中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030411

Knight one one

學校名稱：高雄美國學校

作者：	指導老師：
國三 葉其璋	Bruse Buck

關鍵詞：連方塊、騎士路徑圖、圖同構問題

摘要

本研究根據「騎士巡邏」的數學問題做出延伸，主要探討在連方塊 (polyomino) 棋盤上擺放黑白各兩顆棋子，以西洋棋中的騎士走法，進行位置互換，並透過圖論工具，分析移動騎士的一般策略。在後續研究裡，進一步推廣原先探討的問題，例如考慮其他形狀的自由連方塊，並嘗試歸納出由連方塊所引出路徑圖的連通性。最後我們將原來問題化縮為圖同構問題 (graph isomorphism problem)。

壹、研究動機

閱讀科普書《沒有數字的數學》[8]時，讀到有關於「一筆畫」以及「漢彌爾頓路徑」(Hamiltonian path) 這兩個問題，同時間接觸到一款名為 *Crazy Knights* 的棋盤桌上遊戲，當透過圖論方式解開這個桌上遊戲後，便對於這個數學分支產生興趣。

「騎士巡邏」(knight tour) 指的是棋子按照西洋棋中騎士的走法，走遍$m \times n$棋盤每一個棋盤格，而且在騎士行經的路徑中，每個棋盤格恰只經過一次。在老師的建議和協助下，

我們找了一些初等的圖論參考書籍來閱讀，如 Trudeau [7]，學習可能用上的工具，且查閱關於騎士巡邏的文章；同時間一邊寫一些簡單程式做實驗，也因此對這個問題生發出許多推廣的想法。

貳、研究目的

一、利用圖論方式解出原始 *Crazy Knights* 遊戲棋盤。

二、改變棋盤格的數目，研究不同連方塊所引導出的騎士路徑圖連通性。

三、研究不同連方塊所引導出的騎士路徑圖連通性。

四、歸納哪些連方塊將會引導出同構的圖。

參、研究設備與器材

一、方格紙、筆。

二、程式軟體。

三、*Crazy Knights*®遊戲棋盤、黑白騎士棋子各兩顆（如下圖 Fig. 1）。

Fig. 1:Crazy Knights 遊戲棋盤以及騎士棋子的實體照

肆、研究過程或方法

一、研究背景

（一）*Crazy Knights* 遊戲規則及遊戲目的說明：

1. 遊戲棋盤如下圖 Fig. 2a 的連方塊 (polyomino) 棋盤；
2. 共四個騎士棋子(knight)，黑色、白色各兩顆；
3. 每個騎士的按照西洋棋的移動方式，如圖 Fig. 2b；
4. 且每個棋盤格(cell) 最多只能放一個棋子；
5. 黑白騎士初始配置如圖 Fig. 2c，若依照前兩個規則，透過一序列的棋子移動，使得黑白騎士對調位置，則稱為「遊戲成功」，如圖 Fig. 2d 即為成功配置。

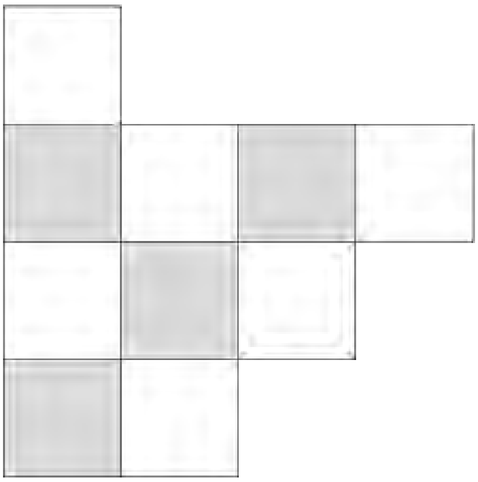


Fig. 2a:連方塊棋盤

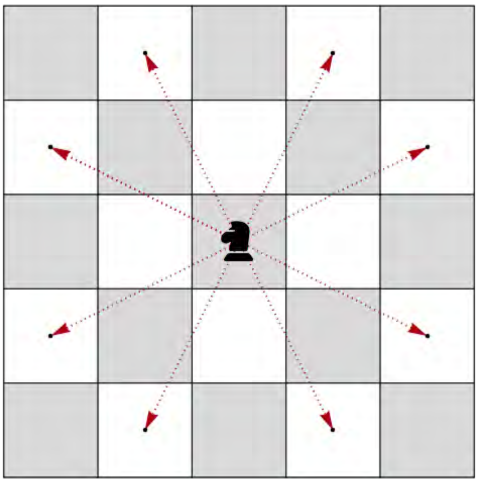


Fig. 2b:騎士移動規則

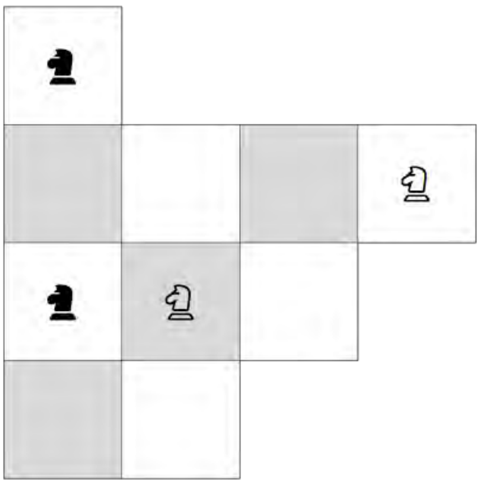


Fig. 2c:遊戲初始配置

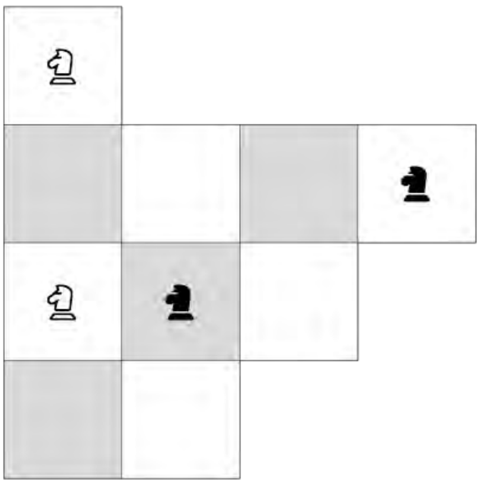


Fig. 2d:遊戲成功配置

（二）初步成功嘗試

在多次嘗試遊戲後，發現試誤法 (trial and error) 雖可摸索出遊戲成功的配置，但此法不利於觀察騎士移動背後的邏輯。於是我們試著放寬遊戲限制，將原本不規則的連方塊棋盤以一個恰能覆蓋原先棋盤的4×4棋盤，並且畫出所有可能的騎士路徑(knight path)，如下圖 Fig. 3a，或是以 Fig. 3b 簡示，以下我們稱$m\times m$棋盤上由所有騎士路徑所構成的圖為「$m\times m$騎士巡邏圖」($m\times m$ knight tour graph)。

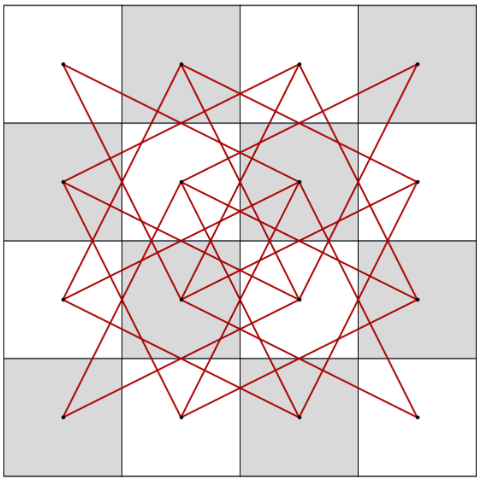


Fig. 3a: 4×4棋盤上的所有騎士路徑

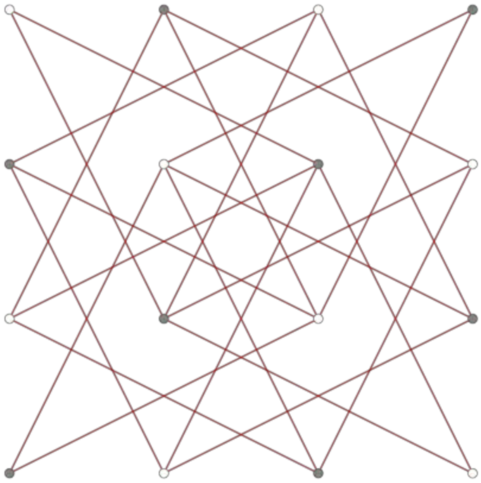


Fig. 3b: 4×4騎士巡邏圖

接著移除 Fig. 3b 騎士巡邏圖中的某些點和與之連接的邊，便得出原先連方塊棋盤上的騎士巡邏圖，如下圖 Fig. 4a，我們稱這樣的圖為「由連方塊引導出的騎士巡邏子圖」(knight tour subgraphinduced by polyomino)。另外圖 Fig. 4b 是 Fig. 4a 的平面呈現。

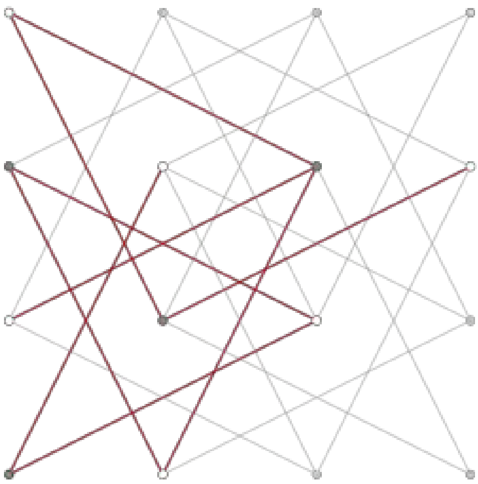


Fig. 4a:騎士巡邏引導子圖（帶背景）

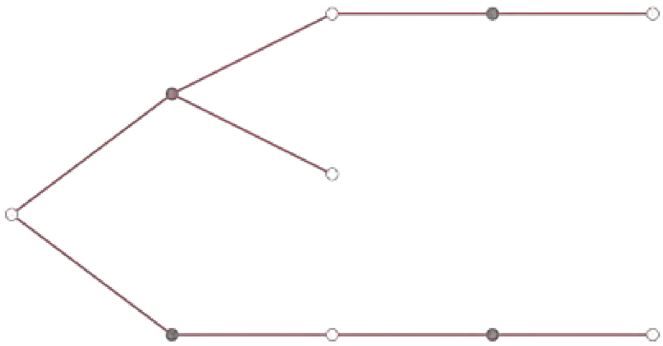
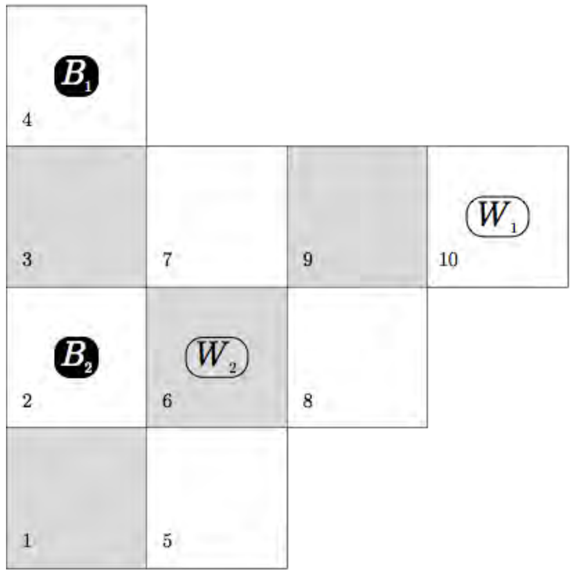


Fig. 4b:平面呈現的引導子圖（不帶背景）

最後我們將四個騎士放上以編號的連方塊棋盤（編號 1 到 10 號），且將黑白棋子分別編號① 和 ②，並且觀察騎士在引導子圖上的相應位置。



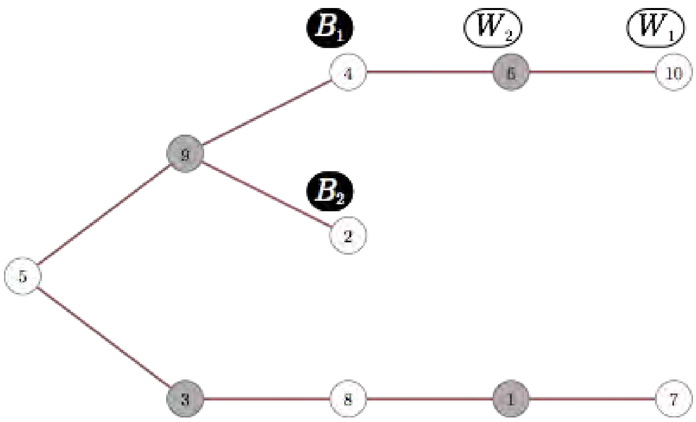
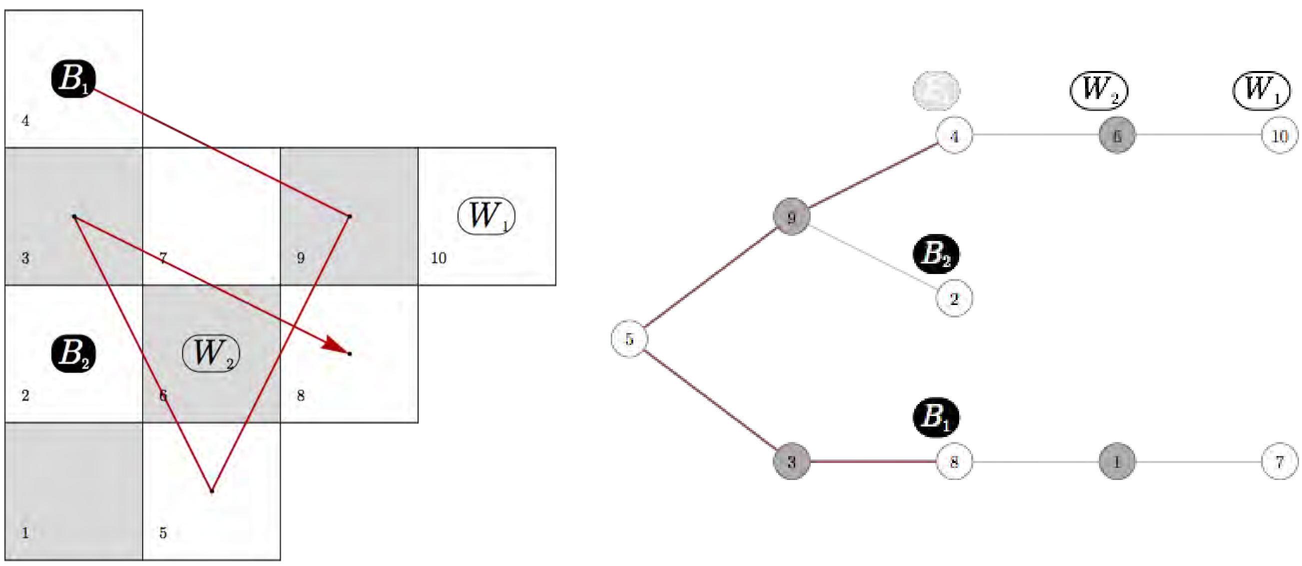


Fig. 5a:遊戲初始配置，棋盤棋子已分別編號

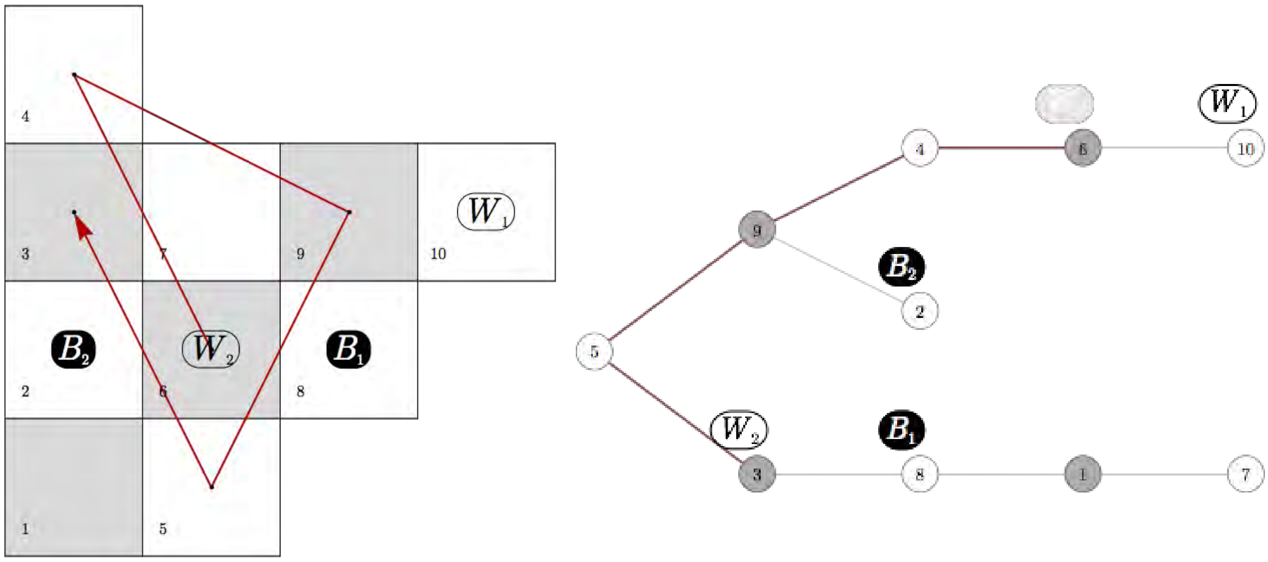
Fig. 5b: 對應的編號騎士巡邏引導子圖

如此一來如何移動騎士就有比較清楚的邏輯可循，詳細可分成如下 Fig. 6 中的十二個步驟：

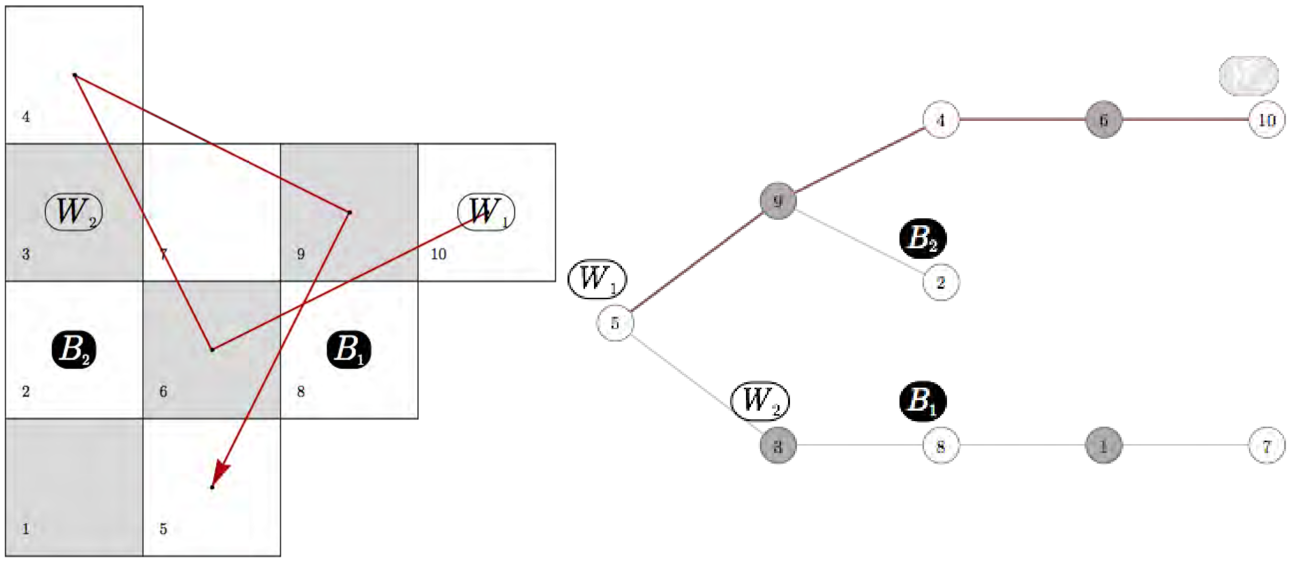
Step 1



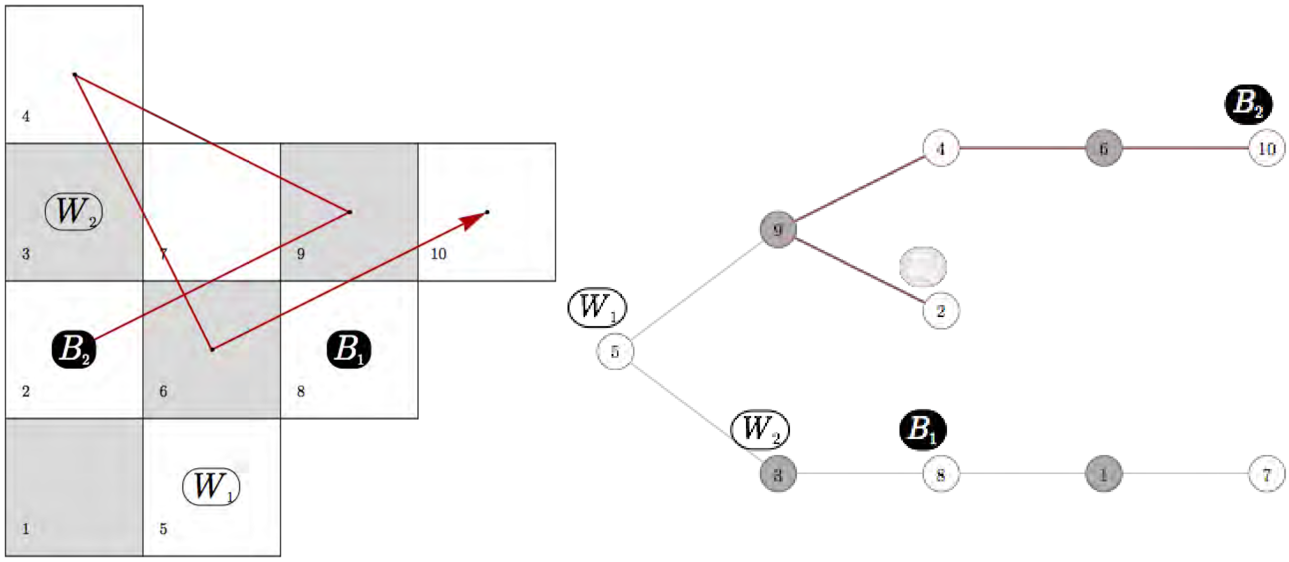
Step 2


4
3
7
9
10
W_1
2
B_2
W_2
6
B_1
8
1
5
B_2
W_2
B_1
W_1
5
9
4
6
10
2
3
8
1
7

Step 3

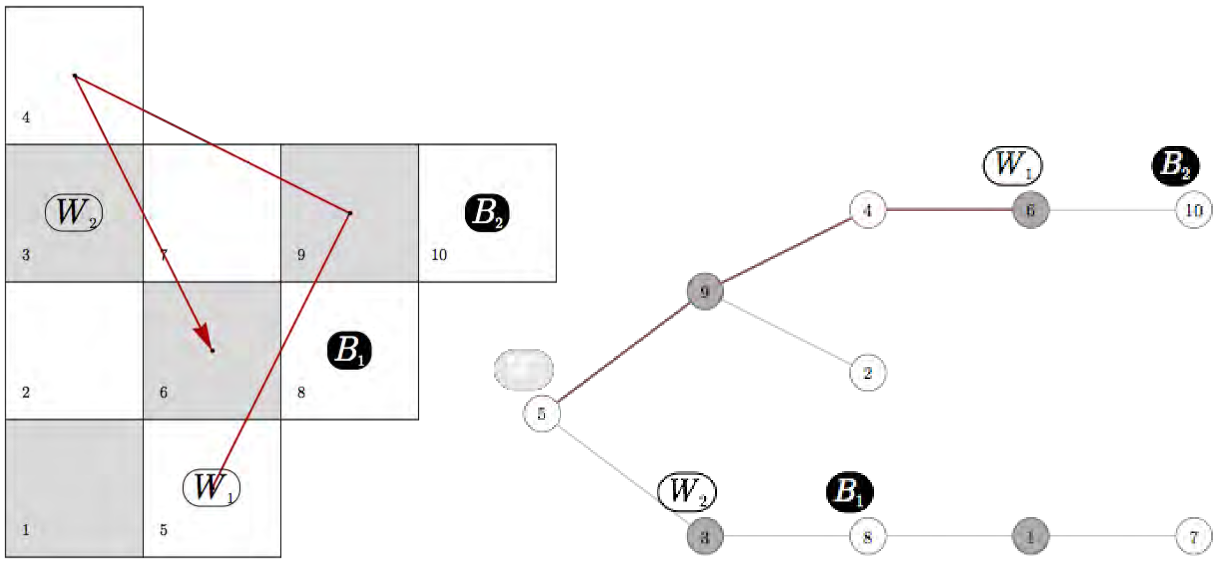

4
W_2
3
7
9
W_1
10
B_2
2
6
B_1
8
1
5
W_1
5
9
4
6
10
B_2
2
W_2
B_1
3
8
1
7

Step 4



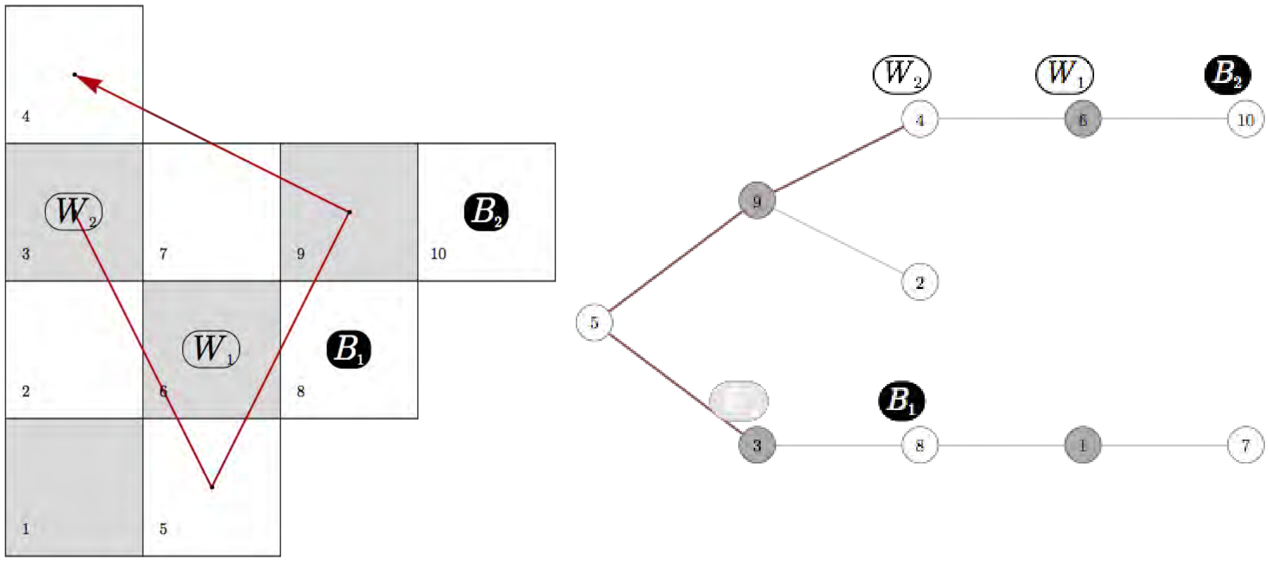
4
W_2
3
7
9
10
B_2
2
6
B_1
8
W_1
1
5
B_2
4
6
10
9
2
W_1
5
W_2
B_1
3
8
1
7

Step 5



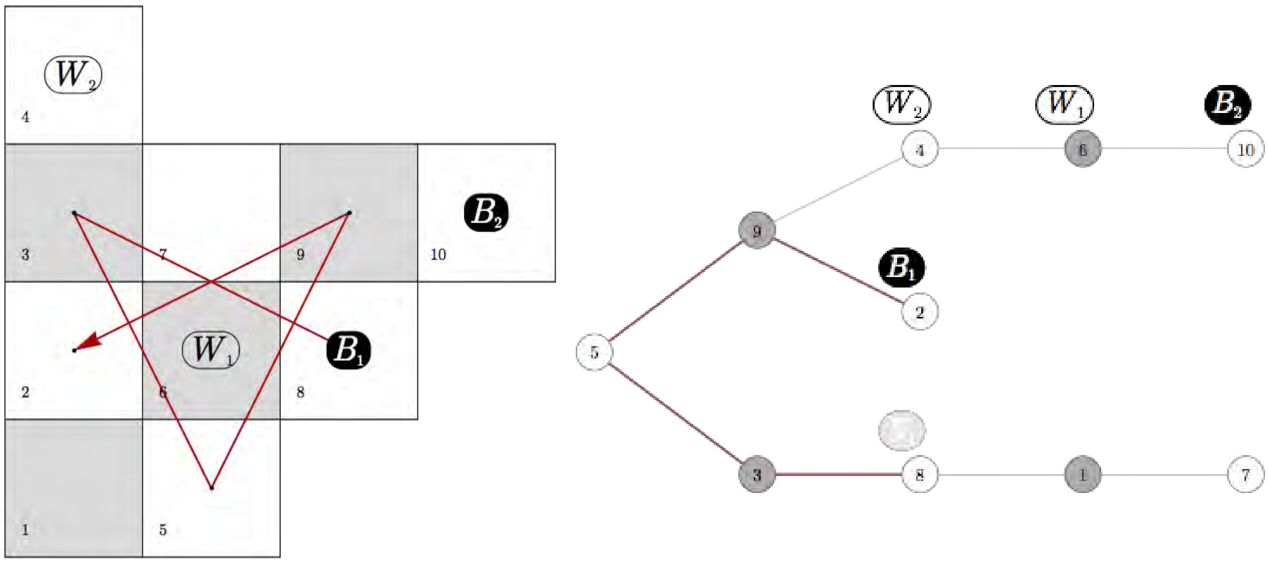
4
W_2
3
7
9
B_2
10
2
6
B_1
8
1
W_1
5
W_1
B_2
4
6
10
9
2
5
W_2
B_1
3
8
1
7

Step 6



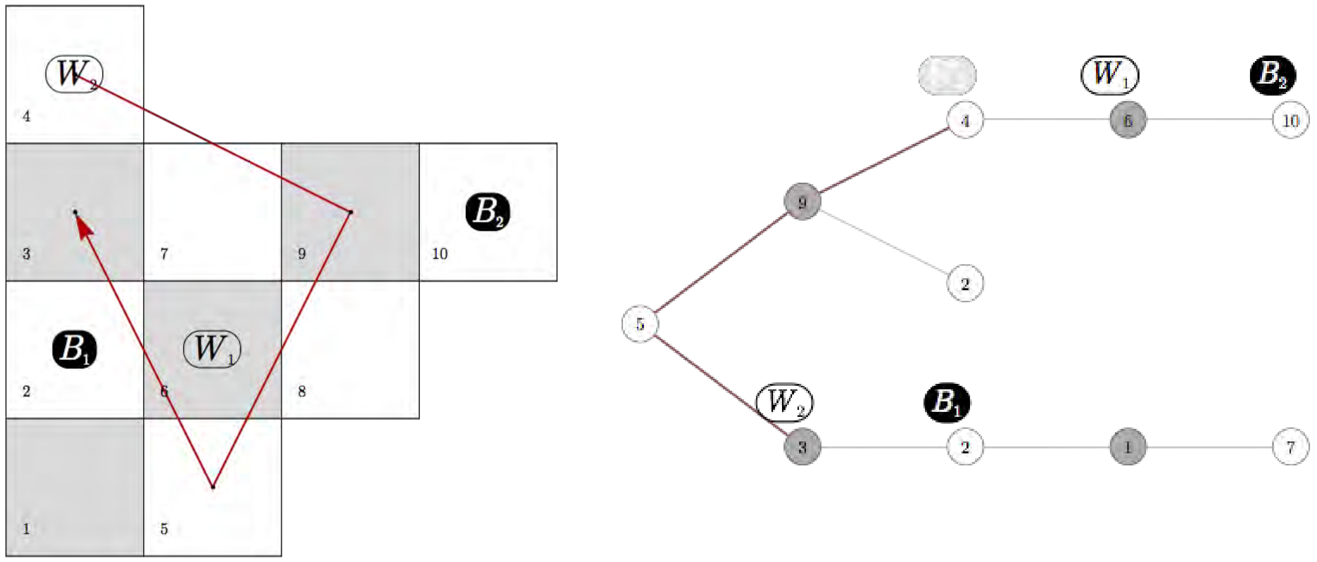
4
W_2
3
7
9
B_2
10
W_1
B_1
2
6
8
1
5
W_2
W_1
B_2
4
6
10
9
2
5
B_1
3
8
1
7

Step 7



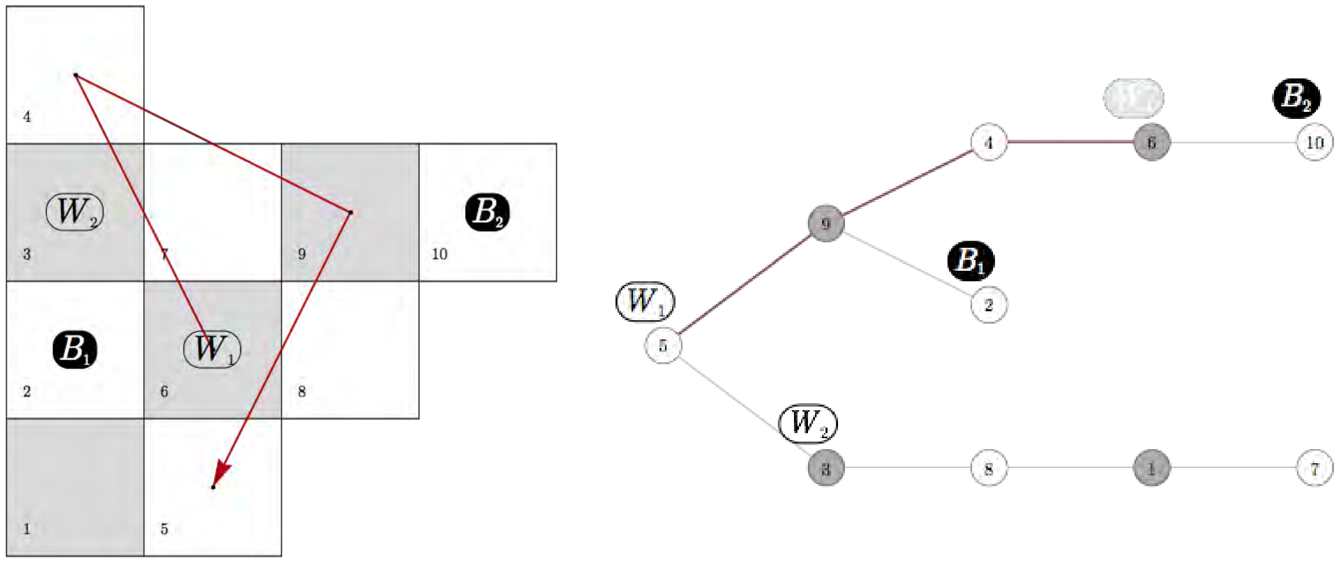
W_2
4
3
7
9
B_2
10
W_1
B_1
2
6
8
1
5
W_2
W_1
B_2
4
6
10
9
B_1
2
5
3
8
1
7

Step 8



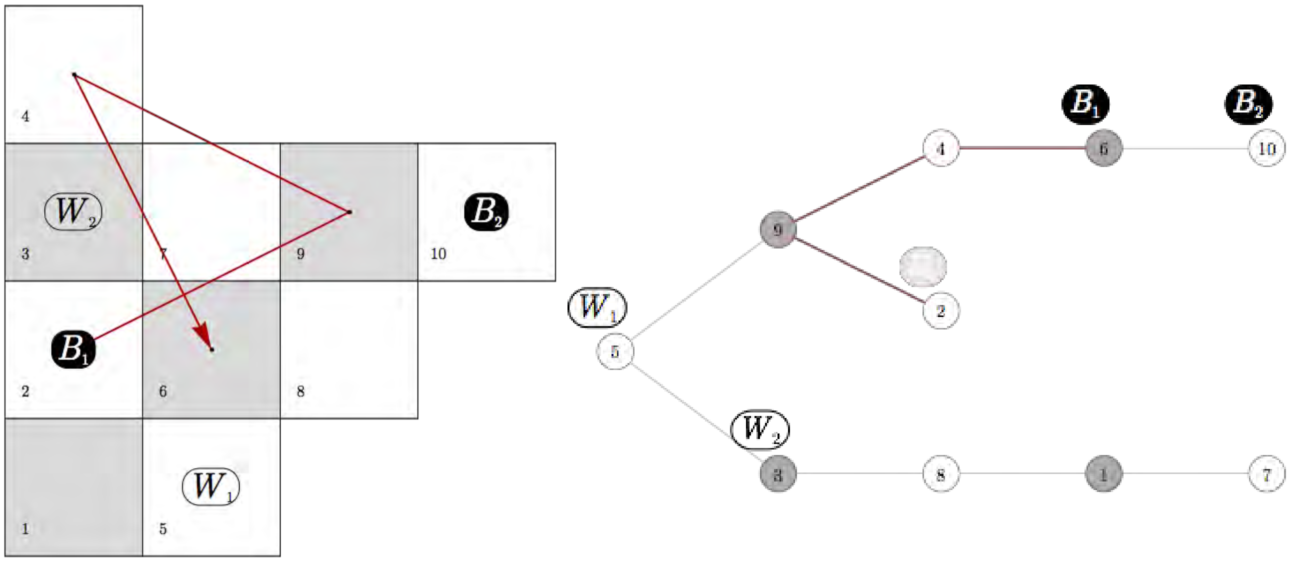
W_2
4
3
7
9
B_2
10
B_1
W_1
2
6
8
1
5
W_1
B_2
4
6
10
9
2
5
W_2
B_1
3
2
1
7

Step 9

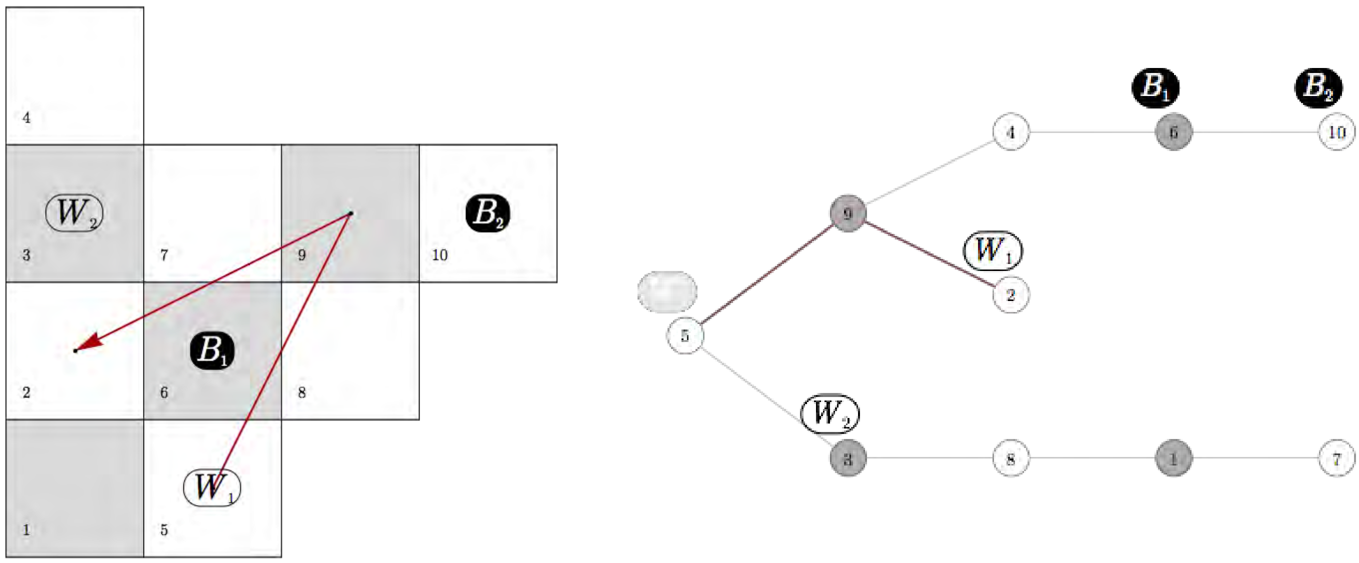


4
W_2
3
7
9
B_2
10
B_1
W_1
2
6
8
1
5
B_2
4
6
10
9
B_1
2
W_1
5
W_2
3
8
1
7

Step 10



Step 11



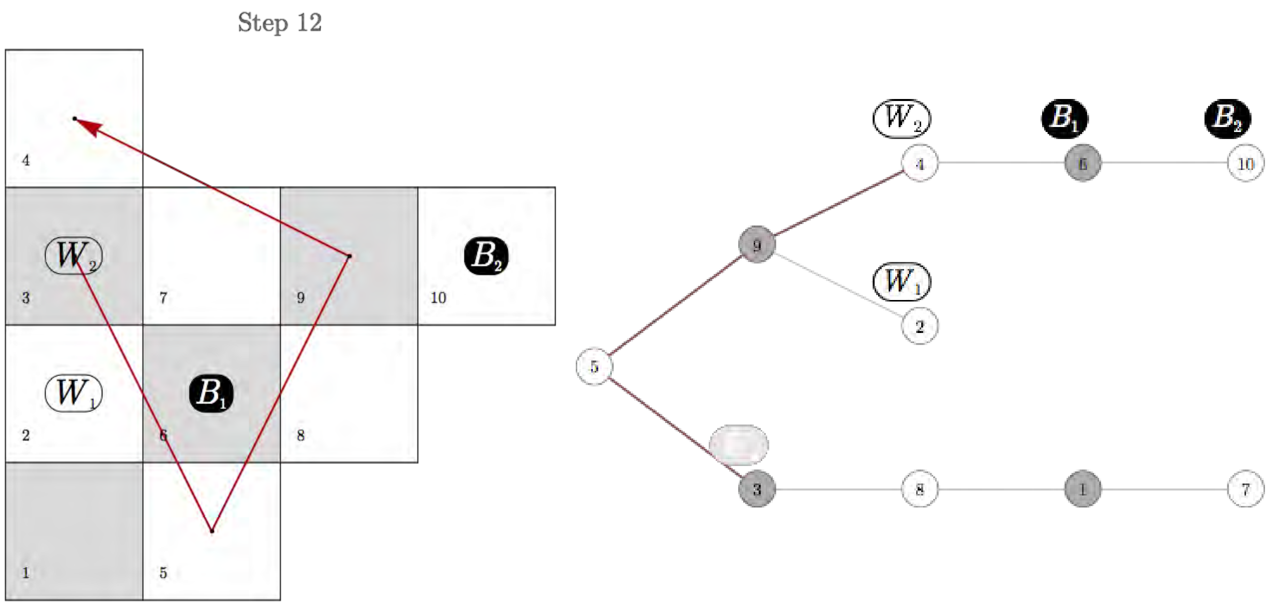
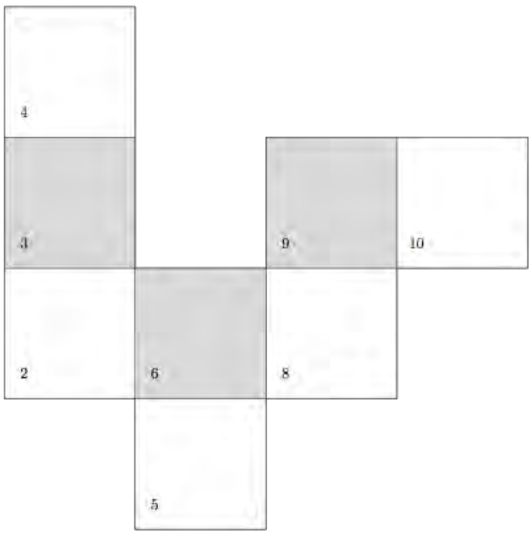


Fig. 6: 成功解出 Crazy Knights 遊戲棋盤的詳細步驟

（三）改變連方塊棋盤

注意到在前面的解法中，我們發現 1 號棋盤格及 7 號棋盤格都沒使用到；換句話說，如果我們將該兩個棋盤格刪除，則新的棋盤仍然為一連方塊，如下圖 Fig. 7a 以及 Fig. 7b。接下來，我們將討論不同的連方塊棋盤引導出騎士巡邏子圖。為了後續方便討論，我們在下個小節定義相關的圖論名詞。



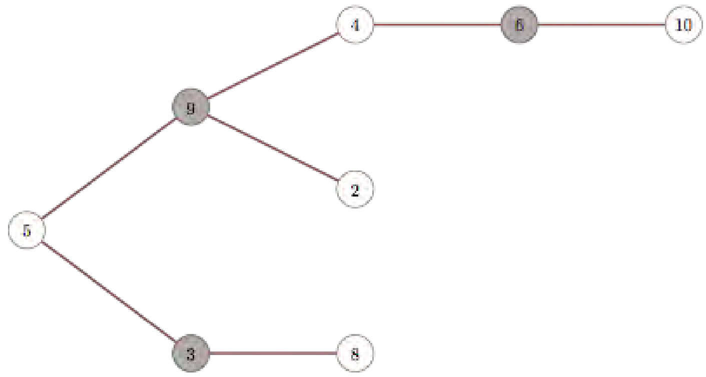


Fig. 7a:移除棋盤格編號 1 和 7 號後的棋盤

Fig. 7b: 對應的騎士巡邏引導子圖

二、名詞及符號定義

（一）圖論相關名詞及符號

以下關於圖論 (graph theory) 的名詞定義參考翻譯自 Diestel [3]與 Trudeau [7]。為了方便視覺化各名詞在圖上的意義，我們用下圖 Fig. 8 當實例解釋：

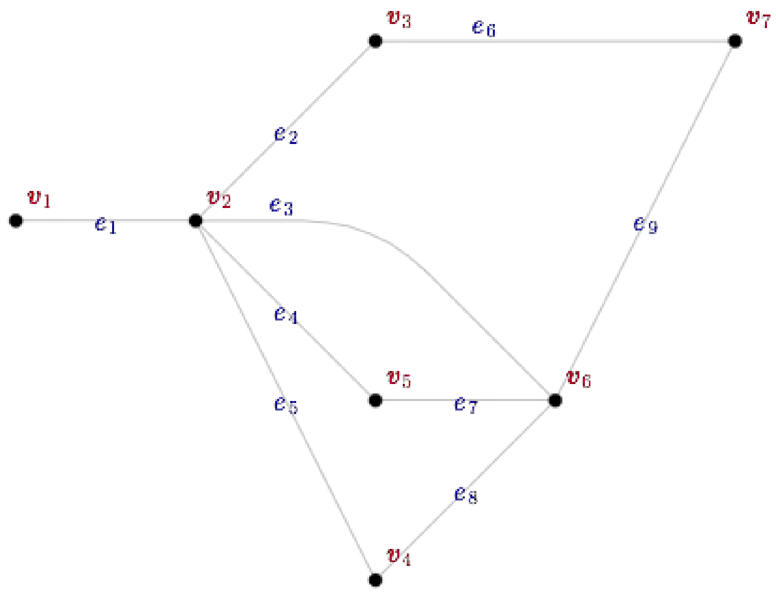


Fig. 8:用來說明圖名詞的簡單圖

我們稱一個稱序對$G=(V,E)$為簡單圖 (simple graph)，其中V為任意非空的有限集合，稱為頂點集 (vertex set)，V內的元素稱為頂點 (vertex)；且 E稱為邊集 (edge set)是由頂點集V的某些二元子集所構成的集合，邊集 E內的元素為邊 (edge)。有時為了指出圖G的頂點集和邊集，我們也分別用符號$V(G)$ 及$E(G)$表示。另外我們說圖的次數(graph order) 為頂點的個數，亦即頂點集的集合基數 (set cardinality)，記作 $|G|:=|V|$；而邊集的集合基數則稱為圖的尺寸 (graph size)，記作$\| G \|:=|E|$。舉例而言：上圖 Fig. 8 中的簡單圖，其次數為 7、尺寸為 9，而頂點集和邊集分別為

$$V=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_7\} \text{ 和} E=\left\{e_1,e_2,e_3,\dots,e_9\right\}$$

注意到邊$e_1:=\{v_1,v_2\}$、$e_7=\{v_5,v_6\}$也常簡記作 $e_1=v_1v_2$、$e_7=v_5v_6$，其他邊也類似定義。

令頂點$u,v\in V$、邊$e=uv\in E$，則我們說點u與v相鄰 (adjacent)，記作$u\sim v$。我們說頂點u與v和邊 e的接鄰(incident)，此時u及v也稱為邊 e的端點(end points)。若邊$e=uv, f=vw\in E$且$u\neq w$，則我們也稱e與f相鄰。如上圖中，頂點v_2與v_4 相鄰，且為邊e_5的端點；而邊$e_5=v_2v_4$和邊$e_8=v_4v_6$相鄰。

令點$v\in V$，集合$N(v):=\{x\in V: x\sim v\}$稱為頂點$v$的開鄰集 (open neighborhood)，或簡稱鄰集；集合$N[v]:=N(v)\cup\{v\}$稱為頂點v的閉鄰集 (closed neighborhood)。頂點v的度 (degree) 是與v相鄰的頂點數，記作 $d(v):=|N(v)|$。在圖上中，$N(v_2)=\{v_4,v_5,v_7\}$，$N[v_1]=\{v_1,v_2\}$，$d(v_1)=1$、$d(v_2)=5$、$d(v_3)=d(v_4)=d(v_5)=d(v_7)=2$、$d(v_6)=4$。

令簡單圖$G=(V,E)$ 且給定$V' \subseteq V$與$E' \subseteq E$，我們稱圖$G'=(V',E')$為圖G的子圖(subgraph)。此外，E'中的所有邊的端點恰由V'中的所有頂點構成，則我們稱這樣的子圖為由V'所引導的子圖(subgraph induced by V')，記作$G[V']$。例如上圖 Fig. 8 中，由集合$V'=\{v_2,v_3,v_5,v_6,v_7\}$所引導的子圖如下圖 Fig. 9 紅線標示的子圖所示：

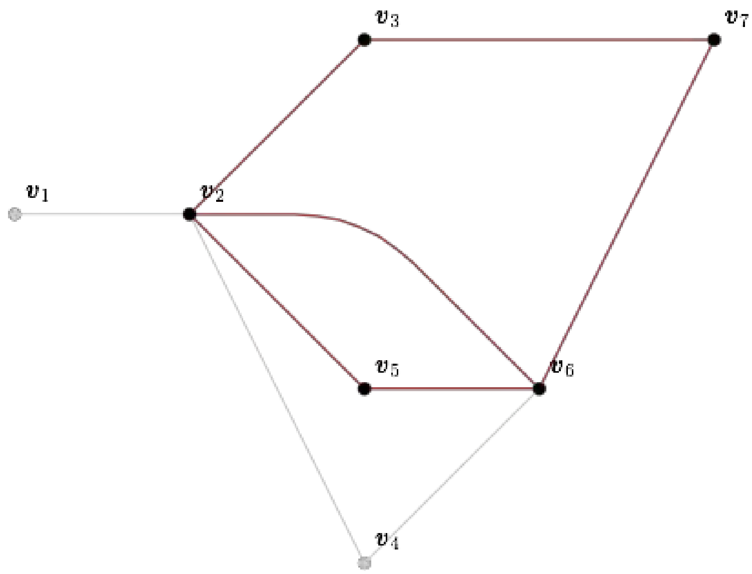
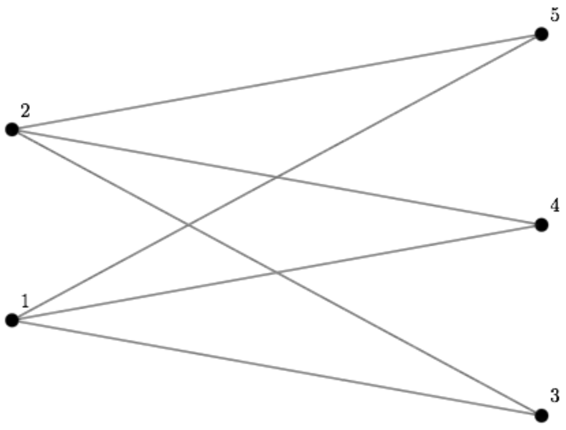


Fig. 9:在 Fig. 8 中由 $V'=\{v_2,v_3,v_5,v_6,v_7\}$ 引導的子圖

由於在圖論裡我們關心的是頂點與邊的連接關係，而非圖的呈現方式，所以縱使兩個畫出來看似截然不同的圖，可能在圖論的本質上是相同的，例如下圖 Fig. 10a 以及 Fig. 10b：



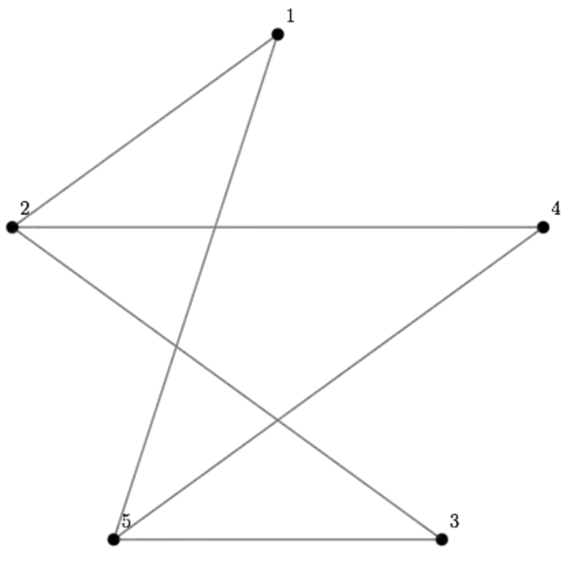


Fig. 10a:圖G

Fig. 10b: 圖H

但注意到若我們定義函數$\varphi: V(G) \longrightarrow V(H)$ 有下列頂點的對應關係：

$$1 \leftrightarrow 2、2 \leftrightarrow 5、3 \leftrightarrow 3、4 \leftrightarrow 4、5 \leftrightarrow 1$$

則圖G中頂點的相鄰關係完全和圖H 的相鄰關係一致，換句話說φ完整保留了圖G 的相鄰結構。所以有以下定義：我們稱兩簡單圖G和H 同構 (isomorphic)，記作 $G \approx H$，若且唯若存在一對一映成函數$\varphi: V(G) \longrightarrow V(H)$使得對所有的$u, v \in V(G)$以下關係都成立

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$$

同時也稱函數φ為一個圖同構 (graph isomorphism)。若兩圖不是同構，則稱異構（non-isomorphic）。

給定一簡單圖$G = (V, E)$，若令$u = v_0$ 且$v = v_k$，我們稱由點和邊交錯構成的序列 $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$，其中$e_i := v_{i-1} v_i \in E (1 \leq i \leq k)$，為一條$uv$-步走 ($uv$-walk)，此時我們也叫頂點$u$和$v$分別為起始點 (inital vertex) 和終端點 (terminal vertex)，其餘的頂點稱為中繼點 (intermediate vertices)。如果步走 W中的邊$e_1, \dots, e_k$ 皆相異（頂點不必相異），則此時W稱為一條 uv-軌跡 (uv-trail)；此外如果軌跡 W有相異的中繼點，則稱W為一條uv−路徑(uv-path)。而 k為此序列的長度為路徑長 (length of path)。此外，若起始點和終端點相同，$u = v$，則稱我們稱此封閉步走為封閉的 (closed)；封閉的軌跡稱為迴路 (circuit)；封閉的路徑稱為迴圈 (cycle)。

若給定一簡單圖G，使得任意兩頂點$x, y \in V(G)$之間都存在一條xy-路徑，則我們說此圖 G為連通的 (connected)，否則稱為非連通 (disconnected)，例如下圖 Fig. 11a 為連通圖，而 Fig. 11b 為非連通圖。

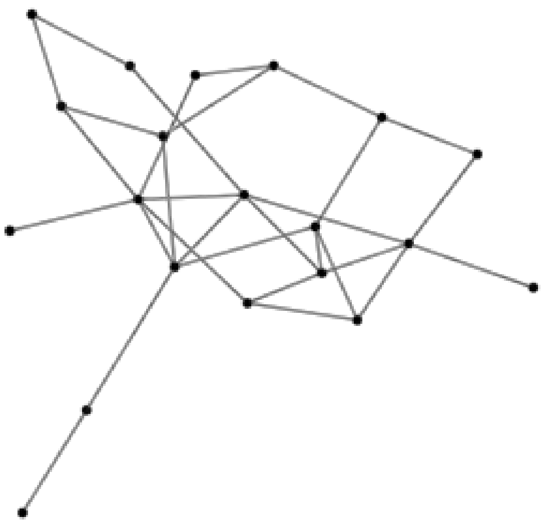


Fig. 11a:連通圖

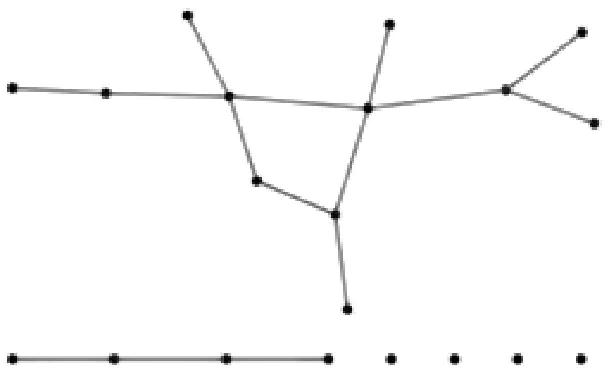


Fig. 11b: 非連通圖

（二）連方塊相關名詞

連方塊是由單位正方形不斷開地連接所構成的多邊形，我們稱連方塊內的單位正方形為方格 (cell)，如此研究的 *Crazy Knights* 棋盤即為一例。自由連方塊 (free polyomino) 指的是可在空間中任意平移、旋轉、鏡射的連方塊，例如下圖 Fig. 12 中的八個連方塊皆視為等價的自由連方塊，任取一個當代表即可。

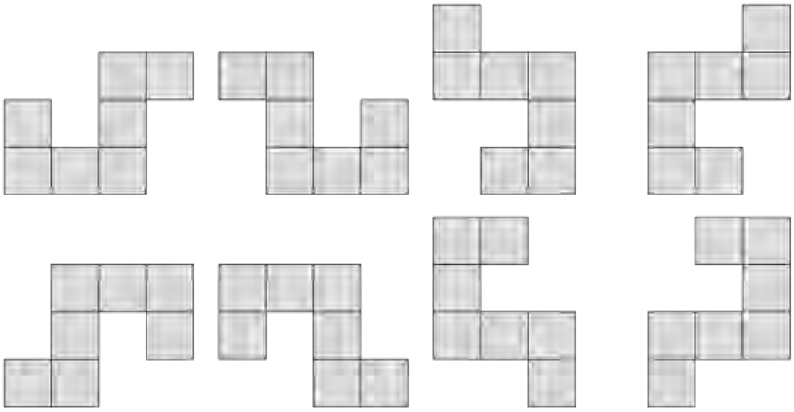


Fig. 12: 八個等價的自由連方塊

三、推廣研究

關於長方形 $m\times p$棋盤的騎士一筆畫問題 (knight tour circuit problem)，已經由 Schwenk [10] 和 McGown & Leininger [9] 給出完整的刻畫。以下我們想轉而研究的是在自由連方塊上的騎士路徑圖。

（一）$n-$方格自由連方塊個數

首先我們遇到的第一個問題是：由n個方個所形成的自由連方塊的個數是多少？參考 Goodman [4]的第十四章 *Polyominoes* (by G. Barequet, S.W. Golomb and D.A. Klarner)，其中收錄截至 2017 年為止關於連方塊的研究，$n-$方格自由連方塊個數(number of n-cell free polyominoes)目前尚未找到封閉的公式解 (closed form formula)。對於$n\leq 15$ 的自由連方塊個數，可參見下表 Table 1；$n=4,5,6$的詳細自由連方塊可參考下圖 Fig. 13。

n	自由連方塊個數
1	1
2	1
3	2
4	5
5	12
6	35
7	108
8	369
9	1285
10	4655
11	17 073
12	63 600
13	238 591
14	901 971
15	3 426 576

Table 1:方格數$n \leq 15$ 的自由連方塊個數

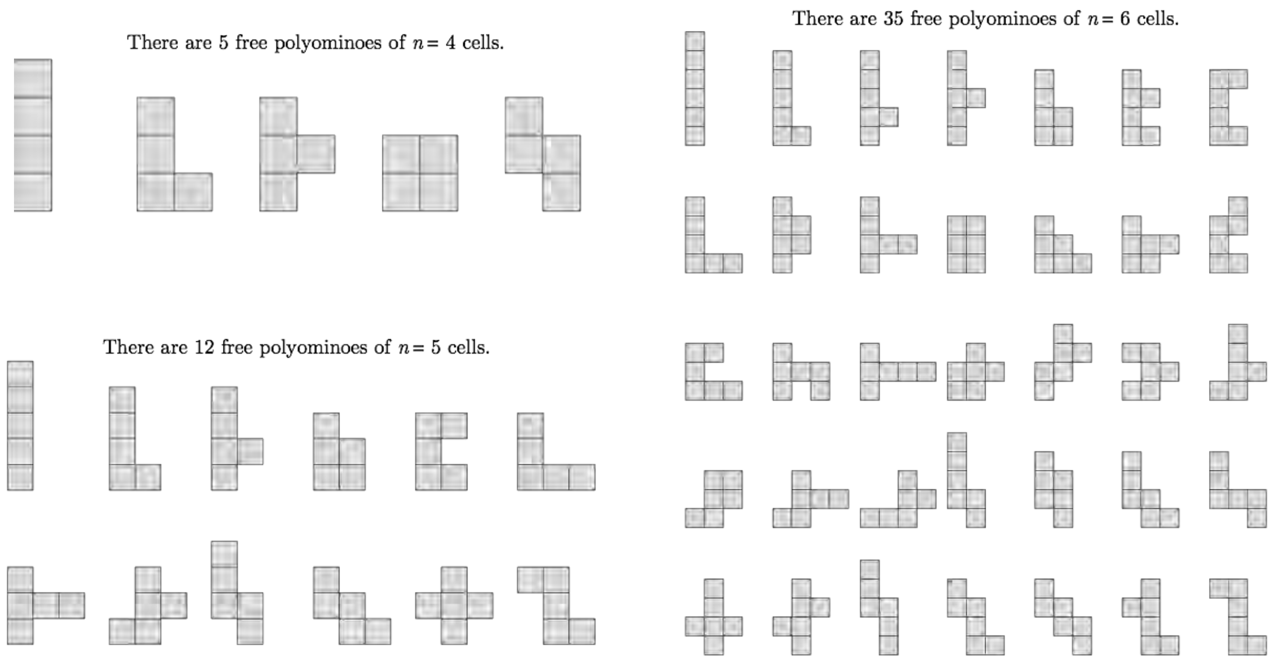


Fig. 13: $n = 4,5,6$的所有自由連方塊

（二）自由連方塊所引導的騎士路徑圖

我們將原先解決 *Crazy Knights* 遊戲的關鍵步驟：連方塊棋盤所引導的騎士路徑圖，套用在其他$n-$方格的連方塊時，發現一些有趣的情況，例如下圖 Fig. 14 的7−方格連方塊所引導出的騎士路徑圖並不連通，這代表我們無法在這個連方塊棋盤上上面進行騎士交換。

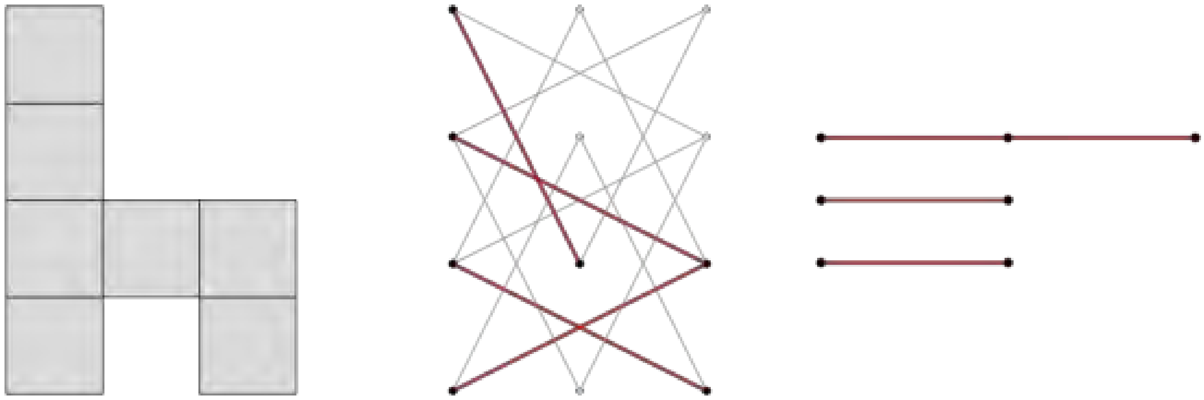


Fig. 14:$n = 6$非連通的騎士引導路徑圖例子

而事實上當$n \leq 6$時，所有的連方塊所引導的騎士路徑圖都非連通。當考慮$n = 7$ 的所有108個連方塊時，只有以下圖 Fig. 15 所示的三種連方塊會引導出連通圖：

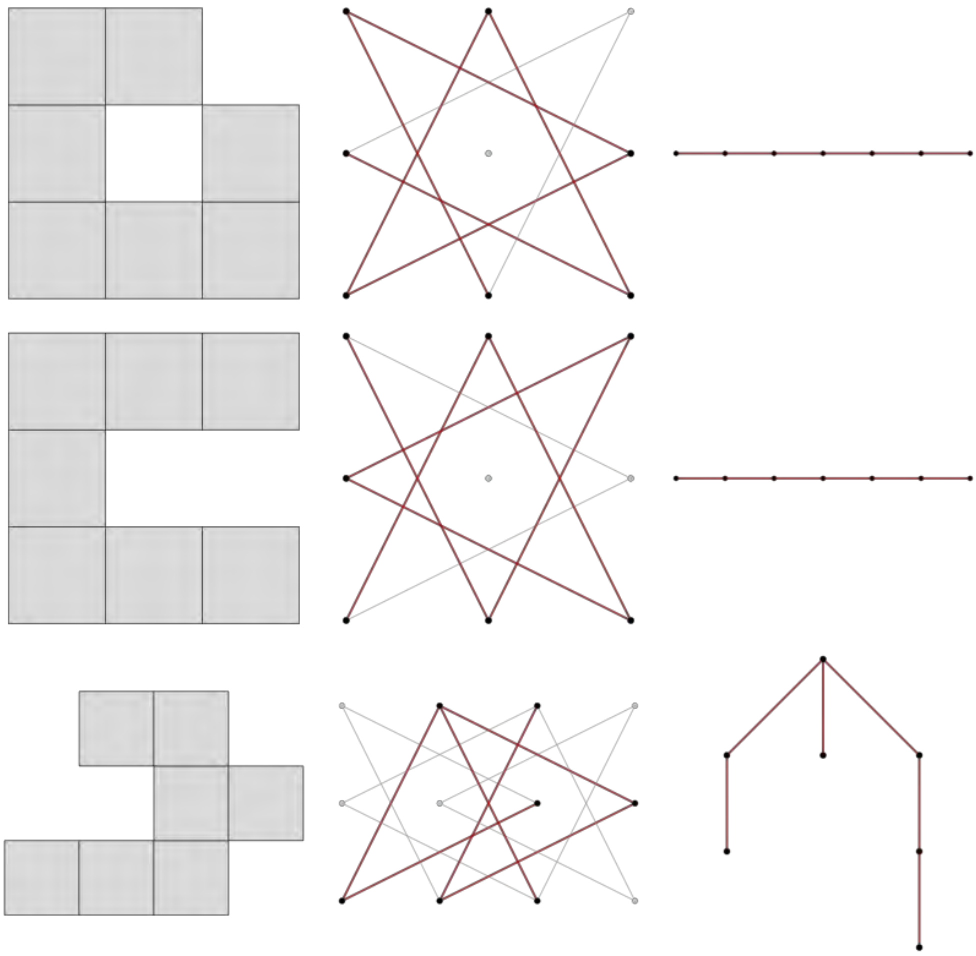


Fig. 15: $n = 7$的所有連通圖以其對應的連方塊

特別注意到前圖 Fig. 15 中的三個連方塊，只會造成兩個異構的騎士路徑圖；前兩個連方塊則會引導出同構的騎士路徑圖，也就是說，如果我們在此兩同構的引導子圖上進行 *Crazy Knights* 遊戲，兩個棋盤將會是等價的。然而當我們將研究方向推往$n \geq 8$，歸納$n-$方格自由連方塊上的異構圖數目時，卻發現異構圖數量，並不一定隨著連方塊方格變多而隨之增長，例如：當 $n = 8,9,10,11$時，其異構圖數目分別為$11,16,20,18$。

伍、研究結果及結論

我們成功利用圖論方式找出原先棋盤遊戲的解法，並試圖將同樣的想法推廣至其他連方塊棋盤。計算方格數量更大的自由連方塊時，我們運用到抽象代數中的群論(group theory)工具，二面體群 (dihedral group)；以及利用高斯整數 (gaussain integers) 代表連方塊，從而利用複數運算的幾何性質（即複數乘法和複共軛分別對應幾何意義上的旋轉以及鏡射），來幫助我們計算連方塊個數，甚至後續找出連方塊引導出的異構騎士路徑圖個數，也須大量倚賴於自由連方塊的高斯整數表示。但是當連方塊方格增加時，由於有許多不同的自由連方塊會引導出同構的騎士路徑圖，使得整個分類問題更為複雜，希望之後能朝這個面向著手挖掘更多的分類特徵。

陸、參考文獻及其他

【相關參考書】

[1] Aigner, M., *A Course in Enumeration*, Springer-Verlag Heidelberg, 2000.

[2] Anderson, I., *A First Course in Discrete Mathematics*, Springer-Verlag London, 2002.

[3] Diestel, R., *Graph Theory*, 5th ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017.

[4] Goodman, J. E. et al (editors), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, 3rd ed., CRC Press, Boca Raton, Florida, 2017

[5] Jungnickel, D., *Graphs, Networks and Algorithms*, 4th ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[6] Richeson, D. S., *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press, 2008.

[7]Trudeau, R. J., *Introduction to Graph Theory*, Dover Publications New York, 1993.

[8] 徐力行,《沒有數字的數學》, 天下文化, 2003.

【期刊論文／文章】

[9] McGown, K. and Leininger, A., *Knight's Tour*, MIT and Oregon State University, 2002.

[10] Schwenk, A. J., *Which Rectangular Chessboards Have a Knight's Tour?*, Mathematical Magazine, Vol. 64, No. 5 (Dec. 1991), pp.325-332, published by Mathematical Association of America.

【網路資源】

[11] Sloane, N. J. A., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, sequence A000105, number of free polyominoes (or square animals) with *n* cells.

【評語】030411

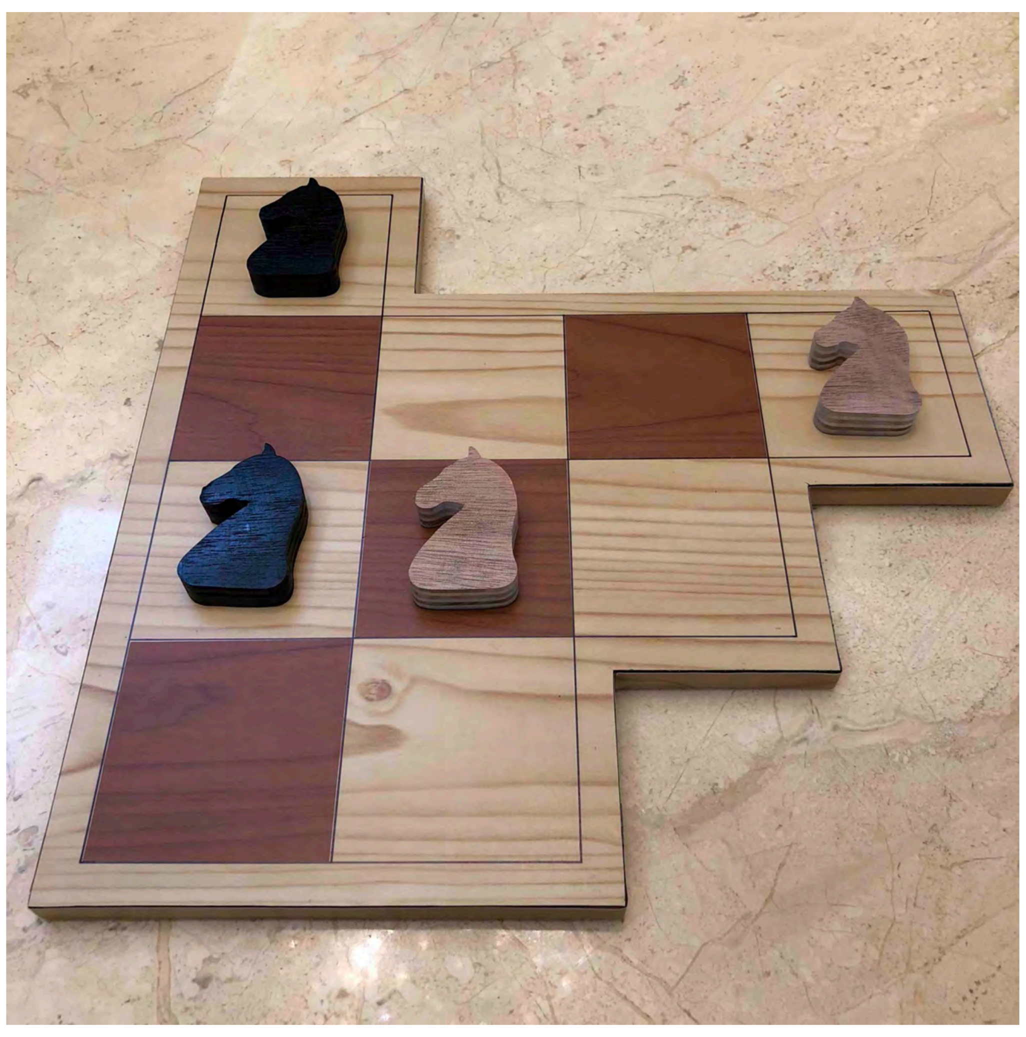
考慮在裁剪後的西洋棋盤上放置兩黑兩白四個騎士。黑騎士和白騎士能否互換位置的問題。針對特定棋盤，給出了解答。問題很有趣。作者觀察到原始問題其實是可以適當的轉化為在一個圖(graph)上，選定的黑白點位置的交換問題。透過將棋盤轉成對應的樹狀圖，針對原本的問題，給出了完整而清楚的說明。想法十分巧妙，值得嘉許。美中不足的是，討論的內容稍嫌少了些。對於一般化的問題（不同形狀的裁剪後的棋盤、更多的騎士），是否可以給出部分的結果（何種殘局，幾個騎士，最少步數的分析）？如果能多一些相關的討論，會是一個不錯的作品。

作品海報

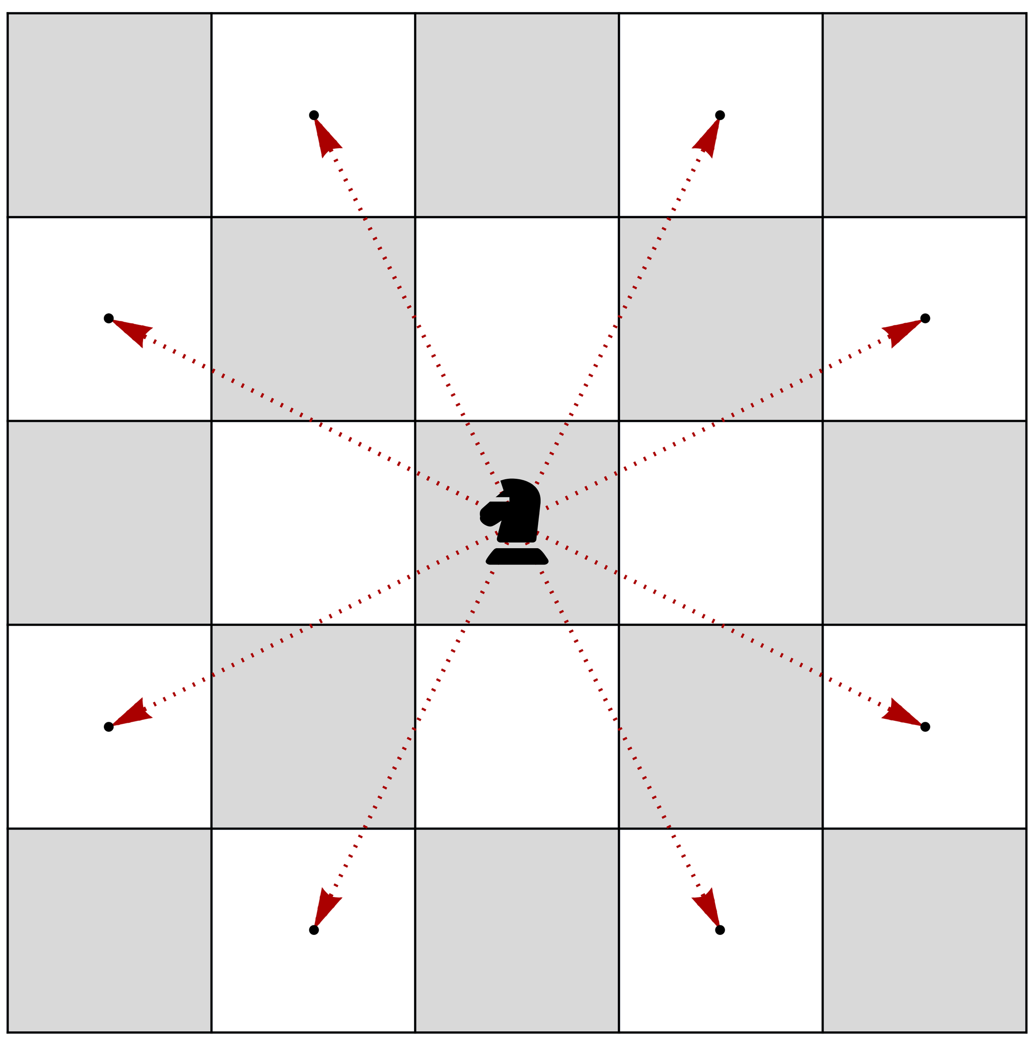
【壹、研究動機及摘要】

在玩桌上遊戲時，接觸到一款名為 *Crazy Knights*® 的棋盤桌遊，如下圖一。此遊戲成功的條件為：給定黑色白色棋子個兩顆，並且設定四顆棋子的初始位置，透過一系列的西洋棋騎士的移動方式如圖二，將黑色和白色棋子的位置互相對換，移動過程中任意棋盤格不得同時放兩棋子。參考下圖三對照遊戲初始和成功配置。

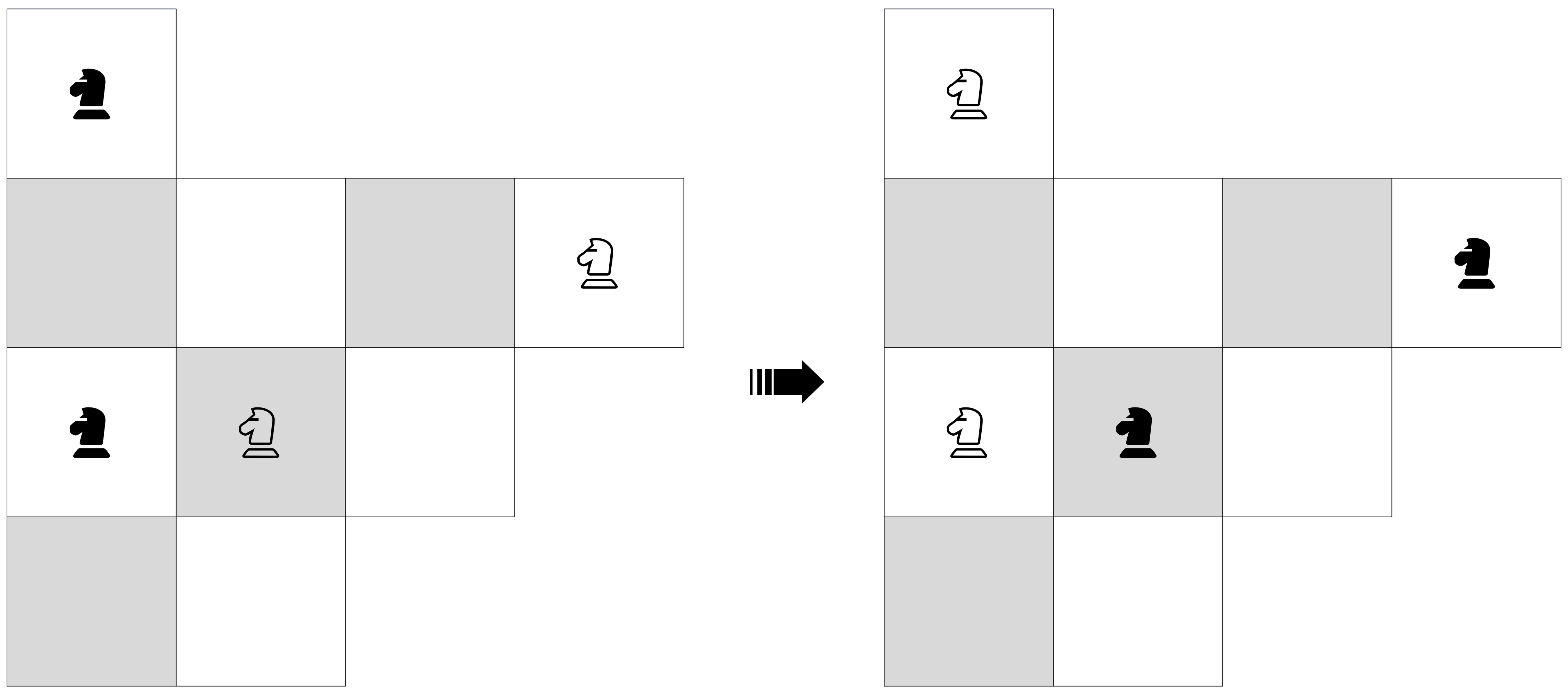
本研究是把遊戲的各要素，轉換成離散數學中圖論 (graph theory) 相關概念，明確給出遊戲的解；並且試圖將原本棋盤更換成其他形狀的連方塊 (polyomino)，歸納解的存在性，最後將此問題化縮為圖同構問題 (graph isomorphism problem)。



圖一：*Crazy Knights* 遊戲棋盤



圖二：西洋棋的騎士移動規則



圖三：遊戲初始配置 (左圖) 以及遊戲成功配置 (右圖)

【貳、研究目的】

一、利用圖論方式解出原始 *Crazy Knights* 遊戲棋盤。
二、改變棋盤格的數目，研究不同連方塊所引導出的騎士路徑圖連通性。
三、研究不同連方塊所引導出的騎士路徑圖連通性。
四、歸納哪些連方塊將會引導出同構的圖。

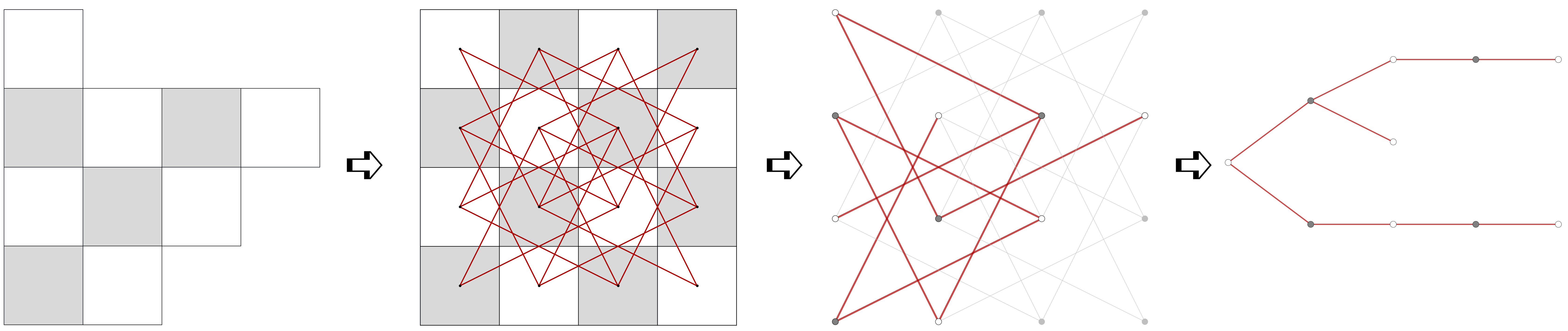
【參、研究設備與器材】

一、*Crazy Knights*® 遊戲棋盤、黑白騎士棋子各兩顆，見上圖一。
二、電腦軟體。
三、方格紙、筆。

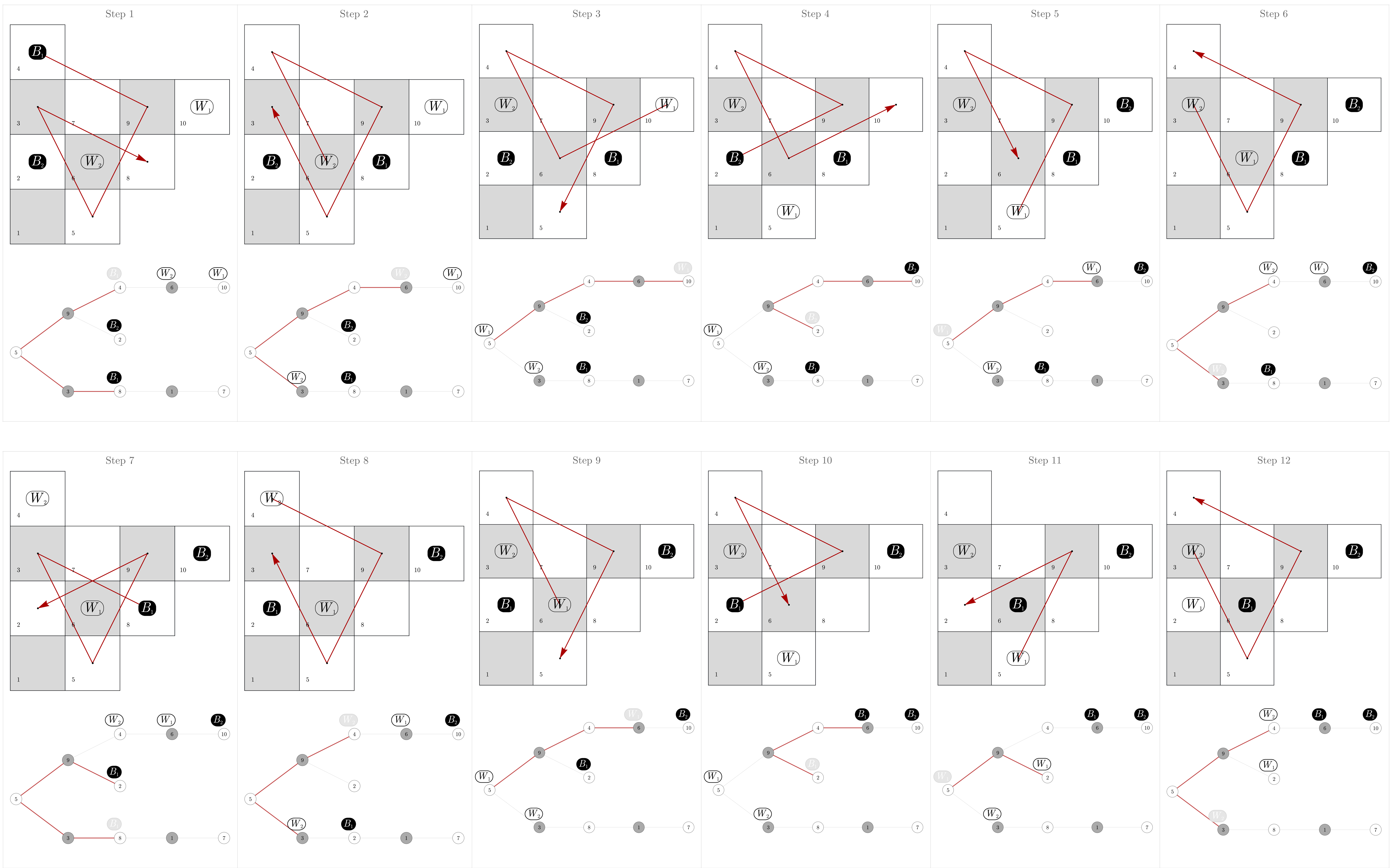
【肆、研究過程或方法】

一、透過圖論方法明確解出原本棋盤遊戲

主要想法為：將原先的遊戲連方塊棋盤，鑲嵌在恰好夠大的矩形棋盤上，併找出此矩形棋盤上相應的「騎士路徑圖」(knight tour graph)，注意到原連方塊棋盤會導引出「騎士巡邏子圖」(induced knight tour subgraph) 過程如圖四顯示，最後藉由在騎士巡邏子圖上進行遊戲，可得出圖五的中對原來遊戲解。



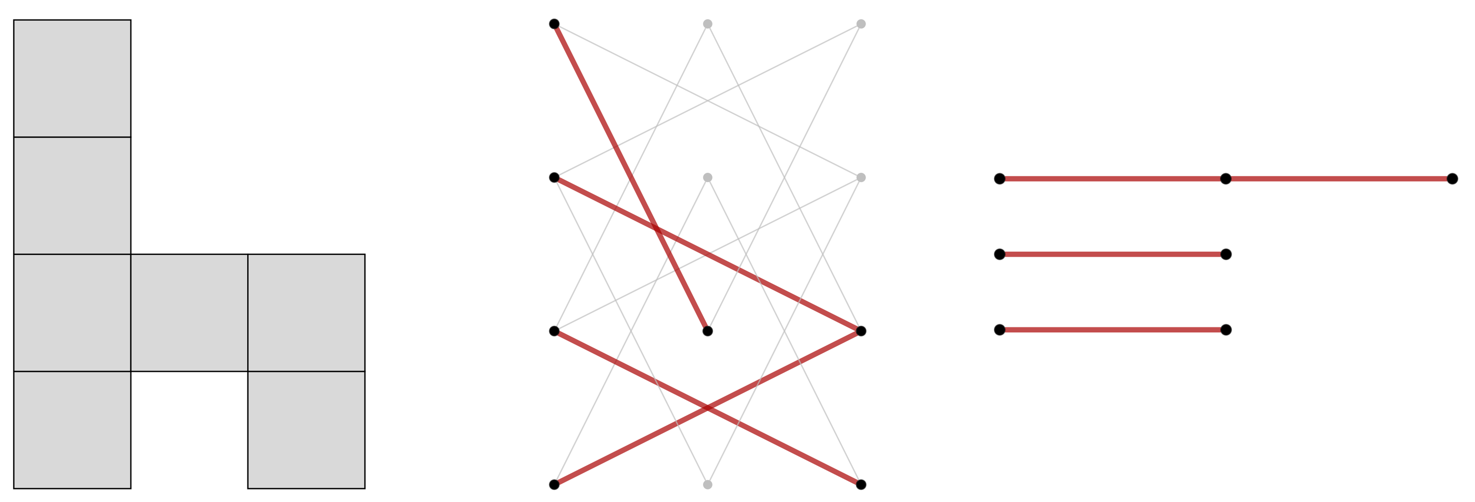
圖四：由原來連方塊棋盤引導出的騎士巡邏子圖



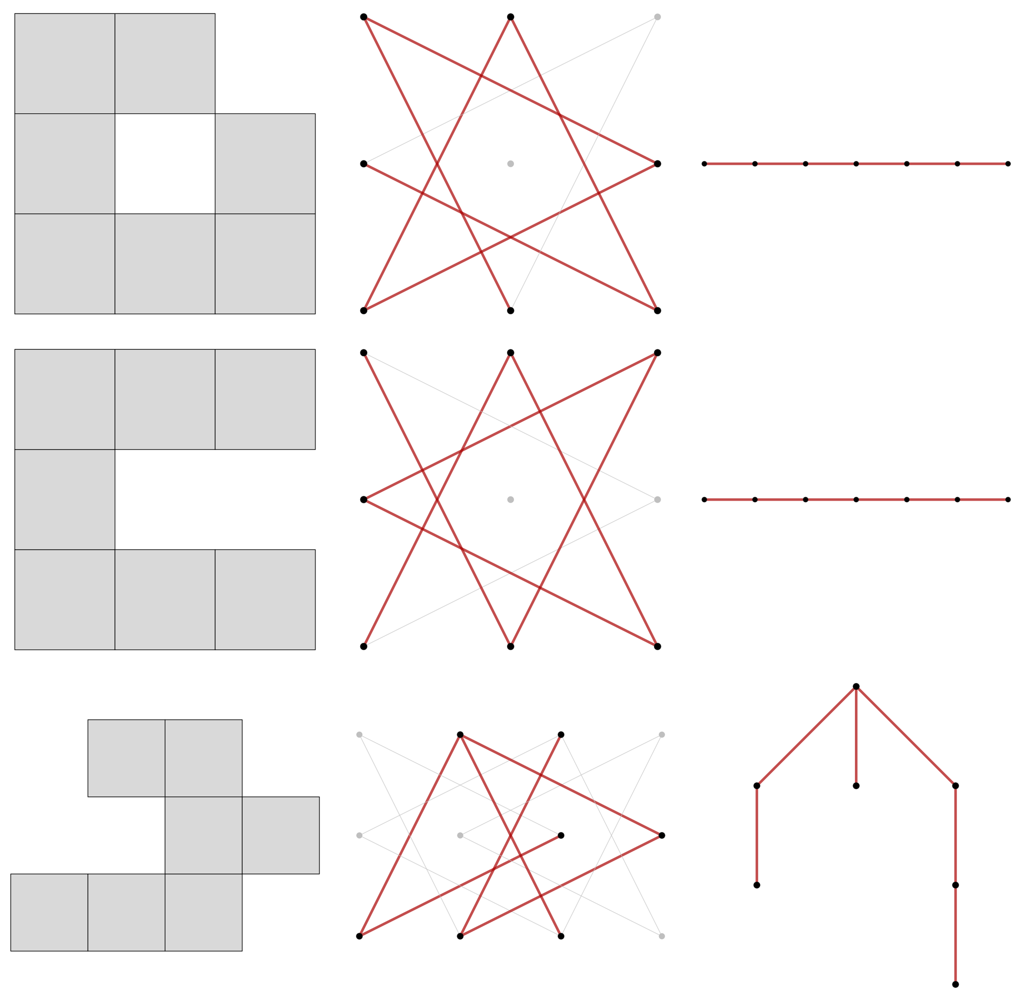
圖五：藉由引導子圖所得出的 *Crazy Knights* 棋盤遊戲詳細解過程

二、將原遊戲推廣至不同形狀的連方塊

上述的解法中，我們觀察到末端的頂點 1 以及頂點 7 都不會使用到，所以有了改變棋盤格數的想法：將棋盤換成其他自由連方塊 (free polyomino)。在參考文獻 [4] (S.W. Golomb *et al*) 後，我們進一步利用高斯整數 (gaussain integers) 代表連方塊，並使用複數的算術、幾何特性，接著透過正方形的二面體群 (dihedral group on a square, D_4) 計算 $n-$方格連方塊的自由連方塊個數，寫出簡易程式考察騎士巡邏子圖的情形。發現大部分連方塊不會有連通的 (connected) 引導子圖，換句話說，這樣的棋盤上無法進行騎士交換的遊戲，如右面圖六所示。然而縱使有連通的引導子圖也不保證是由唯一的連方塊所生成，例如右面圖七為所有七格連方塊所產生的連通引導子圖。



圖六：(上圖) 舉例說明此 7 格連方塊會出現非連通引導子圖
(右圖) 所有具有連通引導子圖以其對應的 7 格連方塊



注意在圖七當中，前兩個連方塊具有同構的引導子圖。注意到在 108 個不同的自由連方塊當中，僅僅只有三個連方塊會導引出連通的騎士巡邏子圖；在這三個引導子圖之中有兩種異構圖。事實上當 $n \leq 6$ 時，所有相異的 n 格自由連方塊都不會引導出任何連通的騎士巡邏子圖。然而如果將研究方向推往 $n \geq 8$，歸納 n 格自由連方塊上的異構騎士巡邏子圖的數目時，卻發此數量，並不一定隨著連方塊方格變多而隨之增長，例如：當 $n = 8, 9, 10, 11$ 時，其異構圖數目分別為 11, 16, 20, 18。

n	自由連方塊個數	異構的騎士巡邏圖數目
1	1	0
2	1	0
3	2	0
4	5	0
5	12	0
6	35	0
7	108	2
8	369	11
9	1285	16
10	4655	20
11	17 073	18

【伍、研究結果及結論】

本研究成功利用圖論方式找出原先棋盤遊戲的解法，解法存在的充要條件為騎士引導子圖具有足夠大的「待轉區」。接著我們將同樣想法推廣至其他形狀的連方塊棋盤後，發現：不同的連方塊可能產生出同構的騎士巡邏路徑圖，則在這些棋盤上進行騎士交換的遊戲可視為組合意義上等價。另一方面，在透過程式計算方格數更大的自由連方塊時，我們的演算法會運用到抽象代數中和平面變換相關的二面體群；以及利用高斯整數代表連方塊，從而利用複數運算的幾何性質，來幫助我們計算連方塊個數，甚至後續找出連方塊引導出的異構騎士路徑圖個數，也須大量倚賴於自由連方塊的高斯整數表示。但是當連方塊方格增加時，由於有許多不同的自由連方塊會引導出同構的騎士路徑圖，使得這整個分類問題更為複雜，往後研究能再朝這個面向刻畫分類特徵。

【陸、參考文獻及其他】

【相關參考書】

[1] Aigner, M., *A Course in Enumeration*, Springer-Verlag Heidelberg, 2000.

[2] Anderson, I., *A First Course in Discrete Mathematics*, Springer-Verlag London, 2002.

[3] Diestel, R., *Graph Theory*, 5th ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017.

[4] Goodman, J. E. et al (editors), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, 3rd ed., CRC Press, Boca Raton, Florida, 2017

[5] Richeson, D. S., *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press, 2008.

[6] Trudeau, R. J., *Introduction to Graph Theory*, Dover Publications New York, 1993.

【期刊論文 / 文章】

[7] McGown, K. and Leininger, A., *Knight's Tour*, MIT and Oregon State University 2002.

[8] Schwenk, A. J., *Which Rectangular Chessboards Have a Knight's Tour?*, Mathematical Magazine, Vol. 64, No. 5 (Dec. 1991), pp. 325-332, published by Mathematical Association of America.