中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030410

『質』接『槓』上幾何

學校名稱：屏東縣立鶴聲國民中學

作者：	指導老師：
國二 蘇子庭	陳勝仕
國二 陳亭卉	張鑑堂

關鍵詞：質量分布、槓桿原理、五心

摘要

首先，利用槓桿原理及質量中心的概念，探討有關三角形的共點問題，並以分點公式為輔，求得內心、旁心、垂心、外心、奈格爾點、格高尼點及 Mittenpunkt 點的坐標。

我們從傅海倫教授所發表的一篇研究報告「物理原理在數學中的應用」，順利推導出垂心的坐標，並結合垂心及外心的證明，配合槓桿原理，重新證明出尤拉線定理。

利用質量分配及槓桿原理進行推證過程中，我們發現奈格爾點、格高尼點與垂心證法雷同；Mittenpunkt 點與外心的證法雷同；而格高尼點(Ge)、重心(G)及 Mittenpunkt 點(M)具有三點共線及$\overline{GeG}$：$\overline{GM}$ =2 : 1 的性質，與尤拉線定理的證法相類似。

最後，列舉一些實例以槓桿原理做不同的思維運算，發現槓桿原理對國中生而言，在特定題材的教學及解題上，會是一項不錯的輔助工具。

壹、研究動機

上基本幾何作圖時，作三角形三邊中垂線，圖形中三中垂線會交於一點。如果將三中點分別與頂點連線，圖形中三中線會交於一點。進一步作三角形三內角平分線，圖形中三條角平分線會交於一點，結論是：都會「 交於一點」。這種共點的現象引起我們的好奇，也引發我們探究的興趣，便從網路上搜尋相關的資訊，發覺研究重心問題的最多，有幾份研究報告是從物理質量分布與槓桿平衡原理的的角度做探討與研究，其中多數是採<u>向量的方法</u>推證 n 個頂點重心位置的規律性，有些資料是藉由<u>西瓦定理</u>，間接求證三角形三內角平分線會交於一點及三高線會交於一點。

以這幾份研究資料為基礎，我們想要採取不同方式進行推證，因為我們是國中生，自然課的<u>槓桿原理</u>我們懂在三角形三頂點上配置適當質量，直接證明三內角平分線會交於一點及三高線會交於一點的問題令人興奮。除了重心、內心、垂心之外，還有旁心、外心、奈格爾點、格高尼點及 Mittenpunkt 點也嘗試看看，因此便展開了我們研究之旅。

貳、研究目的

一、利用**質量分布原理**與**槓桿平衡原理**進行探討：

(一)三角形三中線共點(重心)問題，並求證重心坐標。

(二)三角形之三內角平分線共點(內心)問題，並求證內心坐標。

(三)三角形一內角平分線及另兩角的外角角平分線共點(旁心)問題，並求證旁心坐標。

(四)三角形三高線共點(垂心)問題，並求證垂心坐標。

(五)三角形三邊中垂線共點(外心)問題，並求證外心坐標。

(六)三角形三個旁切圓與三邊相切，三切點與三頂點連線共點(奈格爾點)問題，並求證其坐標。

(七)三角形內切圓與三邊相切，切點與頂點連線共點(格高尼點)問題，並求證其坐標。

(八)三角形三個旁切圓圓心與三邊中點連線共點(Mittenpunkt 點)問題，並求證其坐標。

二、將上述結果進一步探討及推廣：❶推證尤拉線定理❷推證格高尼點、重心與 Mittenpunkt 點三點共線及性質❸就兩道數學題，將比例特殊化後，進行探討及推廣。

三、藉由實例演算，說明槓桿原理在數學教學以及解題上的運用。

參、研究設備和器材

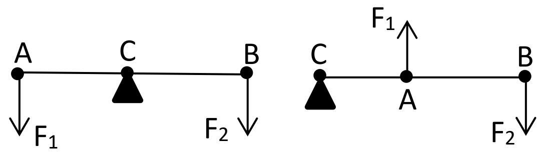
紙筆、電腦。

肆、研究過程與方法

研究過程一：**就三角形重心、內心、旁心、垂心、外心、奈格爾點、格高尼點及 Mittenpunkt 點共八心，利用質量分配及槓桿原理探討三線共點問題，並求證其坐標。**

預備知識

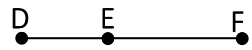
❶槓桿原理



如右圖，C 為$\overline{AB}$的支點，

則 $F_1 \times \overline{AC} = F_2 \times \overline{BC}$ $\therefore\ \overline{AC} : \overline{BC} = F_2 : F_1$

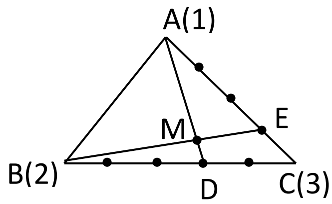
❷分點公式



如右圖，E 為$\overline{DF}$上一點，若$\overline{DE}:\overline{EF} = m:n$

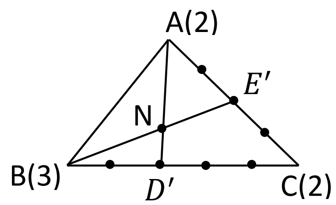
則 E(坐標)= $\frac{m}{m+n} \times F(坐標) + \frac{n}{m+n} \times D(坐標)$

槓桿原理有別於分點公式，因為槓桿原理不僅受力臂(長度)變量影響，同時也受質量變量影響(如下圖)，因此槓桿原理在解題運用上的關鍵是：如何在兩端點配置適當的質量當質量配量決定後，兩點的質心公式才是分點公式。



如左圖，質量分配分別為 A：1 克，B：2 克，C：3 克，之後簡記為質點組{A(1)，B(2)，C(3)}，由槓桿原理得知 D 為{B(2)，C(3)}的支點，E 為{A(1)，C(3)}的支點，

$\therefore$ $\overline{AD}$與$\overline{BE}$交點 M 為{ A(1)，B(2)，C(3)}的質心。



如左圖，在同樣的ΔABC 中，重新配置質量為 A：2 克，B：3 克，C：2 克，之後簡記為質點組{ A(2)，B(3)，C(2)}，

由槓桿原理得知D′為{B(3)，C(2)}的支點，E′為{A(2)，C(2)}的支點，

$\therefore$ $\overline{AD'}$與$\overline{BE'}$交點 N 為{A(2)，B(3)，C(2)}的質心。

小結 ：**質點組{A，B，C}位置相同，若質點配置的質量不同，則質心位置亦不同。**

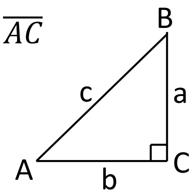
❸若 A、B、C 為三個質點，其質量分別為m_1、m_2、m_3，則

質心(坐標)= $\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}A(坐標) + \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}B(坐標) + \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}C(坐標)$

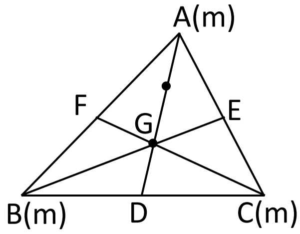
❹在△ABC 中，$\overline{AD}$為∠A的角平分線，與$\overline{BC}$交於 D 點，則內分比性質 $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$

❺在△ABC 中，$\overline{AD}$為∠A外角的角平分線，則外分比性質 $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$

❻三角函數 $\tan A = \frac{a}{b}$ (直角三角形中，鉛垂高度與水平距離的比值關係)



(一) 三角形的重心



△ABC 中，令$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$為三中線，其中 G為△ABC 的重心，則

(1) 三中線交於一點

(2) G(坐標)= $\frac{1}{3}\times A$(坐標) $+\frac{1}{3}\times B$(坐標) $+\frac{1}{3}\times C$(坐標)

證明(1)：

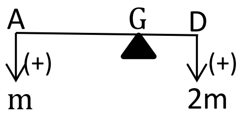
在 A、B、C 上分別放置質量為 m、m、m 的質點，若 D、E、F 分別為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的中點，∵ $m\times\overline{BD}=m\times\overline{CD}$ ，由槓桿原理推得

D(2m)為$\{B(m)$ 、$C(m)\}$的支點，∴ △ABC 的質心會在$\overline{AD}$上，

同理質心也會在$\overline{BE}$上，也會在$\overline{CF}$上，

∵ 質心唯一， ∴ $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於一點。 **[槓桿原理證法]**

證明(2)：



施力與抗力同方向

支點 G 的合力為

$(m+2m)\times g$

其中 g 為重力加速度

∴支點 G 支撐的質量

為 $3m$

(a)設三中線交點為 G，如左圖槓桿示意圖，G為$\{A(m)$ 、$D(2m)\}$的支點，∴ $m\times\overline{AG}=2m\times\overline{DG}$，即 $\overline{AG}:\overline{DG}=2:1$

(b) 由分點公式推得

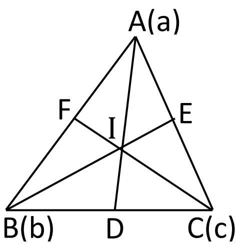
G(坐標)= $\frac{1}{1+2}\times A$(坐標) $+\frac{2}{1+2}\times D$(坐標) **[分點公式運用]**

簡記$G=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}D$，其中 $D=\frac{1}{2}\times B+\frac{1}{2}\times C$

$$\therefore G=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\times B+\frac{1}{2}\times C\right)$$

$$G=\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}\times B+\frac{1}{3}\times C$$

(二) 三角形的內心



△ABC 中，$\overline{BC}=a$ 、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$，令$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$為三內角的角平分線，其中 I 為△ABC 的內心，則

(1) 三內角的角平分線交於一點

(2) I (坐標)= $\frac{a}{a+b+c}\times A$(坐標) $+\frac{b}{a+b+c}\times B$(坐標) $+\frac{c}{a+b+c}\times C$(坐標)

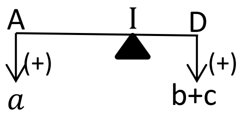
證明(1)：在 A、B、C 上分別放置質量為 a、b、c 的質點，由內分比性質得知

$\overline{BD}:\overline{CD}=c:b$ ，∴ $b\times\overline{BD}=c\times\overline{CD}$ ，由槓桿原理推得 D(b + c)為

$\{B(b)$ 、$C(c)\}$的支點，∴ △ABC 的質心會在$\overline{AD}$上，同理質心也會在$\overline{BE}$上，

也會在$\overline{CF}$上， ∵ 質心唯一， ∴ $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於一點。

證明(2)：



施力與抗力同方向

支點 I 的合力為

$(a$ +b+c) × g

其中 g 為重力加速度

∴支點 I 支撐的質量

為a +b+c

(a) 設三條角平分線交於I，如左圖槓桿示意圖， I 為$\{A(a)$ 、$D(b+c)\}$的支點，∴ $a \times \overline{AI} = (b+c) \times \overline{DI}$，即 $\overline{AI}$ ： $\overline{DI}$ $= (b+c) : a$

(b) 由分點公式推得

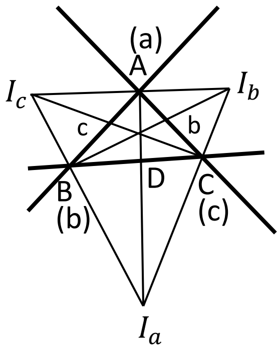
$$\text{I (坐標)} = \frac{a}{a+(b+c)} \times A(\text{坐標}) + \frac{b+c}{a+(b+c)} \times D(\text{坐標})$$

簡記 $\text{I} = \frac{a}{a+b+c} A + \frac{b+c}{a+b+c} D$，其中 $D = \frac{b}{b+c} \times B + \frac{c}{b+c} \times C$

$$\therefore \text{I} = \frac{a}{a+b+c} A + \frac{b+c}{a+b+c} \left(\frac{b}{b+c} \times B + \frac{c}{b+c} \times C\right)$$

$$\text{I} = \frac{a}{a+b+c} A + \frac{b}{a+b+c} B + \frac{c}{a+b+c} C$$

(三) 三角形的旁心



△ABC 中，$\overline{BC} = a$ 、$\overline{AC} = b$、$\overline{AB} = c$，令$\overline{AI_a}$為∠A 內角平分線，$\overline{BI_a}$、$\overline{CI_a}$分別為∠B、∠C 的外角平分線，其中I_a、I_b、I_c為△ABC 的旁心，

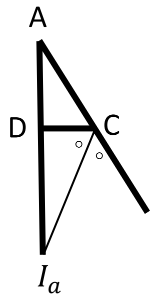
則

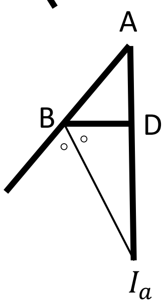
(1) ∠A 內角平分線及∠B、∠C 的外角平分線交於一點

(2) $I_a(\text{坐標}) = \frac{-a}{-a+b+c} A(\text{坐標}) + \frac{b}{-a+b+c} B(\text{坐標}) + \frac{c}{-a+b+c} C(\text{坐標})$

$$I_b(\text{坐標}) = \frac{a}{a-b+c} A(\text{坐標}) + \frac{-b}{a-b+c} B(\text{坐標}) + \frac{c}{a-b+c} C(\text{坐標})$$

$$I_c(\text{坐標}) = \frac{a}{a+b-c} A(\text{坐標}) + \frac{b}{a+b-c} B(\text{坐標}) + \frac{-c}{a+b-c} C(\text{坐標})$$





證明(1)：

在 A、B、C 上分別放置質量為 a、b、c 的質點，令$\overline{BI_a}$、$\overline{CI_a}$交於I_a，連$\overline{AI_a}$，交$\overline{BC}$於 D 點，

如左圖，△ACD 中，∵ $\overline{CI_a}$為∠C 外角平分線，由外分比性質得知：

$$\overline{AI_a} : \overline{DI_a} = \overline{AC} : \overline{CD} \quad \text{——①}$$

如左圖，△ABD 中，∵ $\overline{BI_a}$為∠B 外角平分線，由外分比性質得知：

$$\overline{AI_a} : \overline{DI_a} = \overline{AB} : \overline{BD} \quad \text{——②}$$

① = ②　$\therefore\ \overline{AC}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{BD}$ ， $b:\overline{CD}=c:\overline{BD}$

得 $b\times\overline{BD}=c\times\overline{CD}$ ，表示 $D(b+c)$ 為 $\{B(b)、C(c)\}$ 的支點

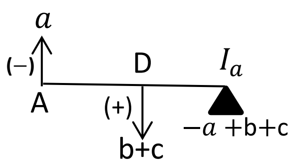
由前面△ABC 內心的說明中，可確定$\overline{AD}$為∠A 內角平分線

∴ ∠A 內角平分線及∠B、∠C 的外角平分線交於一點

證明(2)：

$\because\ \overline{BD}:\overline{CD}=c:b$，$\therefore\ \overline{CD}=\frac{b}{b+c}\times\overline{BC}=\frac{b}{b+c}\times a=\frac{ab}{b+c}$

旁心



❶施力與抗力反方向
且(b+c) × g ＞ a × g
其中 g 為重力加速度
∴ b+c > a
得$-a$ +b+c > 0
❷∵支點 I_a 的合力為
$(-a$ +b+c) × g
∴支點 I_a支撐的質量
為$-a$ +b+c

$\because\ \overline{AI_a}:\overline{DI_a}=\overline{AC}:\overline{CD}$ ， $\overline{AI_a}:\overline{DI_a}=b:\frac{ab}{b+c}=(b+c):a$

得 $a\times\overline{AI_a}=(b+c)\times\overline{DI_a}$，如左圖槓桿示意圖，$I_a(-a+b+c)$為$\{A(a)、D(b+c)\}$的支點，

$\because\ \overline{AI_a}:\overline{DI_a}=(b+c):a$，$\therefore\ \overline{AD}:\overline{DI_a}=(b+c-a):a$

由分點公式推得

$$D(坐標)=\frac{a}{(b+c-a)+a}\times A(坐標)+\frac{b+c-a}{(b+c-a)+a}\times I_a(坐標)$$

簡記 $D=\frac{a}{b+c}A+\frac{-a+b+c}{b+c}\times I_a$ ，$(b+c)D=aA+(-a+b+c)\times I_a$

$\therefore\ I_a=\frac{-a}{-a+b+c}A+\frac{b+c}{-a+b+c}D$，其中 $D=\frac{b}{b+c}\times B+\frac{c}{b+c}\times C$

$$I_a=\frac{-a}{-a+b+c}A+\frac{b+c}{-a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\times B+\frac{c}{b+c}\times C\right)$$

即　$I_a=\frac{-a}{-a+b+c}A+\frac{b}{-a+b+c}B+\frac{c}{-a+b+c}C$

(可視為在施力與抗力反方向時的質量中心坐標公式)

同理得證 $I_b(坐標)=\frac{a}{a-b+c}A(坐標)+\frac{-b}{a-b+c}B(坐標)+\frac{c}{a-b+c}C(坐標)$

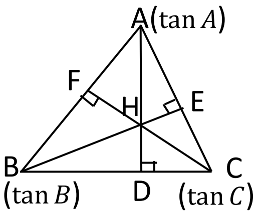
$$I_c(坐標)=\frac{a}{a+b-c}A(坐標)+\frac{b}{a+b-c}B(坐標)+\frac{-c}{a+b-c}C(坐標)$$

小結：⑴內心坐標公式：可視為在施力與抗力**同方向**時的質量中心坐標公式。

⑵旁心坐標公式：可視為在施力與抗力**反方向**時的質量中心坐標公式。

(四) 三角形的垂心

❶銳角三角形

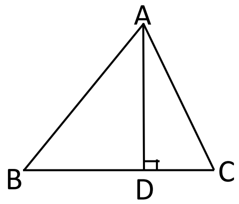


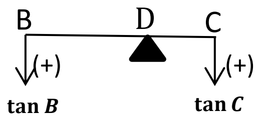
△ABC 中，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$為三邊上的高，則

(1)$\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$交於一點

(2)垂心 H(坐標)= $\frac{\tan A}{\tan A+\tan B+\tan C}\times A(\text{坐標})+\frac{\tan B}{\tan A+\tan B+\tan C}\times B(\text{坐標})$

$+\frac{\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}\times C(\text{坐標})$





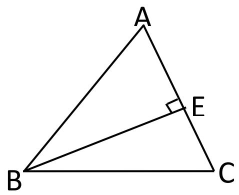
證明(1)：

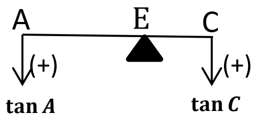
(a)在 A、B、C 上分別放置質量$\tan A$、$\tan B$、$\tan C$的質點，

$\because\ \tan B=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$，$\overline{AD}=\tan B\times\overline{BD}$，$\because \tan C=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$，$\overline{AD}=\tan C\times\overline{CD}$

$\therefore \tan B\times\overline{BD}=\tan C\times\overline{CD}$，表示 D 為$\{B(\tan B)$、$C(\tan C)\}$的支點

∴整個系統質心會在$\overline{AD}$上

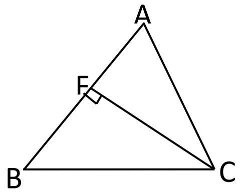


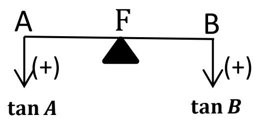


(b)$\because \tan A=\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$，$\overline{BE}=\tan A\times\overline{AE}$，$\because \tan C=\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$，$\overline{BE}=\tan C\times\overline{CE}$

$\therefore \tan A\times\overline{AE}=\tan C\times\overline{CE}$，表示 E 為$\{A(\tan A)$、$C(\tan C)\}$的支點

∴整個系統質心會在$\overline{BE}$上





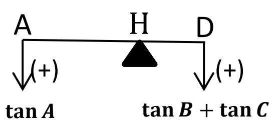
(c)$\because \tan A=\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$，$\overline{CF}=\tan A\times\overline{AF}$，$\because \tan B=\frac{\overline{CF}}{\overline{BF}}$，$\overline{CF}=\tan B\times\overline{BF}$

$\therefore \tan A\times\overline{AF}=\tan B\times\overline{BF}$，表示 F 為$\{A(\tan A)$、$B(\tan B)\}$的支點

∴整個系統質心會在$\overline{CF}$上

∵質心唯一，∴$\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$三高線交於一點

證明(2)：



∵支點 H 的合力為

$(\tan A+\tan B+\tan C)\times g$

∴支點 H 支撐的質量

為$\tan A+\tan B+\tan C$

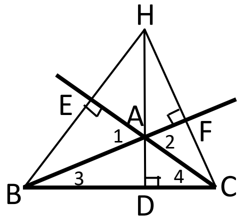
設$\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$三高線交於 H，如左圖所示，H 為$\{A(\tan A)$、$D(\tan B+\tan C)\}$的支點，$\therefore \tan A\times\overline{AH}=(\tan B+\tan C)\times\overline{DH}$

得 $\overline{AH}$：$\overline{DH}=(\tan B+\tan C)$：$\tan A$

同前面內心坐標的證明，可得

H= $\frac{\tan A}{\tan A+\tan B+\tan C}\times A+\frac{\tan B}{\tan A+\tan B+\tan C}\times B+\frac{\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}\times C$

❷鈍角三角形



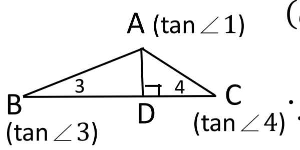
鈍角△ABC 中，A 對$\overline{BC}$作高$\overline{AD}$，B 對$\overline{AC}$延長線作高$\overline{BE}$，C 對$\overline{BA}$延長線作高$\overline{CF}$，其中∠BAC為鈍角，而∠BAC的外角$=\angle 1=\angle 2$，則

(1) $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$交於一點

(2) 垂心 H(坐標)$=\frac{\tan A}{\tan A+\tan B+\tan C}\times A(坐標)+\frac{\tan B}{\tan A+\tan B+\tan C}\times B(坐標)$

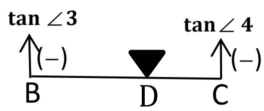
$$+\frac{\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}\times C(坐標)$$

證明(1)：



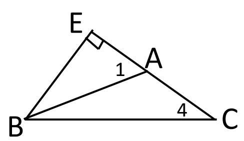
(a)在 A、B、C 上分別放置質量 tan∠1、tan∠3、tan∠4的質點，左圖中

$\because\ \tan\angle 3=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$，$\overline{AD}=\tan\angle 3\times\overline{BD}$，$\because\tan\angle 4=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$，$\overline{AD}=\tan\angle 4\times\overline{CD}$



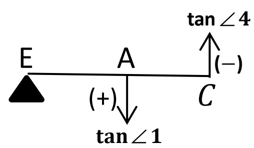
$\therefore\tan\angle 3\times\overline{BD}=\tan\angle 4\times\overline{CD}$，表示 D 為$\{B(\tan\angle 3)$、$C(\tan\angle 4)\}$的支點

∴整個系統質心會在$\overleftrightarrow{AD}$上



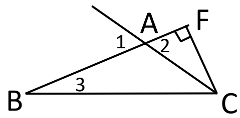
(b)如左圖所示，$\because\ \tan\angle 1=\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$，$\overline{BE}=\tan\angle 1\times\overline{AE}$，

$\because\tan\angle 4=\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$，$\overline{BE}=\tan\angle 4\times\overline{CE}$，$\therefore\tan\angle 1\times\overline{AE}=\tan\angle 4\times\overline{CE}$，



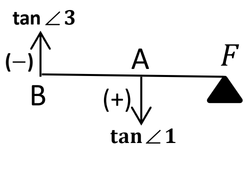
表示 E 為$\{A(\tan\angle 1)$、$C(\tan\angle 4)\}$的支點，

∴整個系統質心會在$\overleftrightarrow{BE}$上



(c)如左圖所示，$\because\ \tan\angle 1=\tan\angle 2=\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$，$\overline{CF}=\tan\angle 1\times\overline{AF}$，

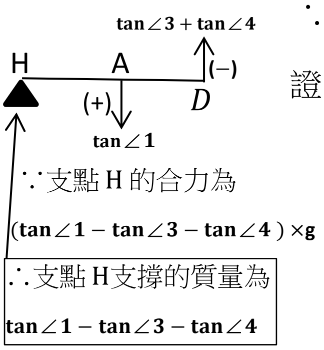
$\because\tan\angle 3=\frac{\overline{CF}}{\overline{BF}}$，$\overline{CF}=\tan\angle 3\times\overline{BF}$，$\therefore\tan\angle 1\times\overline{AF}=\tan\angle 3\times\overline{BF}$，



表示 F 為$\{A(\tan\angle 1)$、$B(\tan\angle 3)\}$的支點，

∴整個系統質心在$\overleftrightarrow{CF}$上，

∵質心唯一， ∴$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$三高線交於一點



證明(2)：

設$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$三高線交於 H，如左圖所示，

H 為$\{A(\tan\angle 1)$、$D(\tan\angle 3+\tan\angle 4)\}$的支點，

$\therefore\ \tan\angle 1\times\overline{AH}=(\tan\angle 3+\tan\angle 4)\times\overline{DH}$，

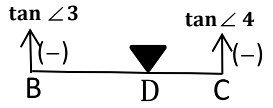
$\overline{AH}:\overline{DH}=(\tan\angle 3+\tan\angle 4):(\tan\angle 1)$

$\therefore\ \overline{AH}:\overline{AD}=(\tan\angle 3+\tan\angle 4):(\tan\angle 1-\tan\angle 3-\tan\angle 4)$

由分點公式推得

$$\mathrm{A}(坐標)=\frac{\tan\angle 3+\tan\angle 4}{(\tan\angle 3+\tan\angle 4)+(\tan\angle 1-\tan\angle 3-\tan\angle 4)}\times \mathrm{D}(坐標)+\frac{\tan\angle 1-\tan\angle 3-\tan\angle 4}{(\tan\angle 3+\tan\angle 4)+(\tan\angle 1-\tan\angle 3-\tan\angle 4)}\times H(坐標)$$

簡記 $\mathrm{A}=\frac{\tan\angle 3+\tan\angle 4}{\tan\angle 1}\times D+\frac{\tan\angle 1-\tan\angle 3-\tan\angle 4}{\tan\angle 1}\times H$



$\overline{BD}:\overline{CD}=\tan\angle 4:\tan\angle 3$

$$\mathrm{H}=\frac{\tan\angle 1}{\tan\angle 1-\tan\angle 3-\tan\angle 4}\times A-\frac{\tan\angle 3+\tan\angle 4}{\tan\angle 1-\tan\angle 3-\tan\angle 4}\times D$$

如左圖所示，$\mathrm{D}=\frac{\tan\angle 3}{\tan\angle 3+\tan\angle 4}\times B+\frac{\tan\angle 4}{\tan\angle 3+\tan\angle 4}\times C$ 代入

$$\mathrm{H}=\frac{\tan\angle 1}{\tan\angle 1-\tan\angle 3-\tan\angle 4}\times A+\frac{-\tan\angle 3}{\tan\angle 1-\tan\angle 3-\tan\angle 4}\times B+\frac{-\tan\angle 4}{\tan\angle 1-\tan\angle 3-\tan\angle 4}\times C\text{-----①}$$

$\because\angle 1$為$\angle$A的外角，由高中數學三角函數對照表得知：

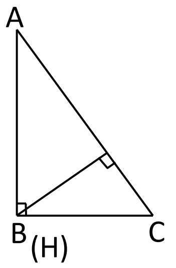
$\tan\angle 1=-\tan A$ ， 又 $\tan\angle 3=\tan B$ ，$\tan\angle 4=\tan C$

代回上面①式的 H 值，

得 $\mathrm{H}=\frac{-\tan A}{-\tan A-\tan B-\tan C}\times A+\frac{-\tan B}{-\tan A-\tan B-\tan C}\times B+\frac{-\tan C}{-\tan A-\tan B-\tan C}\times C$

即 $\mathrm{H}=\frac{\tan A}{\tan A+\tan B+\tan C}\times A+\frac{\tan B}{\tan A+\tan B+\tan C}\times B+\frac{\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}\times C$

❸直角三角形



(1) △ABC 中，∠B為直角，三頂點 A、B、C 分別對$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$作高，顯而易見，三高線會交於 B 點，∴垂心 H 在 B 點上。

(2) 在三頂點 A、B、C 分別放置質量$\tan A$、$\tan B$、$\tan C$的質點，

$\because\angle\mathrm{B}=90°$，由高中數學三角函數對照表得知：$\tan B=\tan 90°=\infty$

直接代入垂心坐標公式

$$\mathrm{H}=\frac{\tan A}{\tan A+\infty+\tan C}\times A+\frac{\infty}{\tan A+\infty+\tan C}\times B+\frac{\tan C}{\tan A+\infty+\tan C}\times C$$

得 $\mathrm{H}=0\times A+1\times B+0\times C$ ，表示

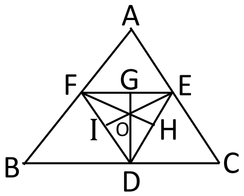
垂心 H(坐標) = B(坐標)，同樣適用於垂心坐標公式。

小結：三角形 ABC (不論是銳角、鈍角或直角三角形)，在三頂點 A、B、C 上分別放置質量為$\tan A$、$\tan B$、$\tan C$的質點，則$\{A、B、C\}$的質心=△ABC的垂心。

說明：在網路上我們搜尋到傅海倫教授所發表的一篇研究報告，內容中**只提到銳角三角形三高線**交於一點的問題，雖然只有短短兩行的說明與提示，卻是相當寶貴的資訊，引導我們直接在三頂點 A、B、C 上各放置質量$\tan A$、$\tan B$、$\tan C$的質點，我們再分別針對銳角三角形、鈍角三角形、直角三角形的情形，一一做分析並運用**槓桿原理**證明出三角形三高線交於一點及求得垂心的坐標。

(五)三角形的外心

❶銳角三角形



銳角△ABC，$\overline{DG}$、$\overline{EI}$、$\overline{FH}$為三邊的中垂線，則

⑴ 三邊的中垂線$\overline{DG}$、$\overline{EI}$、$\overline{FH}$交於一點

⑵ 外心 O(坐標)= $\frac{\text{tanB+tanC}}{2(\text{tanA+tanB+tanC})} \times A(坐標)$

$$+\frac{\text{tanA+tanC}}{2(\text{tanA+tanB+tanC})} \times B(坐標) + \frac{\text{tanA+tanB}}{2(\text{tanA+tanB+tanC})} \times C(坐標)$$

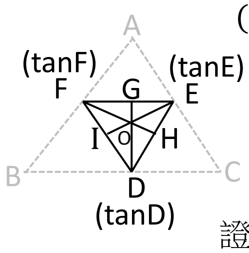
證明⑴：

(a)∵D、E、F 為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$中點，且$\overline{DG} \perp \overline{BC}$，$\overline{EI} \perp \overline{AC}$，$\overline{FH} \perp \overline{AB}$，

∴$\overline{EF}//\overline{BC}$且$\overline{DG} \perp \overline{EF}$，$\overline{DF}//\overline{AC}$且$\overline{EI} \perp \overline{DF}$，$\overline{DE}//\overline{AB}$且$\overline{FH} \perp \overline{DE}$，

表示 O 為△DEF 的垂心

(b)由前面銳角三角形垂心的證明得知：



在 D、E、F 上分別放置質量 tanD、tanE、tanF 的質點

即可證明$\overline{DG}$、$\overline{EI}$、$\overline{FH}$交於一點

證明⑵：

(a) 由證明⑴得知：AEDF、BDEF、CDFE 都是平行四邊形

$\therefore \angle\text{EDF} = \angle\text{A}$、$\angle\text{DEF} = \angle\text{B}$、$\angle\text{EFD} = \angle\text{C}$

又 D(坐標)= $\frac{B(坐標)+C(坐標)}{2}$、E(坐標)= $\frac{A(坐標)+C(坐標)}{2}$、F(坐標)= $\frac{A(坐標)+B(坐標)}{2}$

(b) 設$\overline{DG}$、$\overline{EI}$、$\overline{FH}$交於一點 O，

∵O 為銳角△DEF 的垂心，由銳角三角形垂心坐標得知：

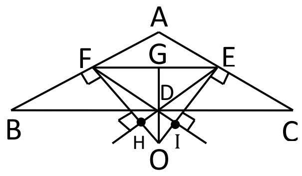
$$\text{O}(坐標) = \frac{\text{tanD}}{\text{tanD+tanE+tanF}} \times D(坐標) + \frac{\text{tanE}}{\text{tanD+tanE+tanF}} \times E(坐標) + \frac{\text{tanF}}{\text{tanD+tanE+tanF}} \times F(坐標)$$

簡記化成 $\text{O} = \frac{\text{tanA}}{\text{tanA+tanB+tanC}} \times \frac{B+C}{2} + \frac{\text{tanB}}{\text{tanA+tanB+tanC}} \times \frac{A+C}{2} + \frac{\text{tanC}}{\text{tanA+tanB+tanC}} \times \frac{A+B}{2}$

$$O=\frac{1}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times[B\tan A+C\tan A+A\tan B+C\tan B+A\tan C+B\tan C]$$

$$O=\frac{\tan B+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times A+\frac{\tan A+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times B+\frac{\tan A+\tan B}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times C$$

❷鈍角三角形



鈍角△ABC，∠A為鈍角，$\overleftrightarrow{DG}$、$\overleftrightarrow{EI}$、$\overleftrightarrow{FH}$為三邊的中垂線，則

(1)$\overleftrightarrow{DG}$、$\overleftrightarrow{EI}$、$\overleftrightarrow{FH}$交於一點

(2)外心 O(坐標)= $\frac{\tan B+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times A(坐標)+\frac{\tan A+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times B(坐標)+\frac{\tan A+\tan B}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times C(坐標)$

證明(1)：

(a)∵D、E、F 為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的中點，且$\overline{DG}\perp\overline{BC}$、$\overline{FH}\perp\overline{AB}$、$\overline{EI}\perp\overline{AC}$，

∴$\overline{EF}//\overline{BC}$且$\overline{DG}\perp\overline{EF}$，$\overline{DE}//\overline{AB}$且$\overline{FH}\perp\overleftrightarrow{DE}$，$\overline{DF}//\overline{AC}$且$\overline{EI}\perp\overleftrightarrow{DF}$，

表示 O 為鈍角△DEF 的垂心

(b)由前面鈍角三角形垂心的證明得知：

在 D、E、F 上分別放置質量$\tan(\angle D 外角)$，$\tan E$、$\tan F$的質點，

即可證明 $\overleftrightarrow{DG}$、$\overleftrightarrow{EI}$、$\overleftrightarrow{FH}$交於一點

證明(2)：

(a) 由證明(1)得知：AEDF、BDEF、CDFE 都是平行四邊形

∴$\angle EDF=\angle A$、$\angle DEF=\angle B$、$\angle EFD=\angle C$

又 D(坐標)= $\frac{B(坐標)+C(坐標)}{2}$、E(坐標)= $\frac{A(坐標)+C(坐標)}{2}$、F(坐標)= $\frac{A(坐標)+B(坐標)}{2}$

(b) 設 $\overleftrightarrow{DG}$、$\overleftrightarrow{EI}$、$\overleftrightarrow{FH}$交於一點 O，

∵O 為鈍角△DEF 的垂心，由鈍角三角形垂心坐標得知：

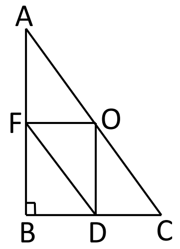
$$O(坐標)=\frac{\tan D}{\tan D+\tan E+\tan F}\times D(坐標)+\frac{\tan E}{\tan D+\tan E+\tan F}\times E(坐標)+\frac{\tan F}{\tan D+\tan E+\tan F}\times F(坐標)$$

簡記化成 $O=\frac{\tan A}{\tan A+\tan B+\tan C}\times\frac{B+C}{2}+\frac{\tan B}{\tan A+\tan B+\tan C}\times\frac{A+C}{2}+\frac{\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}\times\frac{A+B}{2}$

$$O=\frac{1}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times[B\tan A+C\tan A+A\tan B+C\tan B+A\tan C+B\tan C]$$

$$O=\frac{\tan B+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times A+\frac{\tan A+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times B+\frac{\tan A+\tan B}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times C$$

❸**直角三角形**



(1)如左圖，直角△ABC 中，∠B為直角，D、O、F 為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的中點，則 BDOF 為平行四邊形，∵∠B為直角，∴△DOF 為直角三角形，

則 O 點為△DOF 的垂心，因此 O 點為△ABC 的外心，

∴ 直角△ABC 的外心 O 在斜邊的中點上

(2)在三頂點 A、B、C 上分別放置質量$(\tan B+\tan C)$、$(\tan A+\tan C)$、$(\tan A+\tan B)$的質點，∵∠B =90°，由高中數學三角函數對照表得知：

$\tan B=\tan 90°=\infty$，直接代入外心坐標公式

$$O=\frac{\tan B+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times A+\frac{\tan A+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times B+\frac{\tan A+\tan B}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times C$$

$$O=\frac{\infty+\tan C}{(\tan A+\infty+\tan C)}\times\frac{A}{2}+\frac{\tan A+\tan C}{(\tan A+\infty+\tan C)}\times\frac{B}{2}+\frac{\tan A+\infty}{(\tan A+\infty+\tan C)}\times\frac{C}{2}$$

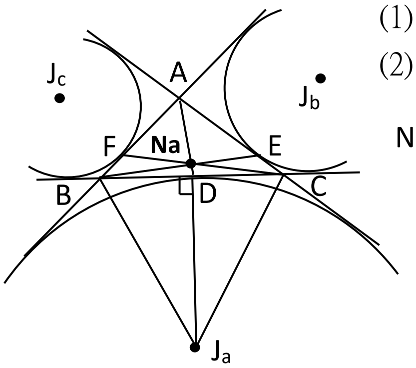
得 $O=1\times\frac{A}{2}+0\times\frac{B}{2}+1\times\frac{C}{2}$，表示

外心 O(坐標)=$\frac{1}{2}A(坐標)+\frac{1}{2}C(坐標)$ ，同樣適用於外心坐標公式。

小結：

三角形 ABC (不論是銳角、鈍角或直角三角形)，在三頂點 A、B、C 上分別放置質量為$(\tan B+\tan C)$、$(\tan A+\tan C)$、$(\tan A+\tan B)$的質點，則$\{A、B、C\}$的質心=△ABC的外心。

(六)三角形的奈格爾點 (Nagel 點)



△ABC 三個旁切圓與三邊切於 D、E、F，則

(1) $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於一點

(2) 奈格爾點(N_a)

$$Na(坐標)=\frac{\tan\frac{1}{2}(\angle A\text{ 外角})}{\tan\frac{1}{2}(\angle A\text{ 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{ 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle C\text{ 外角})}\times A(坐標)+$$
$$\frac{\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{ 外角})}{\tan\frac{1}{2}(\angle A\text{ 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{ 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle C\text{ 外角})}\times B(坐標)+$$
$$\frac{\tan\frac{1}{2}(\angle C\text{ 外角})}{\tan\frac{1}{2}(\angle A\text{ 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{ 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle C\text{ 外角})}\times C(坐標)$$

證明(1)：

在 A、B、C 三點分別配置質量 $\tan\frac{1}{2}(\angle A\text{ 外角})$ 、$\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{ 外角})$ 、$\tan\frac{1}{2}(\angle C\text{ 外角})$的質點，

∵$\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{ 外角})=\frac{\overline{J_aD}}{\overline{BD}}$，∴ $\overline{J_aD}=\overline{BD}\times\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{ 外角})$ ——①

$\because \tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角}) = \frac{\overline{J_aD}}{\overline{CD}}$，$\therefore\ \overline{J_aD} = \overline{CD} \times \tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})$ ——②

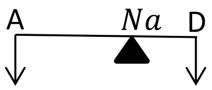
由①②得知　$\overline{BD} \times \tan\frac{1}{2}\left(\angle \text{B 外角}\right) = \overline{CD} \times \tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})$

表示 D 為$\left\{B\left(\tan\frac{1}{2}\left(\angle \text{B 外角}\right)\right)\ 、C\left(\tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})\right)\right\}$的支點，

$\therefore$整個系統質心落在$\overline{AD}$上，同理質心也落在$\overline{BE}$、$\overline{CF}$上，

$\because$質心唯一，$\therefore$ $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$三線共點　　**[槓桿原理證法]**

證明(2)：



設$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於Na，如左圖所示，則

Na為$\left\{A\left(\tan\frac{1}{2}(\angle \text{A 外角})\right)\ 、D\left(\tan\frac{1}{2}(\angle \text{B 外角}) + \tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})\right)\right\}$的支點，

$\therefore \tan\frac{1}{2}(\angle \text{A 外角}) \times \overline{ANa} = \left(\tan\frac{1}{2}(\angle \text{B 外角}) + \tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})\right) \times \overline{DNa}$

得 $\overline{ANa}：\overline{DNa} = \left(\tan\frac{1}{2}(\angle \text{B 外角}) + \tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})\right)：\left(\tan\frac{1}{2}(\angle \text{A 外角})\right)$

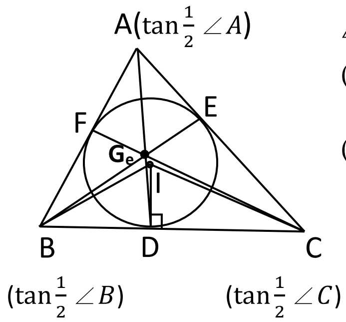
同前面內心坐標的證明，可證得

$$\text{Na(坐標)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\angle \text{A 外角})}{\tan\frac{1}{2}(\angle \text{A 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle \text{B 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})} \times A(\text{坐標}) + \frac{\tan\frac{1}{2}(\angle \text{B 外角})}{\tan\frac{1}{2}(\angle \text{A 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle \text{B 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})} \times B(\text{坐標}) + \frac{\tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})}{\tan\frac{1}{2}(\angle \text{A 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle \text{B 外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})} \times C(\text{坐標})$$

小結：

△ABC 中，在三頂點 A、B、C 上分別放置質量為$\tan\frac{1}{2}(\angle \text{A 外角})$ 、$\tan\frac{1}{2}(\angle \text{B 外角})$ 、$\tan\frac{1}{2}(\angle \text{C 外角})$的質點，配重後運用槓桿原理，則$\{A\ 、B\ 、C\}$的質心 $=$ △ABC的奈格爾點。

(七)三角形的格高尼點 (Gergomne 點)



△ABC 內切圓與三邊切於 D、E、F 則

(1) $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於一點

(2) 格高尼點Ge(坐標) $=$

$$\frac{\tan\frac{1}{2}\angle A}{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C} \times A(\text{坐標}) + \frac{\tan\frac{1}{2}\angle B}{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C} \times B(\text{坐標}) + \frac{\tan\frac{1}{2}\angle C}{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C} \times C(\text{坐標})$$

證明(1)：

在 A、B、C 三點分別配置質量 $\tan\frac{1}{2}\angle A$ 、$\tan\frac{1}{2}\angle B$ 、$\tan\frac{1}{2}\angle C$的質點，

$\because \tan\frac{1}{2}\angle B = \frac{\overline{\mathrm{ID}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$，$\therefore\ \overline{\mathrm{ID}} = \overline{\mathrm{BD}} \times \tan\frac{1}{2}\angle B$ ——①

$\because \tan\frac{1}{2}\angle C = \frac{\overline{\mathrm{ID}}}{\overline{CD}}$，$\therefore\ \overline{\mathrm{ID}} = \overline{\mathrm{CD}} \times \tan\frac{1}{2}\angle C$ ——②

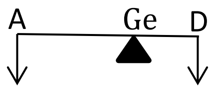
由①②得知 $\overline{BD} \times \tan\frac{1}{2}\angle B = \overline{CD} \times \tan\frac{1}{2}\angle C$

表示 D 為$\left\{B\ (\tan\frac{1}{2}\angle B)\ 、C\ (\tan\frac{1}{2}\angle C)\right\}$的支點，∴整個系統質心落在$\overline{AD}$上，

同理整個系統質心也落在$\overline{BE}$、$\overline{CF}$上

∵ 質心唯一，∴ $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$三線共點。 **[槓桿原理證法]**

證明(2)：



設$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於 Ge，如左圖所示，即

Ge為$\left\{A\left(\tan\frac{1}{2}\angle A\right)\ 、D\left(\tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{B} + \tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{C}\right)\right\}$的支點，

$\therefore \tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{A} \times \overline{A\mathrm{Ge}} = \left(\tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{B} + \tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{C}\right) \times \overline{D\mathrm{Ge}}$

得 $\overline{A\mathrm{Ge}} : \overline{D\mathrm{Ge}} = \left(\tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{B} + \tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{C}\right) : \left(\tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}\right)$

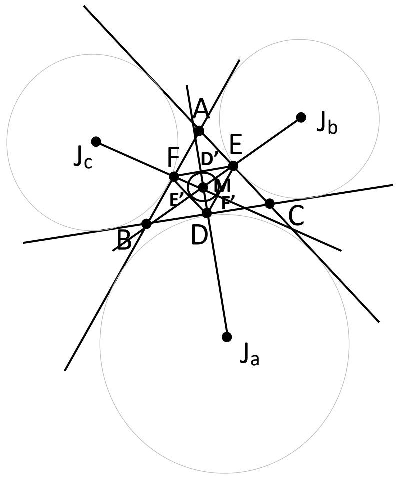
同前面內心坐標的證明，可證得

$$\mathrm{Ge}(坐標) = \frac{\tan\frac{1}{2}\angle A}{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C} \times A(坐標) + \frac{\tan\frac{1}{2}\angle B}{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C} \times B(坐標) + \frac{\tan\frac{1}{2}\angle C}{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C} \times C(坐標)$$

小結：

△ABC 中，在三頂點 A、B、C 上分別放置質量為$\tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}$ 、$\tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{B}$ 、$\tan\frac{1}{2}\angle \mathrm{C}$的質點，適當配重後運用槓桿原理，則 $\{A\ 、B\ 、C\}$ 的質心 $= \triangle$ ABC的格高尼點。

(八)三角形的 Mittenpunkt 點



J_a、J_b、J_c 為ΔABC 三個旁心，D、E、F 為ΔABC 三邊中點，

作△DEF 的內切圓，與$\overline{EF}$、$\overline{DF}$、$\overline{DE}$相切於D′、E′、F′，則

(1) $\overleftrightarrow{J_aD}$、$\overleftrightarrow{J_bE}$、$\overleftrightarrow{J_cF}$三線共點。

(2) $$\text{Mittenpunkt(坐標)} = \frac{\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C}{2\left(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C\right)} \times A(\text{坐標}) + \frac{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle C}{2\left(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C\right)} \times B(\text{坐標}) + \frac{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B}{2\left(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C\right)} \times C(\text{坐標})$$

證明(1)：

∵**△ABC 的 Mittenpunkt 點為△DEF 的格高尼點 (詳證在下一頁引理)**，∴在 D、E、F 分別配置質量$\tan\frac{1}{2}\angle D$、$\tan\frac{1}{2}\angle E$、$\tan\frac{1}{2}\angle F$的質點，可由第 12 頁的三角形格高尼點證明得知：$\overline{DD'}$、$\overline{EE'}$、$\overline{FF'}$三線共點 (此點 M 為△DEF 的格高尼點)，即$\overleftrightarrow{J_aD}$、$\overleftrightarrow{J_bE}$、$\overleftrightarrow{J_cF}$三線共點。

證明(2)：

(a) ∵AEDF、BDEF、CDFE 都是平行四邊形， ∴$\angle EDF = \angle A$、$\angle DEF = \angle B$、$\angle EFD = \angle C$

又 D(坐標)=$\frac{B(\text{坐標})+C(\text{坐標})}{2}$、E(坐標)=$\frac{A(\text{坐標})+C(\text{坐標})}{2}$、F(坐標)=$\frac{A(\text{坐標})+B(\text{坐標})}{2}$

(b) 設$\overleftrightarrow{J_aD}$、$\overleftrightarrow{J_bE}$、$\overleftrightarrow{J_cF}$交於一點M， ∵M為△DEF 的格高尼點，由第 12 頁格高尼點得知：

$$M = \frac{\tan\frac{1}{2}\angle D}{\tan\frac{1}{2}\angle D+\tan\frac{1}{2}\angle E+\tan\frac{1}{2}\angle F} \times D(\text{坐標}) + \frac{\tan\frac{1}{2}\angle E}{\tan\frac{1}{2}\angle D+\tan\frac{1}{2}\angle E+\tan\frac{1}{2}\angle F} \times E(\text{坐標}) + \frac{\tan\frac{1}{2}\angle F}{\tan\frac{1}{2}\angle D+\tan\frac{1}{2}\angle E+\tan\frac{1}{2}\angle F} \times F(\text{坐標})$$

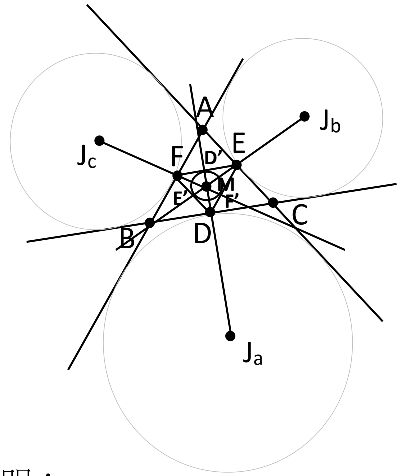
簡記化成 $M = \frac{\tan\frac{1}{2}A}{\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C} \times \frac{B+C}{2} + \frac{\tan\frac{1}{2}B}{\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C} \times \frac{A+C}{2} + \frac{\tan\frac{1}{2}C}{\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C} \times \frac{A+B}{2}$

$$M = \frac{1}{2\left(\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C\right)} \times \left[B\tan\frac{1}{2}A + C\tan\frac{1}{2}A + A\tan\frac{1}{2}B + C\tan\frac{1}{2}B + A\tan\frac{1}{2}C + B\tan\frac{1}{2}C\right]$$

$$M = \frac{\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C}{2\left(\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C\right)} \times A + \frac{\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}C}{2\left(\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C\right)} \times B + \frac{\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B}{2\left(\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C\right)} \times C$$

小結：ΔABC 中，在三頂點 A、B、C 上分別放置質量為$\left(\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C\right)$、$\left(\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}C\right)$、$\left(\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B\right)$的質點，配重後運用槓桿原理，則$\{A、B、C\}$的質心=△ABC的 Mittenpunkt 點。

引理：△ABC 的 Mittenpunkt 點為三邊中點三角形△DEF 的格高尼點



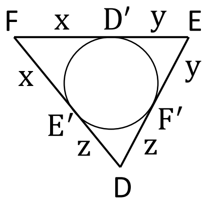
ΔABC 中，$\overline{BC}$= a、$\overline{AC}$= b、$\overline{AB}$= c，D、E、F 為三邊中點，

作ΔDEF 內切圓，與$\overline{EF}$、$\overline{DF}$、$\overline{DE}$相切於D′、E′、F′，又令

J_a、J_b、J_c 為ΔABC 三個旁切圓圓心。

求證：D′、D、J_a 三點共線。

證明：



(1)如左圖，∵三角形兩邊中點連線段長等於底邊長的一半，即

$x+y=\frac{1}{2}a$，$y+z=\frac{1}{2}c$，$x+z=\frac{1}{2}b$，三式解聯立，得 $x=\frac{a+b-c}{4}$，$y=\frac{a-b+c}{4}$

$\therefore \overline{FD'}:\overline{ED'}=(a+b-c):(a-b+c)$，

由分點公式，得知 $D'=\frac{a+b-c}{2a}\times E+\frac{a-b+c}{2a}\times F=\frac{a+b-c}{2a}\times\frac{A+C}{2}+\frac{a-b+c}{2a}\times\frac{A+B}{2}$，經化簡

得知 $\boxed{D'=\frac{1}{2}\times A+\frac{a-b+c}{4a}\times B+\frac{a+b-c}{4a}\times C}$； 由中點坐標，得知 $\boxed{D=\frac{1}{2}\times B+\frac{1}{2}\times C}$

由旁心坐標，得知 $\boxed{J_a=\frac{-a}{-a+b+c}\times A+\frac{b}{-a+b+c}\times B+\frac{c}{-a+b+c}\times C}$

(2) 設 $D=m\times J_a+n\times D'$，利用比較係數法，比較

A 點坐標：$\frac{-a}{-a+b+c}\times m+\frac{1}{2}\times n=0$ ----------------------①

B 點坐標：$\frac{b}{-a+b+c}\times m+\frac{a-b+c}{4a}\times n=\frac{1}{2}$ ---------------②

C 點坐標：$\frac{c}{-a+b+c}\times m+\frac{a+b-c}{4a}\times n=\frac{1}{2}$ --------------③

由①式移項化簡，得 $n=\frac{2a}{-a+b+c}\times m$-------------④ 代入②，得

$\frac{b}{-a+b+c}\times m+\frac{a-b+c}{4a}\times\frac{2a}{-a+b+c}\times m=\frac{1}{2}$，移項化簡 $\frac{a+b+c}{-a+b+c}\times m=1$

$\therefore m=\frac{-a+b+c}{a+b+c}$ 代回④式，得 $n=\frac{2a}{a+b+c}$，∵ $m+n=1$，由分點公式得知

D′、D、J_a 三點共線；同理E′、E、J_b 三點共線及F′、F、J_c 三點共線。

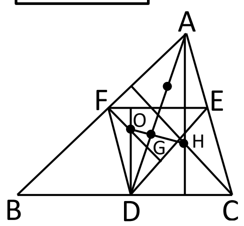
(3) 由前面三角形格高尼點及 Mittenpunkt 點的證明得知： 這三線共點，

此點是ΔABC 的 Mittenpunkt 點（$\overleftrightarrow{J_aD}$、$\overleftrightarrow{J_bE}$、$\overleftrightarrow{J_cF}$三線的交點)；

同時也是ΔDEF 的格高尼點（$\overline{DD'}$、$\overline{EE'}$、$\overline{FF'}$三線的交點)。

研究過程二：將上述結果進一步探討及推廣，❶推證尤拉線定理❷推證格高尼點、重心與 **Mittenpunkt** 點三點共線及性質❸就兩道數學題，將比例特殊化後，進行探討及推廣。

問 題 1　**(尤拉線定理)** △ABC 中，D、E、F 分別為三邊的中點，令 O 為△ABC 的外心，H 為△ABC 的垂心，G 為△ABC 的重心，則

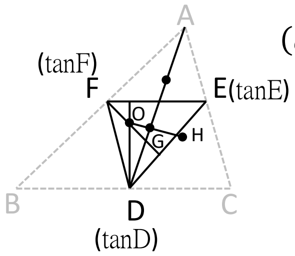


(1)　O、G、H 三點共線

(2)　$\overline{HG}:\overline{GO}\ =\ 2:1$

(以下分別就槓桿原理證法與傳統數學證法並列呈現)

證明方法一：**【利用槓桿原理證明尤拉線定理】**

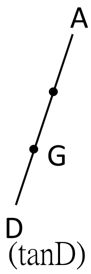


(a)由三角形垂心及外心的證明得知：

在 D、E、F 分別放置質量 tanD、tanE、tanF 的質點，

則 O(tanD + tanE + tanF)為$\{D、E、F\}$的質心。 (∵O 為△DEF 的垂心)

(b) ∵ $\overline{AD}$為中線， ∴ $\overline{AG}:\overline{DG}\ =2:1$，

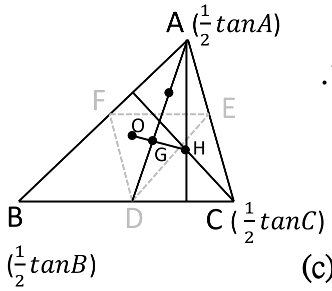


如左圖槓桿示意圖，若 G 為$\overline{AD}$支點，則

$\tan D\times\overline{DG}=(A點質量)\times\overline{AG}$，$\therefore(A點質量)=\frac{1}{2}tanD=\frac{1}{2}tanA$，

同理 $\overline{BE}$為中線，若 G 為$\overline{BE}$支點，則$(B點質量)=\frac{1}{2}tanE=\frac{1}{2}tanB$，

同理 $\overline{CF}$為中線，若 G 為$\overline{CF}$支點，則$(C點質量)=\frac{1}{2}tanF=\frac{1}{2}tanC$，

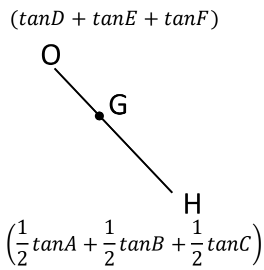


∴G 為$\{A、B、C、D、E、F\}$ 的質心，

如左圖 H$\left(\frac{1}{2}tanA+\frac{1}{2}tanB+\frac{1}{2}tanC\right)$為$\{A、B、C\}$的質心。

(c) 由(a)(b)得知：O為$\{D、E、F\}$的質心，H為$\{A、B、C\}$的質心，而 G 為$\{A、B、C、D、E、F\}$ 的質心，∴G 為$\{O、H\}$的質心，$\therefore O、G、H$共線

(d) 如左圖，依槓桿原理得知



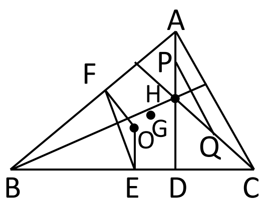
$$(tanD+tanE+tanF)\times\overline{GO}=\left(\frac{1}{2}tanA+\frac{1}{2}tanB+\frac{1}{2}tanC\right)\times\overline{HG}$$

$$(tanD+tanE+tanF)\times\overline{GO}=\left(\frac{1}{2}tanD+\frac{1}{2}tanE+\frac{1}{2}tanF\right)\times\overline{HG}$$

$2\times\ \overline{GO}\ =\ 1\times\overline{HG}$， $\therefore\overline{HG}:\overline{GO}\ =\ 2:1$

證明方法二：【利用向量證明尤拉線定理】

(a)設 F、P、Q 分別為$\overline{AB}$、$\overline{AH}$、的中點



在△ABC 中，利用三角形兩邊中點連線定理，得$\overline{EF}//\overline{AC}$且$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

同理，在△AHC 中，$\overline{PQ}//\overline{AC}$且 $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

$\therefore\overline{EF}=\overline{PQ}$ 且$\overline{EF}//\overline{PQ}$

$\because\overline{AD}//\overline{OE}$，$\overline{CH}//\overline{OF}$，$\therefore$ ∠OEF =∠HPQ，∠OFE =∠HQP

$\therefore$ △EOF≅△ PHQ (ASA)，得 $\overline{OE}=\overline{PH}$

$\because\overrightarrow{OE}//\overrightarrow{AH}$，$\therefore\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{PH}=2\overrightarrow{OE}$

(b) $\because\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OE}$，$\therefore\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=2\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

移項得 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

(c) $\because$G 為△ABC 的重心，$\therefore\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$

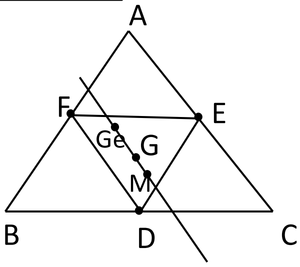
即 $\overrightarrow{OG}//\overrightarrow{OH}$，$\therefore$O、G、H 三點共線

(d) $\because\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$，$\therefore\overline{HG}:\overline{GO}=2:1$

比較與說明：(1)針對尤拉線定理，多數的證明方法都採用向量的觀念或相似形原理推得，上面證明方法二使用向量觀念的證明，是直接抄錄於高中龍騰教師手冊，運用向量觀念去推導證明題，是常被採用的方法，只是向量觀念比較抽象。

(2)因為有三角形垂心、外心的證明基礎，所以採質量分配及槓桿原理推導尤拉線定理，顯得簡單而易懂。

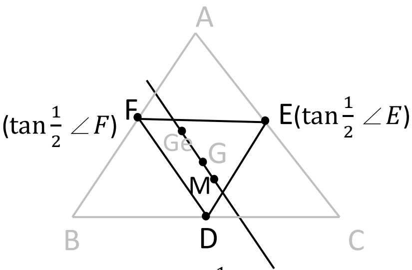
問 題 2　三角形的格高尼點、重心、Mittenpunkt 點



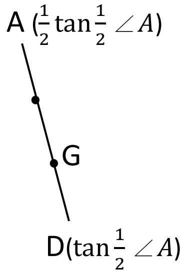
若△ABC 的格高尼點、重心、Mittenpunkt 分別為 Ge、G、M ，

則 (1) Ge、G、M 三點共線

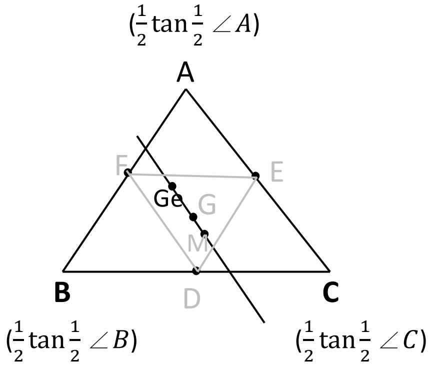
(2) $\overline{GeG}$: $\overline{GM}$ = 2 : 1



圖(一)



圖(二)



圖(三)

證明：

(a) 設 D、E、F 為三邊中點，則 M 為△DEF 的格高尼點**(詳證在第 15 頁引理)**，如圖(一)，

∴在 D、E、F 分別配置質量$\tan\frac{1}{2}\angle D$ 、$\tan\frac{1}{2}\angle E$ 、$\tan\frac{1}{2}\angle F$的質點，則

M 為$\{D、E、F\}$的質心－－①

(b) $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$為中線，AFDE 為平行四邊形，∴∠D=∠A，如圖(二)，若 G 為$\{A、D\}$的支點則(A 點質量)× $\overline{AG}$=$\tan\frac{1}{2}\angle D\times\overline{DG}$ ∴(A 點質量)= $\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle D=\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle A$

同理(B 點質量)= $\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle E=\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle B$ ，而 G 為$\{B、E\}$的支點

同理(C 點質量)= $\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle F=\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle C$ ，而 G 為$\{C、F\}$的支點

∴ G 為$\{D、E、F、A、B、C\}$的質心－－②

(c) 如圖(三)， A($\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle A$)、B($\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle B$)、C($\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle C$) 符合格高尼點坐標公式，

表示 Ge 為$\{A、B、C\}$的質心－－②

(d) 由(1) (2) (3)得知 G 為$\{Ge、M\}$的質心，∴Ge、G、M 共線

M 支撐的質量= $\tan\frac{1}{2}\angle D+\tan\frac{1}{2}\angle E+\tan\frac{1}{2}\angle F$

$$=\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C=\mathrm{m}$$

Ge 支撐的質量=$\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\angle C=\boldsymbol{\frac{1}{2}m}$

(Ge 質量)× $\overline{GeG}$ =(M 質量)× $\overline{GM}$ ，即 $\frac{1}{2}\mathrm{m}\times\overline{GeG}=1\mathrm{m}\times\overline{GM}$

∴ $\overline{GeG}$: $\overline{GM}$ =1m : $\frac{1}{2}m$ = 2 : 1

對 照 表

已知：△ABC，D、E、F 為$\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$中點。

(一)△ABC 垂心與格高尼點的對照

	垂心(H)	格高尼點(G_e)
質量配置	A 點：$\tan\angle A$、 B 點：$\tan\angle B$ C 點：$\tan\angle C$	A 點：$\tan\frac{1}{2}\angle A$、 B 點：$\tan\frac{1}{2}\angle B$ C 點：$\tan\frac{1}{2}\angle C$
點的位置	在△ABC 內部或邊上或外部	在△ABC 內部
利用質量分配及槓桿原理的證明方法雷同		

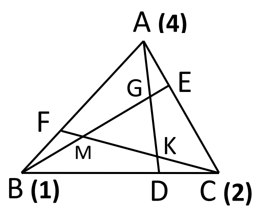
(二)△ABC 外心與 Mittenpunkt 點的對照

	外心(O)	Mittenpunkt 點(M)
點在△DEF 中的名稱	△ABC 的外心 是△DEF 的垂心	△ABC 的 Mittenpunkt 點 是△DEF 的格高尼點
先在 D、E、F 配置質量，再進行證明	D 點：$\tan\angle D$、 E 點：$\tan\angle E$ F 點：$\tan\angle F$	D 點：$\tan\frac{1}{2}\angle D$、 E 點：$\tan\frac{1}{2}\angle E$ F 點：$\tan\frac{1}{2}\angle F$
由坐標公式得知： 在整個系統{A、B、C}質量配置的情形	A 點：$(\tan\angle B+\tan\angle C)$ B 點：$(\tan\angle A+\tan\angle C)$ C 點：$(\tan\angle A+\tan\angle B)$	A 點：$\left(\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C\right)$ B 點：$\left(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle C\right)$ C 點：$\left(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B\right)$
點的位置	在△ABC 內部或邊上或外部	在△ABC 內部
利用質量分配及槓桿原理的證明方法雷同		

(三) 三點共線的對照

垂心(H)、重心(G)、外心(O)	格高尼點(G_e)、重心(G)、Mittenpunkt 點(M)
三 點 共 線	三 點 共 線
$\overline{HG}:\overline{GO}=2:1$	$\overline{\mathrm{Ge}G}:\overline{GM}=2:1$
利用質量分配及槓桿原理的證明方法雷同	

問 題 3



如左圖，△ABC 中，D、E、F 為三邊上的點，若 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{2}{1}$，

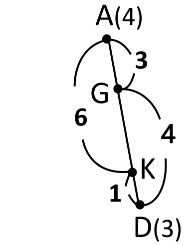
連$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$兩兩分別相交於 M、G、K 三點，則

△ MKG 面積 $=\frac{1}{7}$△ ABC 面積

證明：

(a)在 A、B、C 分別放置質量4、1、2 單位的質點，$\because 1\times\overline{BD}=2\times\overline{CD}$

$\therefore$D(3)為$\overline{BC}$的支點，整個系統質心在$\overline{AD}$上，又 $4\times\overline{AE}=2\times\overline{CE}$，

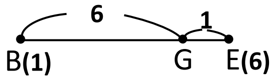


$\therefore$E(6)為$\overline{AC}$的支點，整個系統質心在$\overline{BE}$上，

$\because$質心唯一，$\therefore$G 為整個系統質心

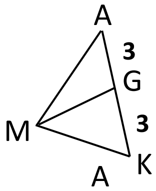
(b)$\because$G 為$\overline{AD}$的支點，$\therefore 4\times\overline{AG}=3\times\overline{DG}$，$\therefore\overline{AG}:\overline{DG}=3:4$ ------①

如左圖，$\because$G 為$\overline{BE}$的支點，$\therefore 6\times\overline{EG}=1\times\overline{BG}$，$\therefore\overline{EG}:\overline{BG}=1:6$

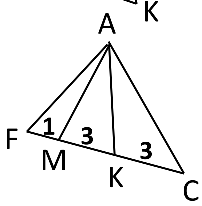


同理 $\overline{DK}:\overline{AK}=1:6$ ------②，由①②得知$\overline{AG}:\overline{GK}:\overline{KD}=3:3:1$

同理 $\overline{CK}:\overline{KM}:\overline{MF}=3:3:1$

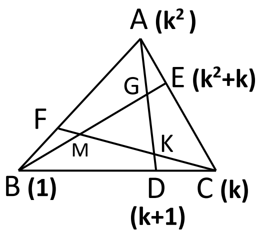


(c)連$\overline{AM}$，則$\triangle$ MKG $=\frac{1}{2}\times\triangle$ AMK $=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\times\triangle$ AFC $=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}\times\triangle$ ABC



$\therefore\triangle$ MKG $=\frac{1}{7}\triangle$ ABC

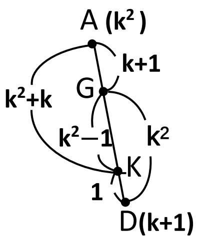
問題 3 推廣



$\triangle$ABC 中，D、E、F 為三邊上的點，若 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=k$，則

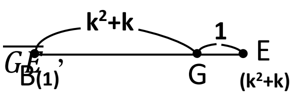
$$\frac{\triangle\text{MKG 面積}}{\triangle\text{ABC 面積}}=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$$

證明：

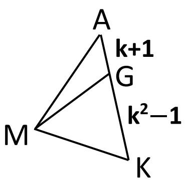


(a)設在 A、B、C 分別放置質量k^2、1、k 的質點，使得 G 為整個系統的質心，$\therefore$G 為$\{A(k^2)、D(k+1)\}$的支點，$k^2\times\overline{AG}=(k+1)\times\overline{GD}$，

$\therefore\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}}=\frac{k+1}{k^2}$，又 G 為$\{B(1)、E(k^2+k)\}$的支點，$1\times\overline{BG}=(k^2+k)\times$ $\overline{GE}$，



$\therefore\frac{\overline{GE}}{\overline{BG}}=\frac{1}{k^2+k}$，同理 $\frac{\overline{DK}}{\overline{AK}}=\frac{1}{k^2+k}$，若$\overline{DK}=1$，則$\overline{GK}=k^2-1$，$\overline{AK}=k^2+k$

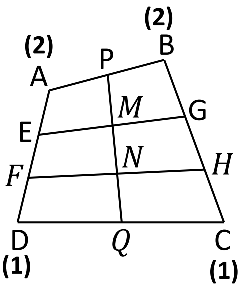


(b)連$\overline{AM}$，$\triangle$ MKG $=\frac{k^2-1}{(k^2-1)+(k+1)}\times\triangle$ AMK $=\frac{(k-1)(k+1)}{k(k+1)}\times\triangle$ AMK $=\frac{k-1}{k}\times$

$$\triangle\text{ AMK}=\frac{k-1}{k}\times\frac{k^2-1}{k^2+k+1}\times\triangle\text{ AFC}=\frac{k-1}{k}\times\frac{(k-1)(k+1)}{k^2+k+1}\times\frac{k}{k+1}\times\triangle\text{ ABC}$$

$$=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}\times\triangle\text{ ABC}$$

問 題 4



如左圖，E、F、G、H 分別將$\overline{AD}$、$\overline{BC}$三等分，而 P、Q 分別將$\overline{AB}$、$\overline{CD}$兩等分，則 (1) $\overline{EG}$、$\overline{FH}$被$\overline{PQ}$兩等分　(2) $\overline{PQ}$被$\overline{EG}$、$\overline{FH}$三等分

證明：

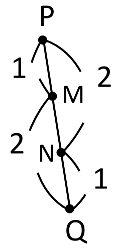
(a)在 A、B、C、D 上分別放置質量2、2、1、1 單位的質點，$\because 2\times\overline{AP}=2\times\overline{PB}$

$\therefore$P 為$\overline{AB}$的支點，又$1\times\overline{DQ}=1\times\overline{CQ}$，$\therefore$Q 為$\overline{CD}$的支點，

$\therefore$整個系統的質心在$\overline{PQ}$上

(b) $\because 2\times\overline{AE}=1\times\overline{DE}$，$\therefore$E 為$\overline{AD}$的支點，又$2\times\overline{BG}=1\times\overline{CG}$，

$\therefore$G 為$\overline{BC}$的支點，$\therefore$整個系統的質心在$\overline{EG}$上



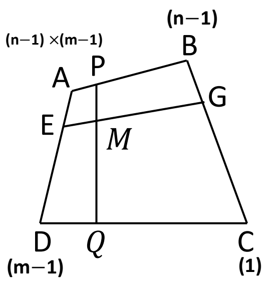
(c) 由(a)(b)得知 M 為整個系統的質心，M 為$\{E(3)、G(3)\}$的支點，

$\therefore$ $\overline{EM}=\overline{GM}$，同理　$\overline{FN}=\overline{HN}$，

又 M 為$\{P(4)、Q(2)\}$的支點，$4\times\overline{PM}=2\times\overline{QM}$，$\overline{PM}:\overline{QM}=1:2$

同理 $\overline{QN}:\overline{PN}=1:2$，即 $\overline{PM}:\overline{MN}:\overline{NQ}=1:1:1$

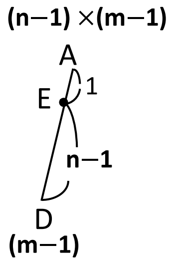
問題 4 推廣



四邊形 ABCD，將$\overline{AD}$、$\overline{BC}$各分成 n 等分，其中$\overline{AE}$及$\overline{BG}$各占一等分，將$\overline{AB}$、

$\overline{CD}$各分成 m 等分，其中$\overline{AP}$及$\overline{DQ}$各占一等分，而$\overline{EG}$與$\overline{PQ}$交於 M 點，

則 $\overline{PM}=\frac{1}{n}\times\overline{PQ}$，$\overline{EM}=\frac{1}{m}\times\overline{EG}$



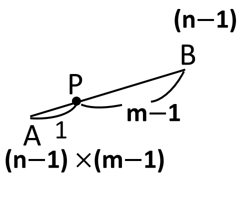
證明：

(a)在 A、B、C、D 分別放置質量$(n-1)(m-1)$、$(n-1)$、1、$(m-1)$的質點，如左圖，$\because(n-1)(m-1)\times\overline{AE}=(m-1)\times\overline{DE}$，

$\therefore$E 為$\{A[(n-1)(m-1)]、D(m-1)\}$的支點，

$\therefore$ E 點支撐的質量$=(n-1)(m-1)+(m-1)=\mathrm{n}(m-1)$，

同理 G(n)為$\{B(n-1)、C(1)\}$的支點，$\therefore$整個系統的質心在$\overline{EG}$上。



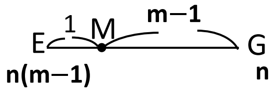
(b) 如左圖，$\because(n-1)(m-1)\times\overline{AP}=(n-1)\times\overline{BP}$，

$\therefore$P 為$\{A[(n-1)(m-1)]、B(n-1)\}$的支點，

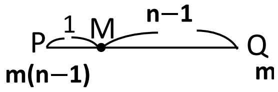
$\therefore$P 點支撐的質量$=(n-1)(m-1)+(n-1)=m(n-1)$，

同理 Q(m)為$\{D(m-1)、C(1)\}$的支點，∴整個系統的質心在$\overline{PQ}$上。

(c) 由(a)(b)得知 M 為整個系統的質心，



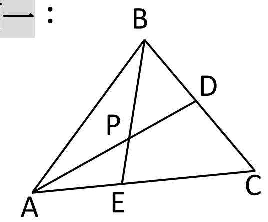
如左圖， $n(m-1)\times\overline{EM}=n\times\overline{GM}$ ，$\frac{\overline{EM}}{\overline{GM}}=\frac{1}{m-1}$，∴ $\frac{\overline{EM}}{\overline{EG}}=\frac{1}{m}$



如左圖， $m(n-1)\times\overline{PM}=m\times\overline{QM}$，$\frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}=\frac{1}{n-1}$，∴ $\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}}=\frac{1}{n}$

研究過程三：**槓桿原理除了解決研究過程一三角形八心外，還可以實務性應用到以下介紹的五個題型，並與傳統數學的解題方法做比較。**

例一：

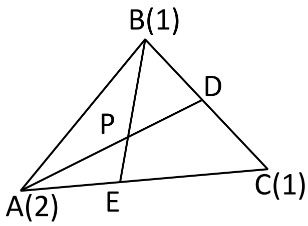


幾何明珠(九章)題目

△ABC 中，D 為$\overline{BC}$中點，P 為$\overline{AD}$中點，則

(a) $\overline{AE}:\overline{EC}=1:2$ (b) $\overline{BP}:\overline{PE}=3:1$

證明方法一： **【利用槓桿原理推證】**



(a)在 A、B、C 上分別放置質量 2、1、1 的質點，D(2)為$\{B(1)、C(1)\}$的支點，又 P 為$\{A(2)、D(2)\}$的支點，∴P 為$\{A、B、C\}$的質心，因此 P 為$\{B、E\}$的支點，∴ E(3)為$\{A(2)、C(1)\}$的支點，

∴ $2\times\overline{AE}=1\times\overline{EC}$，∴ $\overline{AE}:\overline{EC}=1:2$

(b)∵P 為$\{B(1)、E(3)\}$的支點，

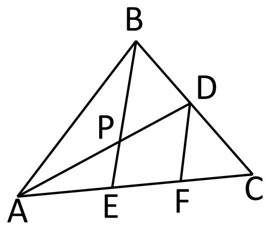
∴$1\times\overline{BP}=3\times\overline{PE}$，∴ $\overline{BP}:\overline{PE}=3:1$

質量配置的思維：

∵$\overline{BD}:\overline{CD}=1:1$，為了使 D 點成為$\overline{BC}$的支點，因此在 B、C 上分別配置質量 1、1 的質點，即 D(2)成為$\{B(1)、C(1)\}$支點，又∵$\overline{AP}:\overline{PD}=1:1$，為了使 P 點成為$\overline{AD}$的支點，因此在 A 點配置質量 2 的質點，那麼 P 點就成為$\{A(2)、B(1)、C(1)\}$整個系統的質心。

證明方法二：

【利用三角形兩邊中點連線段性質推證】



(a)作$\overline{DF}//\overline{BE}$，交$\overline{AC}$於$F$點，∵D 為$\overline{BC}$中點，∴$F$為$\overline{CE}$中點，得 $\overline{CF}=\overline{EF}$

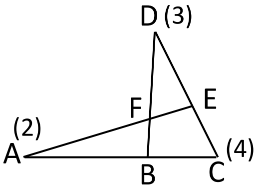
又∵P 為$\overline{AD}$中點且$\overline{PE}//\overline{DF}$，∴E為$\overline{AF}$中點，得 $\overline{AE}=\overline{EF}$，表示 E、F 三等分$\overline{AC}$，∴ $\overline{AE}:\overline{EC}=1:2$

(b)∵ $\overline{DF}//\overline{BE}$且$\overline{DF}$為△BCE 兩邊中點連線段，∴$\overline{DF}=\frac{1}{2}\times\overline{BE}$，同理

∵$\overline{PE}//\overline{DF}$且$\overline{PE}$為△ADF 兩邊中點連線段，∴$\overline{PE}=\frac{1}{2}\times\overline{DF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\overline{BE}=\frac{1}{4}\times\overline{BE}$，∴ $\overline{BP}:\overline{PE}=3:1$

運用性質的關鍵點：

作輔助線$\overline{DF}$，使得$\overline{DF}//\overline{BE}$，而**輔助線的設計**似乎並不容易。

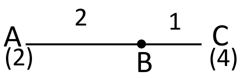


例二：

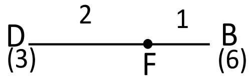
如左圖，有 $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{FB}}=2$，求 $\frac{\overline{DE}}{\overline{EC}}$ 、$\frac{\overline{AF}}{\overline{FE}}$

解法一 ：**【利用槓桿原理推算】**

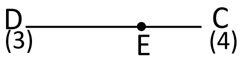
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

在 A、C、D 分別放置質量 2、4、3 的質點，

如圖(一) $\because$ $2\times\overline{AB}=4\times\overline{BC}$ ，

$\therefore$B(6)為$\{A(2)$ 、$C(4)\}$的支點，

如圖(二) $\because 3\times\overline{DF}=6\times\overline{FB}$，

$\therefore$F 為△ACD 的質心，表示 F 為$\overline{AE}$的支點，

而 E(7)為$\overline{DC}$的支點，

如圖(三) $\because 3\times\overline{DE}=4\times\overline{EC}$，得 $\frac{\overline{DE}}{\overline{EC}}=\frac{4}{3}$

如圖(四)$\because 2\times\overline{AF}=7\times\overline{FE}$，得 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FE}}=\frac{7}{2}$

質量配置的思維：

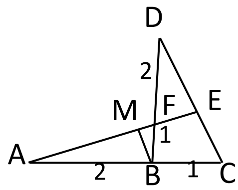
$\because\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$，為了使 B 點成為$\overline{AC}$的支點，因此在 A、C 上分別配置質量 1、2 的質點，即 B(3)成為$\{A(1)$ 、$C(2)\}$支點，

又$\because\overline{DF}:\overline{FB}=2:1$，為了使 F 點成為$\overline{DB}$的支點，因此在 D 點配置質量 $\frac{3}{2}$ 的質點，

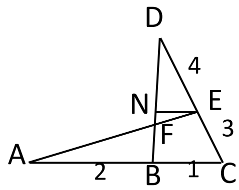
再同乘 2，得$\{A(2)$ 、$C(4)$ 、$D(3)\}$ ，那麼 F 點就成為$\{A(2)$ 、$C(4)$ 、$D(3)\}$整個系統的質心。

解法二 ：【利用相似形原理推算】

圖(一)



圖(二)



(a)如圖(一) 作$\overline{BM}//\overline{CD}$，交$\overline{AE}$於$M$點，

$\because$ $\frac{\overline{BM}}{\overline{EC}}=\frac{2}{3}$，$\therefore\overline{EC}=\frac{3}{2}\overline{BM}$

又△BMF ~ △DEF (AA 相似)，

$\therefore$ $\frac{\overline{BM}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{DF}}=\frac{1}{2}$，得 $\overline{DE}=2\overline{BM}$，

$\therefore$ $\frac{\overline{DE}}{\overline{EC}}=\frac{2\,\overline{BM}}{\frac{3}{2}\overline{BM}}$，得 $\frac{\overline{DE}}{\overline{EC}}=\frac{4}{3}$

(b)如圖(二) 作$\overline{EN}//\overline{AC}$，交$\overline{BD}$於N點，

$\because$ $\frac{\overline{NE}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DC}}=\frac{4}{7}$，

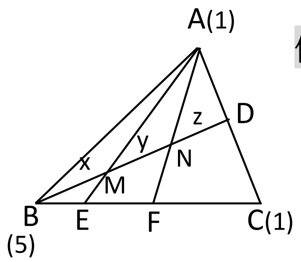
$\therefore\overline{NE}=\frac{4}{7}\overline{BC}=\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{2}{7}\overline{AB}$

又△NEF ~ △BAF (AA 相似)，

$\therefore$ $\frac{\overline{AF}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{NE}}=\frac{1\,\overline{AB}}{\frac{2}{7}\overline{AB}}$，得 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FE}}=\frac{7}{2}$

運用性質的關鍵點：

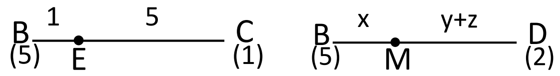
作輔助線$\overline{BM}$、$\overline{EN}$，使得$\overline{BM}//\overline{CD}$、$\overline{EN}//\overline{AC}$，而**輔助線的設計**似乎並不容易。



例三：如左圖，已知 E、F 為$\overline{BC}$邊上的點，$\overline{BE}:\overline{EF}:\overline{FC}=1:2:3$，D 為$\overline{AC}$中點，$\overline{DB}$被$\overline{AE}$、$\overline{AF}$截得三線段為 x、y、z，求 x：y：z

解法一：**【利用槓桿原理推算】**

圖(一)　　　　　　圖(二)



(a) 在 A、B、C 上分別放置質量 1、5、1 的質點，如圖(一) $\because 5\times\overline{BE}=1\times\overline{CE}$，

∴E 為$\overline{BC}$的支點，又D(2)為$\overline{AC}$的支點，∴M 為△ABC 的質心，∴M 為$\overline{BD}$的支點，如圖(二)　$5\times\overline{BM}=2\times\overline{DM}$，

得 $\overline{BM}=x=\frac{2}{7}\overline{BD}$

(b) ∵F、D 為中點，∴N 為重心，

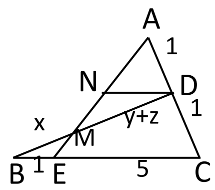
∴z= $\frac{1}{3}\overline{BD}$，則 y= $(1-\frac{2}{7}-\frac{1}{3})\ \overline{BD}$，

y = $\frac{8}{21}\overline{BD}$，∴ x：y：z = 6：8：7

質量配置的思維：

∵$\overline{BE}$ ：$\overline{EC}=1:5$，為了使 E 點成為$\overline{BC}$的支點，因此在 B、C 上分別配置質量 5、1 的質點，又∵$\overline{AD}$ ：$\overline{CD}=1:1$，為了使 D 點成為$\overline{AC}$的支點，因此在 A 點配置質量 1 的質點，那麼$\overline{AE}$ 與$\overline{BD}$的交點 M 就成為$\{A(1)、B(5)、C(1)\}$整個系統的質心。

解法二：【利用相似形原理推算】



(a) 如上圖，作$\overline{DN}//\overline{BC}$，交$\overline{AE}$於$N$點，

∵ $\frac{\overline{DN}}{\overline{EC}}=\frac{1}{2}$，∴$\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{EC}$

又△NDM ~ △EBM (AA 相似)，

∴ $\frac{y+z}{x}=\frac{\overline{DN}}{\overline{BE}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{EC}}{\frac{1}{5}\overline{EC}}=\frac{5}{2}$

得 $x=\frac{2}{7}\overline{BD}$

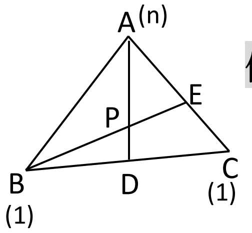
(b) ∵ F、D 為中點，∴N 為重心，

∴ z= $\frac{1}{3}\ \overline{BD}$，則 y= $(1-\frac{2}{7}-\frac{1}{3})\overline{BD}$，

y = $\frac{8}{21}\overline{BD}$，∴ x：y：z = 6：8：7

運用性質的關鍵點：

作輔助線$\overline{DN}$，使得$\overline{DN}//\overline{BC}$，而**輔助線的設計**似乎並不容易。



例四：△ABC 中，$\overline{AD}$為中線，過 B 任作一直線，與$\overline{AD}$交於P，與$\overline{AC}$交於 E，

則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\frac{2\overline{AE}}{\overline{EC}}$

證明方法一：**【利用槓桿原理推證】**

(a)∵D 為$\overline{BC}$的中點，在 B、C 分別放置質量 1、1 的質點，則 D(2)為$\{B(1)、C(1)\}$的支點，在 A 放置質量為 n 的質點，使得 P 為整個系統的質心

∴$n\times\overline{AP}=2\times\overline{PD}$， ∴ $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\frac{2}{n}$

(b)∵P 為整個系統的質心，

∴E 為$\{A(n)、C(1)\}$的支點，

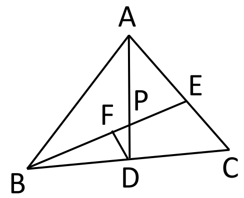
∴ $n\times\overline{AE}=1\times\overline{EC}$，∴ $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{1}{n}$

(c) 由(a) (b)推得 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=2\times\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$

質量配置的思維：

∵$\overline{BD}:\overline{CD}=1:1$，為了使 D 點成為$\overline{BC}$的支點，因此在 B、C 上分別配置質量 1、1 的質點，即 D(2)成為$\{B(1)、C(1)\}$支點，為了使 P 點成為$\overline{AD}$的支點，因此自行假設在 A 點配置質量 n 的質點，目的是要讓 P 點成為$\{A(n)、B(1)、C(1)\}$整個系統的質心。

證明方法二：【利用相似形原理推證】



(a) 過 D 作$\overline{DF}//\overline{EC}$，交$\overline{BE}$於$F$點，

∵△APE ~△DPF， ∴$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{DF}}$

(b) 在△BCE 中，D 為$\overline{BC}$中點且$\overline{DF}//\overline{EC}$，

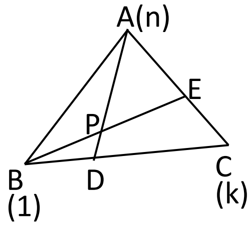
∴ $\overline{DF}=\frac{1}{2}\ \overline{EC}$

(c)由(a)得 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{AE}}{\frac{1}{2}\overline{EC}}$，∴ $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=2\times\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$

運用性質的關鍵點：

作輔助線$\overline{DF}$，使得$\overline{DF}//\overline{AC}$，而**輔助線的設計**似乎並不容易。

一 般 化



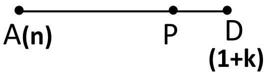
△ABC 中，$\overline{AD}$交$\overline{BC}$於 D，且$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=k$，過 B 任作一直線，分別交$\overline{AD}$、$\overline{AC}$於 P、E 兩點，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\left(1+\frac{1}{k}\right)\times\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$

證明：**【利用槓桿原理推證】**

(a) ∵$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{k}{1}$，∴$\overline{BD}\times 1=\overline{DC}\times k$，在 B、C 分別放置質量 1，k 的質點，

則 D(1+k)為$\{B(1)、C(k)\}$的支點，令 A 放置質量 n 的質點，使得

P 為整個系統的質心，∴P 為$\{A(n)、D(1+k)\}$的支點，



如右圖 ∴ $n\times\overline{AP}=(1+k)\times\overline{PD}$，得$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\frac{1+k}{n}$ $---$①

(b) P 在$\overline{BE}$上，∴E 為$\{A(n)、C(k)\}$的支點，

如右圖 ∴ $n\times\overline{AE}=k\times\overline{EC}$ ， 得 $\frac{k}{n}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ $---$②

①×②， $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}\times\frac{k}{n}=\frac{1+k}{n}\times\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$， ∴$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\frac{1+k}{k}\times\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\left(1+\frac{1}{k}\right)\times\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$

質量配置的思維：

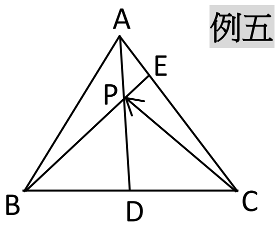
∵$\overline{BD}:\overline{DC}=k:1$，為了使 D 點成為$\overline{BC}$的支點，因此在 B、C 上分別配置質量 1、k 的質點，即 D(1+k)為$\{B(1)、C(k)\}$的支點，為了使 P 點成為$\overline{AD}$的支點，因此自行假設在 A 點配置質量 n 的質點，目的是要讓 P 點成為$\{A(n)、B(1)、C(k)\}$整個系統的質心。

[槓桿原理]及[相似形原理]在實例運用上的比較與說明：

(1) 相似形是平面幾何一個重要內容，為各種數學競賽常見的題型，是廣泛被運用的性質，有時為了利用相似三角形解題，必須作輔助線，這是在運用上覺得較困難的地方。

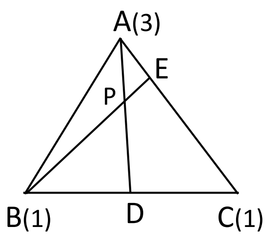
(2) 研究過程三所列舉的題型都是在三角形內，**過頂點的兩交叉線的問題**，只要利用質量分佈及槓桿平衡原理，設法**讓兩交叉線的交點成為整個系統的質心**，那麼要解出這類題型的題目就會變得很容易。

平面向量三點共線題型 (高中數學南一版第三冊)



例五：如左圖，△ABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，E 在 $\overline{AC}$上，且$\overline{AE}:\overline{EC}$ =1：3，$\overline{AD}$與$\overline{BE}$相交於 P，若$\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，試求 x、y 之值。

解法一： **【利用槓桿原理推算】**

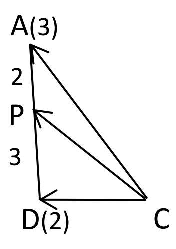


(a) 如左圖，為了使 P 點成為$\{A、B、C\}$的質心，在$A、B、C$上分別配置質量 3、1、1 的質點，∴D(2)為$\{B(1)、C(1)\}$的支點，

而 P 為$\{A(3)、D(2)\}$的支點，∴$3\times\overline{PA}=2\times\overline{PD}$，

得 $\overline{PA}:\overline{PD}$ =2：3

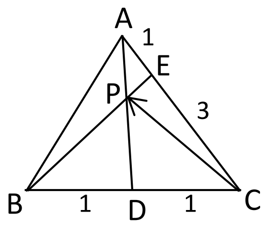
(b) 如左圖，由向量的分點公式



得知 $\overrightarrow{CP}=\frac{3}{2+3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{2+3}\overrightarrow{CD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$

∴ $x=\frac{3}{5}$ ，$y=\frac{1}{5}$

解法二： 【利用向量的方法推算】



$\because \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB} = x\overrightarrow{CA} + 2y\overrightarrow{CD}$

$\because$ A、P、D 共線，$\therefore x + 2y = 1$ --------------①

$\because \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB} = \frac{4x}{3}\overrightarrow{CE} + y\overrightarrow{CB}$

$\because$ B、P、E 共線，$\therefore \frac{4}{3}x + y = 1$ --------------②

由①②得 $x = \frac{3}{5}$，$y = \frac{1}{5}$

(向量的觀念及解法還不熟悉，因此利用向量推算的部分是直接抄襲解答)

比較與說明：

(1) 本題平面向量三點共線的題目，還是屬於：**在三角形內過頂點的兩交叉線的問題**，因此利用質量分布及槓桿原理解題，感覺似乎不難且易懂。

(2) 本題利用槓桿原理，**可直接求得交叉線中兩線段的比(如$\overline{PA}$：$\overline{PD}$ =2：3)**，這是利用向量推算無法直接求得的，因此利用槓桿原理在高中向量的教學與解題上，也許是一項不錯的輔助工具。

伍、研究結果

一、△ABC 中，設$\overline{BC} = a$ 、$\overline{AC} = b$、$\overline{AB} = c$，則

❶重心：假若在 A、B、C 上分別放置質量為均質的質點，那麼$\{A、B、C\}$的質心就是△ABC 的重心。

❷內心：假若在 A、B、C 上分別放置質量為 a、b、c 的質點，那麼$\{A、B、C\}$的質心就是△ABC 的內心。

❸旁心：假若在 A、B、C 上分別放置質量為 a、b、c 的質點，並分別對{A(a)}及對{B(b)、C(c)}施予反方向的力，那麼{A、B、C}的質心就是位於∠A 平分線上的旁心；同理，可以求得位於∠B 平分線上的旁心及位於∠C 平分線上的旁心。

❹垂心：假若在 A、B、C 上分別放置質量為$\tan A$、$\tan B$、$\tan C$的質點，那麼 $\{A、B、C\}$ 的質心就是△ ABC 的垂心。

❺外心：假若在 A、B、C 上分別放置質量為(tanB + tanC)、(tanA + tanC)、 (tanA + tanB)的質點，那麼 $\{A、B、C\}$ 的質心就是△ ABC 的外心。

❻奈格爾點：假若在 A、B、C 上分別放置質量為$\tan\frac{1}{2}$(∠A 外角) 、$\tan\frac{1}{2}$(∠B 外角) 、$\tan\frac{1}{2}$(∠C 外角)的質點，那麼 $\{A、B、C\}$ 的質心就是 △ ABC 的奈格爾點。

❼格高尼點：假若在 A、B、C 上分別放置質量為 $\tan\frac{1}{2}\angle A$ 、$\tan\frac{1}{2}\angle B$ 、$\tan\frac{1}{2}\angle C$ 的質點，

那麼 $\{A、B、C\}$ 的質心就是 △ABC 的格高尼點。

❽ Mittenpunkt 點：假若在 A、B、C 上分別放置質量為 $\left(\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C\right)$、$\left(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle C\right)$、$\left(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B\right)$ 的質點，那麼 $\{A、B、C\}$ 的質心就是△ABC 的 Mittenpunkt 點。

二、配重整理：

已知 △ABC 中，設 $\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$			
內心的質量配置 A 點：a B 點：b C 點：c	旁心的質量配置 A 點：a B 點：b C 點：c		
對{A(a)、B(b)、C(c)}施予同方向的力	對{A(a)}及對{B(b)、C(c)}施予反方向的力	對{B(b)}及對{A(a)、C(c)}施予反方向的力	對{C(c)}及對{A(a)、B(b)}施予反方向的力
{A、B、C} 的質心 ＝ △ABC 的內心	{A、B、C} 的質心 ＝位於∠A 平分線上△ABC 的旁心	{A、B、C} 的質心 ＝位於∠B 平分線上△ABC 的旁心	{A、B、C} 的質心 ＝位於∠C 平分線上△ABC 的旁心

已　知　△ABC				
垂心的質量配置	外心的質量配置	奈格爾點的質量配置	格高尼點的質量配置	Mittenpunkt 點的質量配置
A 點：$\tan A$ B 點：$\tan B$ C 點：$\tan C$	A 點：$(\tan B+\tan C)$ B 點：$(\tan A+\tan C)$ C 點：$(\tan A+\tan B)$	A 點：$\tan\frac{1}{2}$(∠A 外角) B 點：$\tan\frac{1}{2}$(∠B 外角) C 點：$\tan\frac{1}{2}$(∠C 外角)	A 點：$\tan\frac{1}{2}\angle A$ B 點：$\tan\frac{1}{2}\angle B$ C 點：$\tan\frac{1}{2}\angle C$	A 點：$\left(\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C\right)$ B 點：$\left(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle C\right)$ C 點：$\left(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B\right)$
{A、B、C} 的質心 ＝ △ABC 的垂心	{A、B、C} 的質心 ＝ △ABC 的外心	{A、B、C} 的質心 ＝ △ABC 的奈格爾點	{A、B、C} 的質心 ＝△ABC 的格高尼點	{A、B、C} 的質心 ＝△ABC 的 Mittenpunkt 點

三、解題方法的新視野：

根據質量分佈原理，在頂點上分別配置適當質量的質點，我們運用槓桿平衡原理，從不同角度、不同思維方式，可以重新證明尤拉線定理。在研究過程三列舉的題型中，都是屬於三角形內過頂點的兩交叉線的問題。我們發現只要設法在頂點配置適當質量，使得兩交叉線的交點成為整個系統的質心，就很容易解出這類題型的題目。

最後，列舉一道有關平面向量三線共點的題型，我們依照這樣的思維方式進行解題，難度降低、容易被理解，因此利用槓桿原理解題，有別於高中向量的教學方式，也是一項不錯的輔助工具。

陸、討論

從網路搜尋"三角形的五千多顆心"，會令人感到驚奇，因為在三角形中，還有那麼多的心，而心與心之間還有很多相關的性質，還有很多三線共點及三點共線的情形。我們這份作品是先從八心開始探討起，接著推證尤拉線定理及格高尼點、重心與 Mittenpunkt 點三點共線且$\overline{GeG}$：$\overline{GM}$ =2 : 1 的性質。我們想 ： **在"三角形的五千多顆心"中，必定還有不少顆心，適合採用質量分布及槓桿原理的理論進行推證**。希望以後有機會再往後延伸，繼續研究。

柒、結論

一、

(一)參考各科展作品中，以研究重心位置的規律性最多，其中三角形重心位置與三個均質質點的質心是同一點，因為在頂點配置均質質量時，剛好能保持中線的特性；同理，在頂點配置時，如果能滿足角平分線的特性，那麼質心與內心會同一點，以此類推。

(二)網路搜尋的資料中，利用質量分布及槓桿原理有推導出三角形三內角平分線交一點。而處理三高共點時，則提到要在三頂點配置適當的質量，但內容只涉略銳角三角形，我們以此為基礎，延伸到三角形的旁心、垂心、外心、奈格爾點、格高尼點及 Mittenpunkt 點。

作品名稱	研究內容	使用的方法	研究結果
數學類投稿 物理原本也可以用在數學上----重新詮釋三角形	以物理方式重新詮釋重心、內心、垂心	利用質量分布及槓桿原理推證	①三角形重心到頂點距離是重心到對邊中點的 2 倍 ②三角形三內角平分線交一點 ③四面體的重心
第 44 屆中小學科展作品 重心妙妙	平面 n 邊形、空間多面體，n 個頂點的重心位置	使用高中向量方法推證	平面或空間，都可以推證出 n 個頂點重心的規律性
中華民國第 54 屆中小學科展作品 「重」來一次----- 重心的遞迴定理			
數學類投稿 來自心心的你	①格高尼點的性質及證明。 ②格高尼點與奈格爾點互為△ABC的等距共軛點 ③格高尼點、重心與Mittenpunkt點三點共線且$\overline{GeG}$：$\overline{GM}$ =2 : 1	孟氏定理 相似形定理 行列式 三線坐標	①證明格高尼點的三線坐標、面積坐標。 ②△ABC中，格高尼點與奈格爾點互為等距共軛點。 ③證得 Ge、G、M三點共線且$\overline{GeG}$：$\overline{GM}$ =2 : 1

(三)我們發現像旁心在三角形外部，就等同槓桿的支點在施力與抗力的外側，**支點的合力=|施力－抗力|**，這合理說明旁心坐標公式中為何有質量相減的情形，同樣的觀念也運用到鈍角三角形垂心公式。

(四)在外心的探討上比較麻煩，因為中垂線不一定會通過頂點，因此無法直接由三頂點配置質量求證，必須從三邊中點配置質量，配合垂心的觀念，才能順利求得外心的坐標公式，再由外心坐標公式了解三頂點是如何配置質量。

(五)最後，結合垂心及外心質量配置的概念，運用槓桿原理，也能重新詮釋尤拉線定理。

(六)在推證過程中，我們**發現有趣的情況：❶格高尼點與重心在質量配置上相似，而證法雷同。❷Mittenpunkt 點與外心在質量配置上相似，而證法也雷同。❸格高尼點、重心、Mittenpunkt 點三點的關係及證法，則與尤拉線定理證法雷同。**

二、我們試著從參考書籍中收錄一些題目，以物理學科質量分布及槓桿原理為解題策略，以變通的思維方式解題，獲得很好的效果。

捌、參考資料

一、黃家禮（2000）• 幾何明珠 • 台北市：九章出版社

二、傅海倫 • 物理原理在數學中的應用 • 取自 http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d281/28107.pdf

三、數學類投稿：物理原本也可以用在數學上----重新詮釋三角形 • 取自 https://www.shs.edu.tw/works/essay/2013/03/2013032812585115.pdf

四、第 44 屆中小學科展作品：重心妙妙 • 取自 https://www.docin.com/p-12489124.html

五、中華民國第 54 屆中小學科展作品：「重」來一次-----重心的遞迴定理 • 取自 https://www.tntcsh.tn.edu.tw/main.php?mod=site_doc&func=do_get...doc_id

六、數學類投稿：來自心心的你 • 取自 http://www.shs.edu.tw/works/essay/2015/03/2015033110280613.pdf

七、三角形的五千多顆心 • 取自 http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

八、任意三角形還有哪些三線共點 • 取自 http://tieba.baidu.com/p/1005787341

九、高中數學(三)課本 • 南一書局

【評語】030410

作者由質心的角度來重新詮釋三角形的三中線、三內角平分線、三垂線…等共點的幾何性質，並利用這樣的想法得出這些交點的座標表示式。能嘗試由一個完全不同的角度來理解早已熟習的幾何性質是頗不容易的一件事，但若能提供更多其他深刻且具體的數學結果為例證，說明這樣的角度來看問題會讓問題更為簡化，則作品會看起來更有價值。

作品海報

文獻探討：

作品名稱	研究內容	使用的方法	研究結果
數學類投稿 物理原本也可以用在數學上--重新詮釋三角形	以物理方式重新詮釋重心、內心、垂心	利用質量分布及槓桿原理推證	①三角形重心到頂點距離是重心到對邊中點的2倍 ②三角形三內角平分線交一點 ③四面體的重心
第44屆中小學科展作品 重心妙妙	平面n邊形、空間多面體，n個頂點的重心位置	使用高中向量方法推證	平面或空間，都可以推證出n個頂點重心的規律性
中華民國第54屆中小學科展作品 「重」來一次--重心的遞迴定理			
數學類投稿 來自心心的你	①格高尼點的性質及證明。 ②格高尼點與奈格爾點互為△ABC的等距共軛點 ③格高尼點、重心與 Mittenpunkt點三點共線且 $\overline{GeG}:\overline{GM}=2:1$	孟氏定理 相似形定理 行列式 三線坐標	①證明格高尼點的三線坐標、面積坐標。 ②△ABC中，格高尼點與奈格爾點互為等距共軛點。 ③證得Ge、G、M三點共線且 $\overline{GeG}:\overline{GM}=2:1$

壹、研究動機

上基本幾何作圖時，作三角形三邊中垂線，圖形中三中垂線會交於一點。如果將三中點分別與頂點連線，圖形中三中線會交於一點。進一步作三角形三內角平分線，圖形中三條角平分線會交於一點，結論是：都會「交於一點」。這種共點的現象引起我們的好奇，也引發我們探究的興趣，便從網路上搜尋相關的資訊，發覺研究重心問題的最多，有幾份研究報告是從物理質量分布與槓桿平衡原理的的角度做探討與研究，其中多數是採向量的方法推證n個頂點重心位置的規律性，有些資料是藉由西瓦定理，間接求證三角形三內角平分線會交於一點及三高線會交於一點。

以這幾份研究資料為基礎，我們想要採取不同方式進行推證，因為我們是國中生，自然課的槓桿原理我們僅在三角形三頂點上配置適當質量，直接證明三內角平分線會交於一點及三高線會交於一點的問題令人興奮。除了重心、內心、垂心之外，還有旁心、外心、奈格爾點、格高尼點及Mittenpunkt點也嘗試看看，因此便展開了我們研究之旅。

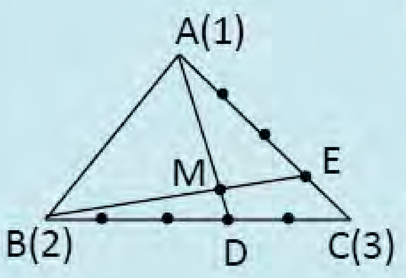
貳、研究目的

一、利用質量分布原理與槓桿平衡原理進行探討：
　(一)三角形三中線共點(重心)問題，並求證重心坐標。
　(二)三角形之三內角平分線共點(內心)問題，並求證內心坐標。
　(三)三角形一內角平分線及另兩角的外角角平分線共點(旁心)問題，並求證旁心坐標。
　(四)三角形三高線共點(垂心)問題，並求證垂心坐標。
　(五)三角形三邊中垂線共點(外心)問題，並求證外心坐標。
　(六)三角形三個旁切圓與三邊相切，三切點與三頂點連線共點(奈格爾點)問題，並求證其坐標。
　(七)三角形內切圓與三邊相切，切點與頂點連線共點(格高尼點)問題，並求證其坐標。
　(八)三角形三個旁切圓圓心與三邊中點連線共點(Mittenpunkt點)問題，並求證其坐標。
二、將上述結果進一步探討及推廣：①推證尤拉線定理②推證格高尼點、重心與Mittenpunkt點三點共線及性質③就兩道數學題，將比例特殊化後，進行探討及推廣。
三、藉由實例演算，說明槓桿原理在數學教學以及解題上的運用。

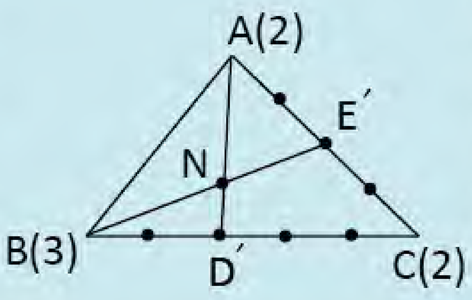
肆、研究過程與方法

研究過程一： 就三角形重心、內心、旁心、垂心、外心、奈格爾點、格高尼點及Mittenpunkt點共八心，利用質量分配及槓桿原理探討三線共點問題，並求證其坐標。

槓桿原理有別於分點公式，因為槓桿原理不僅受力臂(長度)變量影響，同時也受質量變量影響(如下圖)，因此槓桿原理在解題運用上的關鍵是：如何在兩端點配置適當的質量。當質量配量決定後，兩點的質心公式才是分點公式。



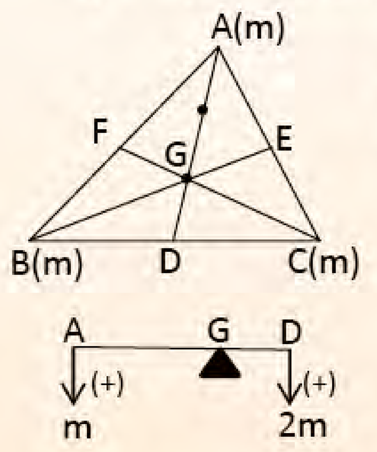
如左圖，質量分配分別為A：1克，B：2克，C：3克，之後簡記為質點組{A(1)，B(2)，C(3)}，由槓桿原理得知D為{B(2)，C(3)}的支點，E為{A(1)，C(3)}的支點，∴$\overline{AD}$與$\overline{BE}$交點M為{A(1)，B(2)，C(3)}的質心。



如左圖，在同樣的△ABC中，重新配置質量為A：2克，B：3克，C：2克，之後簡記為質點組{ A(2)，B(3)，C(2)}，由槓桿原理得知D'為{B(3)，C(2)}的支點，E'為{A(2)，C(2)}的支點，∴$\overline{AD'}$與$\overline{BE'}$交點N為{A(2)，B(3)，C(2)}的質心。

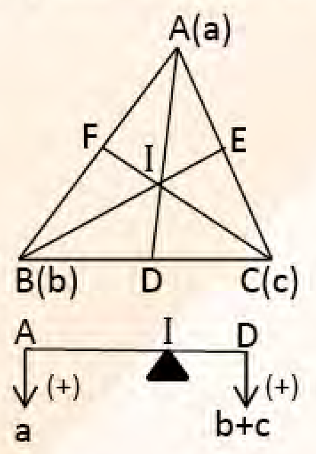
小結：質點組{A，B，C}位置相同，若質點配置的質量不同，則質心位置亦不同。

（一）三角形的重心



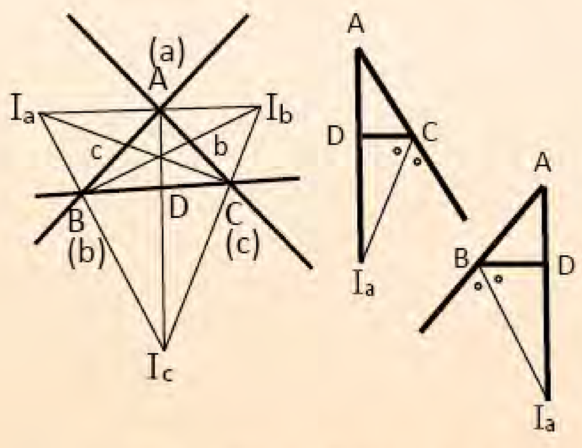
△ABC中，令 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三中線，其中 G為△ABC的重心，則
(1) 三中線交於一點
(2) G(坐標)= $\frac{1}{3}$ ×A(坐標)+ $\frac{1}{3}$ ×B(坐標) + $\frac{1}{3}$×C(坐標)

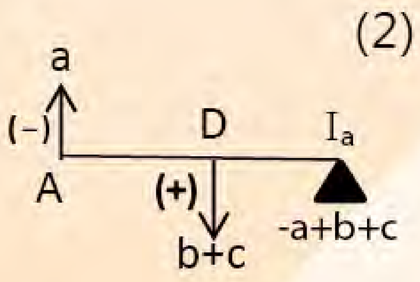
（二）三角形的內心



△ABC中，$\overline{BC}$=a、$\overline{AC}$=b、$\overline{AB}$=c，令 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$為三內角的角平分線，其中 I 為△ABC的內心，則
(1) 三內角的角平分線交於一點
(2) I (坐標)= $\frac{a}{(a+b+c)}$ ×A(坐標)+ $\frac{b}{(a+b+c)}$ ×B(坐標)+ $\frac{c}{(a+b+c)}$ ×C(坐標)

（三）三角形的旁心



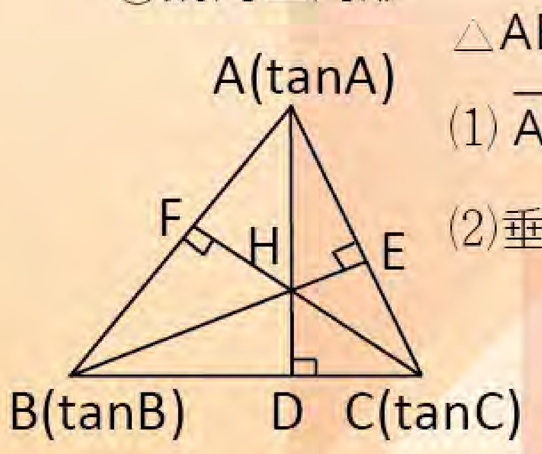


△ABC中，$\overline{BC}$=a、$\overline{AC}$=b、$\overline{AB}$=c，令$\overline{AI_a}$為∠A內角平分線，$\overline{BI_a}$、$\overline{CI_a}$ 分別為∠B、∠C的外角平分線，其中I_a、I_b、I_c為△ABC的旁心，則
(1)∠A內角平分線及∠B、∠C的外角平分線交於一點
(2) I_a(坐標)= $\frac{-a}{-a+b+c}$ A(坐標)+ $\frac{b}{-a+b+c}$ B(坐標)+ $\frac{c}{-a+b+c}$ C(坐標)
I_b(坐標)= $\frac{a}{a-b+c}$ A(坐標)+ $\frac{-b}{a-b+c}$ B(坐標)+ $\frac{c}{a-b+c}$ C(坐標)
I_c(坐標)= $\frac{a}{a+b-c}$ A(坐標)+ $\frac{b}{a+b-c}$ B(坐標)+ $\frac{-c}{a+b-c}$ C(坐標)

小結：
(1)內心坐標公式：可視爲在施力與抗力同方向時的質量中心坐標公式。
(2)旁心坐標公式：可視爲在施力與抗力反方向時的質量中心坐標公式。

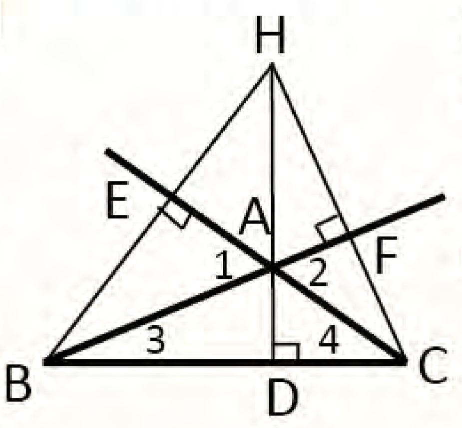
（四）三角形的垂心

①銳角三角形

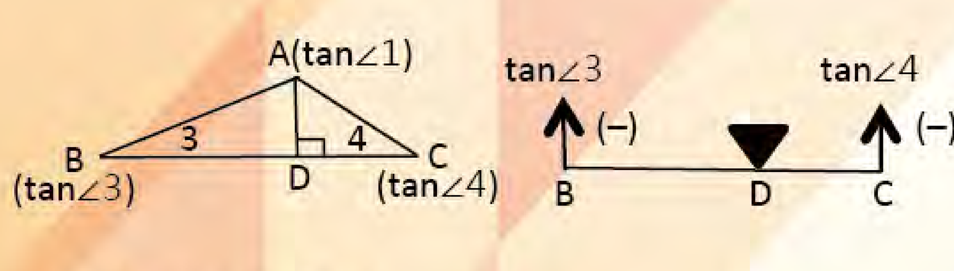


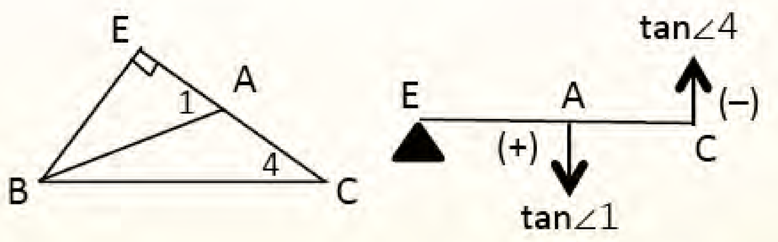
△ABC中，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三邊上的高，則
(1) $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於一點
(2)垂心H(坐標)= $\frac{\tan A}{\tan A+\tan B+\tan C}$ ×A(坐標)+ $\frac{\tan B}{\tan A+\tan B+\tan C}$ ×B(坐標)+ $\frac{\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}$ ×C(坐標)

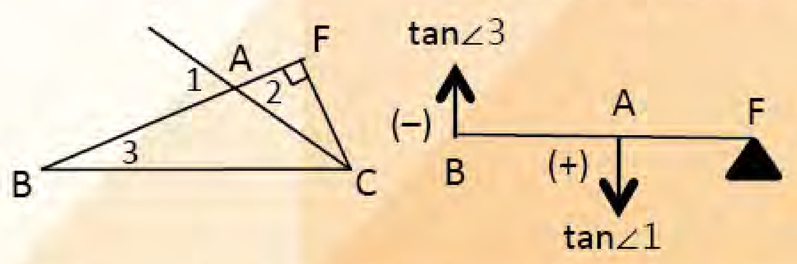
②鈍角三角形



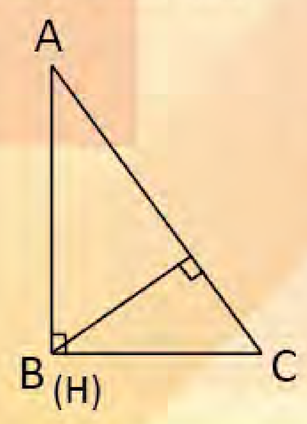
鈍角△ABC中，A對 $\overline{BC}$ 作高 $\overline{AD}$，B對 $\overline{AC}$ 延長線作高 $\overline{BE}$，C對 $\overline{BA}$ 延長線作高 $\overline{CF}$，其中∠BAC為鈍角，而∠BAC的外角=∠1=∠2，則 (1) $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 交於一點
(2)垂心H(坐標)= $\frac{\tan A}{\tan A+\tan B+\tan C}$×A(坐標)+ $\frac{\tan B}{\tan A+\tan B+\tan C}$×B(坐標)+ $\frac{\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}$×C(坐標)







③直角三角形



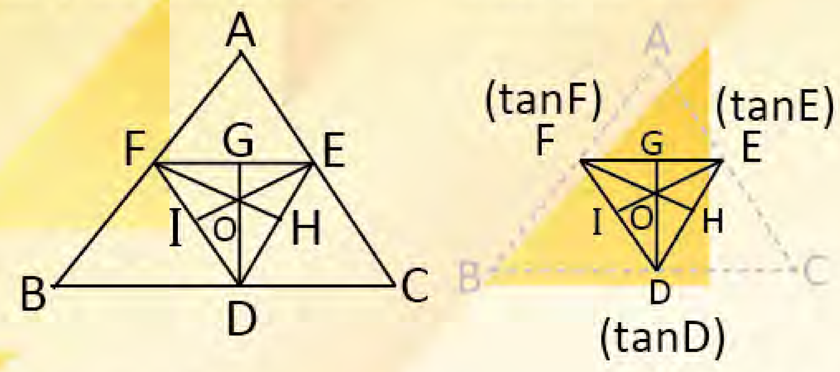
(1)△ABC中，∠B為直角，三頂點A、B、C分別對 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 作高，顯而易見，三高線會交於B點，∴垂心H在B點上。
(2)在三頂點A、B、C分別放置質量tanA、tanB、tanC的質點，∵∠B=90°，由高中數學三角函數對照表得知：tanB=tan90°=∞ 直接代入垂心坐標公式

$$H=\frac{\tan A}{\tan A+\infty+\tan C}\times A+\frac{\infty}{\tan A+\infty+\tan C}\times B+\frac{\tan C}{\tan A+\infty+\tan C}\times C$$

得 H=0×A+1×B+0×C，表示垂心H(坐標) = B(坐標)，同樣適用於垂心坐標公式。

小結：三角形ABC（不論是銳角、鈍角或直角三角形），在三頂點A、B、C上分別放置質量爲tanA、tanB、tanC的質點，則{A、B、C}的質心=△ABC的垂心。

（五）三角形的外心　①銳角三角形

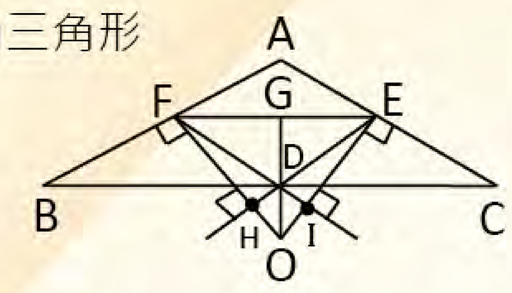


銳角△ABC，$\overline{DG}$、$\overline{EI}$、$\overline{FH}$ 為三邊的中垂線，則

(1)三邊的中垂線 $\overline{DG}$、$\overline{EI}$、$\overline{FH}$ 交於一點

(2)外心O(坐標)= $\frac{\tan B+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}$ ×A(坐標)+ $\frac{\tan A+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}$ ×B(坐標)+ $\frac{\tan A+\tan B}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}$ ×C(坐標)

②鈍角三角形

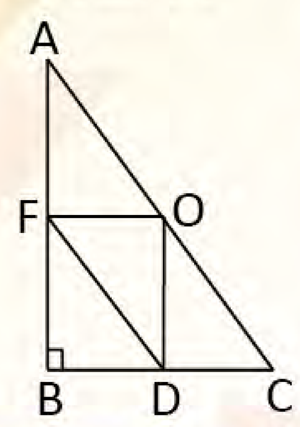


鈍角△ABC，∠A為鈍角，$\overrightarrow{DG}$、$\overrightarrow{EI}$、$\overrightarrow{FH}$為三邊的中垂線，則

(1)三邊的中垂線 $\overrightarrow{DG}$、$\overrightarrow{EI}$、$\overrightarrow{FH}$ 交於一點

(2)外心O(坐標)= $\frac{\tan B+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}$ ×A(坐標)+ $\frac{\tan A+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}$ ×B(坐標)+ $\frac{\tan A+\tan B}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}$ ×C(坐標)

③直角三角形



(1)如左圖，直角△ABC中，∠B為直角，D、O、F為 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點，則BDOF為平行四邊形，∵∠B為直角，∴△DOF為直角三角形，則O點為△DOF的垂心，因此O點為△ABC的外心，∴ 直角△ABC的外心O在斜邊的中點上

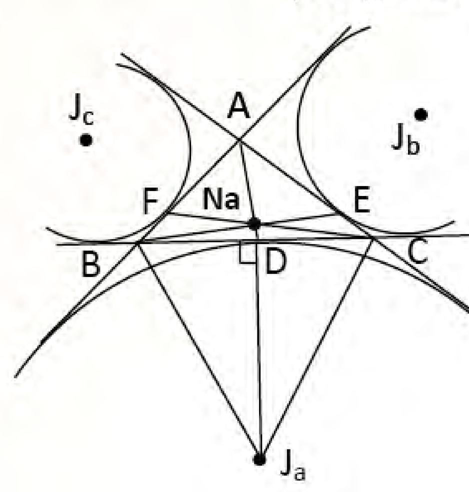
(2)在三頂點A、B、C上分別放置質量(tanB+tanC)、(tanA+tanC)、(tanA+tanB)的質點，∵∠B=90°，由高中數學三角函數對照表得知：tanB=tan90°=∞，直接代入外心坐標公式

$O=\frac{\tan B+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times A+\frac{\tan A+\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times B+\frac{\tan A+\tan B}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}\times C$　$O=\frac{\infty+\tan C}{(\tan A+\infty+\tan C)}\times\frac{A}{2}+\frac{\tan A+\tan C}{(\tan A+\infty+\tan C)}\times\frac{B}{2}+\frac{\tan A+\infty}{(\tan A+\infty+\tan C)}\times\frac{C}{2}$

得 $O=1\times\frac{A}{2}+0\times\frac{B}{2}+1\times\frac{C}{2}$，表示外心O(坐標)= $\frac{1}{2}$ A(坐標) + $\frac{1}{2}$ C (坐標)，同樣適用於外心坐標公式。

小結：三角形ABC（不論是銳角、鈍角或直角三角形），在三頂點A、B、C上分別放置質量爲(tanB+tanC)、(tanA+tanC)、（tanA+tanB)的質點，則{A、B、C}的質心=△ABC的外心。

（六）三角形的奈格爾點（Nagel點）



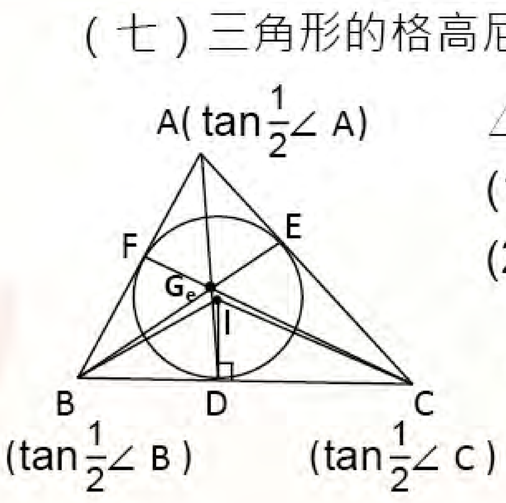
△ABC三個旁切圓與三邊切於D、E、F，則

(1) $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於一點　(2) 奈格爾點(Na)

Na(坐標)= $\frac{\tan\frac{1}{2}(\angle A\text{外角})}{\tan\frac{1}{2}(\angle A\text{外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle C\text{外角})}\times A(\text{坐標})+\frac{\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{外角})}{\tan\frac{1}{2}(\angle A\text{外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle C\text{外角})}\times B(\text{坐標})+\frac{\tan\frac{1}{2}(\angle C\text{外角})}{\tan\frac{1}{2}(\angle A\text{外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle B\text{外角})+\tan\frac{1}{2}(\angle C\text{外角})}\times C(\text{坐標})$

小結：△ABC中，在三頂點A、B、C上分別放置質量爲 $\tan\frac{1}{2}$(∠A外角)、$\tan\frac{1}{2}$(∠B外角)、$\tan\frac{1}{2}$(∠C外角)的質點，配重後運用槓桿原理，則{A、B、C}的質心=△ABC的奈格爾點。

（七）三角形的格高尼點（Gergomne點）



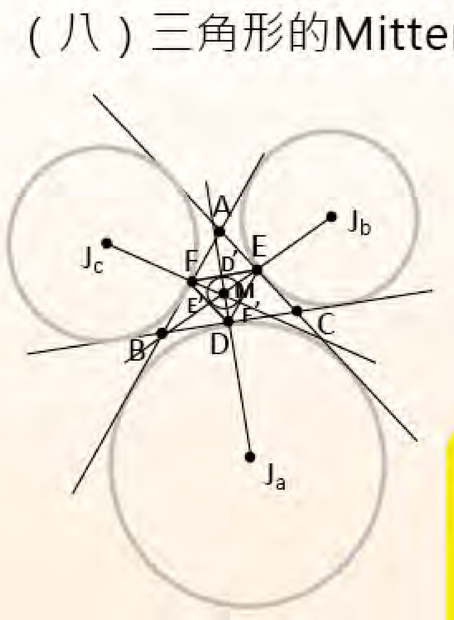
△ABC內切圓與三邊切於D、E、F則

(1) $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於一點

(2) 格高尼點Ge(坐標) = $\frac{\tan\frac{1}{2}\angle A}{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C}\times A(\text{坐標})+\frac{\tan\frac{1}{2}\angle B}{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C}\times B(\text{坐標})+\frac{\tan\frac{1}{2}\angle C}{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C}\times C(\text{坐標})$

小結：△ABC中，在三頂點A、B、C上分別放置質量爲 $\tan\frac{1}{2}\angle A$、$\tan\frac{1}{2}\angle B$、$\tan\frac{1}{2}\angle C$的質點，適當配重後運用槓桿原理，則{A、B、C}的質心=△ABC的格高尼點。

（八）三角形的Mittenpunkt點



J_a、J_b、J_c為△ABC三個旁心，D、E、F為△ABC三邊中點，作△DEF的內切圓，與 $\overline{EF}$、$\overline{DF}$、$\overline{DE}$ 相切於D'、E'、F'，則

(1) $\overleftrightarrow{J_aD}$、$\overleftrightarrow{J_bE}$、$\overleftrightarrow{J_cF}$ 三線共點。

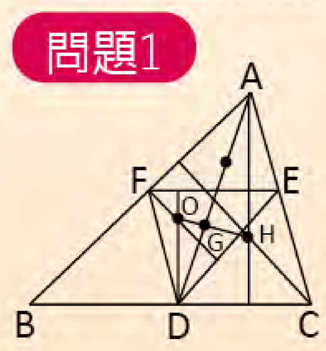
(2) Mittenpunkt(坐標)= $\frac{\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C}{2(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C)}\times A(\text{坐標})+\frac{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle C}{2(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C)}\times B(\text{坐標})+\frac{\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B}{2(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C)}\times C(\text{坐標})$

小結：△ABC中，在三頂點A、B、C上分別放置質量爲($\tan\frac{1}{2}$B+$\tan\frac{1}{2}$C)、($\tan\frac{1}{2}$A+$\tan\frac{1}{2}$C)、($\tan\frac{1}{2}$A+$\tan\frac{1}{2}$B)的質點，配重後運用槓桿原理，則{A、B、C}的質心=△ABC的Mittenpunkt點。

引理：△ABC的Mittenpunkt點爲三邊中點三角形△DEF的格高尼點

研究過程二：將上述結果進一步探討及推廣，①推證尤拉線定理②推證格高尼點、重心與Mittenpunkt點三點共線及性質③就兩道數學題，將比例特殊化後，進行探討及推廣。

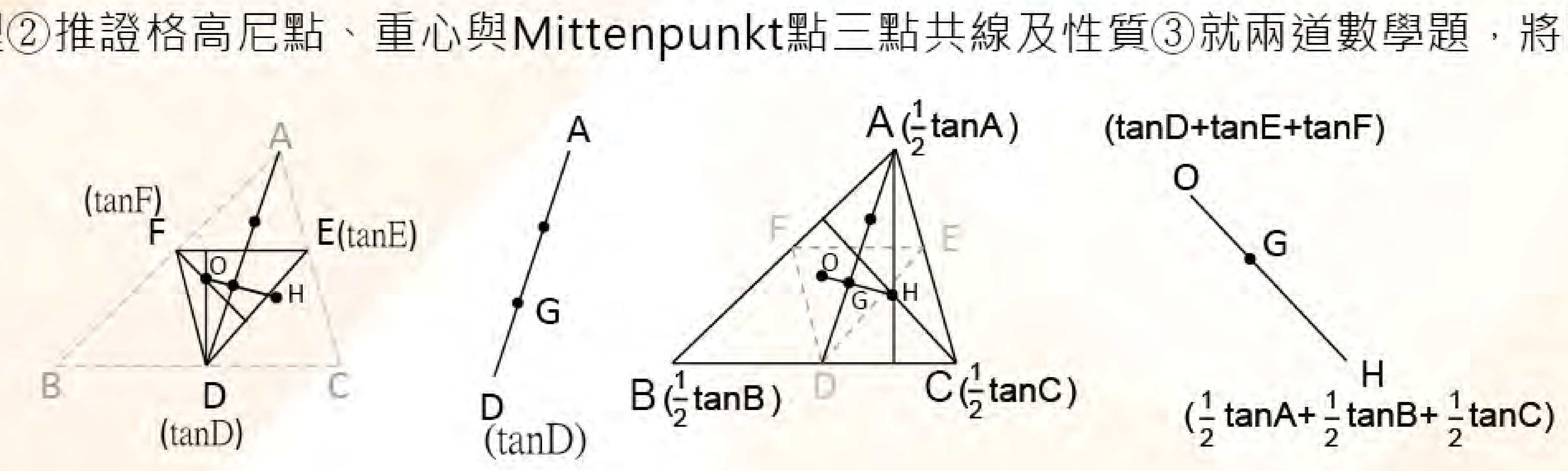
問題1



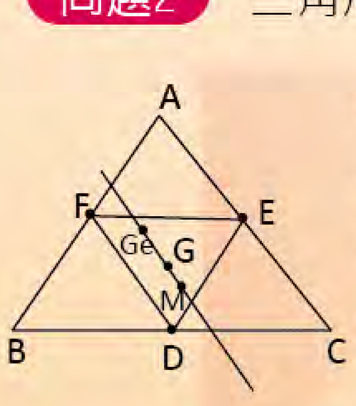
【尤拉線定理】△ABC中，D、E、F分別為三邊的中點，令O為△ABC的外心，H為△ABC的垂心，G為△ABC的重心，則

(1) O、G、H三點共線

(2) $\overline{HG}$: $\overline{GO}$ = 2 : 1



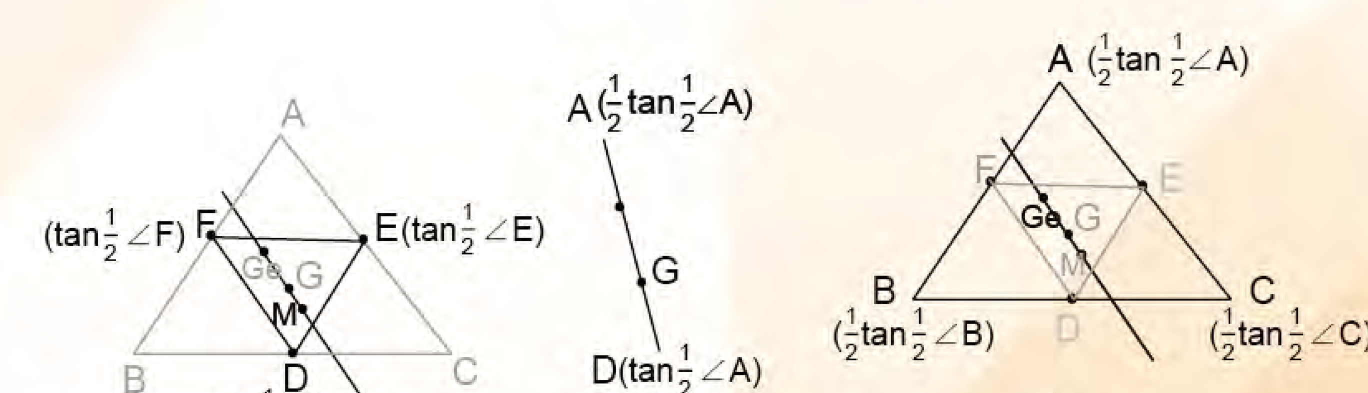
問題2　三角形的格高尼點、重心、Mittenpunkt點



若△ABC的格高尼點、重心、Mittenpunkt分別為Ge、G、M，則

(1) Ge、G、M三點共線

(2) $\overline{GeG}$: $\overline{GM}$ = 2 : 1



圖(一)　圖(二)　圖(三)

對照表　已知：△ABC，D、E、F為 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 中點。

（一）△ABC垂心與格高尼點的對照

	垂心(H)	格高尼點(Ge)
質量配置	A點：tan∠A、B點：tan∠B、C點：tan∠C	A點：$\tan\frac{1}{2}\angle A$、B點：$\tan\frac{1}{2}\angle B$、C點：$\tan\frac{1}{2}\angle C$
點的位置	在△ABC內部或邊上或外部	在△ABC內部

利用質量分配及槓桿原理的證明方法雷同

（三）三點共線的對照

垂心(H)、重心(G)、外心(O)	格高尼點(Ge)、重心(G)、Mittenpunkt點(M)
三點共線且 $\overline{HG}$: $\overline{GO}$ =2 : 1	三點共線且 $\overline{GeG}$: $\overline{GM}$ =2 : 1

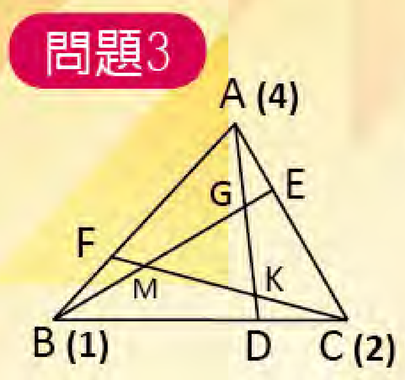
利用質量分配及槓桿原理的證明方法雷同

（二）△ABC外心與Mittenpunkt點的對照

	外心(O)	Mittenpunkt點(M)
點在△DEF中的名稱	△ABC的外心是△DEF的垂心	△ABC的Mittenpunkt點是△DEF的格高尼點
先在D、E、F配置質量，再進行證明	D點：tan∠D、E點：tan∠E、F點：tan∠F	D點：$\tan\frac{1}{2}\angle D$、E點：$\tan\frac{1}{2}\angle E$、F點：$\tan\frac{1}{2}\angle F$
由坐標公式得知：在整個系統{A、B、C}質量配置的情形	A點：(tan∠B+tan∠C) B點：(tan∠A+tan∠C) C點：(tan∠A+tan∠B)	A點：($\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C$)、 B點：($\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle C$)、 C點：($\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B$)
點的位置	在△ABC內部或邊上或外部	在△ABC內部

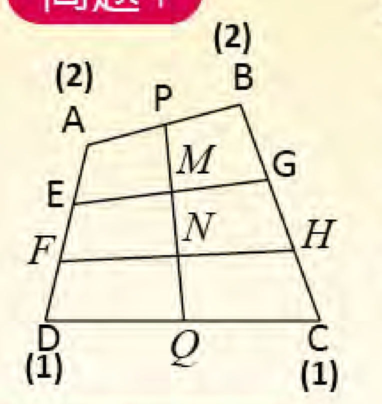
利用質量分配及槓桿原理的證明方法雷同

問題3



如左圖，△ABC中，D、E、F為三邊上的點，若 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{2}{1}$，連 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 兩兩分別相交於M、G、K三點，則△MKG面積= $\frac{1}{7}$ △ABC面積

問題4

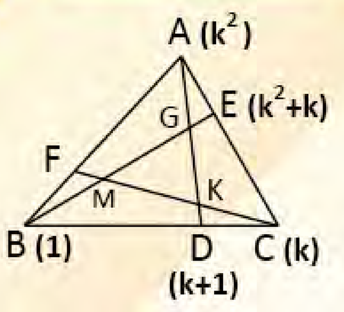


如左圖，E、F、G、H分別將 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 三等分，而P、Q分別將 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 兩等分，則

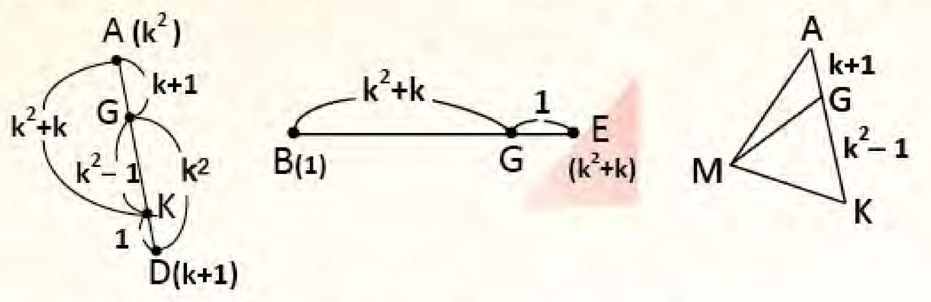
(1) $\overline{EG}$、$\overline{FH}$ 被 $\overline{PQ}$ 兩等分

(2) $\overline{PQ}$ 被 $\overline{EG}$、$\overline{FH}$ 三等分

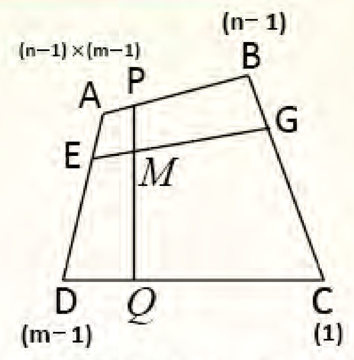
問題3推廣



△ABC中，D、E、F為三邊上的點，若 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=k$，則 $\frac{\triangle MKG面積}{\triangle ABC面積}=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$



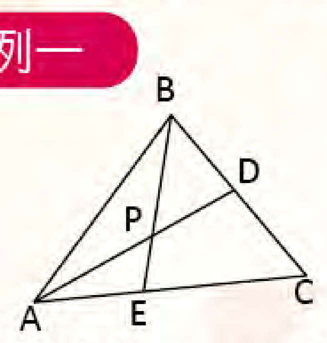
問題4推廣



四邊形ABCD，將 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 各分成n等分，其中 $\overline{AE}$ 及 $\overline{BG}$ 各占一等分，將 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 各分成m等分，其中 $\overline{AP}$ 及 $\overline{DQ}$ 各占一等分，而 $\overline{EG}$ 與 $\overline{PQ}$ 交於M點，則 $\overline{PM}=\frac{1}{n}\times\overline{PQ}$，$\overline{EM}=\frac{1}{m}\times\overline{EG}$

研究過程三：槓桿原理除了解決研究過程一三角形八心外，還可以實務性應用到以下介紹的五個題型，並與傳統數學的解題方法做比較。

例一



△ABC中，D為 $\overline{BC}$ 中點，P為 $\overline{AD}$中點，則

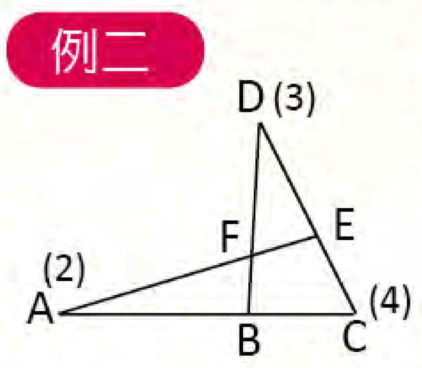
(a) $\overline{AE}$ ：$\overline{EC}$ =1 ：2

(b) $\overline{BP}$ ：$\overline{PE}$ =3 ：1

證明方法一 ：【利用槓桿原理推證】

證明方法二 ：【利用三角形兩邊中點連線段性質推證】

例二

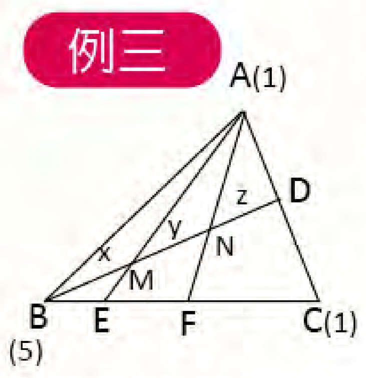


如左圖，有 $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{FB}}=2$，求 $\frac{\overline{DE}}{\overline{EC}}$、$\frac{\overline{AF}}{\overline{FE}}$

解法一 ：【利用槓桿原理推算】

解法二 ：【利用相似形原理推算】

例三

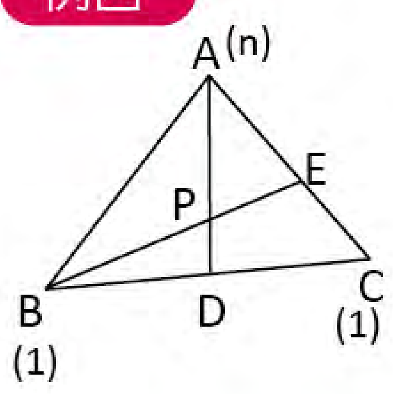


如左圖，已知E、F為 $\overline{BC}$邊上的點，$\overline{BE}$：$\overline{EF}$：$\overline{FC}$=1：2：3，D為 $\overline{AC}$中點，$\overline{DB}$被$\overline{AE}$、$\overline{AF}$截得三線段為x、y、z，求x：y：z

證明方法一 ：【利用槓桿原理推算】

證明方法二 ：【利用相似形原理推算】

例四

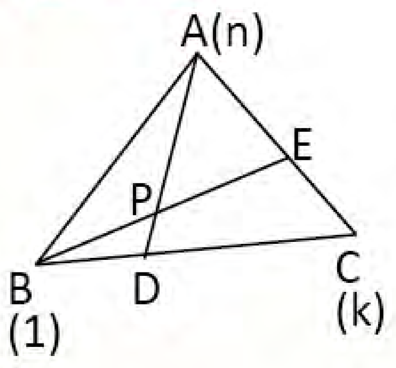


△ABC中，$\overline{AD}$ 為中線，過B任作一直線，與 $\overline{AD}$ 交於P，與 $\overline{AC}$ 交於E，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\frac{2\overline{AE}}{\overline{EC}}$

證明方法一 ：【利用槓桿原理推證】

證明方法二 ：【利用相似形原理推證】

一般化



△ABC中，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於D，且 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=k$，過B任作一直線，分別交 $\overline{AD}$、$\overline{AC}$ 於 P、E兩點，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=(1+\frac{1}{k})\times\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$

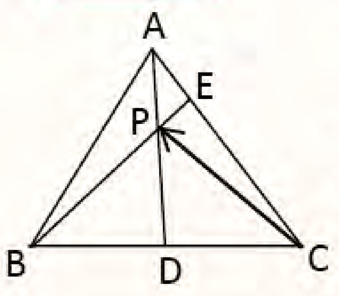
【槓桿原理】及【相似形原理】在實例運用上的比較與說明：

(1) 相似形是平面幾何一個重要內容，為各種數學競賽常見的題型，是廣泛被運用的性質，有時為了利用相似三角形解題，必須作輔助線，這是在運用上覺得較困難的地方。

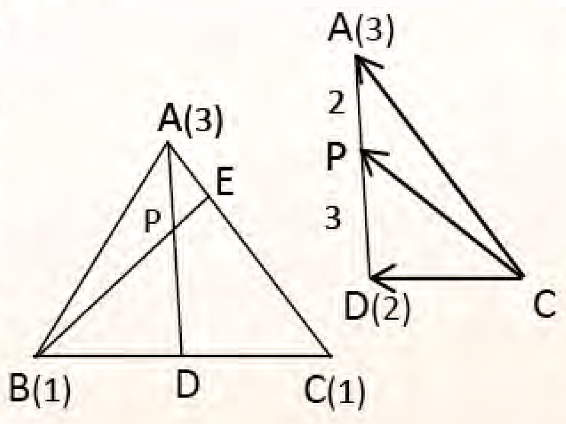
(2) 研究過程三所列舉的題型都是在三角形內，**過頂點的兩交叉線的問題**，只要利用質量分佈及槓桿平衡原理，**設法讓兩交叉線的交點成為整個系統的質心**，那麼要解出這類題型的題目就會變得很容易。

平面向量三點共線題型(高中數學南一版第三冊)

例五



如左圖，△ABC中，D為 $\overline{BC}$ 的中點，E在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AE}$：$\overline{EC}$ =1：3，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 相交於P，若 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，試求x、y之值。



比較與說明：本題平面向量三點共線的題目，還是屬於：**在三角形內過頂點的兩交叉線的問題**，因此利用質量分布及槓桿原理解題，感覺似乎不難且易懂。

本題利用槓桿原理，**可直接求得交叉線中兩線段的比(如$\overline{PA}$：$\overline{PD}$ =2：3)**，這是利用向量推算無法直接求得的，因此利用槓桿原理在高中向量的教學與解題上，也許是一項不錯的輔助工具。

伍、研究結果

一、配重整理：

已知 △ABC中，設 $\overline{BC}$=a 、 $\overline{AC}$=b、 $\overline{AB}$=c			
內心的質量配置 A點：a B點：b C點：c	旁心的質量配置 A點：a B點：b C點：c		
對{A(a)、B(b)、C(c)}施予同方向的力	對{A(a)}及對{B(b)、C(c)}施予反方向的力	對{B(b)}及對{A(a)、C(c)}施予反方向的力	對{C(c)}及對{A(a)、B(b)}施予反方向的力
{A、B、C} **的質心=△ABC的內心**	{A、B、C}的質心= 位於∠A平分線上△ABC的旁心	{A、B、C}的質心= 位於∠B平分線上△ABC的旁心	{A、B、C}的質心= 位於∠C平分線上△ABC的旁心

已知△ABC				
垂心的質量配置 A點：tanA B點：tanB C點：tanC	外心的質量配置 A點：(tanB+tanC) B點：(tanA+tanC) C點：(tanA+tanB)	奈格爾點的質量配置 A點：$\tan\frac{1}{2}$(∠A外角) B點：$\tan\frac{1}{2}$(∠B外角) C點：$\tan\frac{1}{2}$(∠C外角)	格高尼點的質量配置 A點：$\tan\frac{1}{2}\angle A$ B點：$\tan\frac{1}{2}\angle B$ C點：$\tan\frac{1}{2}\angle C$	Mittenpunkt點的質量配置 A點：$(\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C)$ B點：$(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle C)$ C點：$(\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B)$
{A、B、C}的質心=△ABC的垂心	{A、B、C}的質心=△ABC的外心	{A、B、C}的質心=△ABC的奈格爾點	{A、B、C}的質心=△ABC的格高尼點	{A、B、C}的質心=△ABC的Mittenpunkt點

二、解題方法的新視野：

根據質量分佈原理，在頂點上分別配置適當質量的質點，我們運用槓桿平衡原理，從不同角度、不同思維方式，可以重新證明尤拉線定理。在研究過程三列舉的題型中，都是屬於**三角形內過頂點的兩交叉線的問題**。我們發現只要設法在頂點配置適當質量，使得兩交叉線的交點成為整個系統的質心，就很容易解出這類題型的題目。

最後，列舉一道有關平面向量三線共點的題型，我們依照這樣的思維方式進行解題，**難度降低、容易被理解**，因此利用槓桿原理解題，有別於高中向量的教學方式，也是一項不錯的輔助工具。

陸、討論

從網路搜尋"三角形的五千多顆心"，會令人感到驚奇，因為在三角形中，還有那麼多的心，而心與心之間還有很多相關的性質，還有很多三線共點及三點共線的情形。我們這份作品是先從八心開始探討起，接著推證尤拉線定理及格高尼點、重心與Mittenpunkt點三點共線且 $\overline{GeG}$ ：$\overline{GM}$ =2 ：1的性質。我們想：**在"三角形的五千多顆心"中，必定還有不少顆心，適合採用質量分布及槓桿原理的理論進行推證**。希望以後有機會再往後延伸，繼續研究。

柒、結論

一、(一)參考各科展作品中，以研究重心位置的規律性最多，其中三角形重心位置與三個均質質點的質心是同一點，因為在頂點配置均質質量時，剛好能保持中線的特性；同理，在頂點配置時，如果能滿足角平分線的特性，那麼質心與內心會同一點，以此類推。

(二)網路搜尋的資料中，利用質量分布及槓桿原理有推導出三角形三內角平分線交一點。而處理三高共點時，則提到要在三頂點配置適當的質量，但內容只涉略銳角三角形，我們以此為基礎，延伸到三角形的旁心、垂心、外心、奈格爾點、格高尼點及Mittenpunkt點。

(三)我們發現像旁心在三角形外部，就等同槓桿的支點在施力與抗力的外側，**支點的合力=|施力－抗力|**，**適合理說明**旁心坐標公式中為何有**質量相減的情形**，同樣的觀念也運用到鈍角三角形垂心公式。

(四)在外心的探討上比較麻煩，因為中垂線不一定會通過頂點，因此無法直接由三頂點配置質量求證，必須從三邊中點配置質量，配合**垂心**的觀念，才能順利求得**外心**的坐標公式， 再由外心坐標公式了解三頂點是如何配置質量。

(五)最後，結合垂心及外心質量配置的概念，運用槓桿原理，也能重新詮釋尤拉線定理。

(六)在推證過程中，我們發現有趣的情況：**①格高尼點與垂心在質量配置上相似，而證法雷同。②Mittenpunkt點與外心在質量配置上相似，而證法也雷同。③格高尼點、重心、 Mittenpunkt點三點的關係及證法，則與尤拉線定理證法雷同**。

二、我們試著從參考書籍中收錄一些題目，以物理學科質量分布及槓桿原理為解題策略，以變通的思維方式解題，獲得很好的效果。