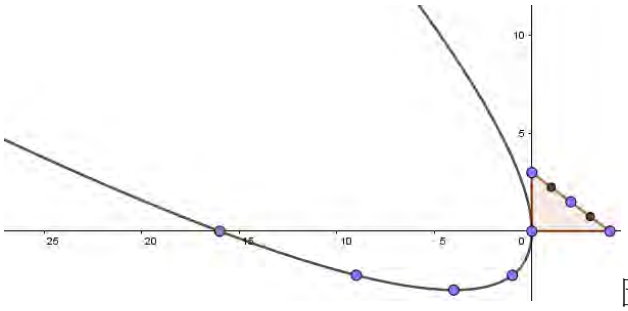
三、在不等分投射邊條件下做等差投射之投射圖形探討

(一)、研究限制說明：

在圖(1)中的$\overline{AB}$做分段時，可分為等分和不等分兩種，當$N=4$，$L=4$ 時表示做等分，當$N=4$，$L\neq 4$ 時表示不等分，由於當L愈來愈大時，就算取$N=4$為定值，其圖形種類仍會快速增加至上千上萬種，因此我們只將$L=4$、5、6、7放在報告上，後面還有三千多個圖放在研究日誌上，我們是用來觀察分類。而$N>4$ 時，我們只將研究範圍限制在$N=L$做等分的條件下，另外增加幾組 N＞4，L≠N 的特殊投射範例

(二)、投射圖形觀察，取$N=4$，$L=4$ 到 $L=16$，且都是做[1、2、3、4]投射

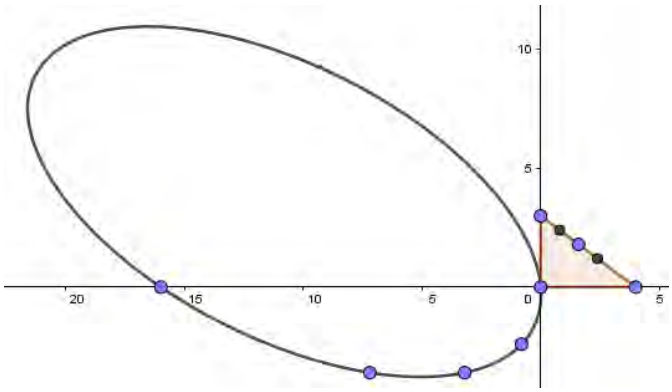
1、$N=4$，$L=4$，如圖(14)



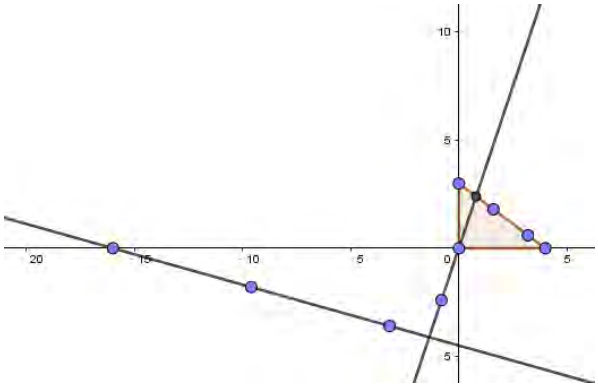
圖(14)，$(1、1、1、1)$~~D~~$[1、2、3、4]$

橢圓	雙曲線	拋物線	相交線	平行線	一點一線
0	0	1	0	0	0

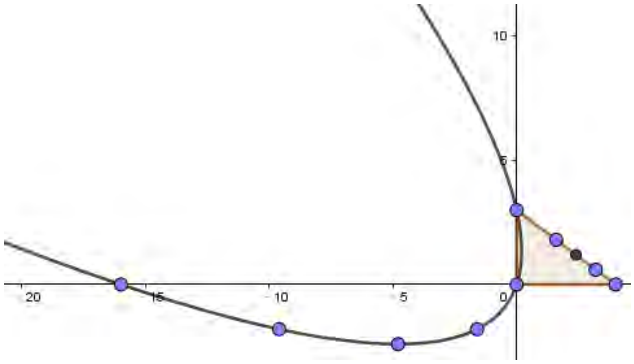
2、N = 4，L = 5，如圖(15~18)



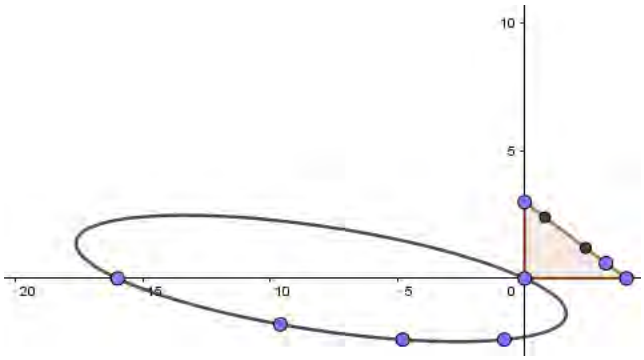
圖(15)，(1112)



圖(16)，(1121)



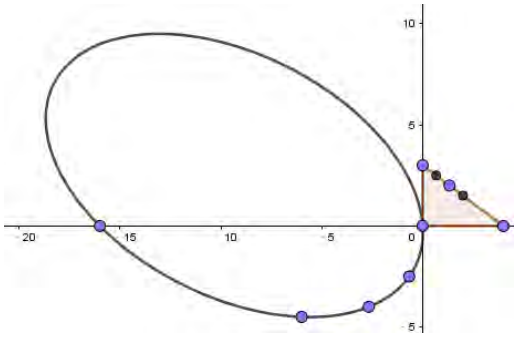
圖(17)，(2111)



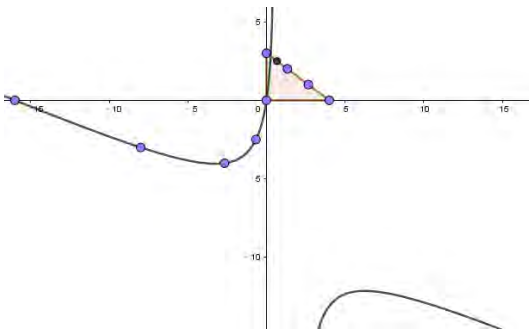
圖(18)，(1211)

橢圓	雙曲線	拋物線	相交線	平行線	一點一線
2	0	1	1	0	0

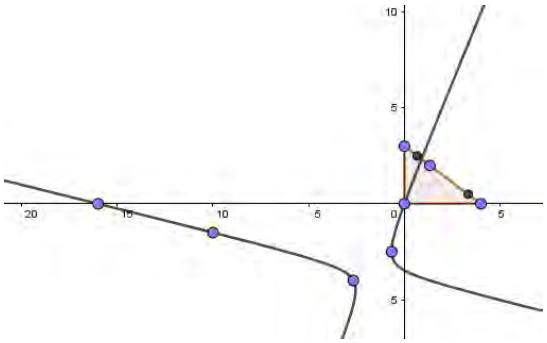
3、N = 4，L = 6，如圖(19~28)



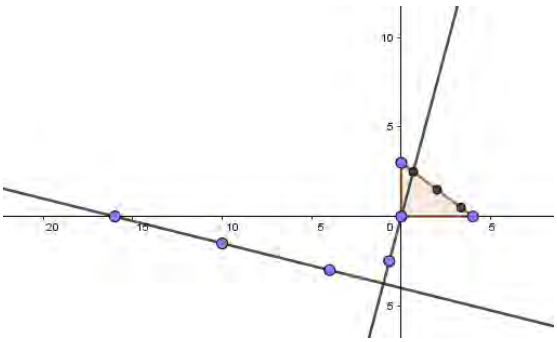
圖(19)，(1113)



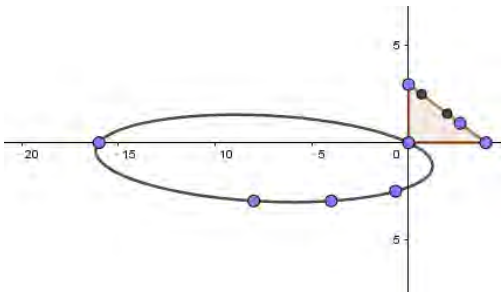
圖(20)，(1122)



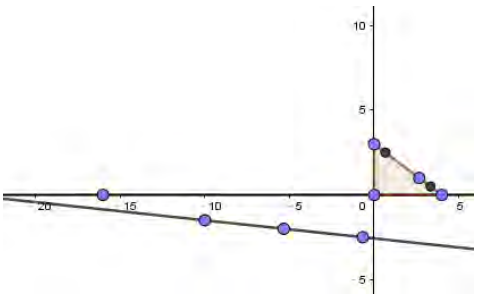
圖(21)，(1131)



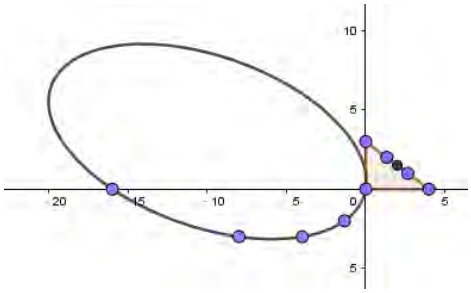
圖(22)，(1221)



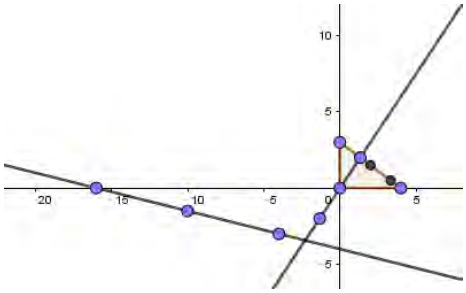
圖(23)，(1212)



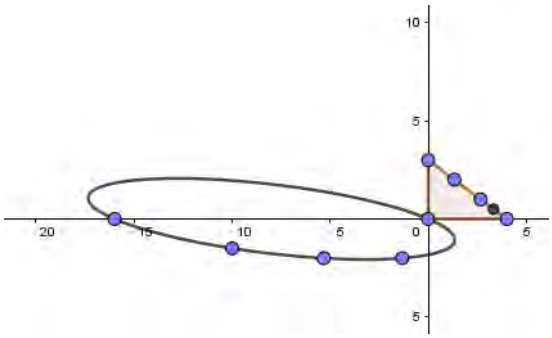
圖(24)，(1311)



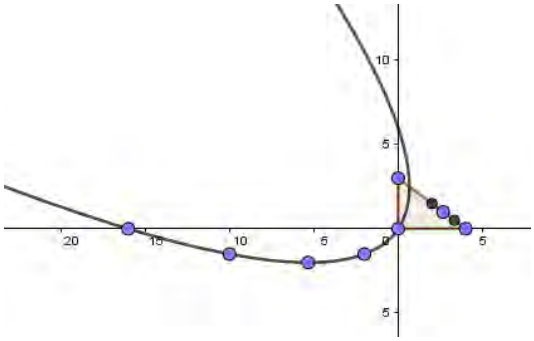
圖(25)，(2112)



圖(26)，(2121)



圖(27)，(2211)



圖(28)，(3111)

橢圓	雙曲線	拋物線	相交線	平行線	一點一線
4	2	1	3	0	0

4、當$N=4$時，L為$7\sim16$時，綜合成下表

	橢圓	雙曲線	拋物線	相交線	平行線	一點一線
$L=7$	6	6	2	5	1	0
$L=8$	10	14	2	6	1	0
$L=9$	16	26	2	11	1	0
$L=10$	21	38	3	20	1	1
$L=11$	28	67	3	18	1	1
$L=12$	39	91	3	31	1	1
$L=13$	50	126	4	37	2	1
$L=14$	66	169	4	43	2	1
$L=15$	86	220	4	51	2	1
$L=16$	101	283	5	63	2	1

發現一：從上文$N=4$，$L=4$到16的投射圖形中，我們觀察到出現的圖形有拋物線、雙曲線、橢圓、相交兩直線、平行兩直線，一點及一直線，只差圓形，即可包含所有的圓錐曲線。

(三)、前面統整到$L=16$時，發現除了拋物線以外，還出現了橢圓、交叉直線、雙曲線、平行線和一點一線，以下就在探討部分圖形方程式，各給一些例子說明。

1、交叉直線：以$(1121)\overline{D}[1、2、3、4]$為例，計算證明，如圖(29)

得出方程式$-\frac{3}{16}x^2-\frac{29}{48}xy+\frac{2}{9}y^2-3x+y=0$

去分母得$27x^2+87xy-32y^2+432x-144y=0$

因式分解$(9x-3y)(3x+48)-32y(y-3x)=0$

$3(3x-y)(3x+48)+32y(3x-y)=0$，$(3x-y)(9x+32y+144)=0$

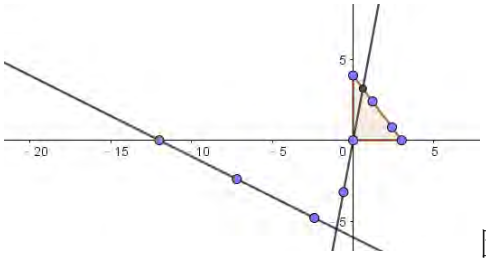
得$3x-y=0$或$9x+32y+144=0$為相異兩不平行直線，得證。

2、橢圓：以$(1211)\overline{D}[1、2、3、4]$為例，計算證明，如圖(30)

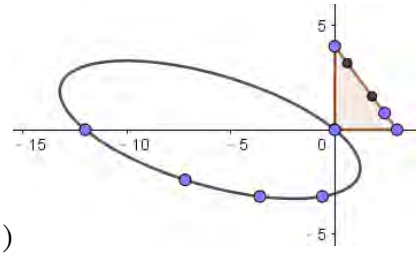
為$\frac{3}{104}x^2+\frac{1}{8}xy+\frac{17}{39}y^2-\frac{6}{13}x+y=0$是橢圓，($\because b^2-4ac<0$)

3、雙曲線：以$(1122)\overline{D}[1、2、3、4]$為例，計算證明，如圖(31)

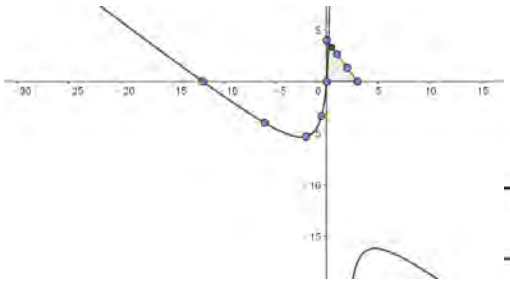
為$-\frac{100}{99}x^2-\frac{4}{3}xy-\frac{1}{44}y^2-\frac{400}{33}x+y=0$是雙曲線，($\because b^2-4ac>0$)



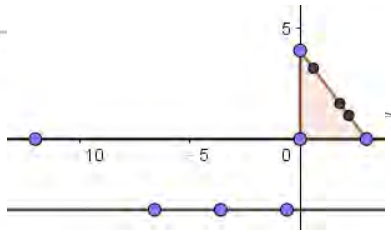
圖(29)，(1121)



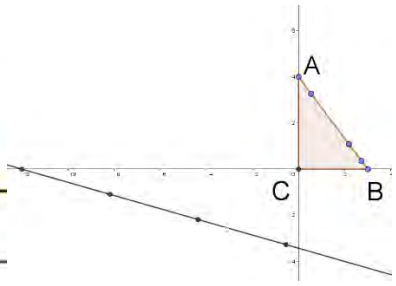
圖(30)，(1211)



圖(31)，(1122)



圖(32)，(3624)



圖(33)，(2621)

4、平行線：以$(3624)\overline{D}[1、2、3、4]$為例，計算證明，如圖(32)

為$\frac{5}{16}y^2+y=0$，因式分解成$y(5y+16)=0$

得$y=0$或$5y+16=0$為兩條平行的水平直線，得證。

5、一點一線：以$(2621)\overline{D}[1、2、3、4]$為例，即投射出一直線加C點，如圖(33)

6. 單一點：以$(1234)\overline{D}[0、0、0、0]$為例，即得C點

(四)、橢圓、雙曲線的投射倍率縮放平移探討

當$N=4$，$L>4$的不等分狀態，在$[1、2、3、4]$的倍率投射產生橢圓或雙曲線時，討論投射倍率組合縮放平移對投射圖形的影響。

1、橢圓投射之投射倍率組合的縮放平移探討

直角△ ABC中，$A(0，4)$、$B(3，0)$、$C(0，0)$，將$\overline{AB}$五等分，得四等分P_1、P_2、P_3、P_4

向C點做投射，如圖(34-1)做$(1112)\overset{D}{\rightarrow}[1、2、3、4]$，得橢圓$T_1$

再做$(1112)\overset{D}{\rightarrow}[2、4、6、8]$，得橢圓$T_2$

再做$(1112)\overset{D}{\rightarrow}[3、6、9、12]$，得橢圓$T_3$

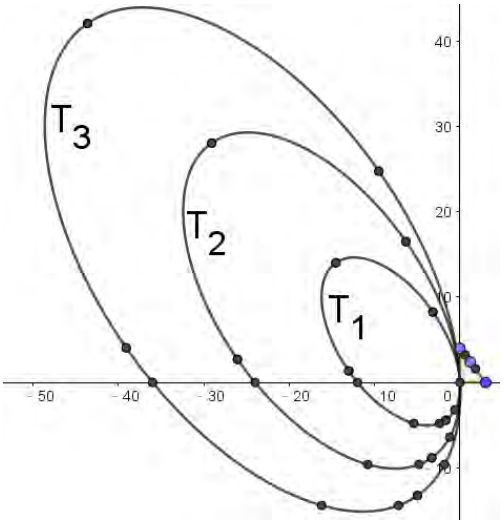
檢驗諸橢圓相似，長軸比$1：2：3$，面積比$1：4：9$，故橢圓投射可做投射倍率組合的縮放，接著我們試試看是否可做倍率平移？

做 $(1112)\overset{D}{\rightarrow}[1、2、3、4]$，得橢圓$T_1$

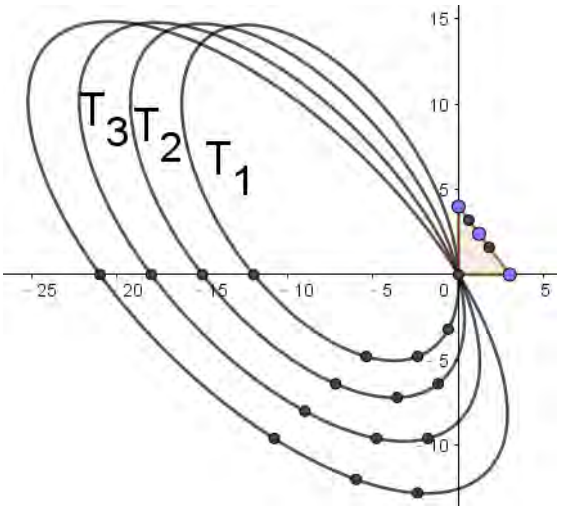
$(1112)\overset{D}{\rightarrow}[1+1、2+1、3+1、4+1]$，得橢圓$T_2$

$(1112)\overset{D}{\rightarrow}[1+2、2+2、3+2、4+2]$，得橢圓$T_3$

檢驗諸橢圓長短軸有變化，做投射倍率平移組合：仍可投射出橢圓，如圖(34-2)



圖(34-1)，(1112)



圖(34-2)，(1112)

性質十：在橢圓的投射中，針對投射倍率組合做縮放平移後，仍可投射出橢圓。

2、雙曲線投射之投射倍率組合的縮放平移探討

在△ ABC中，$A(0，5)$、$B(12，0)$、$C(0，0)$

將$\overline{AB}$十三等分，取$\overline{AP_1}：\overline{P_1P_2}：\overline{P_2P_3}：\overline{P_3B}=1：5：6：1$，對C點做投射，

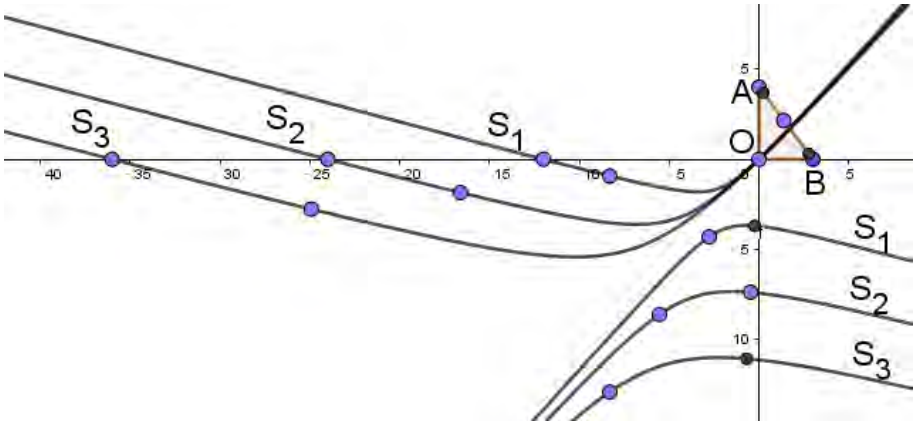
做$(1561)\overset{D}{\rightarrow}[1、2、3、4]$，得雙曲線$S_1$

再做$(1561)\overset{D}{\rightarrow}[2、4、6、8]$，得雙曲線$S_2$

再做$(1561)\overset{D}{\rightarrow}[3、6、9、12]$，得雙曲線$S_3$，如圖(35)

檢驗諸雙曲線對稱軸都平行，故投射倍率組合可縮放，再做(1561)$\overset{D}{\rightarrow}$[1、2、3、4]，得雙曲線S_1，做(1561)$\overset{D}{\rightarrow}$(1+1、5+1、6+1、7+1)得雙曲線S_2，(1561)$\overset{D}{\rightarrow}$[1+2、5+2、6+2、1+2]，得雙曲線S_3，如圖(35)，雖然得不同雙曲線，但仍可做平移。

性質十一：在雙曲線的投射中，針對投射倍率組合做縮放平移後，仍可投射出雙曲線。



圖(35) (1561)

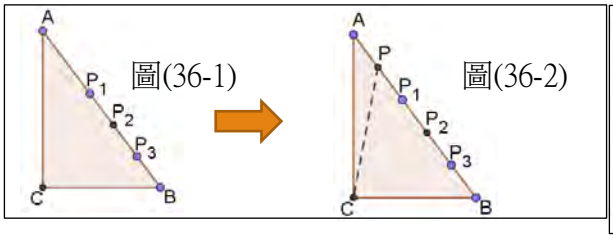
四、在 N=4，L>4 的[1、2、3、4]投射下，橢圓、雙曲線的分段組合類型快速判別法探討

經過$N=4$，$L>4$的[1、2、3、4]等差投射倍率所得投射圖形整理表的分析後，我們找到一些有趣的投射分段組合規律，經由這些規律，我們可不用做圖即可輕易的說出該分段組合必投射出哪一種圓錐曲線的圖形，敘述如下：

性質十二：型如(x111)的分段組合，其中 x 為任意正數，按[1、2、3、4]投射後，必可得拋物線圖形。

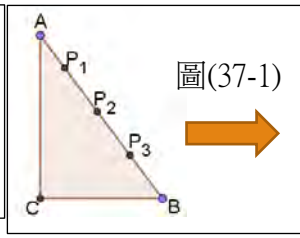
證明：(1)、當$x \geq 1$時，如圖(36-1)、圖(36-2)，P點取在$\overline{AP_1}$內，使$\overline{PP_1} = \overline{P_1P_2}$，在 △ PCB中做$(1111)$ ⊅ $[1、2、3、4]$，根據性質一知，圖形必為拋物線。

(2)、當$0 < x < 1$時，P點取在$\overrightarrow{BA}$上的外側，如圖(37-1)、圖(37-2)，使$\overline{PP_1} = \overline{P_1P_2}$*即成*。

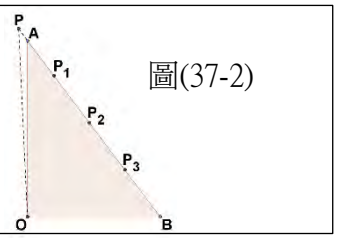


圖(36-1)

圖(36-2)



圖(37-1)



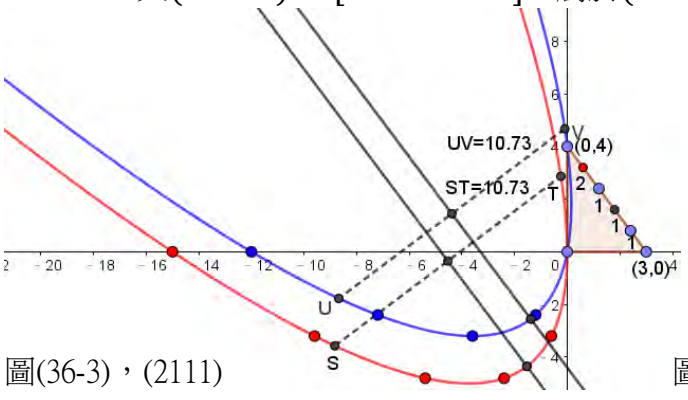
圖(37-2)

例如：

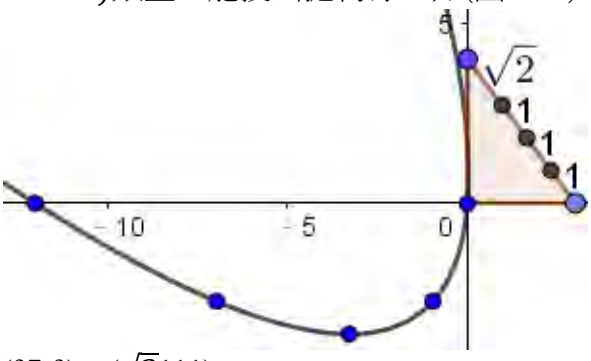
1 、 在 △ ABC 中的$(2、1、1、1)$ ⊅ $[1、2、3、4]$ = 在 △ PCB 中的$(1、1、1、1)$ ⊅ $[1、2、3、4]$，如圖(36-1)和圖(36-2)。這可說明為等分線段，作等差數列投射的類型，根據性質四知必為拋物線，再根據性質五，它可做投射倍率的縮放平移，且開口大小不變$(\overline{ST} = \overline{UV})$，如圖(36-3)。

2. 又(3444) ⊅ $[1、2、3、4] = \left(\frac{3}{4}、1、1、1\right)$ ⊅ $[1、2、3、4]$如圖(37-1)和圖(37-2)。

3. 又$(\sqrt{2}111)$ ⊅ $[1、2、3、4]$，屬於$(x、1、1、1)$類型，能投出拋物線，如(圖 37-3)



圖(36-3)，(2111)



圖(37-3)，$(\sqrt{2}111)$

性質十三：型如(r，k，k，s)的分段組合，r、k為任意正整數，s > k，按[1、2、3、4]投射後，必可得橢圓，如圖(38)。

證明：在直角ΔABC中，A(0，4)、B(4，0)、C(0，0)

$P_1=(\frac{4r}{r+2k+s}，\frac{4(2k+s)}{r+2k+s})$、$P_2=(\frac{4r+4k}{r+2k+s}，\frac{4(k+s)}{r+2k+s})$、$P_3=(\frac{4r+8k}{r+2k+s}，\frac{4s}{r+2k+s})$、$P_4=(4，0)$

投射得$Q_1=(\frac{-4r}{r+2k+s}，\frac{-4(2k+s)}{r+2k+s})$、$Q_2=(\frac{-8r-8k}{r+2k+s}，\frac{-8(k+s)}{r+2k+s})$、$Q_3=(\frac{-12r-24k}{r+2k+s}，\frac{-12s}{r+2k+s})$、

$Q_4=(-16，0)$

將Q_1、Q_2、Q_3、Q_4代入$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，得$f=0$、$e=1$

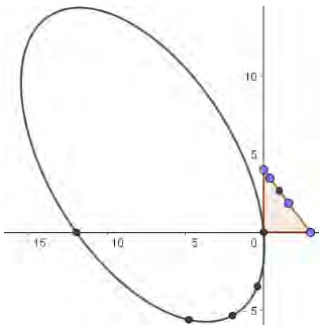
$a=\frac{-es^3-3eks^2-2ek^2s}{16k^3-16ks^2+16rs^2+8k^2r-24k^2s}$、$b=\frac{-2eks^2+ers^2-4ek^2s-ekrs}{8k^3-8ks^2+8rs^2+4k^2r-12k^2s}$、

$c=\frac{4ek^3+ekr^2-4eks^2+4ek^2r-6ek^2s-er^2s-4ekrs}{16k^3-16ks^2+16rs^2+8k^2r-24k^2s}$、$d=\frac{-4ek^2s-6eks^2b-2es^3}{2k^3+k^2r-3k^2s-2ks^2+2rs^2}$

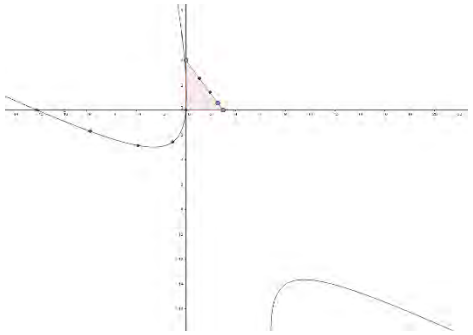
最後以b^2-4ac驗證

$$-4\left(-s^3-3ks^2-2k^2s\right)\frac{4k^3+kr^2-4ks^2+4k^2r-6k^2s-r^2s-4krs}{\left(16k^3-16ks^2+16rs^2+8k^2r-24k^2s\right)^2}+\left(\frac{-2ks^2+rs^2-4k^2s-krs}{8k^3-8ks^2+8rs^2+4k^2r-12k^2s}\right)^2<0$$

隨意帶入數字 k 為 1，r 為 2，s 為 3，得$-\frac{1029}{676}<0$為橢圓



圖(38)，(2337) ~~D~~ [1、2、3、4]



圖(39-1)，(5432)~~D~~ [1、2、3、4]

性質十四：型如(q，q + k，q + 2k，q + 3k)的分段組合，k為任意整數，(1)若k < 0，取q > |3k|，如圖(39-1)，取 q=5，k=-1 。(2)若k > 0，取q為任意正整數。按[1、2、3、4]投射後，必可得雙曲線或交叉直線。如圖(39-2)，取 q=5，k=1

證明：見研究日誌

性質十五：型如(n，k，n + k，n + 2k)的分段組合，n、k為任意正整數，按[1、2、3、4]投射後，必可得雙曲線或交叉直線，如圖(39-3)。

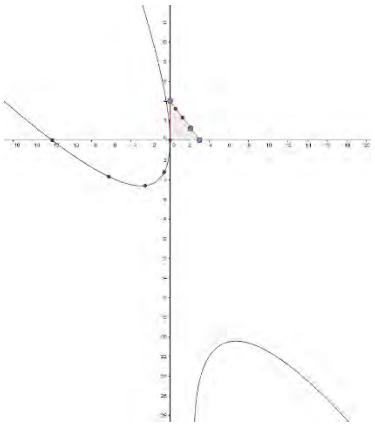
證明：在直角ΔABC中，A(0，4)、B(4，0)、C(0，0)，將分點座標P_1、P_2、P_3、P_4，按[1、2、3、4]投射得Q_1、Q_2、Q_3、Q_4代入$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$計算得

$$\left\{a=\frac{-6k^2-2n^2-7kn}{4k^2+16n^2+28kn}\right\}\left\{b=\frac{-30k^2-10n^2-35kn}{8k^2+32n^2+56kn}\right\}\left\{c=\frac{k^2+3n^2+5kn}{4k^2+16n^2+28kn}\right\}$$

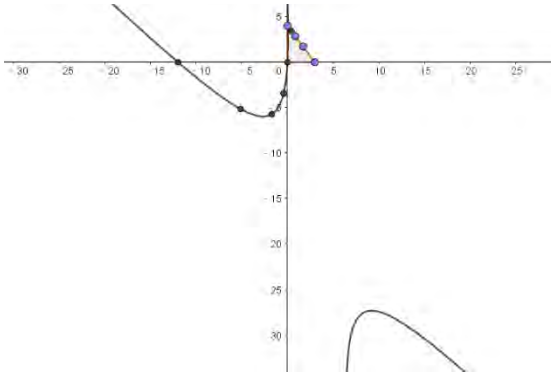
$$\left\{d=\frac{-24k^2-8n^2-28kn}{k^2+4n^2+7kn}\right\}$$

代入a，b，c，d而且$e=1$ $f=0$

驗證得$b^2-4ac>0$，得證圖形為雙曲線或交叉直線。



圖(39-2)，(5678) ⊅ [1、2、3、4]



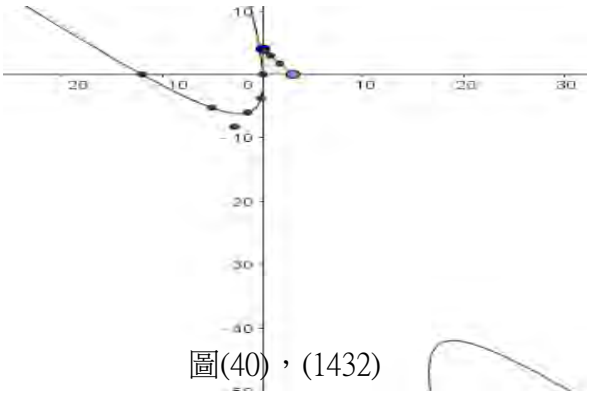
圖(39-3)，(1123) ⊅ [1、2、3、4]

性質十六：型如(r、n + 1、n、s)的分段組合，s < n，r、s、n都是正整數，按[1、2、3、4]投射後，必可得雙曲線或交叉直線，如圖(40)。

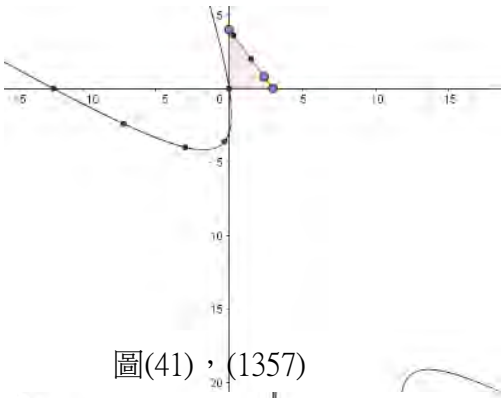
性質十七：型如(n、n + k、n + 2k、n + 3k)的分段組合，其中n是正整數，3k + n ≥ 0，按[1、2、3、4]投射後，必可得雙曲線或交叉直線，如圖(41)。

性質十八：型如(t、t、r、r)的分段組合，r、t都是正整數，按[1、2、3、4]投射後，r > t時，圖形為雙曲線，當r < t時，圖形為橢圓，如圖(42)。

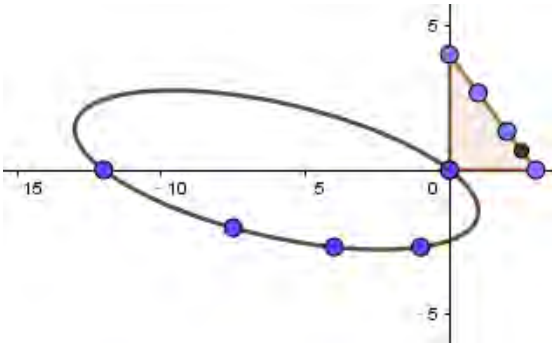
性質十九：型如(k、nk、n^2k、s)的分段組合，k、s為任意正整數，按[1、2、3、4]投射後，必可得雙曲線或交叉直線，如圖(43)。



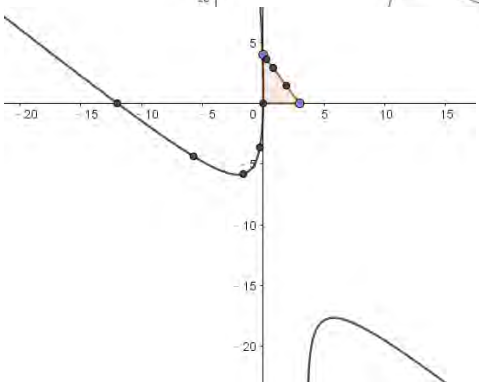
圖(40)，(1432)



圖(41)，(1357)



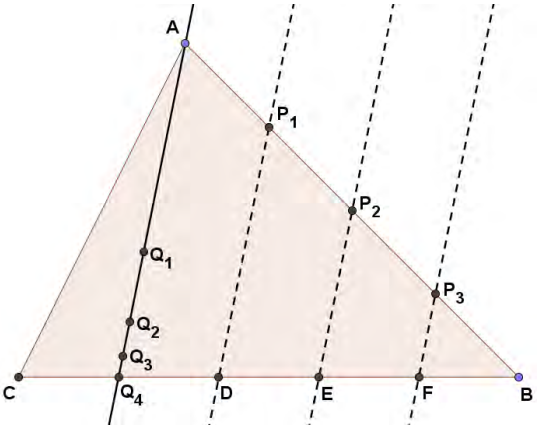
圖(42)，(2211)



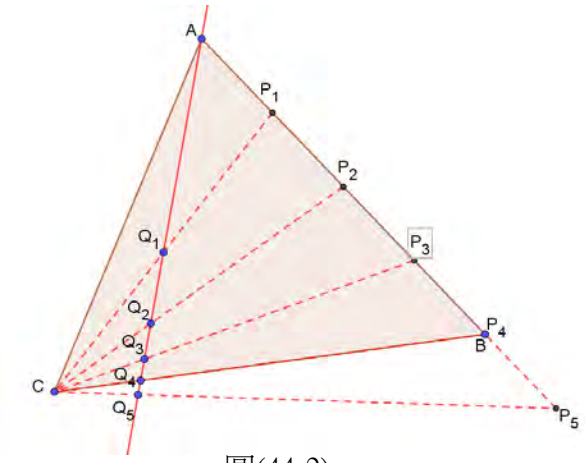
圖(43)，(1244)

五、探討 (1111)⊕ $[\frac{-1}{k}、\frac{-1}{k+1}、\frac{-1}{k+2}、\frac{-1}{k+3}]$的圖形及性質

(一)、已知△ ABC中，P_1、P_2、P_3四等分$\overline{AB}$，Q_1為$\overline{CP_1}$中點，作$\overleftrightarrow{AQ_1}$分別交$\overline{CP_2}$、$\overline{CP_3}$、$\overline{CB}$於$Q_2$、$Q_3$、$Q_4$，則此$\overleftrightarrow{AQ_4}$和 C 點即$(1111)$⊕ $\left[\frac{-1}{2}、\frac{-1}{3}、\frac{-1}{4}、\frac{-1}{5}\right]$的圖形，如圖(44-1)



圖(44-1)



圖(44-2)

證明:

(1). 分別過P_1、P_2、P_3做直線平行$\overleftrightarrow{AQ_1}$，各交$\overline{CP_2}$、$\overline{CP_3}$、$\overline{CB}$於 D、E、F

由平行線段截比例線段性質知$\overline{CQ_4}=\overline{Q_4D}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FB}$　∴ $\overline{CQ_4}=\frac{1}{5}\overline{CB}$

(2). 同理可證$\overline{CQ_3}=\frac{1}{4}\overline{CP_3}$，$\overline{CQ_2}=\frac{1}{3}\overline{CP_2}$，$CQ_1=\frac{1}{2}CP_1$，又 C 點=$Q_0$

故在ΔABC中，即為(1，1，1，1)⊕【$\frac{-1}{2}、\frac{-1}{3}、\frac{-1}{4}、\frac{-1}{5}$】，得$\overleftrightarrow{AQ_4}$的直線及 C 點圖形。

(二)、　反過來說，在任意ΔABC的邊上四等分，等分點為P_1、P_2、P_3，並做(1，1，1，1)⊕【$\frac{-1}{2}、\frac{-1}{3}、\frac{-1}{4}、\frac{-1}{5}$】，投射出來的圖形必為一直線。

(三)、　如圖(44-2)，在$\overline{AB}$上，取一點P_5，使$\overline{P_5P_4}=\overline{P_4P_3}$，連$CP_5$，交$\overline{AQ_1}$，於$Q_5$如同圖(44-1)的證明方法，很容易可得$\overline{CQ_5}=\frac{1}{6}\overline{CP_5}$，因此在$\Delta P_1P_5C$中的投射即可記為(1，1，1，1)⊕【$\frac{-1}{3}、\frac{-1}{4}、\frac{-1}{5}、\frac{-1}{6}$】

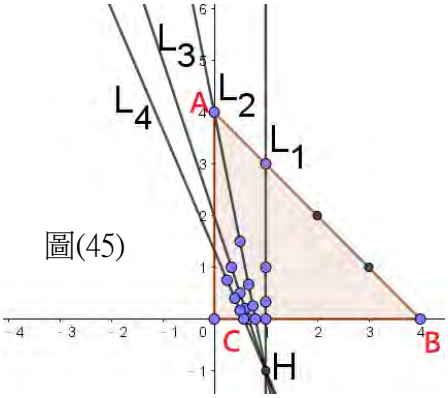
(四)、　同理可以一直擴展下去，獲得下列性質:

性質二十：在Δ的一邊上四等分，並從等分點向對面第三頂點做(1111)⊕ $[\frac{-1}{k}、\frac{-1}{k+1}、\frac{-1}{k+2}、\frac{-1}{k+3}]$，k 為正整數，則所得的投射圖形必為一直線及頂點 C

性質二十一：在Δ的一邊上四等分，並從等分點向對面第三頂點做(1111)⊕ $[\frac{-1}{k}、\frac{-1}{k+1}、\frac{-1}{k+2}、\frac{-1}{k+3}]$，k 為正整數，若給定一個 k 值可得一直線，則所有的直線會共點

證明

(1). 不失一般性，取直角△ **ABC**來證明，
其中$\mathbf{A(0,a)}$、$\mathbf{B(b,0)}$、$\mathbf{C(0,0)}$，在$\overline{AB}$上的四等分點$P_1(\frac{b}{4},\frac{3a}{4})$、$P_2(\frac{b}{2},\frac{a}{2})$、$P_3(\frac{3b}{4},\frac{a}{4})$



圖(45)

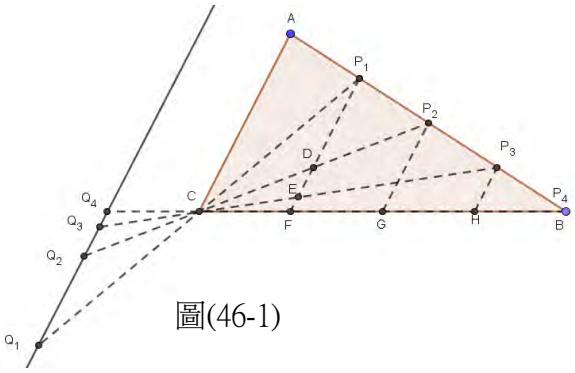
(2). 當 k=1 時，得$Q_1(\frac{b}{4},\frac{3a}{4})$，$Q_2(\frac{b}{4},\frac{a}{4})$，
計算得直線方程式為$L_1: x=\frac{b}{4}$

(3). 當 k=2 時，得$Q_1(\frac{b}{8},\frac{3a}{8})$，$Q_3(\frac{3b}{16},\frac{a}{16})$，計算得直線方程式為$L_2: 5ax+by=ab$

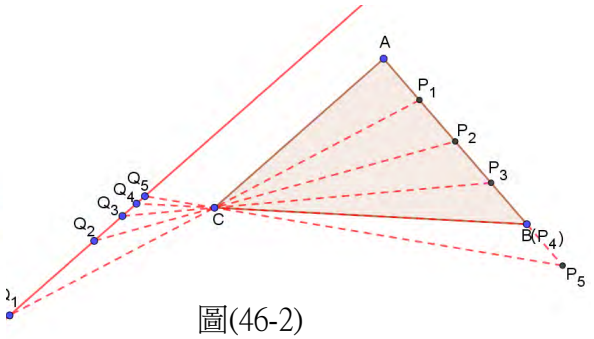
(4). 當 k=3 時，得$Q_1(\frac{b}{12},\frac{a}{4})$，$Q_2(\frac{b}{8},\frac{a}{8})$，計算得直線方程式為$L_3: 3ax+by=2ab$

(5). 分別算直線L_1和L_2的交點，得$(\frac{b}{4},-\frac{a}{4})$，又直線$L_1$和$L_3$的交點，得$(\frac{b}{4},-\frac{a}{4})$是同一點，得證

(五)、 已知在△ **ABC**中，P_1、P_2、P_3四等分$\overline{AB}$，在$\overrightarrow{P_1C}$上，取$\overline{Q_1C}=\overline{P_1C}$，過$Q_1$做一直線平行$\overline{AC}$，交$\overrightarrow{P_2C}$、$\overrightarrow{P_3C}$、$\overrightarrow{BC}$於$Q_2$、$Q_3$、$Q_4$，則此$\overleftrightarrow{Q_1Q_4}$及 C 點，即為$\mathbf{(1111)}$~~Đ~~$[\frac{1}{1}、\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、\frac{1}{4}]$所得的圖形。如圖(46-1)。



圖(46-1)



圖(46-2)

證明：

(1). 過P_1，作$\overline{P_1F}\parallel\overline{AC}$，交$\overline{P_2C}$、$\overline{P_3C}$於 D、E

(2). 同理作$\overline{P_2G}\parallel\overline{AC}$、$\overline{P_3H}\parallel\overline{AC}$

(3). ∵$\overline{P_3H}\parallel\overline{P_2G}\parallel\overline{P_1F}\parallel\overline{AC}\parallel\overline{Q_1Q_4}$及平行線截等比例線段的性質

∴ $\overline{CQ_1}=\overline{CP_1}$、$\overline{CQ_2}=\frac{1}{2}\overline{CP_2}=\overline{CD}$、$\overline{CQ_3}=\frac{1}{3}\overline{CP_3}=\overline{CE}$、$\overline{CQ_4}=\frac{1}{4}\overline{CP_4}=\overline{CF}$，故在此△ **ABC**中，此圖形$\overleftrightarrow{Q_1Q_4}$及 C 點為$\mathbf{(1111)}$~~Đ~~$[\frac{1}{1}、\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、\frac{1}{4}]$

(4). 反過來說，在**ΔABC**的一邊上四等分並做$\mathbf{(1111)}$~~Đ~~$[\frac{1}{1}、\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、\frac{1}{4}]$，所得的$\mathbf{Q_1}$、$Q_2$、$Q_3$、$Q_4$必共線。

(5). 如圖(46-2)，在$\overrightarrow{AB}$上，取$\overline{P_5P_4}=\overline{P_4P_3}$，連$\overrightarrow{P_5C}$，則$\mathbf{\Delta P_1P_5C}$的投射圖形可記為$\mathbf{(1111)}$~~Đ~~

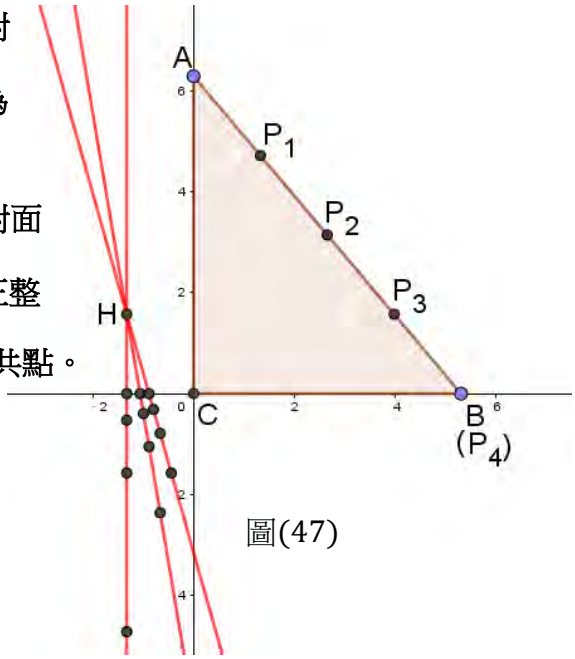
$[\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、\frac{1}{4}、\frac{1}{5}]$

(6). 同理繼續延伸下去，可得$(1111)\to[\frac{1}{k}、\frac{1}{k+1}、\frac{1}{k+2}、\frac{1}{k+3}]$，其投射圖形皆為一直線及一點 C。

由前文的說明可得下列性質

性質二十二：在Δ的一邊上四等分，並從等分點向對面第三頂點做$(1111)\to[\frac{1}{k}、\frac{1}{k+1}、\frac{1}{k+2}、\frac{1}{k+3}]$，k 為正整數，則所得的投射圖形必為一直線及一點 C

性質二十三：在Δ的一邊上四等分，並從等分點向對面第三頂點做$(1111)\to[\frac{1}{k}、\frac{1}{k+1}、\frac{1}{k+2}、\frac{1}{k+3}]$，k 為正整數，若給定一個 k 值可得一直線，則所有的直線會共點。



圖(47)

證明：仿照性質二十三的證明，如圖(47)，三直線 L_1、L_2、L_3，相交於 $H\left(-\frac{b}{4}，\frac{a}{4}\right)$

六、圓的投射探討

(一)、幾何作圖探討

在做完$N=4$，$L=4$ 到 16後，發現數千個投射圖形中竟然沒出現一個圓的投射圖，這在圓錐曲線中算是一大缺憾，我們猜想也許分段組合要重新考量，我們想了好久好久，終於找到一種方法，敘述如下：

步驟 1、一開始因為投射點$P_4=B$，做 4 倍$\overline{BO}$長的投射，得Q_4點，其中$\overline{Q_4O}=4\overline{BO}$且$\overline{B_4O}$為投射出的圓的直徑，此圓被稱為圓R，如圖(48-1)

步驟 2、(1)、再在圓R上任取三點D、E、F

(2)、以O為對稱點，分別作D、E、F的對稱點D'、E'、F'，作通過D'、E'、F'的圓S，和$\overline{AB}$相交於P_1，如圖(48-2)

(3)、分別作$\overline{DO}$、$\overline{EO}$、$\overline{FO}$的中點G、H、I，再以O為對稱點，做G、H、I的對稱點G'、H'、I'，做通過G'、H'、I'的圓，此圓和$\overline{AB}$相交於P_2，如圖(48-3)

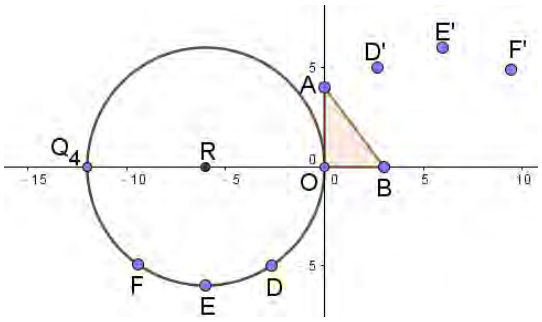
(4)、分別作$\overline{DO}$、$\overline{EO}$、$\overline{FO}$的$\frac{1}{3}$倍長的點，為U、V、W，再以O為對稱點，做U、V、W的對稱點U'、V'、W'，做通過U'、V'、W'的圓，此圓和$\overline{AB}$相交於P_3，如圖(48-4)。

(5)、接著做P_1、P_2、P_3及B的$[1、2、3、4]$投射，投出圓形即為所求

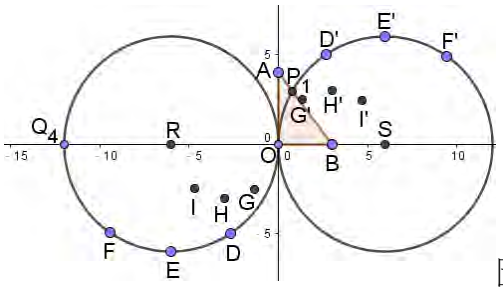
證明：在圖(48-2)中，由D'、E'、F'形成的圓S，由對稱點性質知，S點亦在 x 軸上，所以圓S和$\overline{AB}$的交點P_1，投射一倍$\overline{P_1O}$長得Q_1必在圓R上。

同理，圖(48-3)中的P_2點，投射二倍$\overline{P_2O}$長得Q_2必在圓R上，又如圖(48-4)中的P_3點，投射三倍$\overline{P_3O}$長得Q_3必在圓R上，加上一開始取的P_4點，由四倍$\overline{BO}$長而來。

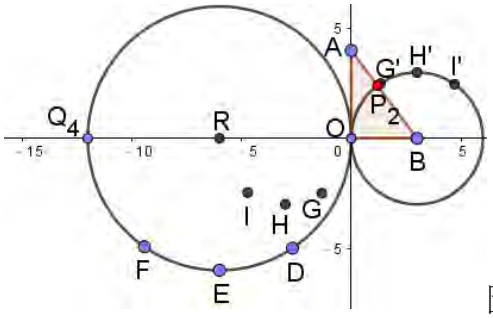
因此$(\overline{AP_1}、\overline{P_1P_2}、\overline{P_2P_3}、\overline{P_3B})\to[1、2、3、4]$即得一個圓，得證。



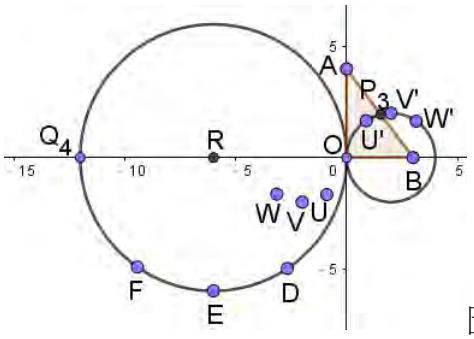
圖(48-1)



圖(48-2)



圖(48-3)



圖(48-4)

接下來，實際用一個例子解釋

設直角坐標平面上有一個△ ABC，$A(0，4)$、$B(3，0)$、$C(0，0)$，如圖(48-1)

由圓R的圓心$(-6，0)$，半徑為 6

可得圓R之方程式為$(x+6)^2+y^2=36$，依前文作圖法，取得各 P 點的座標，得到

$\overline{AB}$的分段組合為$(\frac{1621046}{1246087}、\frac{871128}{1246087}、\frac{665335}{1173493}、\frac{2855144}{1173493})$

又投射倍率組合為$[1、2、3、4]$

依上述分段組合及投射倍率組合，即可投射出一個圓。

(二)、代數運算投射：

在前文投射分類表中，我們得到一個概念，用投射倍率組合$[1、2、3、4]$投射時，能投出橢圓的分段組合的第一個分量，大多數都是 1，而圓很接近橢圓，故我們先假設$(1、r、s、t)$~~D~~ $[1、2、3、4]$會投射出圓來。同樣的使用直角△，三邊長為 3、4、5 為例，去計算r、s、t的值，計算如下：

步驟 1、$A(0，4)$、$B(3，0)$，P_1，P_2，P_3，將$\overline{AB}$分成 1：r：s：t 四段，先算P_1、P_2、P_3的座標。設$(x，y)$，如圖(49-1)

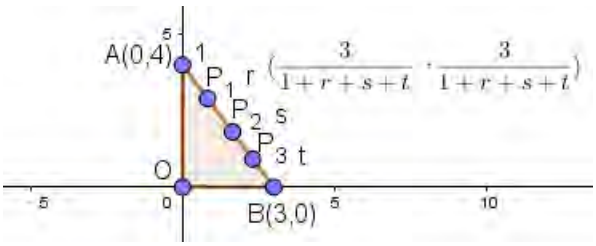
$P_1(\frac{3}{1+r+s+t}，\frac{4r+4s+4t}{1+r+s+t})$、 $P_2(\frac{3+3r}{1+r+s+t}，\frac{4s+4t}{1+r+s+t})$、$P_3(\frac{3+3r+3s}{1+r+s+t}，\frac{4t}{1+r+s+t})$

步驟 2、依$[1、2、3、4]$投射，計算Q_1、Q_2、Q_3、Q_4

$Q_1(\frac{-3}{1+r+s+t}，-\frac{4r+4s+4t}{1+r+s+t})$

$Q_2(\frac{-6-6r}{1+r+s+t}，-\frac{8s+8t}{1+r+s+t})$

$Q_3(\frac{-9-9r-9s}{1+r+s+t}，\frac{-12t}{1+r+s+t})$



加上$Q_0(0，0)$及$Q_4(-12，0)$都應在同一圓上 圖(49-1)

步驟 3、將Q_1、Q_2、Q_3代入圓R方程式$(x+6)^2+y^2=36$

令$1+r+s+t=k$，

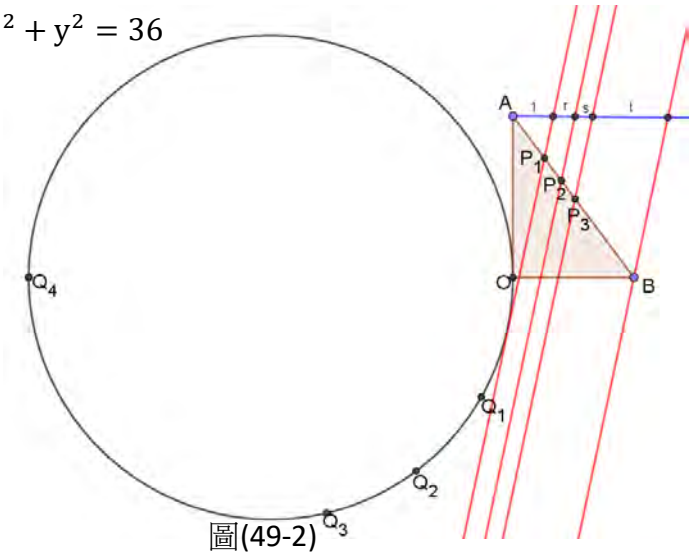
$$\begin{cases} \left(6-\frac{3}{k}\right)^2+\left(\frac{4k-4}{k}\right)^2=36\text{——①} \\ (6-\frac{6+6r}{k})^2+[\frac{8(k-1-r)}{k}]^2=36\text{——②} \\ [6-\frac{9(k-t)}{k}]^2+(\frac{12t}{k})^2=36\text{——③} \end{cases}$$

由①式解得$k=\frac{17+3\sqrt{21}}{8}$

由②式解得$r=\frac{3\sqrt{21}-3}{20}$

由③式解得$t=\frac{177+43\sqrt{21}}{200}$

得$s=k-1-r-t=\frac{\sqrt{21}+39}{100}$



圖(49-2)

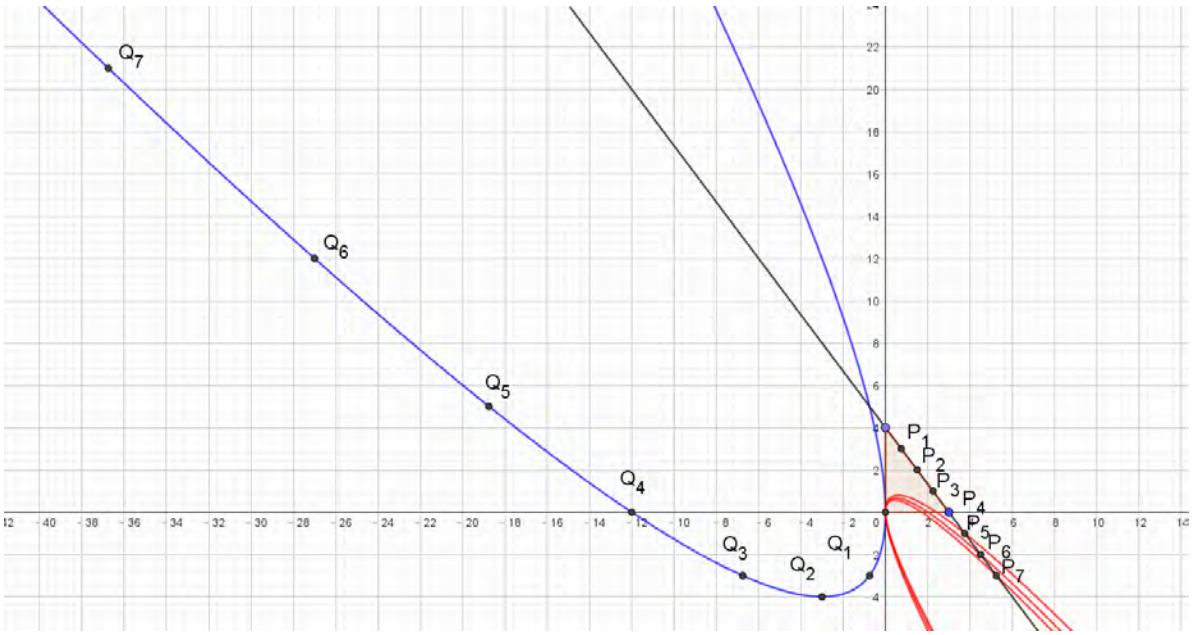
步驟 4、在$\overline{AB}$上依 1：r：s：t 取得分點P_1、P_2、P_3做$(1、r、s、t)$ ~~D~~ $[1、2、3、4]$得出圓R，如圖(49-2)

發現二：在任何△的投射中，可用幾何作圖投射或代數運算投射，投射出圓錐曲線中的圓形。

七、探討在分段數N＞4時，哪些圓錐曲線的投射長度可以延伸下去？又要怎麼延伸？

一般來說，N=4 共有五個投射點(含兩端點)，五個點可決定屬於哪一種圓錐曲線，但當 N 大於 4，例如 N=5，有 4 個分點加上頭尾兩端點共有 6 個投射點，此時，絕大部分投射後皆不成圓錐曲線了。但若第六點也恰好落在之前五點所在的圓錐曲線上，那不就成了六點共一條圓錐曲線了嗎?這時分點組合$(a_1、a_2、a_3…)$和投射倍率組合〔r_1、r_2、r_3…〕的長度不就都大於 4 了嗎?接下來我們的研究就是往這一個方向去探討，找出一些N＞4的可延伸投射組合。這概念是我們從研究投射圓的幾何運算法中被啟發的，這種可延伸投射組合的製造技巧十分巧妙，我們只提供方法，我們稱這些方法為「拋物線延伸投射製造機」、「橢圓延伸投射製造機」、「雙曲線延伸投射製造機」。說明如下：

(一)、拋物線延伸投射製造機，如圖(50)



圖(50)

利用幾何作圖法及性質三沿著$\overrightarrow{AB}$尋找分段組合的延伸，任取一個直角△(方便說明)

步驟一、將斜邊四等分，並將第一點投一倍，第二點投兩倍，第三點投三倍，第四點投四倍，並將這四點和原點畫出一條拋物線。

步驟二、將Q_1, Q_2, Q_3, Q_4皆和原點連線，接著把各點以原點為對稱點投射$\frac{1}{5}$倍，再接著利用得到的投射點以及原點共五點，畫出拋物線，接著取畫出的拋物線和$\overleftrightarrow{AB}$上的交點，為P_5

步驟三、同理，按照這個方法，各點以原點為對稱點同時投射$\frac{1}{6}$或$\frac{1}{7}$或$\frac{1}{8}$……倍回去，皆可以發現，投射回去的拋物線，皆可以和$\overleftrightarrow{AB}$產生交點，依序令為P_6、P_7、P_8……等。

步驟四、接著算出各段長的比例，會發現各分段長比例為(1：1：1：1：1：1：1)，所以只要是等分線段，按照等差投射，皆可以投射出拋物線。

說明：由$\overline{AB}$上的外分點位置，發現每一段都等長，這代表拋物線的投射倍率，可對應分段數成等差倍率無限延伸下去。

如在同一Δ中，令$P_4 = B$，(1，1，1，1) ⊅〔1，2，3，4〕，可延伸成(1，1，1，1，1，1，1……)⊅〔1，2，3，4，5，6，7……〕都會投射出一個和(1，1，1，1) ⊅〔1，2，3，4〕全等的拋物線。

拋物線延伸投射製造機的使用方法

1、畫出(x，1，1，1) ⊅〔1，2，3，4〕，x 為正數。

2、令$B = P_4$，在$\overrightarrow{AB}$上，作等長的外分點P_5、P_6、P_7、P_8……P_m

3、做(1，1，1，1，1，……，1) ⊅〔1，2，3，4，5，……，m〕，則此圖形與原圖全等。

4、若一開始就是做(1，1，1，1，1) ⊅〔1，2，3，4，5〕，則是令 B 點為P_5，外分點的每一段長都等於內分點的的長，投射出來的圖形和原內分點投射出來的圖形全等。

發現三；對任意組拋物線投射(a_1、a_2、a_3、a_4) ⊕〔1，2，3，4〕，使用上文拋物線製造機程序可將投射組合長度延伸到任意長度 n，即(a_1、a_2、a_3、a_4 ……a_n) ⊕〔1，2，3，4……〕，n≧5 且 B 點=P_4

(二)、橢圓延伸投射製造機

橢圓(1，1，1，3)⊕〔1，2，3，4〕的通式

(通式之中的每一組投射皆可以和(1，1，1，3)⊕〔1，2，3，4〕投出相同的橢圓)

步驟一、在直角Δ斜邊上做分段組合(1，1，1，3)並令B = P_4再依投射倍率組合〔1，2，3，4〕，投射出Q_1，Q_2，Q_3，Q_4

步驟二、通過 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，Q_0做出橢圓

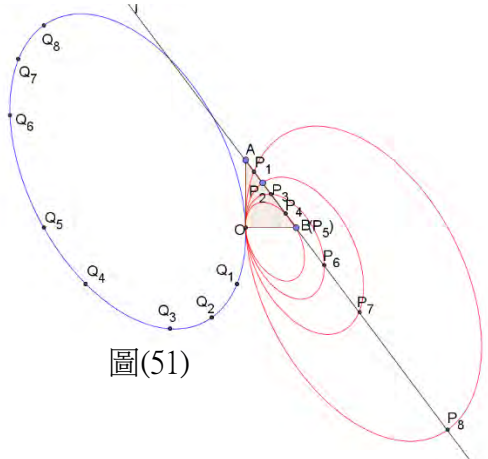
步驟三、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對 O 點進行一倍投射，得四個投射點加上原點共五點，過這五點投射出大紅橢圓，取此大紅橢圓在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_1和P_8。

步驟四、再取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對 O 點進行$\frac{1}{2}$倍投射，得四個投射點加原點共五點，過這五點投射出中紅橢圓，取此中紅橢圓在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_2和P_7。

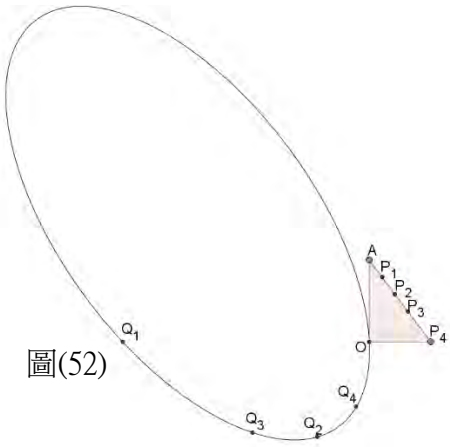
步驟五、再取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對 O 點進行$\frac{1}{3}$倍投射，得四個投射點加原點共五點，過這五點投射出中小紅橢圓，取此中小紅橢圓在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_3和P_6。

步驟六、再取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對 O 點進行$\frac{1}{4}$倍投射，得四個投射點加原點共五點，過這五點投射出小紅橢圓，取此小紅橢圓在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_4和P_5。(此時發現原來的 B 點為P_5，且另外存在有一個P_4)，令 B=P_5

步驟七、做新的(P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6，P_7，P_8)⊕〔1，2，3，4，4，3，2，1〕發現新投射出來的橢圓和原橢圓全等，如圖(51)



圖(51)



圖(52)

步驟八：計算新$\overline{AP_1}:\overline{P_1P_2}:\overline{P_2P_3}:\overline{P_3P_4}:\overline{P_4P_5}:\overline{P_5P_6}:\overline{P_6P_7}:\overline{P_7P_8}=1:1:1:\frac{7}{4}:\frac{5}{4}:\frac{3}{10}:\frac{6}{25}:\frac{2}{21}$

使用方法：

1、任取 N，$4 \le N \le 8$，及其對應的 N 個分點，並且化簡對應分段長成最簡整數比，且取對應的投射倍率，其中若有取到P_5，即應對應 B 點，之後的放在外分點上。

2、例如取 N=5，對應的五段長為$\overline{AP_3}$、$\overline{P_3P_4}$、$\overline{P_4P_5}$、$\overline{P_5P_6}$、$\overline{P_6P_7}$，分段組合為$(3,\frac{7}{4},\frac{5}{4},\frac{3}{10},\frac{6}{25})$對應的投射倍率為[3,4,4,3,2]，投射結果，如圖(52)

註、本公式僅適用於(1，1，1，3)~~Ð~~〔1，2，3，4〕所成的橢圓上，且分段 N 最多到 N=8

發現四；對任意組橢圓投射(1、1、1、x) ~~Ð~~〔1，2，3，4〕，x 大於 1 的正整數，使用上文橢圓製造機程序可將投射組合長度延伸到≧5，如$(1、1、1、\frac{7}{4}、\frac{5}{4}、\frac{3}{10}、\frac{6}{25}、\frac{2}{21})$~~Ð~~〔1，2，3，4，4，3，2，1〕。

(三)、雙曲線延伸投射製造機

雙曲線(1，1，2，2)~~Ð~~〔1，2，3，4〕的通式

(通式之中的每一組投射皆可以和(1，1，2，2)~~Ð~~〔1，2，3，4〕投出相同的雙曲線)

步驟一、先在直角Δ斜邊上做分段組合(1，1，2，2)並令$B = P_4$在依投射倍率組合〔1，2，3，4〕，投射出Q_1，Q_2，Q_3，Q_4

步驟二、通過 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，Q_0做出雙曲線

步驟三、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對 O 點進行一倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_1和P_{-6}。

步驟四、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對 O 點進行$\frac{1}{2}$倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_2和P_{-5}。

步驟五、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對 O 點進行$\frac{1}{3}$倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_3和P_{-4}。

步驟六、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對 O 點進行$\frac{1}{4}$倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_4和P_{-3}。(此時發現原來的 B 點為P_{10}，且另外存有一個P_4)

步驟七、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對 O 點進行$\frac{1}{5}$倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_5和P_{-2}。

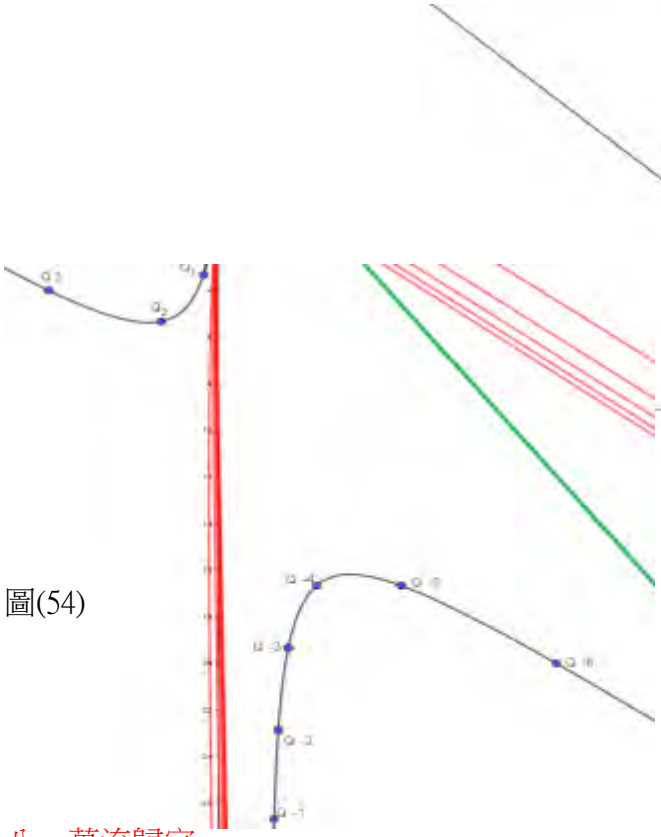
步驟八、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對 O 點進行$\frac{1}{6}$倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_6和P_{-1}。

步驟九、做新的(P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6，P_7，P_8，P_9，P_{10}，P_{11}，P_{12})~~Ð~~〔1，2，3，4，5，6，1，2，3，4，5，6〕發現新投射出來的雙曲線和原雙曲線相同，且以 A 當基準點，在 A 點以上的點投射出來會跑到下雙曲線，A 以下的點則會跑到上雙曲線。

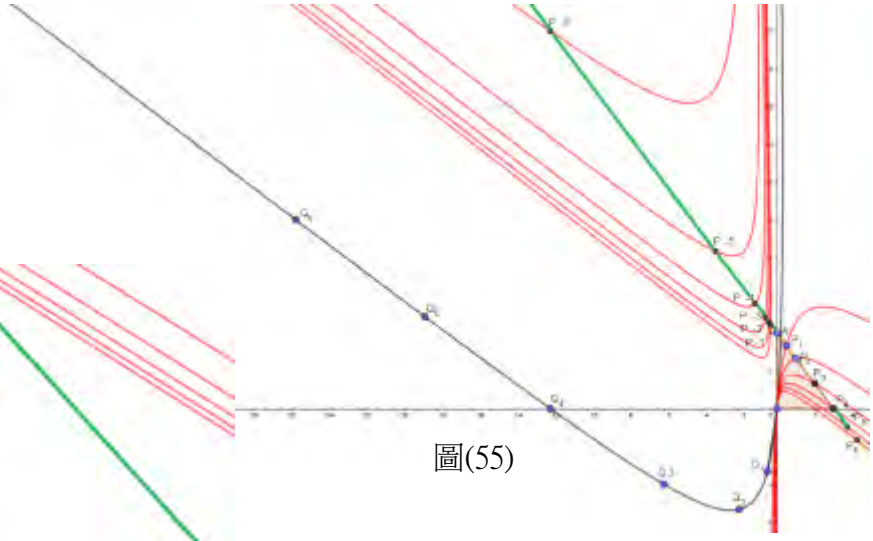
步驟十、計算新的分段長比例

$\overline{P_{-6}P_{-5}}:\overline{P_{-5}P_{-4}}:\overline{P_{-4}P_{-3}}:\overline{P_{-3}P_{-2}}:\overline{P_{-2}P_{-1}}:\overline{P_{-1}A}:\overline{AP_1}:\overline{P_1P_2}:\overline{P_2P_3}:\overline{P_3P_4}:\overline{P_4P_5}:\overline{P_5P_6}=(\frac{35}{2}:\frac{25}{6}:\frac{13}{12}:\frac{1283296}{3274755}:\frac{810023}{4230815}:\frac{2}{3}:1:1:2:2:\frac{4192932}{2875565}:\frac{11514156}{11051375})$，如圖(54)、(55)

發現五；對任一組雙曲線投射，使用上文雙曲線製造機程序，可將投射組合長度延伸到分段 N＞5。



圖(54)



圖(55)

八、萬流歸宗

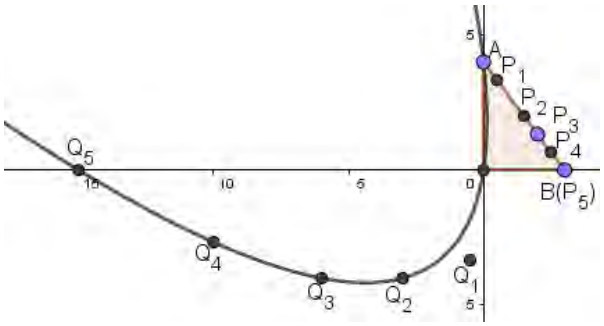
當$N > 4$之後，分點數> 4，投射出的點有六點以上(含原點O)，此時很多圓錐曲線都不能同時通過這六點，因此不是本作品所要的圓錐曲線，就算這樣，聰明的阿中又有新想法，他導入了級數的概念做投射，可以把任意長度的分段數，配合級數型投射倍率組合，即可投出合乎本作品規則的拋物線，且都合流成單一種圓錐曲線(拋物線)。做法如下：

例一：

$(1、2、1、1、1)$~~D~~$[1、2、3、4、5]$投出的圖形如圖(56-1)，未能通過六點中的一點Q_1，若強迫它通過就彎曲的不成圓錐曲線了。現在我們改變投射倍率組合成級數型，即

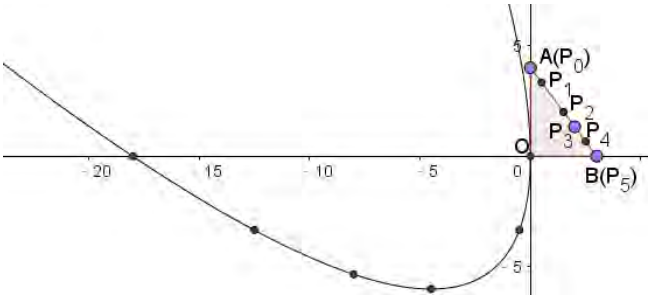
$[1、1+2、1+2+1、1+2+1+1、1+2+1+1+1]=[1、3、4、5、6]$，則

$(1、2、1、1、1)$~~D~~$[1、3、4、5、6]$必投射成通過六個投射點的圓錐曲線(拋物線)，其對稱軸平行$\overline{AB}$，如圖(56-2)



圖(56-1)

$(1、2、1、1、1)$~~D~~$[1、2、3、4、5]$



圖(56-2)

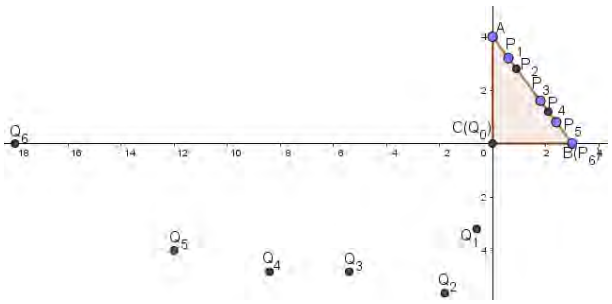
$(1、2、1、1、1)$~~D~~$[1、3、4、5、6]$

例二：

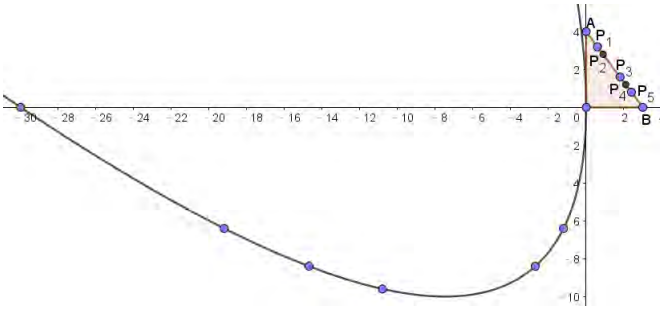
$(2、1、3、1、1、2)$⊅$[1、2、3、4、5、6]$投出的六個點加上Q_0共七個點，如圖(57-1)，測試發現沒有圓錐曲線同時通過這七點。現在改變投射組合成級數型

即$[2、2+1、2+1+3、2+1+3+1、2+1+3+1+1、2+3+1+1+2]$

$=[1、3、4、5、6]$，做$(2、1、3、1、1、2)$⊅$[2、3、6、7、8、10]$必投射成通過此七個投射點的圓錐曲線(拋物線)，如圖(57-2)，其對稱軸也平行$\overline{AB}$。



圖(57-1)



圖(57-2)

$(2、1、3、1、1、2)$⊅$[1、2、3、4、5、6]$ $(2、1、3、1、1、2)$⊅$[2、3、6、7、8、10]$

性質二十四、在△ ABC中，將$\overline{AB}$做不等分的四段，作如下的投射

$(p、q、r、s)$⊅$[p、p+q、p+q+r、p+q+r+s]$，則投射出來的圖形必為拋物線，且對稱軸平行$\overline{AB}$，圖形通過 C 點。

證明：

設$p=m_1$，$q=m_2$，$r=m_3$，$s=m_4$，即$\overline{AB}$總共被分為$m_1+m_2+m_3+m_4$等分，而欲被投射的等分點分別在從 A 點之後的第m_1個等分點，和第m_1+m_2個等分點，和第$m_1+m_2+m_3$的等分點，和第$m_1+m_2+m_3+m_4$的點(即 B 點)。又在投射倍率 r 的數值上，恰好第 1 點投$r=m_1$倍，第 2 點投 $r=m_1+m_2$倍，第 3 點投 $r=m_1+m_2+m_3$倍，第 4 點(即 B 點)投 $r=m_1+m_2+m_3+m_4$倍，根據性質四知，這五個投射點(含 A 點投 0 倍)，必落在與將$\overline{AB}$完全$m_1+m_2+m_3+m_4$等分且投射倍率組合為[1，2，3，4……]的拋物線上，得證。當然，此時的拋物線對稱軸平行$\overline{AB}$，且通過 C 點。

發現六、承性質二十四，再根據性質三，可以將分段組合再往外分點擴充下去為任意多段，即 N=n，把不成形的任何分段組合的等差投射都用級數狀投射，投射成拋物線。

舉例來說：

(1)、(1561)⊅[1、2、3、4]為<u>雙曲線</u>

但改成，(1561)⊅[1、6、12、13]，變成拋物線

(2)、(23456)⊅[1、2、3、4、5]<u>不成形</u>

但改成，(23456)⊅[2、5、9、14、20]，變成拋物線

(3)、(315421) ⊅[1、2、3、4、5、6]<u>無法成形</u>

但改成，(315421) ⊅[3、4、9、13、15、16]變成拋物線

陸、結論

一、將△的一邊做 n 等分，**$n\geq 4$**，包括該邊兩端點，共**$n+1$**個點，從一端點開始做等差倍率投射，則所有投射點都會落在同一條拋物線上。

二、承一，此拋物線必通過該△的第三頂點且對稱軸必平行該△被分段的那一邊。

三、承一，投射倍率可以做縮放平移，仍保持投射後是拋物線圖形，當做平移時，拋物線開口大小不變，當做倍數的放大時，開口會變大；當做倍數縮小時，開口變小。

四、在 N=4 或 L=4 時，等差倍率投射都是拋物線，而在 N=4 但 L≠4 時，等差倍率投射出來的圖形包含所有的圓錐曲線圖形，其中要有特定分段組合時，才會出現圓

五、在 N=4、L≥4 時，文中發現：

(一)、型如(x111)→ [1、2、3、4]，必得拋物線，x 為正整數

(二)、型如(111x)→ [1、2、3、4]，必得橢圓，x 為正整數且≠1

(三)、型如(r、k、k、s)→ [1、2、3、4]，必得橢圓

(四)、型如(q，q+k，q+2k，q+3k)→ [1、2、3、4]，必得雙曲線或交叉直線

(五)、型如(n，k，n+k，n+2k)→ [1、2、3、4]，必得雙曲線或交叉直線

(六)、型如(r、n+1、n、s)→ [1、2、3、4]，必得雙曲線或交叉直線

(七)、型如(t、t、r、r)→ [1、2、3、4]，必得橢圓

(八)、型如(k、nk、n^2k、s)→ [1、2、3、4] 必得雙曲線或交叉直線

七、本文發明幾何投射倍率作圖法，和代數計算法能找出圓的分段組合。

八、利用類似圓的幾何投射倍率作圖法，對任何指定△，都可找到一組超過 4 項的分段組合(N>4)，搭配對應投射倍率組合的投射，使在超過五點以上，仍能投射出拋物線、橢圓、雙曲線。此新投射法被稱為拋物線、橢圓、雙曲線延伸投射製造機。

九、對任何分段組合(N≥4)，本文發明一種級數倍率投射法，使任意分段組合都能投射出拋物線。

柒、 參考資料

一、國中數學課本第六冊

二、高中數學課本第四冊

三、全國中小學科展第 40 屆國中組數學科－三角形 N 倍投射的圓錐曲線探討

四、Geogebra 操作手冊

【評語】030412

考慮三角形一邊上的等分點對對邊頂點的對稱點做給定比例縮放,所得出的點是否落在一個二次曲線上的問題。針對四個點(可能並非四等分點)、比例的不同變化，這些對應點會落在哪一種類型的二次曲線上作了討論。這是一個有意思的問題,作者們從最原始的邊上四個等分點、縮放倍率分別為１、２、３、４開始，討論到四個點未必等分，縮放倍率任意變化的一般化狀況。針對每一種類型的二次曲線，找到了可與之對應的點的分配與縮放比例的型態，內容豐富，可以看得出作者們在這個問題上確實投注了許多心力，值得嘉許。一部份的說明稍嫌繁複，讓一些直觀的結果變的好像只是計算得出的結論（例如：以最原始的問題來看，如果取的對稱頂點為原點，而邊的頂點與分點分別取為(0, -1)、(-1, -2)、(-1, -3)…，應該可以很容易的看出得出的對應點全落在 $y=x^2$ 這個拋物線上。)，這是美中不足之處。另一方面，對於從某一類二次曲線變化到另一類二次曲線，變化的原因是什麼（相對於點的位置的變動、縮放倍率的改變)，可以再給出說明跟討論。某些結論似乎是射影幾何中常看到的結果。類似的結論是否曾以另一種形式呈現可以考慮。

作品海報

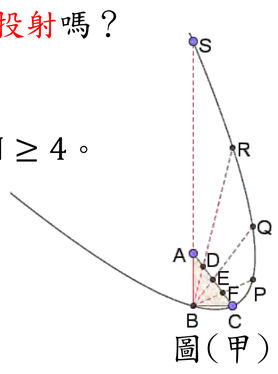
摘要：
從直角△斜邊上的各等分點，對直角頂依序做1倍、2倍…等的長度投射，得一連串投射點，觀察投射點形成的軌跡，文中發現若投射倍率成等差時，投射出的各點軌跡必成拋物線，且發現投射倍率組合做縮放平移時，能保持投射圖形為拋物線。接著將相等的四段改成不一定相等的四段(N=4)，使投射組合的長度L ≥ 4，從L=4到L=16做個全面性的觀察，得到的不只拋物線，還有很多不同圖形如雙曲線、橢圓、平行線、交叉直線和一點一線等，但沒發現圖，作者利用代數計算投射和幾何作圖投射畫出圖形。並利用找圖的概念，將N>4時的分段組合和投射倍率組合在指定的△中呈現出來。最後藉著改變投射倍率組合成級數狀，竟能將本文中涉及的所有投射圖形(N≥4)都轉成拋物線。

壹、研究動機

在一次學二次函數的單元課程中，老師提到一個有趣的題目：

「有一個直角△ABC，∠B=90°，如圖(甲)，D、E、F四等分$\overline{AC}$，分別在$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{BA}$上取C、P、Q、R、S，使$\overrightarrow{BC}=1\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{BQ}=3\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{BR}=4\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{BS}=5\overrightarrow{BA}$，則S、R、Q、P、C五點都落在同一條拋物線上。」

這非常有趣，但老師說圖中課本裡的拋物線圖形是二次函數，二次函數是開口向上或向下，但是圖(甲)中的拋物線開口卻向左上，這明顯不是函數圖形，老師說這是一種方程式的圖形，有同學立刻提問這方法也能投射出其它的方程式圖形，如橢圓、雙曲線嗎？要如何投射？可以反過來從D、E、F向對面頂點B投射嗎？



圖(甲)

老師鼓勵我們當科展題目研究研究

貳、名詞解釋

一、分段數N：將△ABC的一邊分成N段，則稱分段數為N，N ≥ 4。

二、分段組合$(a_1、a_2、a_3、a_4\cdots\cdots a_n)$：
a_i表各第i段長的最簡整數比。

三、分段組合長L：分段組合$(a_1、a_2、a_3、a_4\cdots\cdots a_n)$中，
$L=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

四、投射倍率r：

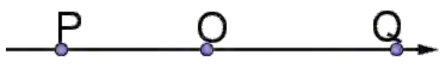
(1)r > 0時，$r=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$，表從起點P經O往前投射r倍到達Q點，如圖(乙)。

(2)r < 0時，$r=-\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$，表從起點P到O往後回縮r倍到達Q點，如圖(丙)。

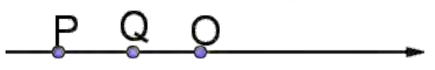
(3)r = 0時，表從起點P到O投射後停在O點，即$\overline{OQ}$=0，如圖(乙)。

五、投射倍率組合$[b_1、b_2、b_3、b_4\ldots b_n]$：其中$b_i$表投射倍率r的值，$[b_1、b_2、b_3、b_4\ldots b_n]$分別對應分段組合$(a_1、a_2、a_3\ldots a_n)$做各等分點的投射。例如第四頁的圖(1)中使$\overrightarrow{QiO}=b_i\times\overrightarrow{PiO}$。i = 1、2、3、…、n，又端點A的投射倍率r = 0。

六、投射符號$\not{D}$：表投射運算，如圖(1)的投射簡記為(1111)[1、2、3、4]



圖(乙)



圖(丙)

參、研究目的

一、在等分線段及等差投射倍率條件下，探討分段數N從4擴張到n，對投射圖形的影響。

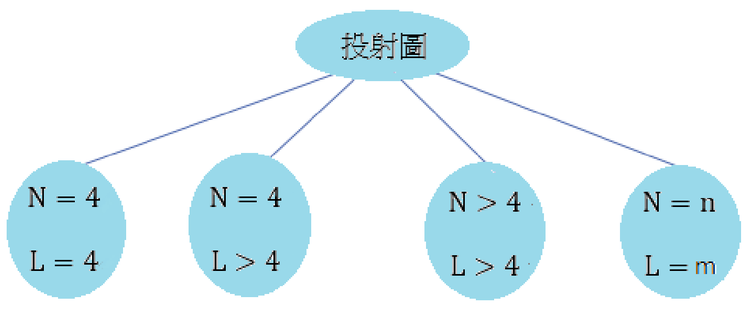
二、在等分線段條件下，探討等差投射倍率的縮放平移對投射圖形的影響。

三、在不等分線段條件下，探討等差投射倍率的縮放平移對投射圖形的影響。

四、在等分線段條件下探討N > 4時，延伸分段組合和投射倍率組合的搭配可能性及方法。

五、在不等分線段下，探討N > 4時，延伸分段組合和投射倍率組合的搭配可能性及方法。

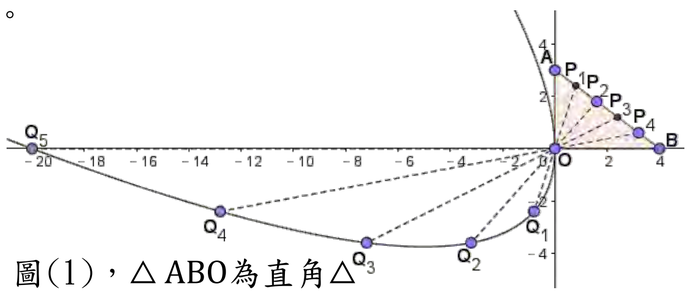
研究架構



伍、研究過程

一、常見的△投射

(一)、在直角坐標平面上的直角△ABO中，取O(0，0)、A(0，3)、B(4，0)，將$\overline{AB}$五等分，等分點依序為P_1、P_2、P_3、P_4及末端點B，從各P_i點做$\overrightarrow{P_iO}$，並在$\overrightarrow{P_iO}$上依序取得Q_i點，使$\overrightarrow{Q_1O}=\overrightarrow{P_1O}$，$\overrightarrow{Q_2O}=2\overrightarrow{P_2O}$，$\overrightarrow{Q_3O}=3\overrightarrow{P_3O}$，$\overrightarrow{Q_4O}=4\overrightarrow{P_4O}$，$\overrightarrow{Q_5O}=5\overrightarrow{BO}$，其中投射出來的這些$Q_1$、$Q_2$、$Q_3$、$Q_4$、$Q_5$，被稱為從$P_i$對應過來的投射點，檢驗這些Q點是否在同一條圓錐曲線拋物線上？又頂點O呢？如圖(1)。


圖(1)，△ABO為直角△

計算如下：

一開始先求得這五個投射點的座標

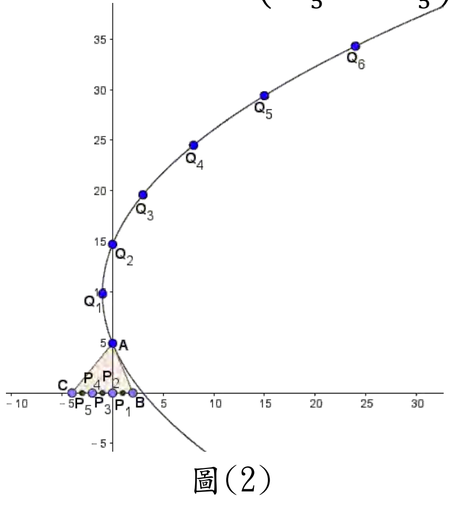
$P_1\left(\frac{4}{5}，\frac{12}{5}\right)$、$P_2\left(\frac{8}{5}，\frac{9}{5}\right)$、$P_3\left(\frac{12}{5}，\frac{6}{5}\right)$、$P_4\left(\frac{16}{5}，\frac{3}{5}\right)$、$P_5=B(4，0)$

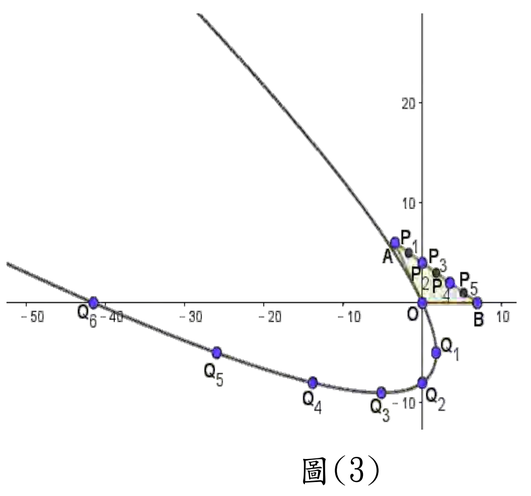
依投射倍率得

$Q_1\left(-\frac{4}{5}，-\frac{12}{5}\right)$、$Q_2\left(-\frac{16}{5}，-\frac{18}{5}\right)$、$Q_3\left(-\frac{36}{5}，-\frac{18}{5}\right)$、$Q_4\left(-\frac{64}{5}，-\frac{12}{5}\right)$、$Q_5(-20，0)$

得二元二次方程式$9x^2+24xy+16y^2+180x=0$，驗證$b^2-4ac=0$為拋物線

驗證未使用的$Q_4\left(-\frac{64}{5}，-\frac{12}{5}\right)$，代入方程式，成立，圖形也通過$Q_4$


圖(2)


圖(3)

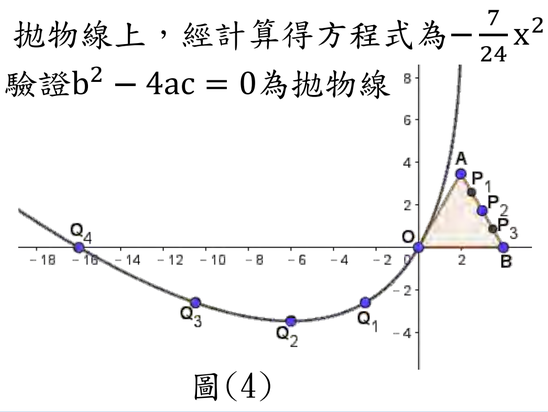
(二)、銳角△ABC中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=7$，如圖(2)，P_1、P_2、P_3、P_4、P_5六等分$\overline{BC}$，諸P點對△ABC的頂點A投射，投射倍率r仍為連續正整數1倍、2倍3倍、4倍、5倍…等，得出對$P_1(1，0)$、$P_2(0，0)$、$P_3(-1，0)$、$P_4(-2，0)$、$P_5(-3，0)$及C(-4，0)，接下來求諸Q點座標

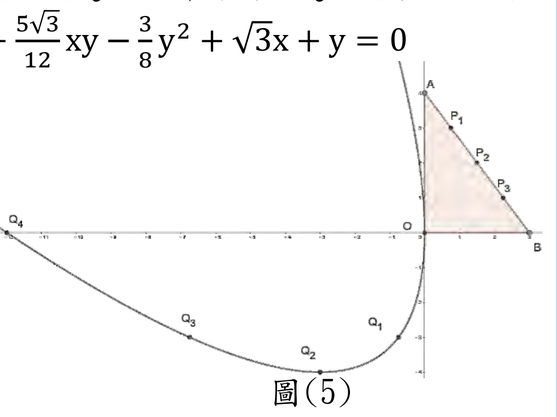
$Q_1\left(-1，2\sqrt{24}\right)$、$Q_2\left(0，3\sqrt{24}\right)$、$Q_3\left(3，4\sqrt{24}\right)$、$Q_4\left(8，5\sqrt{24}\right)$、$Q_5\left(15，6\sqrt{24}\right)$、$Q_6\left(24，7\sqrt{24}\right)$經計算得方程式為$-\frac{\sqrt{6}}{48}y^2+\frac{\sqrt{6}}{2}x-\frac{3\sqrt{6}}{2}y=0$

驗證$b^2-4ac=0^2-0\times-\frac{\sqrt{6}}{48}\times4=0-0=0$，為拋物線

(三)、鈍角△中，$\overline{AB}=12$、$\overline{BO}=4\sqrt{3}$、$\overline{OA}=4\sqrt{3}$，如圖(3)，P_1、P_2、P_3、P_4、P_5六等分$\overline{AB}$。從諸P點對△ABO的頂點O投射，投射倍率r仍為連續正整數1倍、2倍、3倍、4倍、5倍等，得出對應的諸Q點，計算得知Q點落在同一條拋物線上，經計算得方程式為$-\frac{7}{24}x^2+\frac{5\sqrt{3}}{12}xy-\frac{3}{8}y^2+\sqrt{3}x+y=0$

驗證$b^2-4ac=0$為拋物線


圖(4)


圖(5)

性質一：將任意△ABO的一邊四等分，得3個等分點，加上前後兩端點共5點，依序配合0倍、1倍、2倍、3倍、4倍到第三頂點O點距離的投射，則投射出的5個點必落在同一條拋物線上。

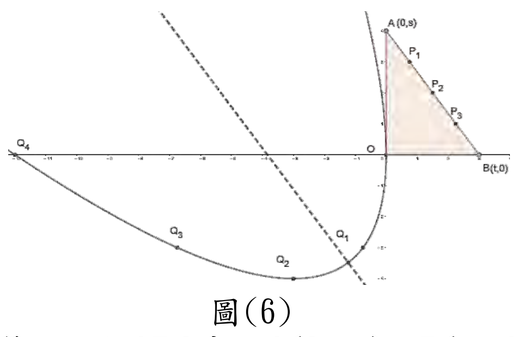
證明：1、經過上面各種△及各種不同的等分點的投射例子後，為方便計算證明，不失一般性，取直角△當代表。

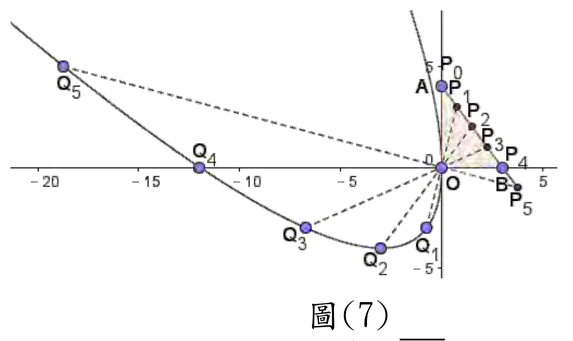
2、在座標平面上取A(0，s)、B(t，0)、O(0，0)，且P_1、P_2、P_3四等分$\overline{AB}$，得$P_1\left(\frac{1}{4}t，\frac{3}{4}s\right)$、$P_2\left(\frac{2}{4}t，\frac{2}{4}s\right)$、$P_3\left(\frac{3}{4}t，\frac{1}{4}s\right)$、$P_4(t，0)$，其中B=$P_4$，如圖(5)，再做$\overrightarrow{Q_0O}=0\overrightarrow{P_0O}$，$\overrightarrow{Q_1O}=\overrightarrow{P_1O}$，$\overrightarrow{Q_2O}=2\overrightarrow{P_2O}$，$\overrightarrow{Q_3O}=3\overrightarrow{P_3O}$，$\overrightarrow{Q_4O}=4\overrightarrow{P_4O}$，的投射，得$Q_0(0，0)$、$Q_1\left(-\frac{1}{4}t，-\frac{3}{4}s\right)$、$Q_2(-t，-s)$、$Q_3\left(-\frac{9}{4}t，-\frac{3}{4}s\right)$、$Q_4(-4t，0)$

3、令二元二次方程式$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，將Q_0、Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5代入，得方程式$s^2x^2+2stxy+t^2y^2+4s^2tx=0$

驗證$b^2-4ac=(2st)^2-4s^2t^2=0$為拋物線，得證。

性質二：在性質一的投射中，投射出的拋物線必過該△的第三頂點(上圖中指O點)，且該拋物線的對稱軸必平行該△的被分段邊(上圖中指$\overline{AB}$)。見圖(6)。


圖(6)


圖(7)

性質三：△ABO中，A(0，s)、B(t，0)、O(0，0)，P_1、P_2、P_3四等分$\overline{AB}$，令P_4 = B，P_0 = A，依序做$\overrightarrow{Q_iO}=i\overrightarrow{P_iO}$、$i$ = 0、1、2、3、4，按等差0倍、1倍、2倍、3倍、4倍投射，得Q_0、Q_1、Q_2、Q_3、Q_4，其中Q_0 = O，又在$\overline{AB}$上取P_5點，使$\overline{P_5P_4}=\overline{P_4P_3}$。並做$\overrightarrow{Q_5O}=5\overrightarrow{P_5O}$，如圖(7)，則第六點$Q_5$亦落在之前O、$Q_1$、$Q_2$、$Q_3$、$Q_4$所形成的拋物線上。

註：此性質可簡記為在△ABO中做(1111)$\not{D}$[1、2、3、4]的拋物線，和延長一等分線段$\overline{P_5P_4}$後，在△AP_5O中做(11111)$\not{D}$[1、2、3、4、5]的拋物線是同一條。

性質四：△ABC中，P_1、P_2、P_3、…、P_{n-1}，n等分$\overline{AB}$，加上A、B兩點共n + 1個點，依$\overrightarrow{Q_iC}=i\times\overrightarrow{P_iC}$，$i$ = 1、2、3、…、n − 1，加上$\overrightarrow{Q_nC}=n\times\overrightarrow{BC}$投射得n個投射點，則這n個點都落在同一條拋物線上，且此拋物線也通過C點，又對稱軸必平行$\overline{AB}$。

證明：回到性質三的圖(7)中，繼續沿著$\overrightarrow{AB}$方向上一段一段如同$\overline{P_5P_4}$的增加下去，依次得到P_6、P_7、P_8……P_n，各按$\overrightarrow{Q_iO}=i\times\overrightarrow{P_iO}$投射，$i$ = 6、7、8、…、n，獲得Q_6、Q_7、Q_8、…、Q_n。由於$P_i=\left(\frac{i}{4}t，\frac{4-i}{4}t\right)$，　$4<i\le n$，投射i倍後，得$Q_i=\left(\frac{i^2}{4}t，\frac{i^2-4i}{4}s\right)$　$4<i\le n$。將Q_i代入方程式性質三的二元二次方程式，結果成立。表示Q_i亦落在一開始的那條拋物線上。

因此得證在△AP_nO中，將$\overline{AP_n}$ n等分，再依序做i倍投射，所得的n個投射點必落在同一條拋物線上，且這條拋物線必通過第三頂點，其對稱軸平行$\overline{AB}$。(其中O點即C點)

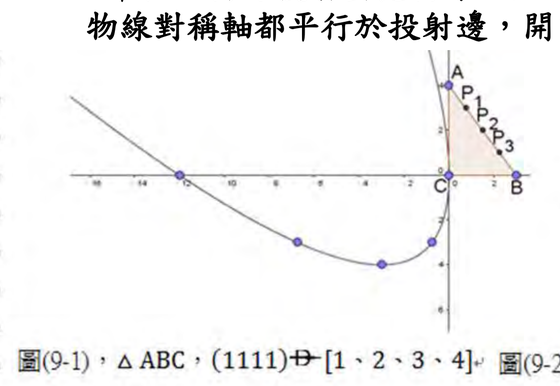
二、在N = 4，L = 4即等分投射下，探討投射倍率縮放平移對投射圖形的　影響：

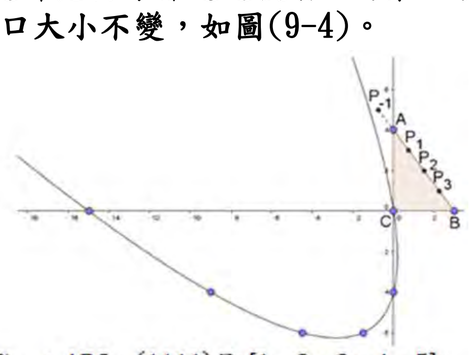
(一)投射倍率平移，如下表(一)

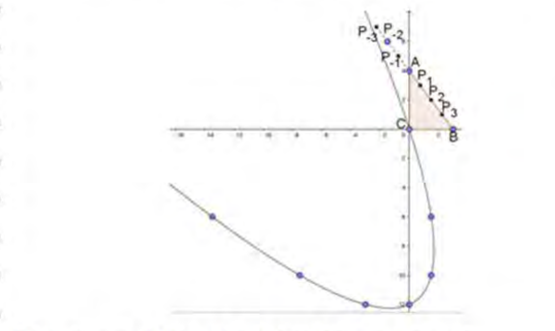
為簡化說明起見，我們取等腰直角△ABC，$\overline{AC}=\overline{BC}=4$，∠ACB = 90°來說明。

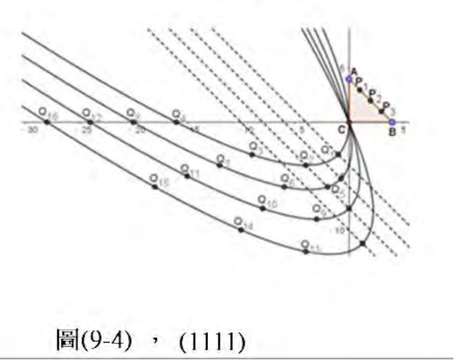
投射運算	二元二次方程式	對稱軸	通過C
(1111)$\not{D}$[1、2、3、4]	$x^2+2xy+y^2+16x=0$	x + y = −4	√
(1111)$\not{D}$[1 + 1、2 + 1、3 + 1、4 + 1]	$x^2+2xy+y^2+20x+4y=0$	x + y = −8	√
(1111)$\not{D}$[1 + 2、2 + 2、3 + 2、4 + 2]	$x^2+2xy+y^2+24x+8y=0$	x + y = −12	√

性質五：由表(一)知，在△的一邊上做等分線段及等差投射時，若將投射倍率平移k單位，仍可投射出拋物線，且這群拋物線都通過投射△的第三頂點，諸拋物線對稱軸都平行於投射邊，開口大小不變，如圖(9-4)。


圖(9-1)，△ABC，(1111)$\not{D}$[1、2、3、4]


圖(9-2)，△ABC，(1111)$\not{D}$[1、2、3、4、5]

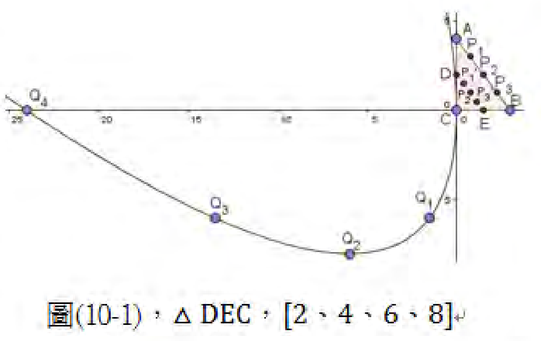

圖(9-3)，△ABC，(1111)$\not{D}$[3、4、5、6]

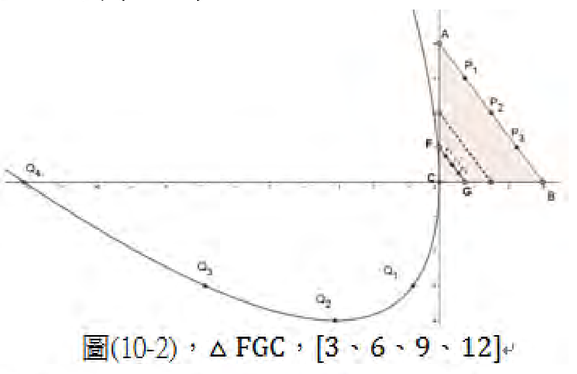

圖(9-4)，(1111)

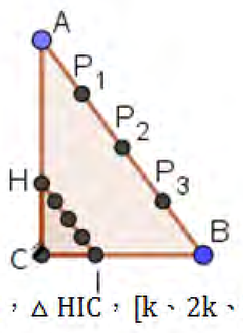
(二)、投射倍率放大 K 倍運算，如下表(二)

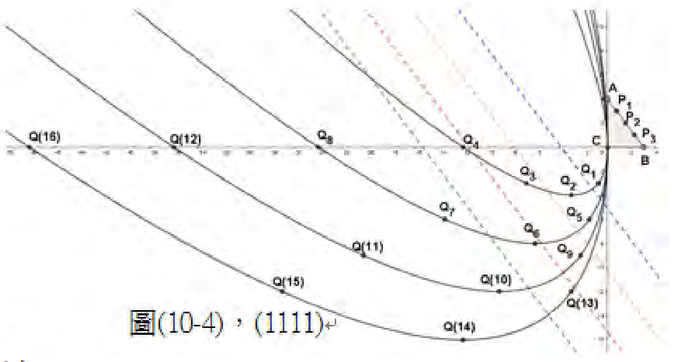
投射運算	二元一次方程式	對稱軸	通過C
(1111)$\not{D}$[1、2、3、4]	$x^2+2xy+y^2+16x=0$	x + y = −4	√
(1111)$\not{D}$[2、4、6、8]	$x^2+2xy+y^2+32x=0$	x + y = −8	√
(1111)$\not{D}$[3、6、9、12]	$x^2+2xy+y^2+48x=0$	x + y = −12	√

性質六：由表(二)知，在等分線段及等差投射中，若將投射倍率放大為n倍，仍可投射出拋物線，且這群拋物線都通過投射△的第三頂點，諸拋物線對稱軸都平行於投射邊，開口大小變大，如圖(10-4)。


圖(10-1)，△DEC，[2、4、6、8]


圖(10-2)，△FGC，[3、6、9、12]


圖(10-3)，△HIC，[k、2k、3k、4k]

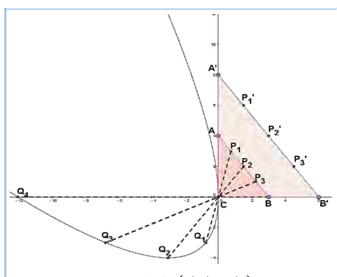

圖(10-4)，(1111)

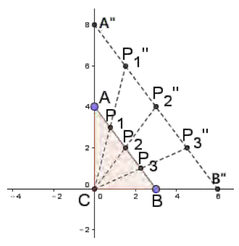
(三)、縮小為$\frac{1}{k}$倍投射倍率運算，列如下表(三)

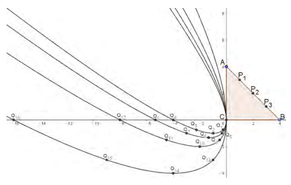
投射運算	二元二次方程式	對稱軸	通過C
(1111)$\not{D}$[1、2、3、4]	$x^2+2xy+y^2+16x=0$	x + y = −4	√
(1111)$\not{D}$[$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{4}{2}$]	$x^2+2xy+y^2+8x=0$	x + y = −2	√
(1111)$\not{D}$[$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{3}$、$\frac{4}{3}$]	$x^2+2xy+y^2+\frac{16}{3}x=0$	$x+y=\frac{-4}{3}$	√

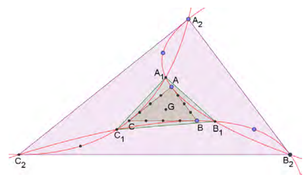
表(三)

性質七：由表(三)知，在等分線段及等差投射中，若將投射倍率縮為原來的$\frac{1}{k}$倍，仍可投射出拋物線，且這群拋物線都通過投射△的第三頂點，諸拋物線對稱軸都平行於投射邊，開口大小變小，如圖(11-3)。


圖(11-1)


圖(11-2)


圖(11-3)，(1111)


圖(13)

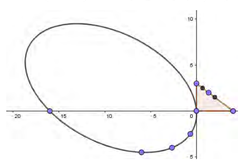
性質九：在△三邊上皆做N等分，並在各邊上同順時針(或同逆時針方向)做等差倍率投射，恆可投射出圓錐曲線中拋物線圖形，且這些圖形兩兩之間各有兩個交點，這六個交點依對應位置組成兩個△，這兩個△和原△ABC共用重心，如圖(13)。

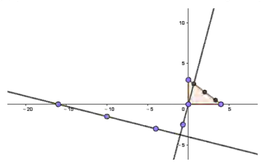
三、在不等分投射邊條件下做等差投射之投射圖形探討

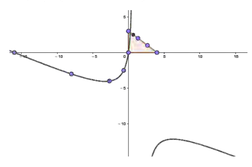
(一)、研究限制說明：

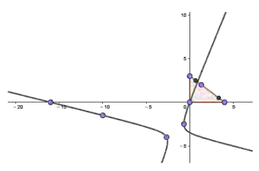
在圖(1)中的$\overline{AB}$做分段時，可分為等分和不等分兩種，當N＝4，L＝4時表示做等分，當N＝4，L≠4時表示不等分，由於當L愈來愈大時，就算取N＝4為定值，其圖形種類仍會快速增加至上千上萬種，因此我們只將L＝4、5、6、7放在報告上，後面還有三千多個圖放在研究日誌上，我們是用來觀察分類。而N＞4時，我們只將研究範圍限制在N＝L做等分的條件下，另外增加幾組N＞4，L≠N的特殊投射範例

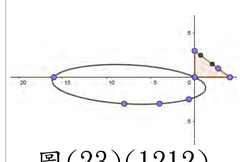
(二)、投射圖形觀察，以N=4，L=6為例，如圖(19~28)

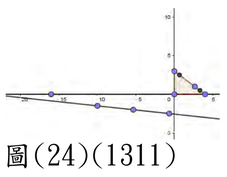

圖(19)(1113)

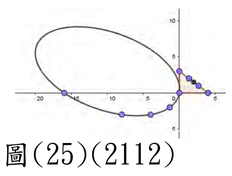

圖(20)(1122)

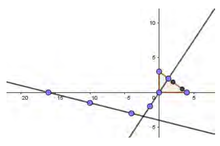

圖(21)(1131)

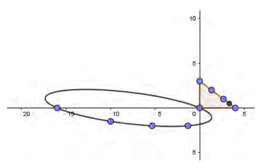

圖(22)(1221)

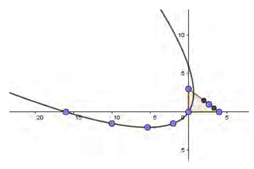

圖(23)(1212)


圖(24)(1311)


圖(25)(2112)


圖(26)(2121)


圖(27)(2211)


圖(28)(3111)

4、當N＝4時，L為4~16時，綜合成下表

	橢圓	雙曲線	拋物線	相交線	平行線	一點一線
L=4	0	0	1	0	0	0
L=5	2	0	1	1	0	0
L=6	4	2	1	3	0	0
L＝7	6	6	2	5	1	0
L＝8	10	14	2	6	1	0
L＝9	16	26	2	11	1	0
L＝10	21	38	3	20	1	1
L＝11	28	67	3	18	1	1
L＝12	39	91	3	31	1	1
L＝13	50	126	4	37	2	1
L＝14	66	169	4	43	2	1
L＝15	86	220	4	51	2	1
L＝16	101	283	5	63	2	1

發現一：從上文N＝4，L＝4到16的投射圖形中，我們觀察到出現的圖形有拋物線、雙曲線、橢圓、相交兩直線、平行兩直線，一點及一直線，只差圓形，即可包含所有的圓錐曲線

(三)、前面統整到L＝16時，發現除了拋物線以外，還出現了橢圓、交叉直線、雙曲線、平行線和一點一線，以下就在探討部分圖形方程式，各給一些例子說明。

1、交叉直線：以(1121)⊅[1、2、3、4]為例，計算證明，如圖(29)

得出方程式$-\frac{3}{16}x^2-\frac{29}{48}xy+\frac{2}{9}y^2-3x+y=0$

去分母得$27x^2+87xy-32y^2+432x-144y=0$

得$3x-y=0$或$9x+32y+144=0$為相異兩不平行直線，得證。

2、橢圓：以(1211)⊅[1、2、3、4]為例，計算證明，如圖(30)

為$\frac{3}{104}x^2+\frac{1}{8}xy+\frac{17}{39}y^2-\frac{6}{13}x+y=0$是橢圓，($\because b^2-4ac<0$)

3、雙曲線：以(1122)⊅[1、2、3、4]為例，計算證明，如圖(31)

為$-\frac{100}{99}x^2-\frac{4}{3}xy-\frac{1}{44}y^2-\frac{400}{33}x+y=0$是雙曲線，($\because b^2-4ac>0$)

4、平行線：以(3624)⊅[1、2、3、4]為例，計算證明，如圖(32)

為$\frac{5}{16}y^2+y=0$，因式分解成$y(5y+16)=0$

得$y=0$或$5y+16=0$為兩條平行的水平直線，得證。

5、一點一線：以(2621)⊅[1、2、3、4]為例，即投射出一直線加C點，如圖(33)

6、單一點：以(1234)⊅[0、0、0、0]為例，即得C點

(四)、橢圓、雙曲線的投射倍率縮放平移探討

當N＝4，L＞4的不等分狀態，在[1、2、3、4]的倍率投射產生橢圓或雙曲線時，討論投射倍率組合縮放平移對投射圖形的影響。

1、橢圓投射之投射倍率組合的縮放平移探討

直角△ABC中，A(0，4)、B(3，0)、C(0，0)，將$\overline{AB}$五等分，得四等分P_1、P_2、P_3、P_4向C點做投射，如圖(34-1)做(1112)⊅[1、2、3、4]，得橢圓T_1

再做(1112)⊅[2、4、6、8]，得橢圓T_2

再做(1112)⊅[3、6、9、12]，得橢圓T_3

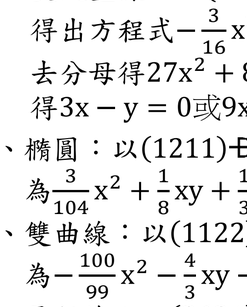
檢驗諸橢圓相似，長軸比1：2：3，面積比1：4：9，故橢圓投射可做投射倍率組合的縮放，接著我們試試看是否可做倍率平移？

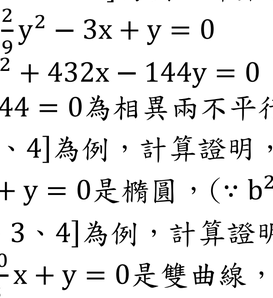
做(1112)⊅[1、2、3、4]，得橢圓T_1

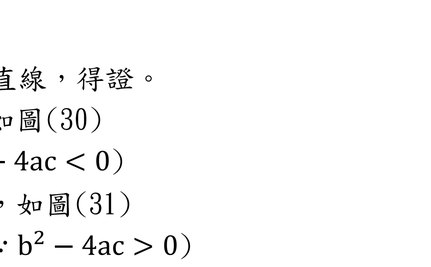
(1112)⊅[1＋1、2＋1、3＋1、4＋1]，得橢圓T_2

(1112)⊅[1＋2、2＋2、3＋2、4＋2]，得橢圓T_3

檢驗諸橢圓長短軸有變化，做投射倍率平移組合：仍可投射出橢圓，如圖(34-2)


圖(34-1)(1112)


圖(34-2)(1112)


圖(35)(1561)

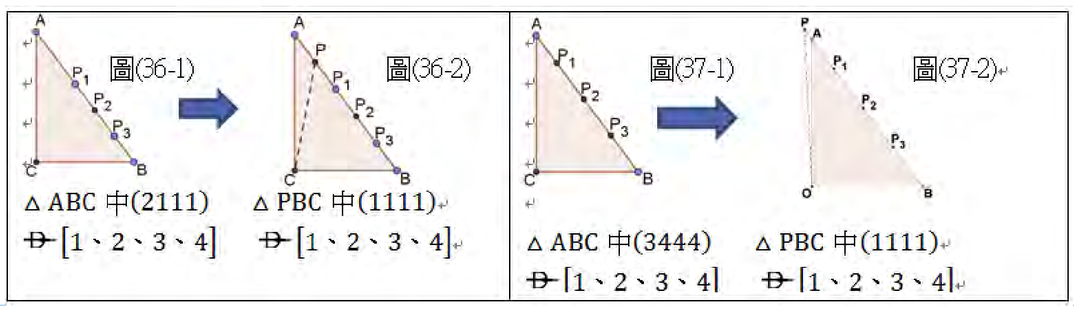
性質十：在橢圓的投射中，針對投射倍率組合做縮放平移後，仍可投射出橢圓。

性質十一：在雙曲線的投射中，針對投射倍率組合做縮放平移後，仍可投射出雙曲線。圖(35)

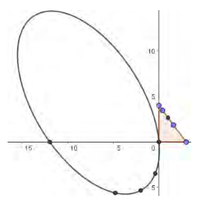
性質十二：型如(x111)的分段組合，其中x為任意正數，按[1、2、3、4]投射後，必可得拋物線圖形。

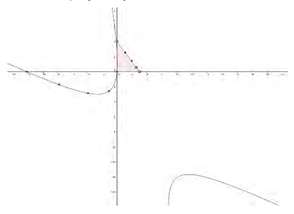
證明：(1)、當$x\geq 1$時，如圖(36-1)、圖(36-2)，P點取在$\overline{AP_1}$內，使$\overline{PP_1}=\overline{P_1P_2}$，在△PCB中做(1111)⊅[1、2、3、4]，根據性質一知，圖形必為拋物線。

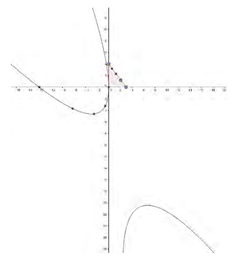
(2)、當$0<x<1$時，P點取在$\overrightarrow{BA}$上的外側，如圖(37-1)、圖(37-2)，使$\overline{PP_1}=\overline{P_1P_2}$即成。

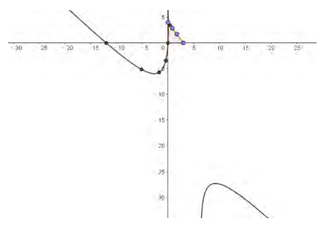


性質十三：型如(r，k，k，s)的分段組合，r、k為任意正整數，s＞k，按[1、2、3、4]投射後，必可得橢圓，如圖(38)。


圖(38)(2337)


圖(39-1)(5432)


圖(39-2)(5678)

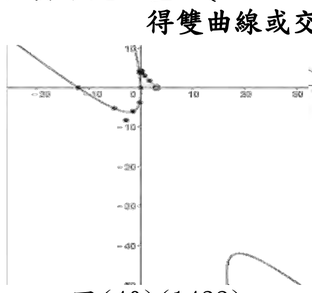

圖(39-3)(1123)

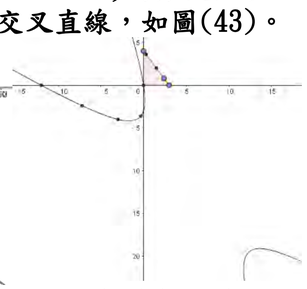
性質十六：型如(r、n＋1、n、s)的分段組合，s＜n，r、s、n都是正整數，按[1、2、3、4]投射後，必可得雙曲線或交叉直線，如圖(40)。

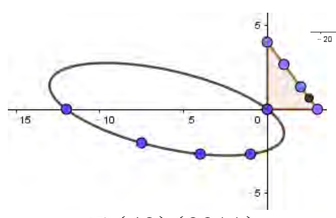
性質十七：型如(n、n＋k、n＋2k、n＋3k)的分段組合，其中n是正整數，3k＋n≥0，按[1、2、3、4]投射後，必可得雙曲線或交叉直線，如圖(41)。

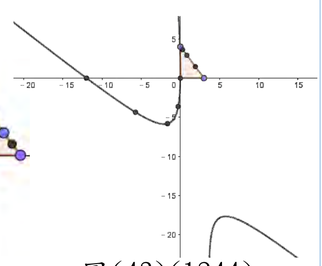
性質十八：型如(t、t、r、r)的分段組合，r、t都是正整數，按[1、2、3、4]投射後，r＞t時，圖形為雙曲線，當r＜t時，圖形為橢圓，如圖(42)。

性質十九：型如(k、nk、n^2k、s)的分段組合，k、s為任意正整數，按[1、2、3、4]投射後，必可得雙曲線或交叉直線，如圖(43)。


圖(40)(1432)

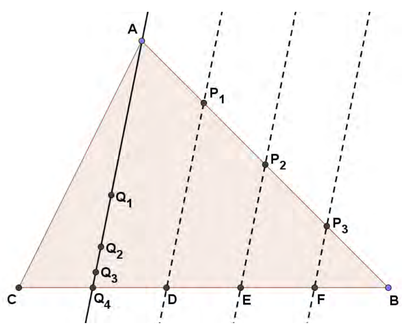

圖(41)(1357)

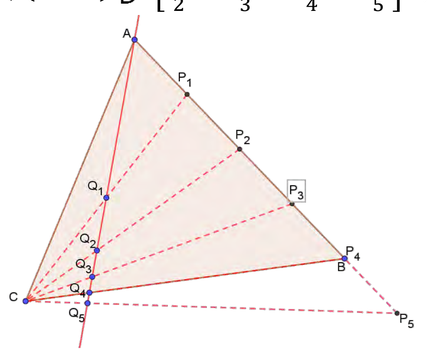

圖(42)(2211)

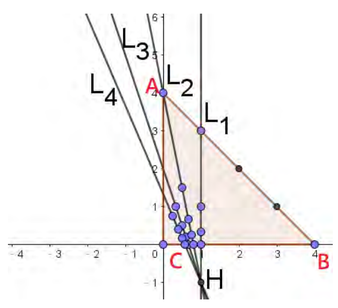

圖(43)(1244)

五、探討 (1111)⊅$[\frac{-1}{k}、\frac{-1}{k+1}、\frac{-1}{k+2}、\frac{-1}{k+3}]$的圖形及性質

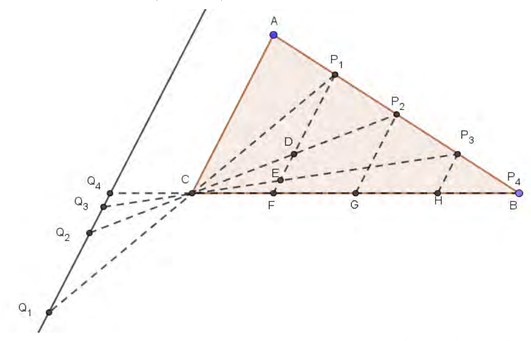
(一)、已知△ABC中，P_1、P_2、P_3四等分$\overline{AB}$，Q_1為$\overline{CP_1}$中點，作$\overleftrightarrow{AQ_1}$分別交$\overline{CP_2}$、$\overline{CP_3}$、$\overline{CB}$於$Q_2$、$Q_3$、$Q_4$，則此$\overleftrightarrow{AQ_4}$和C點即(1111)⊅$\left[\frac{-1}{2}、\frac{-1}{3}、\frac{-1}{4}、\frac{-1}{5}\right]$的圖形，如圖(44-1)

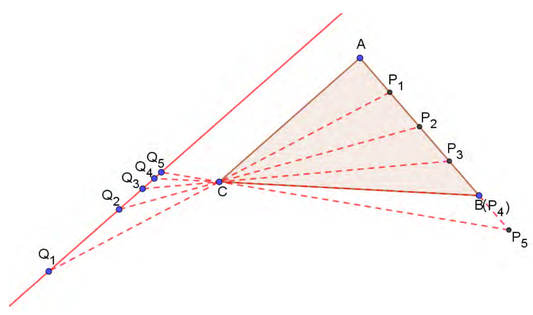

圖(44-1)


圖(44-2)


圖(45)

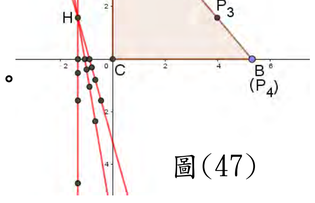
六、已知在△ABC中，P_1、P_2、P_3四等分$\overline{AB}$，在$\overrightarrow{P_1C}$上，取$\overline{Q_1C}=\overline{P_1C}$，過$Q_1$做一直線平行$\overline{AC}$，交$\overrightarrow{P_2C}$、$\overrightarrow{P_3C}$、$\overrightarrow{BC}$於$Q_2$、$Q_3$、$Q_4$，則此$\overleftrightarrow{Q_1Q_4}$及C點，即為(1111)⊅$[\frac{-1}{-1}、\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、\frac{1}{4}]$所得的圖形。圖(46-1)。


圖(46-1)，△ABC中(1111)⊅$[\frac{1}{1}、\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、\frac{1}{4}]$


圖(46-1)，△P_1P_5C中(1111)⊅$[\frac{-1}{-1}、\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、\frac{1}{4}]$

性質二十二：在Δ的一邊上四等分，並從等分點向對面第三頂點做(1111)⊅$[\frac{1}{k}、\frac{1}{k+1}、\frac{1}{k+2}、\frac{1}{k+3}]$，k為正整數，則所得的投射圖形必為一直線及一點C

性質二十三：在Δ的一邊上四等分，並從等分點向對面第三頂點做(1111)⊅$[\frac{1}{k}、\frac{1}{k+1}、\frac{1}{k+2}、\frac{1}{k+3}]$，k為正整數，若給定一個k值可得一直線，則所有的直線會共點。


圖(47)

證明：仿照性質二十三的證明，如圖(47)，三直線L_1、L_2、L_3，相交於$H\left(-\frac{b}{4}，\frac{a}{4}\right)$

七、圓的投射探討

(一)、幾何作圖探討

在做完N＝4，L＝4到16後，發現數千個投射圖形中竟然沒出現一個圓的投射圖，這在圓錐曲線中算是一大缺憾，我們猜想也許分段組合要重新考量，我們想了好久好久，終於找到一種方法，敘述如下：

步驟1、一開始因為投射點P_4＝B，做4倍$\overline{BO}$長的投射，得Q_4點，其中$\overline{Q_4O}=4\overline{BO}$且$\overline{B_4O}$為投射出的圓的直徑，此圓被稱為圓R，如圖(48-1)

步驟2、(1)、再在圓R上任取三點D、E、F

(2)、以O為對稱點，分別作D、E、F的對稱點D′、E′、F′，作通過D′、E′、F′的圓S，和$\overline{AB}$相交於P_1，如圖(48-2)

(3)、分別作$\overline{DO}$、$\overline{EO}$、$\overline{FO}$的中點G、H、I，再以O為對稱點，做G、H、I的對稱點G′、H′、I′，做通過G′、H′、I′的圓，此圓和$\overline{AB}$相交於P_2，如圖(48-3)

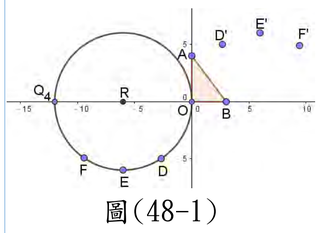
(4)、分別作$\overline{DO}$、$\overline{EO}$、$\overline{FO}$的$\frac{1}{3}$倍長的點，為U、V、W，再以O為對稱點，做U、V、W的對稱點U′、V′、W′，做通過U′、V′、W′的圓，此圓和$\overline{AB}$相交於P_3，如圖(48-4)。

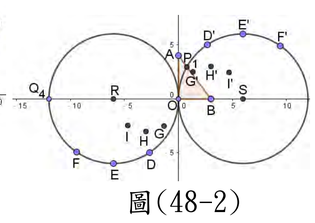
(5)、接著做P_1、P_2、P_3及B的[1、2、3、4]投射，投出圓形即為所求

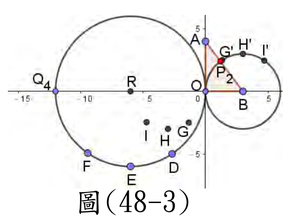
證明：在圖(48-2)中，由D′、E′、F′形成的圓S，由對稱點性質知，S點亦在x軸上，所以圓S和$\overline{AB}$的交點P_1，投射一倍$\overline{P_1O}$長得Q_1必在圓R上。

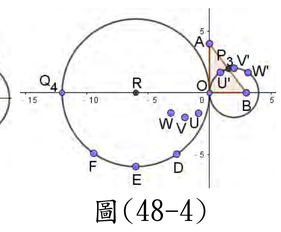
同理，圖(48-3)中的P_2點，投射二倍$\overline{P_2O}$長得Q_2必在圓R上，又如圖(48-4)中的P_3點，投射三倍$\overline{P_3O}$長得Q_3必在圓R上，加上一開始取的P_4點，由四倍$\overline{BO}$長而來。

因此($\overline{AP_1}$、$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3B}$)⊅[1、2、3、4]即得一個圓，得證。


圖(48-1)


圖(48-2)


圖(48-3)


圖(48-4)

接下來，實際用一個例子解釋

設直角坐標平面上有一個△ABC，A(0，4)、B(3，0)、C(0，0)，如圖(48-1)

由圓R的圓心(−6，0)，半徑為6

可得圓R之方程式為$(x+6)^2+y^2=36$，依前文作圖法，取得各P點的座標，得到$\overline{AB}$的分段組合為$\left(\frac{1621046}{1246087}、\frac{871128}{1246087}、\frac{665335}{1173493}、\frac{2855144}{1173493}\right)$，又投射倍率組合為[1、2、3、4]

依上述分段組合及投射倍率組合，即可投射出一個圓。

(二)、代數運算投射：

在前文投射分類表中，我們得到一個概念，用投射倍率組合[1、2、3、4]投射時，能投出橢圓的分段組合的第一個分量，大多數都是1，而圓很接近橢圓，故我們先假設(1、r、s、t)⊅[1、2、3、4]會投射出圓來。同樣的使用直角△，三邊長為3、4、5為例，去計算r、s、t的值，計算如下：

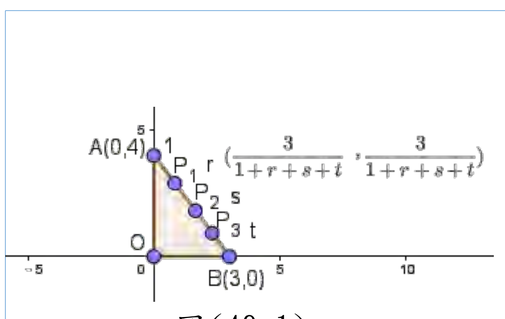
步驟1、A(0，4)、B(3，0)，P_1，P_2，P_3，將$\overline{AB}$分成1：r：s：t四段，先算P_1、P_2、P_3的座標。設(x，y)，如圖(49-1)

$P_1\left(\frac{3}{1+r+s+t}，\frac{4r+4s+4t}{1+r+s+t}\right)$、$P_2\left(\frac{3+3r}{1+r+s+t}，\frac{4s+4t}{1+r+s+t}\right)$、$P_3\left(\frac{3+3r+3s}{1+r+s+t}，\frac{4t}{1+r+s+t}\right)$

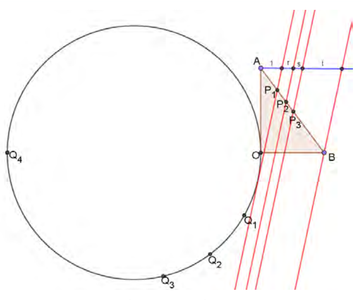
步驟2、依[1、2、3、4]投射，計算Q_1、Q_2、Q_3、Q_4

$Q_1\left(\frac{-3}{1+r+s+t}，-\frac{4r+4s+4t}{1+r+s+t}\right)$ $Q_2\left(\frac{-6-6r}{1+r+s+t}，-\frac{8s+8t}{1+r+s+t}\right)$ $Q_3\left(\frac{-9-9r-9s}{1+r+s+t}，\frac{-12t}{1+r+s+t}\right)$

加上Q_0(0，0)及Q_4(−12，0)都應在同一圓上



圖(49-1)



圖(49-2)

步驟3、將Q_1、Q_2、Q_3代入圓R方程式$(x+6)^2+y^2=36$，令$1+r+s+t=k$，

$\begin{cases}\left(6-\frac{3}{k}\right)^2+\left(\frac{4k-4}{k}\right)^2=36\text{——①} & \text{由1式解得}k=\frac{17+3\sqrt{21}}{8}\\ (6-\frac{6+6r}{k})^2+[\frac{8(k-1-r)}{k}]^2=36\text{——②} & \text{由2式解得}r=\frac{3\sqrt{21}-3}{20}\\ [6-\frac{9(k-t)}{k}]^2+(\frac{12t}{k})^2=36\text{——③} & \text{由3式解得}t=\frac{177+43\sqrt{21}}{200}\end{cases}$

得$s=k-1-r-t=\frac{\sqrt{21}+39}{100}$

步驟4、在$\overline{AB}$上依1：r：s：t取得分點P_1、P_2、P_3做(1、r、s、t) ~~D~~[1、2、3、4]得出圓R，如圖(49-2)

發現二：在任何△的投射中，可用幾何作圖投射或代數運算投射，投射出圓錐曲線中的圓形。

八、探討在分段數N＞4時，哪些圓錐曲線的投射組合長度可以延伸下去？又要怎麼延伸？

一般來說，N=4共有五個投射點(含兩端點)，五個點可決定屬於哪一種圓錐曲線，但當N大於4，例如N=5，有4個分點加上頭尾兩端點共有6個投射點，此時，絕大部分投射後皆不成圓錐曲線了。但若第六點也恰好落在之前五點所在的圓錐曲線上，那不就成了六點共一條圓錐曲線了嗎?這時分點組合(a_1、a_2、a_3…)和投射倍率組合〔r_1、r_2、r_3…〕的長度不就都大於4了嗎?接下來我們的研究就是往這一個方向去探討，找出一些N＞4的可延伸投射組合。這概念是我們從研究投射圓的幾何運算法中被啟發的，這種可延伸投射組合的製造技巧十分巧妙，我們只提供方法，我們稱這些方法為「拋物線延伸投射製造機」、「橢圓延伸投射製造機」、「雙曲線延伸投射製造機」。說明如下：

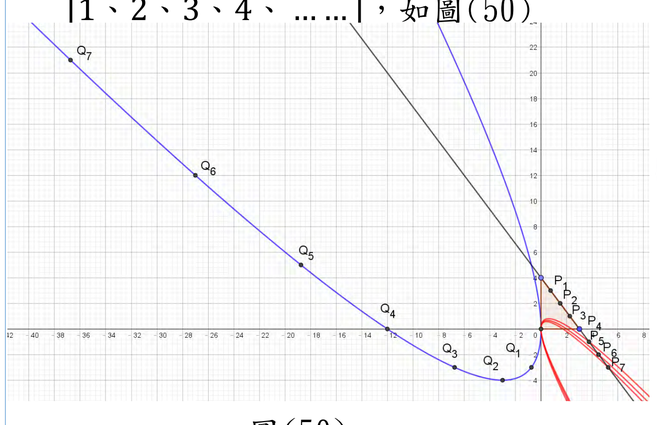
(一)、拋物線延伸投射製造機(程序)，如圖(50)

方法有三：

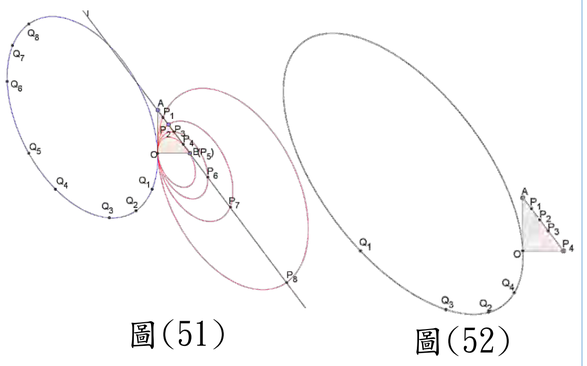
1、由性質三知，在斜邊$\overline{AB}$的延伸線上一段段接下去，可得無限多外分點，可做(11111……) ~~D~~ [1、2、3、4、5、6、7……]得拋物線圖形

2、由性質四知，可直接將斜邊$\overline{AB}$n等分，再做(1111……) ~~D~~ [1、2、3、4、 ……] 將投射組合無限延伸下去，得拋物線。

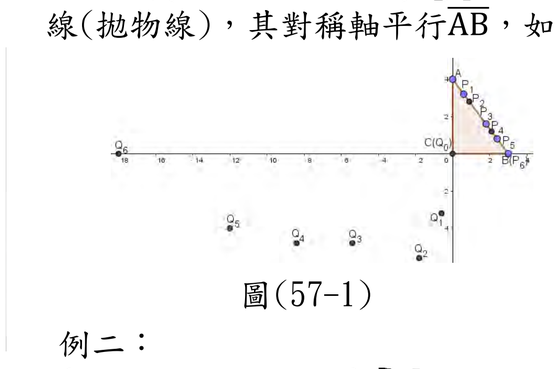
3、仿前文作圖的幾何方法投射，將(1111) ~~D~~ [1、2、3、4、]擴充到(11111……) ~~D~~ [1、2、3、4、 ……]，如圖(50)



圖(50)



圖(51)



圖(52)

說明：由$\overline{AB}$上的外分點位置，發現每一段都等長，這代表拋物線的投射倍率，可對應分段數成等差倍率無限延伸下去。

如在同一Δ中，令$P_4=B$，(1，1，1，1) ~~D~~〔1，2，3，4〕，可延伸成(1，1，1，1，1，1，1……) ~~D~~〔1，2，3，4，5，6，7……〕都會投射出一個和(1，1，1，1) ~~D~~〔1，2，3，4〕全等的拋物線。

發現三：對任意組拋物線投射(a_1、a_2、a_3、a_4) ~~D~~〔1，2，3，4〕，使用上文拋物線製造機程序可將投射組合長度延伸到任意長度n，即(a_1、a_2、a_3、a_4 … a_n) ~~D~~〔1，2，3，4…… 〕，n≧5且B點=P_4

(二)、橢圓延伸投射製造機(程序)

橢圓(1，1，1，3) ~~D~~〔1，2，3，4〕的通式

(通式之中的每一組投射皆可以和(1，1，1，3) ~~D~~〔1，2，3，4〕投出相同的橢圓)

步驟一、在直角Δ斜邊上做分段組合(1，1，1，3)並令B＝P_4再依投射倍率組合〔1，2，3，4〕，投射出Q_1，Q_2，Q_3，Q_4

步驟二、通過Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，Q_0做出橢圓

步驟三、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對O點進行一倍投射，得四個投射點加上原點共五點，過這五點投射出大紅橢圓，取此大紅橢圓在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_1和P_8。

步驟四、再取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對O點進行$\frac{1}{2}$倍投射，得四個投射點加原點共五點，過這五點投射出中紅橢圓，取此中紅橢圓在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_2和P_7。

步驟五、再取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對O點進行$\frac{1}{3}$倍投射，得四個投射點加原點共五點，過這五點投射出中小紅橢圓，取此中小紅橢圓在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_3和P_6。

步驟六、再取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對O點進行$\frac{1}{4}$倍投射，得四個投射點加原點共五點，過這五點投射出小紅橢圓，取此小紅橢圓在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為 P_4和P_5。(此時發現原來的B點為P_5，且另外存在有一個P_4)，令B=P_5

步驟七、做新的(P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6，P_7，P_8) ~~D~~〔1，2，3，4，4，3，2，1〕發現新投射出來的橢圓和原橢圓全等，如圖(51)

步驟八：計算新$\overline{AP_1}:\overline{P_1P_2}:\overline{P_2P_3}:\overline{P_3P_4}:\overline{P_4P_5}:\overline{P_5P_6}:\overline{P_6P_7}:\overline{P_7P_8}=1:1:1:\frac{7}{4}:\frac{5}{4}:\frac{3}{10}:\frac{6}{25}:\frac{2}{21}$

使用方法：

1、任取N，$4\le N\le 8$，及其對應的N個分點，並且化簡對應分段長成最簡整數比，且取對應的投射倍率，其中若有取到P_5，即應對應B點，之後的放在外分點上。

2、例如取N=5，對應的五段長為$\overline{AP_3}$、$\overline{P_3P_4}$、$\overline{P_4P_5}$、$\overline{P_5P_6}$、$\overline{P_6P_7}$，分段組合為$(3,\frac{7}{4},\frac{5}{4},\frac{3}{10},\frac{6}{25})$對應的投射倍率為[3, 4, 4, 3, 2]，投射結果，如圖(52)

註、本公式僅適用於(1，1，1，3) ~~D~~〔1，2，3，4〕所成的橢圓上，且分段N最多到N=8

發現四：對任意組橢圓投射(1、1、1、x) ~~D~~〔1，2，3，4〕，x大於1的正整數，使用上文橢圓製造機程序可將投射組合長度延伸到≧5，如

(1、1、1、$\frac{7}{4}$、$\frac{5}{4}$、$\frac{3}{10}$、$\frac{6}{25}$、$\frac{2}{21}$) ~~D~~〔1，2，3，4，4，3，2，1〕。

(三)、雙曲線延伸投射製造機(程序)

雙曲線(1，1，2，2) ~~D~~〔1，2，3，4〕的通式

(通式之中的每一組投射皆可以和(1，1，2，2) ~~D~~〔1，2，3，4〕投出相同的雙曲線)

步驟一、先在直角Δ斜邊上做分段組合(1，1，2，2)並令B＝P_4在依投射倍率組合〔1，2，3，4〕，投射出Q_1，Q_2，Q_3，Q_4

步驟二、通過Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，Q_0做出雙曲線

步驟三、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對O點進行一倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_1和P_{-6}。

步驟四、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對O點進行$\frac{1}{2}$倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_2和P_{-5}。

步驟五、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對O點進行$\frac{1}{3}$倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_3和P_{-4}。

步驟六、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對O點進行$\frac{1}{4}$倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_4和P_{-3}。(此時發現原來的B點為P_{10}，且另外存有一個P_4)

步驟七、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對O點進行$\frac{1}{5}$倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_5和P_{-2}。

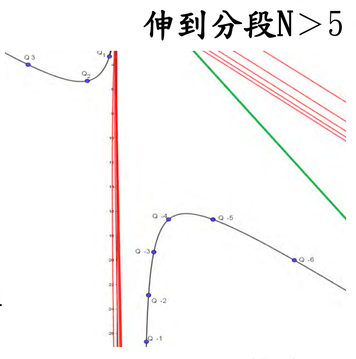
步驟八、取Q_1，Q_2，Q_3，Q_4皆對O點進行$\frac{1}{6}$倍投射，得四個投射點加上原點五點，過這五點投射出雙曲線，取此雙曲線在$\overleftrightarrow{AB}$上的交點(有兩個)，分別由上到下令為P_6和P_{-1}

步驟九、做新的(P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6，P_7，P_8，P_9，P_{10}，P_{11}，P_{12}) ~~D~~〔1，2，3，4，5，6，1，2，3，4，5，6〕發現新投射出來的雙曲線和原雙曲線相同，且以A當基準點，在A點以上的點投射出來會跑到下雙曲線，A以下的點則會跑到上雙曲線。

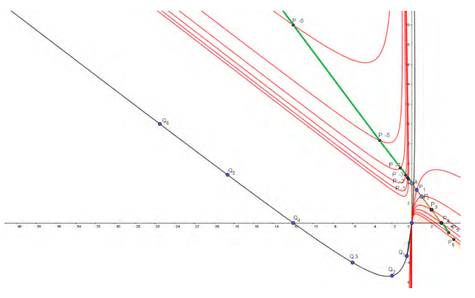
步驟十、計算新的分段長比例

$\overline{P_{-6}P_{-5}}:\overline{P_{-5}P_{-4}}:\overline{P_{-4}P_{-3}}:\overline{P_{-3}P_{-2}}:\overline{P_{-2}P_{-1}}:\overline{P_{-1}A}:\overline{AP_1}:\overline{P_1P_2}:\overline{P_2P_3}:\overline{P_3P_4}:\overline{P_4P_5}:\overline{P_5P_6}=(\frac{35}{2}:\frac{25}{6}:\frac{13}{12}:\frac{1283296}{3274755}:\frac{810023}{4230815}:\frac{2}{3}:1:1:2:2:\frac{4192932}{2875565}:\frac{11514156}{11051375})$，如圖(54)、(55)

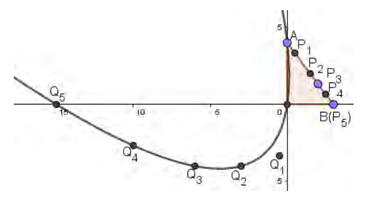
發現五：對任一組雙曲線投射，使用上文雙曲線製造機程序，可將投射組合長度延伸到分段N＞5。



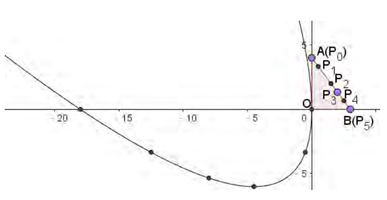
圖(54)



圖(55)



圖(56-1)



圖(56-2)

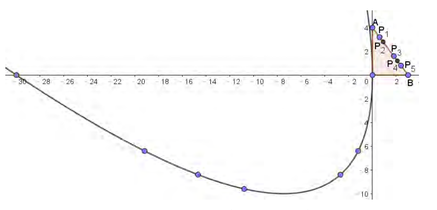
九、萬流歸宗

當N＞4之後，分點數＞4，投射出的點有六點以上(含原點O)，此時很多圓錐曲線都不能同時通過這六點，因此不是本作品所要的圓錐曲線，就算這樣，聰明的阿中又有新想法，他導入了級數的概念做投射，可以把任意長度的分段數，配合級數型投射倍率組合，投出合乎本作品規則的拋物線，且都合流成單一種圓錐曲線(拋物線)。做法如下：

例一：

(1、2、1、1、1) ~~D~~ [1、2、3、4、5]投出的圖形如圖(56-1)，未能通過六點中的一點Q_1，若強迫它通過就彎曲的不成圓錐曲線了。現在我們改變投射倍率組合成級數型[1＋1＋2＋1＋2＋1＋1＋2＋1＋1＋1＋2＋1＋1＋1]＝[1、3、4、5、6，則(1、2、1、1、1) ~~D~~[1、3、4、5、6]必投射成通過六個投射點的圓錐曲線(拋物線)，其對稱軸平行$\overline{AB}$，如圖(56-2)

圖(57-1)



圖(57-2)

例二：

(2、1、3、1、1、2) ~~D~~[1、2、3、4、5、6]投出的六個點加上Q_0共七個點，如圖(57-1)，

測試發現沒有圓錐曲線同時通過這七點。現在改變投射組合成級數型

即[2－2＋1－2＋1＋3－2＋1＋3＋1－2＋1＋3＋1＋1－2＋3＋1＋1＋2]＝[1、3、4、5、6]，做(2、1、3、1、1、2) ~~D~~[2、3、6、7、8、10]必投射成通過此七個投射點的圓錐曲線(拋物線)，如圖(57-2)，其對稱軸也平行$\overline{AB}$。

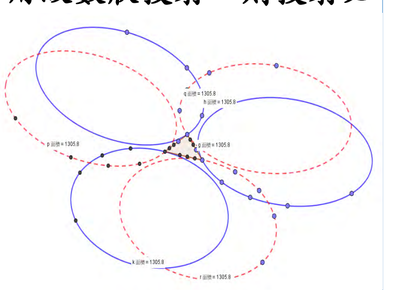
性質二十四、在△ABC中，將$\overline{AB}$做不等分的四段，作如下的投射

(p、q、r、s) ~~D~~ [p、p＋q、p＋q＋r、p＋q＋r＋s]，則投射出來的圖形必為拋物線，且對稱軸平行$\overline{AB}$，圖形通過C點。

證明：

設$p=m_1$，$q=m_2$，$r=m_3$，$s=m_4$，即$\overline{AB}$總共被分為$m_1+m_2+m_3+m_4$等分，而欲被投射的等分點分別在從A點之後的第m_1個等分點，和第m_1+m_2個等分點，和第$m_1+m_2+m_3$的等分點，和第$m_1+m_2+m_3+m_4$的點(即B點)。又在投射倍率r的數值上，恰好第1點投$r=m_1$倍，第2點投$r=m_1+m_2$倍，第3點投$r=m_1+m_2+m_3$倍，第4點(即B點)投$r=m_1+m_2+m_3+m_4$倍，根據性質四知，這五個投射點(含A點投0倍)，必落在與將$\overline{AB}$完全$m_1+m_2+m_3+m_4$等分且投射倍率組合為[1，2，3，4……]的拋物線上，得證。當然，此時的拋物線對稱軸平行$\overline{AB}$，且通過C點。

發現六、承性質二十四，再根據性質三，可以將分段組合再往外分點擴充下去為任意多段，即N=n，把不成形的任何分段組合的等差投射都用級數狀投射，則投射必成拋物線。舉例來說：



(1)、(1561) ~~D~~ [1、2、3、4]為**雙曲線**

但改成，(1561) ~~D~~ [1、6、12、13]，變成拋物線

(2)、(23456) ~~D~~ [1、2、3、4、5]**不成形**

但改成，(23456) ~~D~~ [2、5、9、14、20]，變成拋物線

(3)、(315421) ~~D~~ [1、2、3、4、5、6]**無法成形**

但改成，(315421) ~~D~~ [3、4、9、13、15、16]變成拋物線

陸、結論

一、將△的一邊做n等分，**$n\ge 4$**，包括該邊兩端點，共**$n+1$**個點，從一端點開始做等差倍率投射，則所有投射點都會落在同一條拋物線上。

二、承一，此拋物線必通過該△的第三頂點且對稱軸必平行該△被分段的那一邊。

三、承一，投射倍率可以做縮放平移，仍保持投射後是拋物線圖形，當做平移時，拋物線開口大小不變，當做倍數的放大時，開口會變大；當做倍數縮小時，開口變小。

四、在N=4或L=4時，等差倍率投射都是拋物線，而在N=4但$L\ne 4$時，等差倍率投射出來的圖形包含所有的圓錐曲線圖形，其中要有特定分段組合時，才會出現圓

五、在N=4、$L\ge 4$時，文中發現：

(一)、型如(x111) ~~D~~ [1、2、3、4]，必得拋物線，x為正整數

(二)、型如(111x) ~~D~~ [1、2、3、4]，必得橢圓，x為正整數且$\ne 1$

(三)、型如(r、k、k、s) ~~D~~ [1、2、3、4]，必得橢圓

(四)、型如(q，q+k，q+2k，q+3k) ~~D~~ [1、2、3、4]，必得雙曲線或交叉直線

(五)、型如(n，k，n+k，n+2k) ~~D~~ [1、2、3、4]，必得雙曲線或交叉直線

(六)、型如(r、n+1、n、s) ~~D~~ [1、2、3、4]，必得雙曲線或交叉直線

(七)、型如(t、t、r、r) ~~D~~ [1、2、3、4]，必得橢圓

(八)、型如(k、nk、n^2k、s) ~~D~~ [1、2、3、4] 必得雙曲線或交叉直線

六、本文發明幾何投射倍率作圖法，和代數計算法能找出圓的分段組合。

七、利用類似圖的幾何投射倍率作圖法，對任何指定△，都可找到一組超過4項的分段組合(N>4)，搭配對應投射倍率組合的投射，使在超過五點以上，仍能投射出拋物線、橢圓、雙曲線。此新投射法被稱為拋物線、橢圓、雙曲線延伸投射製造機。

八、對任何分段組合(N≥4)，本文發明一種級數倍率投射法，使任意分段組合都能投射出拋物線。

參考資料

國中數學課本第六冊

高中數學課本第四冊

全國中小學科展第40屆國中組數學科－三角形N倍投射的圓錐曲線探討

Geogebra操作手冊