中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030409

三角形西瓦線上的點到兩頂點的距離極值

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 林宥呈	蕭偉智
國二 王偲碩	蘇昭碧

關鍵詞：極值、阿波羅尼奧斯圓、等腰梯形相似分割

摘要

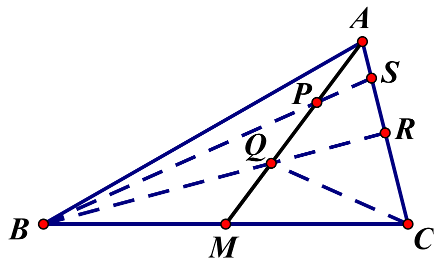
我們推廣九十五年國中基測數學試題，給定三角形 ABC 與其西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，在直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上取一動點 P，分別討論四種函數 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$、$\overline{PB}+\overline{PC}$、$\overline{PB}/\overline{PC}$ 與 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的數值變化，並求出四種函數的極大值與極小值，其中相除與相乘的難度很高。本研究特色是分別以雙曲線、橢圓、阿波羅尼奧斯圓、等腰梯形刻劃四種函數的極大（小）值，並特殊化到高、中線與角平分線。有趣的是，在三角形 ABC 的中線上滿足 $\overline{PB}/\overline{PC}$ 的極大（小）值點，是以 $\overline{BC}$ 為直徑的圓與中線的兩個交點，而角平分線上滿足 $\overline{PB}/\overline{PC}$ 的極大（小）值點分別是內（旁）心。另外，角平分線上滿足 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的極小值點落在內心與角平分線截點的線段上。

壹、 前言

一、 研究動機

九十五年第一次國中基測數學試題第十九題是個值得進行研究的主題[1]：

如圖，$\overline{AB}=\overline{BC}>\overline{AC}$，$P$、$Q$ 兩點在 $\overline{AM}$ 上，其中 $\overline{AP}=\overline{PQ}$，且 Q 為 $\triangle ABC$ 的重心。若兩直線 $\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{BQ}$ 與 $\overline{AC}$ 分別交於 S、R 兩點，則下列關係何者正確？



(A) $\overline{AS}=\overline{SR}$　　(B) $\overline{AR}=\overline{RC}$

(C) $\overline{QB}=\overline{QC}$　　(D) $\overline{QR}=2\overline{PS}$

【解題與討論】

因為 Q 為 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $\overline{BR}$ 是 $\triangle ABC$ 的中線，B 選項 $\overline{AR}=\overline{RC}$ 正確。

我們好奇其他選項的錯誤原因。首先是 A、D 選項，因為 $\overline{AP}=\overline{PQ}$，但是 $\overline{BS}$ 不平行 $\overline{BR}$，所以 $\overline{AS}\neq\overline{SR}$、$\overline{QR}\neq 2\overline{PS}$（平行線截比例線段的正逆性質）。利用孟氏定理可得 $\frac{\overline{AS}}{\overline{SR}}\times\frac{\overline{RB}}{\overline{BQ}}\times\frac{\overline{QP}}{\overline{PA}}=1$，解出 $\overline{AS}:\overline{SR}=2:3$。

接著是 C 選項，因為 $\overline{AB}>\overline{AC}$，$\overline{AM}$ 不是 $\overline{BC}$ 的中垂線，所以 $\overline{QB}\neq\overline{QC}$。但是我們更想知道 $\overline{QB}$ 與 $\overline{QC}$ 的大小關係？本研究的性質 1-1-1（第 3 頁）已經證明 $\overline{QB}>\overline{QC}$。

從這個試題，我們繼續探索問一些問題：

（1） 若 Q 點不是中線 $\overline{AM}$ 上的定點呢？中線 $\overline{AM}$ 上的任意一動點，例如圖中的 P 點，$\overline{PB}$ 與 $\overline{PC}$ 的大小關係？

（2） 若不是中線呢？換成角平分線、高上的任意點 P，$\overline{PB}$ 與 $\overline{PC}$ 的大小關係？

（3） 對於任意三角形 ΔABC，推廣過頂點 A 做任意一條西瓦線（直線），在這個西瓦線（直線）上取一點 P，$\overline{PB}$ 與 $\overline{PC}$ 的大小關係是怎樣呢？

二、 前置研究

我們利用大邊大角、樞紐定理、畢氏定理、內分比來處理以下基測試題中的 $\overline{PB}$ 與 $\overline{PC}$ 的長度問題。給定 ΔABC 及其三條特殊西瓦線，中線 $\overline{AM_A}$、高 $\overline{AH_A}$、角平分線 $\overline{AL_A}$，其中 $\overline{AB} > \overline{AC}$。

性質 1-1-1（原始命題）：若 P 點在中線 $\overline{AM_A}$ 上，則 $\overline{PB} > \overline{PC}$。

證明. 如圖 1-1，在 ΔABM_A 與 ΔACM_A 中，$\overline{BM_A} = \overline{CM_A}$、$\overline{AM_A} = \overline{AM_A}$，又 $\overline{AB} > \overline{AC}$，所以 $\angle AM_AB > \angle AM_AC$（逆樞紐定理），考慮 ΔPBM_A 與 ΔPCM_A 則可由樞紐定理得 $\overline{PB} > \overline{PC}$。

□

性質 1-1-2：若 P 點在高 $\overline{AH_A}$ 上，則 $\overline{PB} > \overline{PC}$。

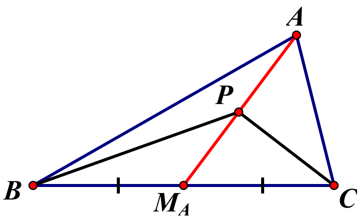
證明. 如圖 1-2，利用兩次畢氏定理即可證明。

□

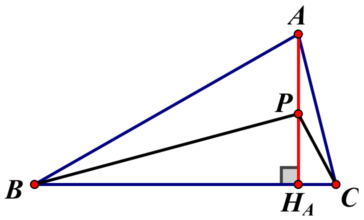
性質 1-1-3：若 P 點在角平分線 $\overline{AL_A}$ 上，則 $\overline{PB} > \overline{PC}$。

證明. 如圖 1-3，$\overline{AL_A}$ 為角平分線且 $\overline{AB} > \overline{AC}$ 推得 $\angle AL_AB = \angle L_AAC + \angle ACL_A > \angle L_AAB + \angle ABL_A = \angle AL_AC$，所以 $\overline{BL_A}^2 + \overline{PL_A}^2 < \overline{PB}^2$ 且 $\overline{CL_A}^2 + \overline{PL_A}^2 > \overline{PC}^2$，又 $\overline{BL_A} > \overline{CL_A}$，可得 $\overline{PC}^2 < \overline{CL_A}^2 + \overline{PL_A}^2 < \overline{BL_A}^2 + \overline{PL_A}^2 < \overline{PB}^2$，即 $\overline{PB} > \overline{PC}$。

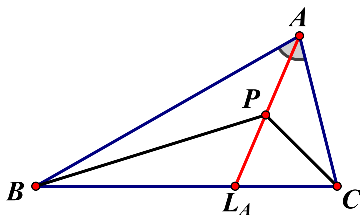
□



▲圖 1-1



▲圖 1-2



▲圖 1-3

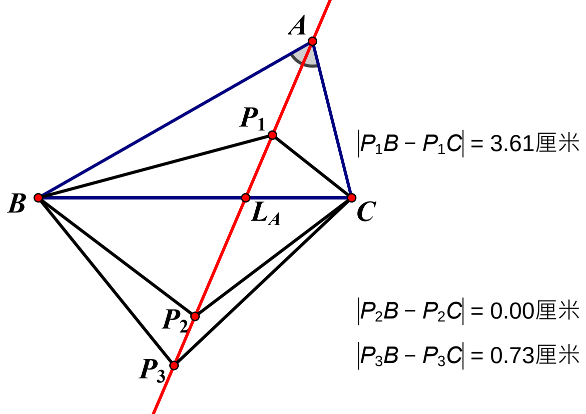
【討論】

我們將以上的命題看作給定 P 點位於 ΔABC 的三條特殊西瓦線（中線 $\overline{AM_A}$、高 $\overline{AH_A}$、角平分線 $\overline{AL_A}$）所形成的兩個線段的減法關係，也就是 $\left|\overline{PB} - \overline{PC}\right|$ 的值之變化。

以角平分線進行觀察，將條件放寬為「直線」（因為我們前面只證明線段上的 P 點），也

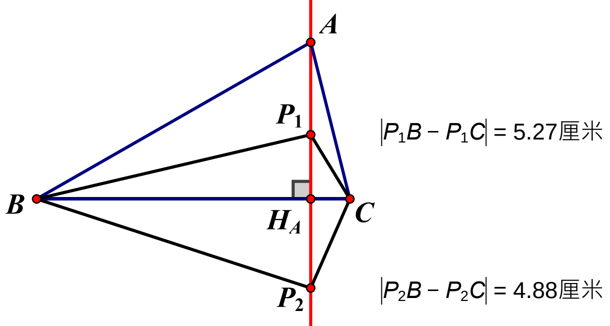
就是 P 點位於角平分線及其延長線 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 上。

有意思的是，如圖 1-4，我們發現角平分線上的點 P 並非都滿足 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|>0$，例如：圖 1-4 中的 P_2 點是 $\overline{BC}$ 的中垂線與 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 的交點，此時 $\left|\overline{P_2B}-\overline{P_2C}\right|=0$。另外，當 P 點趨近於無窮遠處，則 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$ 趨近到 0。

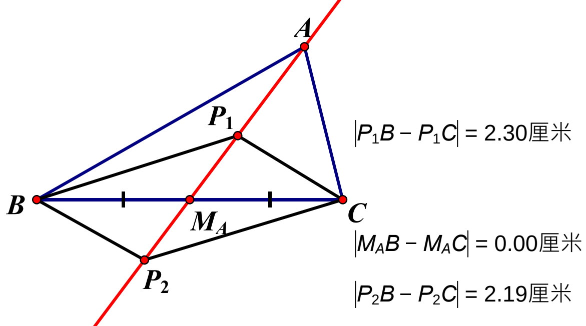


▲圖 1-4：角平分線。

同樣的，我們將 ΔABC 的高、中線延長為直線 $\overleftrightarrow{AH_A}$、$\overleftrightarrow{AM_A}$ 進行觀察，如圖 1-5(a)，因為 $\overleftrightarrow{AH_A}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線平行（相交於無群遠處），再利用畢氏定理可得出 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|>0$，同樣的當 P 點趨近於無窮遠處，則 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$ 趨近到 0。以相同方式也可以得出圖 1-5(b) 中線的情形。然而，$\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$ 的極大值會出現在哪裡呢？這引起我們的研究興趣。換句話說，我們研究 P 點在三條特殊西瓦線的什麼位置時，$\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$ 會有極大值與極小值？

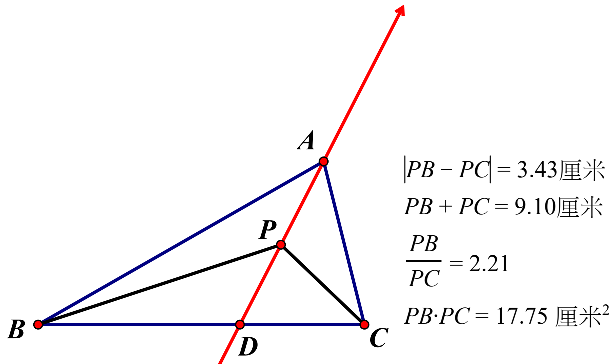


▲圖 1-5(a)：高。



▲圖 1-5(b)：中線。

更一般性的問題是，如圖 1-6，給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$（D 點在 ΔABC 的邊 $\overline{BC}$ 上，則將直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 稱作三角形的西瓦線），若 P 為 $\overleftrightarrow{AD}$ 上一點，則分別觀察四種運算 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$、$\overline{PB}+\overline{PC}$、$\overline{PB}\div\overline{PC}$、$\overline{PB}\times\overline{PC}$ 所得到的數值之變化情形，以及各自的極值（極大值、極小值）是什麼？還有我們如何找出極值點呢？

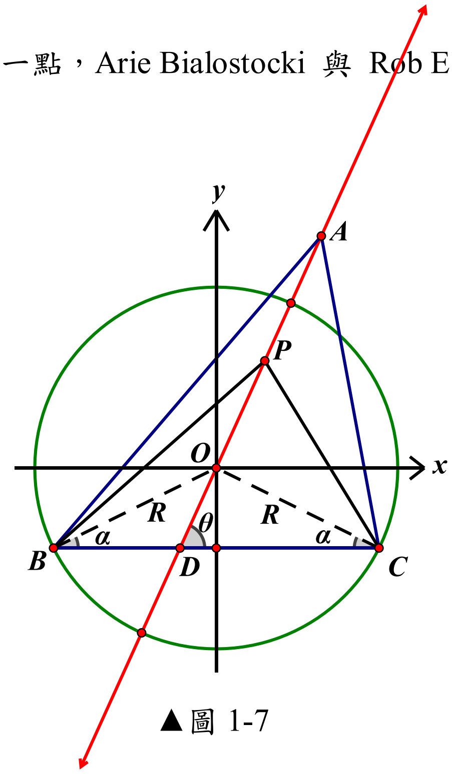


▲圖 1-6：任意西瓦線。

三、 相關文獻

給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，令 P 點為 $\overleftrightarrow{AD}$ 上一點，Arie Bialostocki 與 Rob Ely [3] 利用解析幾何的方式來處理 $\overline{PB} \div \overline{PC}$ 的極值。

如圖 1-7，令 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線之交點為原點 O，$\angle ADC = \theta$、$\angle OBC = \angle OCB = \alpha$、$\overline{OC} = \overline{OB} = R$，則 $B = R(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$、$C = R(\cos\alpha, -\sin\alpha)$、$P = k(\cos\theta, \sin\theta)$，其中 k 為實數（$k > 0$ 表示 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 同向。$k < 0$，則為異向），利用距離公式　可得



▲圖 1-7

$$F(k) = \frac{\overline{BP}^2}{\overline{CP}^2} = \frac{k^2 + 2Rk\cos(\theta - \alpha) + R^2}{k^2 - 2Rk\cos(\theta + \alpha) + R^2}$$

把 $F(k)$ 進行微分可得

$$F'(k) = \frac{4R\cos\theta\cos\alpha(R^2 - k^2)}{(k^2 - 2Rt\cos(\theta + \alpha) + R^2)^2}$$

（參考資料[3]第 178 頁中微分式子有誤值，以上式子我們已經更正過來）

$F'(k) = 0$ 時，$k = \pm R$，所以有兩個極值點，也就是圓 O 與 $\overleftrightarrow{AD}$ 的兩個交點。

然而，其他三種運算 $|\overline{PB} - \overline{PC}|$、$\overline{PB} + \overline{PC}$、$\overline{PB} \times \overline{PC}$ 則沒有相關研究資料。

我們與指導老師討論詢問得知，Arie Bialostocki 與 Rob Ely 用的是微積分中典型處理極值的方法，但是我們覺得用這個方式看不出來圖形的幾何意義，因為不能直接知道極大值點與極小值點在原圖形上的幾何意義。因此在本研究中，我們採用「幾何圖形」的綜合方法，來研究這個極值問題。

此外，我們不只研究 $\overline{PB} \div \overline{PC}$，我們還想研究另外三種運算 $|\overline{PB} - \overline{PC}|$、$\overline{PB} + \overline{PC}$、$\overline{PB} \times \overline{PC}$ 所得到的數值之變化情形，我們想完整解決此類型的三角形的極值問題。

四、 名詞定義

（一）三角形的西瓦線：

點 D 在 ΔABC 在邊 $\overline{BC}$ 上，連接 $\overleftrightarrow{AD}$，我們稱 $\overleftrightarrow{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的西瓦線。

（二）橢圓、雙曲線、阿波羅尼奧斯圓、等腰梯形

為了探究 ΔABC 西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上的 P 點到兩頂點 B 點與 C 點的三種幾何量 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$、$\overline{PB}+\overline{PC}$、$\overline{PB}\div\overline{PC}$、$\overline{PB}\times\overline{PC}$，本研究將使用以下四種幾何圖形作為研究工具。

1. 橢圓：平面上給定相異兩相異定點 F_1 與 F_2，且定數 2λ 滿足 $\overline{F_1F_2}<2\lambda$ ，平面上所有滿足 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2\lambda$ 的點 P 所形成的圖形稱為橢圓，而定點 F_1 與 F_2 稱為此橢圓的焦點。
2. 雙曲線：平面上給定相異兩相異定點 F_1 與 F_2，且定數 2λ 滿足 $0<2\lambda<\overline{F_1F_2}$ ，平面上所有滿足 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2\lambda$ 的點 P 所形成的圖形稱為雙曲線，而定點 F_1 與 F_2 稱為此雙曲線的焦點。
3. 阿波羅尼奧斯圓：平面上給定兩相異定點 A、B，平面上所有滿足 $\overline{PA}/\overline{PB}=\lambda>0$ 的點所形成的圖形稱為阿波羅尼奧斯圓。當 $\lambda=1$ 時，P 點的軌跡是 $\overline{AB}$ 的中垂線（退化的圓）。當 $\lambda\neq1$ 時，P 點的軌跡是圓。
4. 等腰梯形：平面上凸四邊形 $ABCD$ 中，滿足 $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$、$\overline{AB}\nparallel\overline{CD}$、$\overline{AB}=\overline{CD}$ 的四邊形。

五、 研究目的

平面上，給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，且 P 為 $\overleftrightarrow{AD}$ 上一點，其中 $\overline{AB}>\overline{AC}$、$\angle ADC=\theta$、點 M_A 為 $\overline{AB}$ 中點、 $\overline{M_AD}/\overline{M_AC}=s$、$\overline{DB}/\overline{DC}=t$。

我們依序研究以下四種運算的結果

（一） $|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 的數值變化，並找出其極大值點與極小值點。

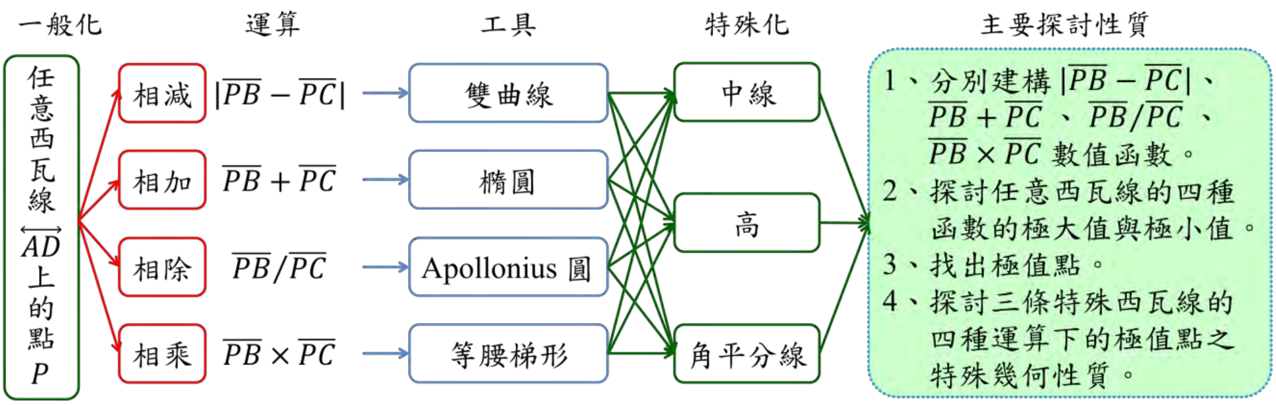
（二） $\overline{PB}+\overline{PC}$ 的數值變化，並找出其極大值點與極小值點。

（三） $\overline{PB}\div\overline{PC}$ 的數值變化，並找出其極大值點與極小值點。

（四） $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的數值變化，並找出其極大值點與極小值點。

（五） 討論四種運算 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$、$\overline{PB}+\overline{PC}$、$\overline{PB}\div\overline{PC}$、$\overline{PB}\times\overline{PC}$ 分別在三條特殊西瓦線高 $\overleftrightarrow{AH_A}$、中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$、角平分線 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 上的極大值點與極小值點。

六、 研究架構



貳、 研究工具與方法

一、 研究工具

The Geometer's Sketchpad 5.0、WolframAlpha 計算網站

二、 預備知識

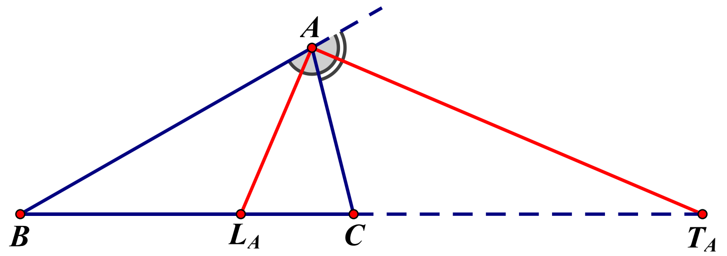
本文約定在 ΔABC 中，$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$ 且 $c>b$。

（一） 斯霍騰（Schooten）定理（角平分線長度公式）[2, p.83]

如圖 2-1，ΔABC 中，$\overline{AL_A}$ 是 $\angle A$ 的內角平分線，$\overline{AT_A}$ 是 $\angle A$ 的外角平分線，則 $\overline{AL_A}=\sqrt{\overline{AB}\times\overline{AC}-\overline{L_AB}\times\overline{L_AC}}$ 且 $\overline{AT_A}=\sqrt{\overline{T_AB}\times\overline{T_AC}-\overline{AB}\times\overline{AC}}$

$$\overline{AL_A}=\sqrt{\frac{bc(-a+b+c)(a+b+c)}{(b+c)^2}}、\overline{AT_A}=\sqrt{\frac{bc(a-b+c)(a+b-c)}{(b-c)^2}}、\overline{L_AT_A}=\frac{2abc}{(c-b)(c+b)}$$

因此，$\sin\angle AL_AC=\sqrt{\frac{(c+b)^2(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2bc}}$、$\tan\angle AL_AC=\sqrt{\frac{(b+c)^2(a-b+c)(a+b-c)}{(b-c)^2(-a+b+c)(a+b+c)}}$

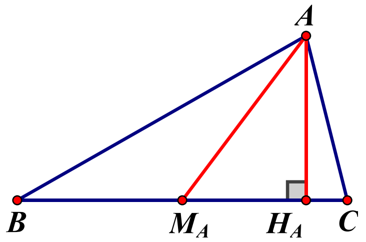


▲圖 2-1

（二） 中線定理（中線長度公式）[2, p.100]

如圖，ΔABC 中，$\overline{AM_A}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的中線，則 $2\overline{AM_A}=\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}$。$\overline{AH_A}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高，得出 $\overline{AH_A}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2a}$、$\overline{M_AH_A}=\frac{c^2-b^2}{2a}$

因此，$\sin\angle AM_AC=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{a\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}}$、$\cos\angle AM_AC=\frac{c^2-b^2}{a\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}}$



▲圖 2-2

參、 研究結果與討論

一、 任意西瓦線上的點 P 構造的 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$ 極值

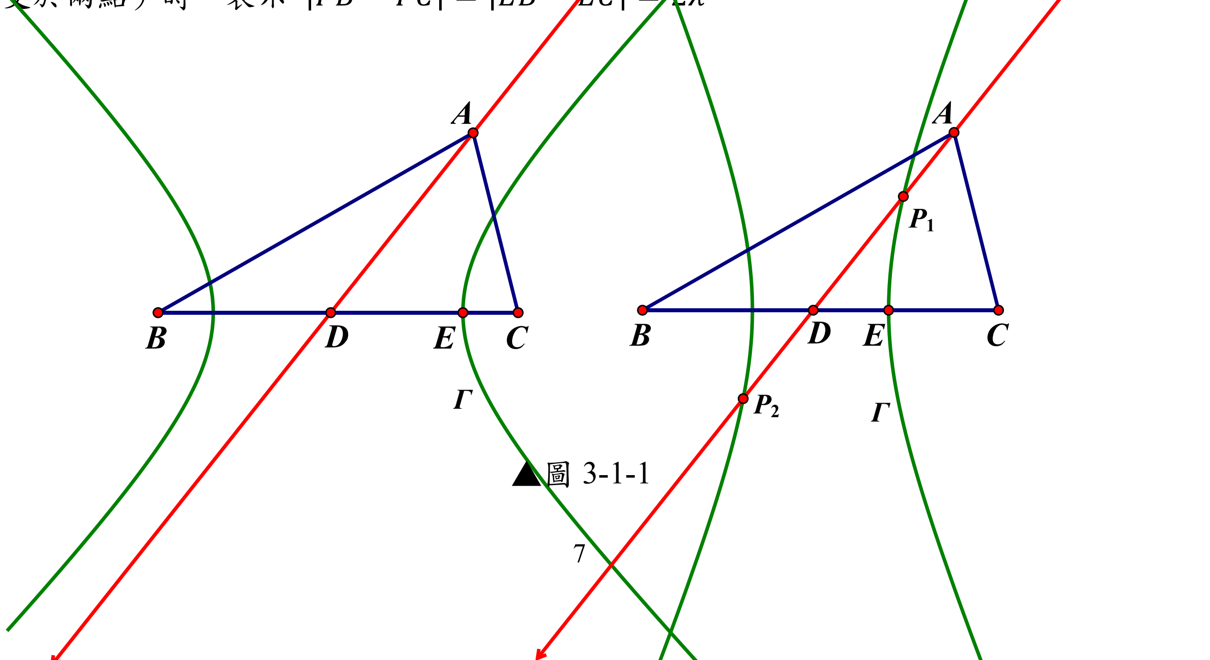
給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，且 P 為 $\overleftrightarrow{AD}$ 上一點，其中 $\overline{AB}>\overline{AC}$。我們希望刻劃西瓦線上 P 點所構成的線段差（距離） $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$。

$\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$ 可聯想到「雙曲線」，所以我們使用「雙曲線」作為工具進行 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$ 的刻劃。先討論 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$ 的範圍，在 ΔPBC 中，依據三角不等式可得出 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|\le\overline{BC}$。

因此，我們考慮在邊 $\overline{BC}$ 上取一點 E，可得差 $\left|\overline{EB}-\overline{EC}\right|$，再想找出西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上的哪些 P 點，會滿足 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|=\left|\overline{EB}-\overline{EC}\right|$。

【構造工具】

如圖 3-1-1，在邊 $\overline{BC}$ 上取一點 E，令 $\left|\overline{EB}-\overline{EC}\right|=2\lambda$，以 B、C 點為焦點且 2λ 為定長作雙曲線 Γ。E 點是動點，當 $\overleftrightarrow{AD}$ 跟雙曲線 Γ 不相交時，表示 $\overleftrightarrow{AD}$ 上沒有任何一點到 B 點距離與到 C 點的距離差等於 $\left|\overline{EB}-\overline{EC}\right|=2\lambda$。當 $\overleftrightarrow{AD}$ 跟雙曲線 Γ 相交於 P 點（交於一點或交於兩點）時，表示 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|=\left|\overline{EB}-\overline{EC}\right|=2\lambda$。



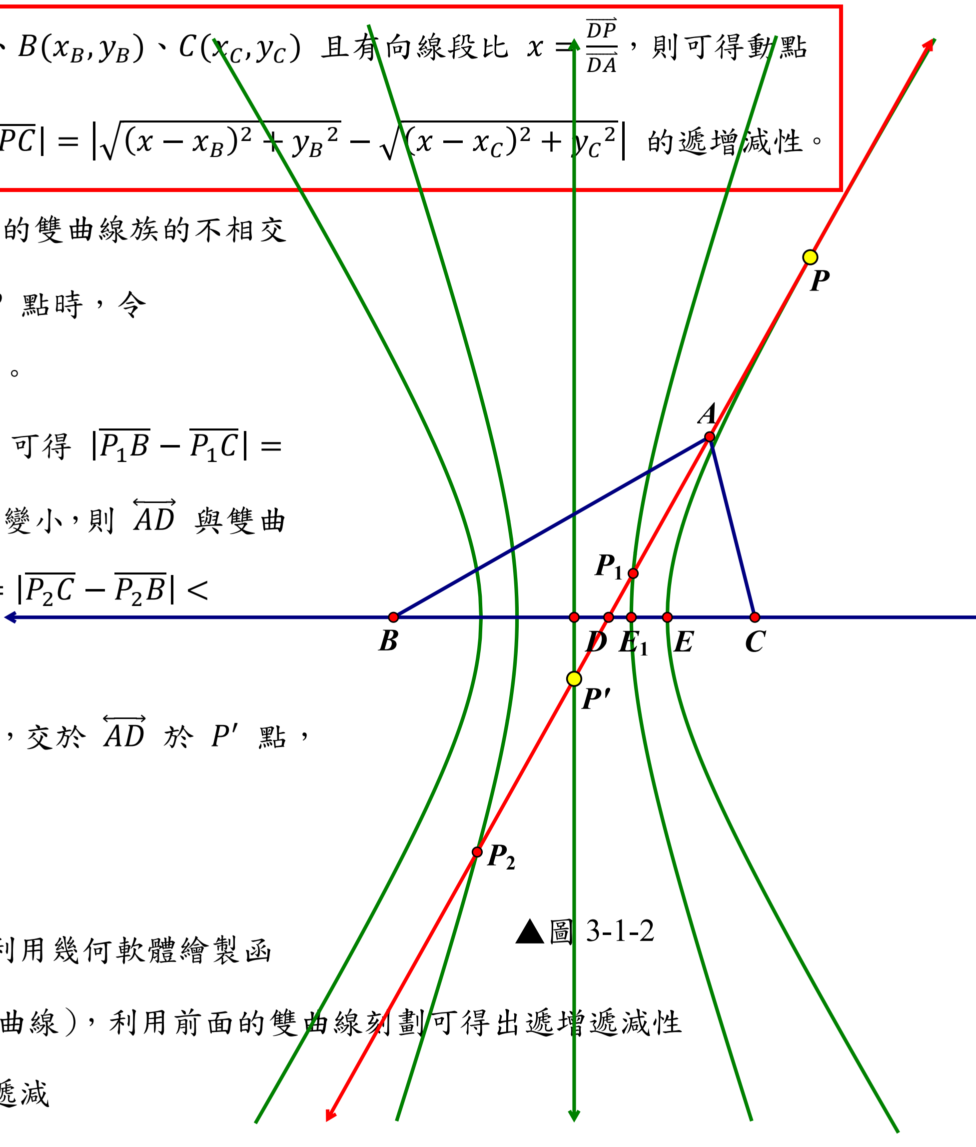
▲圖 3-1-1

引理 3-1-1：相同焦點、不同數值 λ 構造的雙曲線彼此不相交。

定義 3-1-2（有向線段比）：若 A,B,C 為平面上共線的三點，定義其有向線段比的符號為 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$。

若 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同向，則 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$；反之，若 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 反向，則 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=-\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$。

引理 3-1-3：令 $D(0,0)$、$A(1,0)$、$B(x_B,y_B)$、$C(x_C,y_C)$ 且有向線段比 $x=\frac{\overline{DP}}{\overline{DA}}$，則可得動點 $P(x,0)$。刻劃函數 $F(x)=|\overline{PB}-\overline{PC}|=\left|\sqrt{(x-x_B)^2+{y_B}^2}-\sqrt{(x-x_C)^2+{y_C}^2}\right|$ 的遞增減性。



▲圖 3-1-2

證明. 如圖 3-1-2，依據引理 3-1-1 的雙曲線族的不相交性質，當雙曲線與 $\overleftrightarrow{AD}$ 相切於 P 點時，令 $|\overline{PB}-\overline{PC}|=|\overline{EB}-\overline{EC}|=2\lambda>0$。

考慮 E 點往左移動變為 E_1 點，可得 $|\overline{P_1B}-\overline{P_1C}|=|\overline{P_2C}-\overline{P_2B}|=|\overline{E_1B}-\overline{E_1C}|<2\lambda$ 變小，則 $\overleftrightarrow{AD}$ 與雙曲線相割兩點，可得 $|\overline{P_1B}-\overline{P_1C}|=|\overline{P_2C}-\overline{P_2B}|<|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 嚴格遞減。

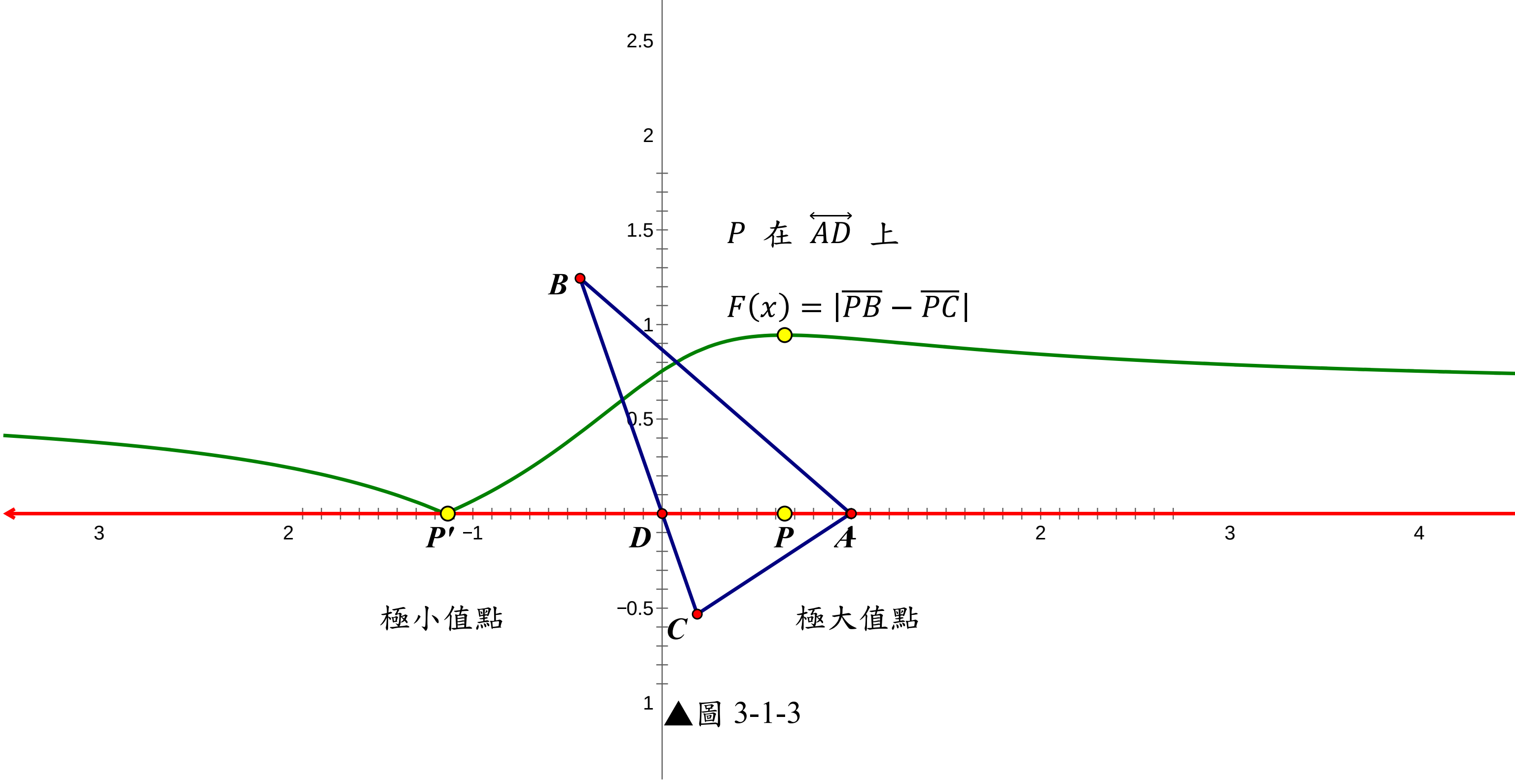
當雙曲線退化為 $\overline{BC}$ 的中垂線時，交於 $\overleftrightarrow{AD}$ 於 P' 點，此時 $|\overline{P'B}-\overline{P'C}|=0$。

如圖 3-1-3，令 $\overline{DC}<\overline{BD}$，我們利用幾何軟體繪製函數圖形 $F(x)=|\overline{PB}-\overline{PC}|$（綠色曲線），利用前面的雙曲線刻劃可得出遞增遞減性

(1) $x\in(-\infty,\ P']$，$F(x)$ 是嚴格遞減

(2) $x\in[P',P]$，$F(x)$ 是嚴格遞增

(3) $x\to[P',-\infty)$，$F(x)$ 是嚴格遞減



▲圖 3-1-3

□

接著，我們找出任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上 P 點，使得 $|\overline{PB} - \overline{PC}|$ 有極大值、極小值的兩個點，並且想知道這個極值的確切數值。

給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，$\overline{AB} > \overline{AC}$、點 M_A 為 $\overline{BC}$ 中點、點 E 在 $\overline{BC}$ 上。令 $|\overline{EB} - \overline{EC}| = 2\lambda > 0$、有向線段比 $\overrightarrow{M_AD}/\overrightarrow{M_AC} = s$、$\angle ADC = \theta$。

定理 3-1-4（極值）：$|\overline{PB} - \overline{PC}|$ 有極大值 $\sqrt{\frac{s^2\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta+1}} \times \overline{BC}$、$|\overline{PB} - \overline{PC}|$ 有極小值 0。

證明.

如圖 3-1-4，不失一般性，令 $B(-1,0)$、$C(1,0)$、$D(s,0)$，可得西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 的方程式為 $\frac{y}{x-t} = \tan\theta$，且以 B、C 點為焦點且 2λ（$0 < \lambda < 1$）為定長作雙曲線 Γ 方程式 $\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{1-\lambda^2} = 1$，

(1) 注意到，當 $\angle ADC = 90°$ 時，顯然雙曲線 Γ 與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相切於 D 點。

(2) $\angle ADC \neq 90°$，令雙曲線 Γ 與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相切於 P 點時，解方程式

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x-s} = \tan\theta \\ \dfrac{x^2}{\lambda^2} - \dfrac{y^2}{1-\lambda^2} = 1 \end{cases}$$

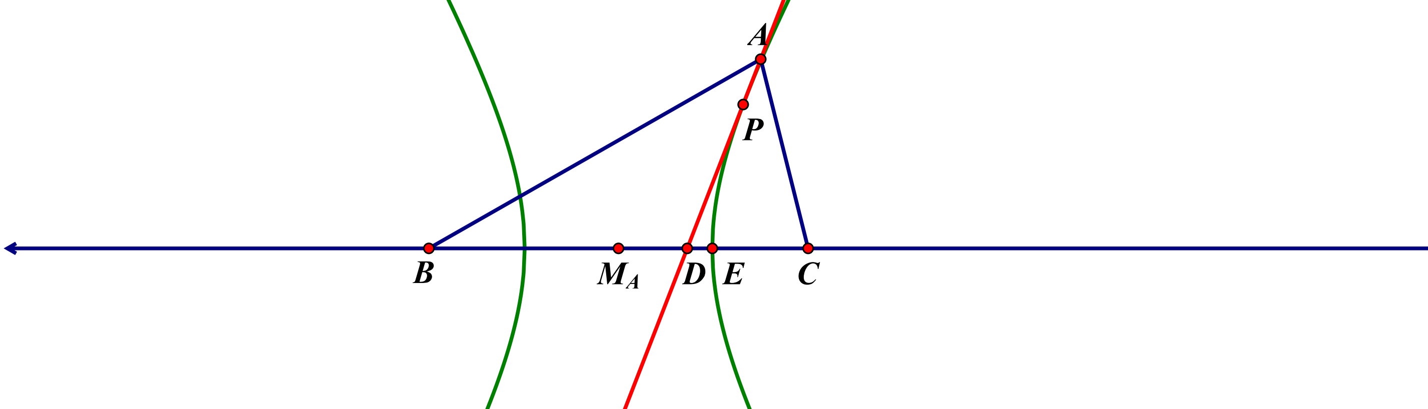
因為 x 重根，判別式為 0，所以化簡可得

$$4\lambda^2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + \lambda^2\tan^2\theta - s^2\tan^2\theta - 1) = 0$$

又因為 $0 < \lambda < 1$，所以再化簡為 $\lambda^2 + \lambda^2\tan^2\theta - s^2\tan^2\theta - 1 = 0$ 可得

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{s^2\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta+1}}\text{（負不合）}$$

依據引理 3-1-3 可知 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 有極大值 $\sqrt{\frac{s^2\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta+1}}\times\overline{BC}$、極小值 0



▲圖 3-1-4

□

接著，我們討論給定 ΔABC 及三條特殊西瓦線，高 $\overleftrightarrow{AH_A}$、中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$、角平分線 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 上的動點 P，探討 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 的極值情形，其中 $\overline{AB}>\overline{AC}$。

推論 3-1-5（高）： 若 P 在 ΔABC 的高 $\overleftrightarrow{AH_A}$ 上，則 $0\le|\overline{PB}-\overline{PC}|\le|\overline{H_AB}-\overline{H_AC}|$。極大值的點為垂足 H_A。

證明. 如圖 3-1-5，由性質 3-1-4 即可得。

□

推論 3-1-6（中線）： 若 P 在 ΔABC 的中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 上，則 $0\le|\overline{PB}-\overline{PC}|\le\cos\theta\times\overline{BC}$。極小值點為中點 M_A。極大值點並非特殊點。

證明. 如圖 3-1-6，因為 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 是中線，$\overline{M_AD}/\overline{M_AC}=s=0$ 代回性質 3-1-4 的式子可得

$$0\le|\overline{PB}-\overline{PC}|\le\cos\theta\times\overline{BC}$$

所以極小值點是中點，但極大值點丶不是特殊點。

□

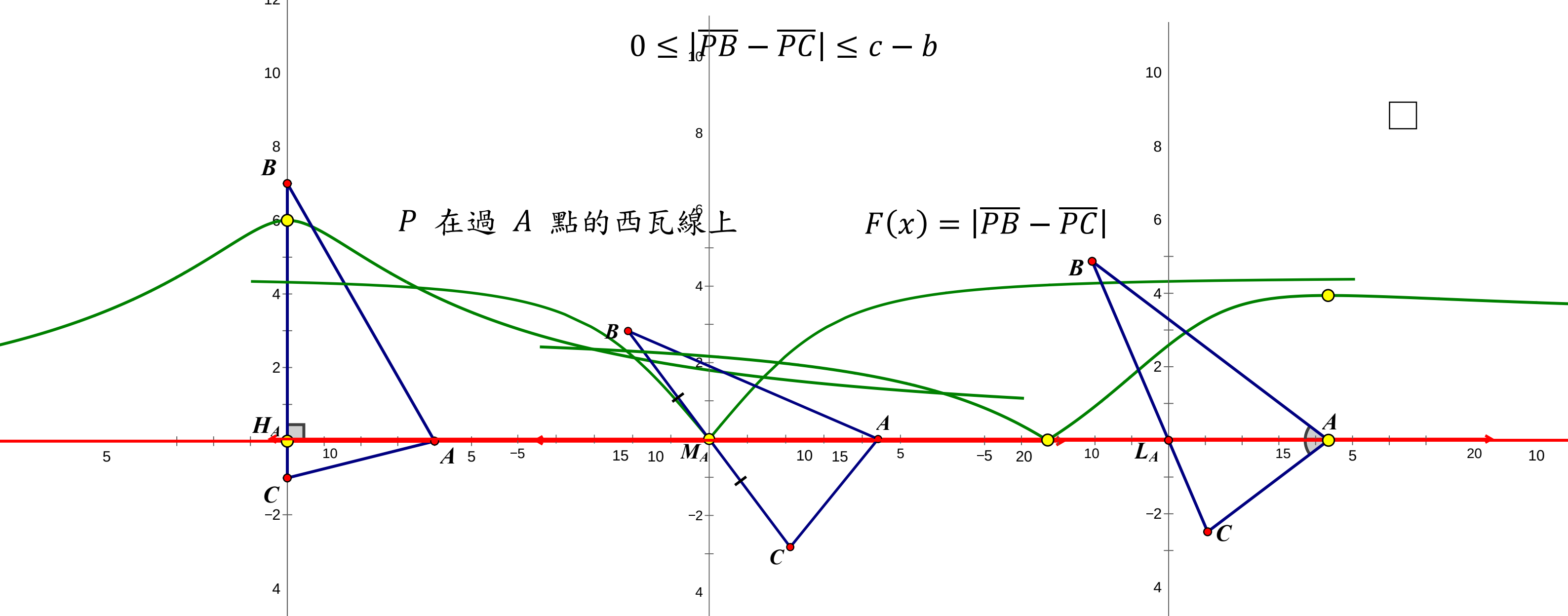
推論 3-1-7（角平分線）： 若 P 在 ΔABC 的內角平分線 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 上，則 $0\le|\overline{PB}-\overline{PC}|\le c-b$。極大值的點為頂點 A，極小值點為 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線之交點。

證明. 如圖 3-1-7，因為 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 是角平分線，所以 $\overline{M_AD}/\overline{M_AC}=s=\frac{c-b}{b+c}$，且 $\tan\theta=$

$\sqrt{\frac{(c+b)^2(a-b+c)(a+b-c)}{(c-b)^2(-a+b+c)(a+b+c)}}$ 代回性質 3-1-2 的式子化簡可得

$$0 \le |\overline{PB} - \overline{PC}| \le c - b$$

□



▲圖 3-1-5：高。 ▲圖 3-1-6：中線。 ▲圖 3-1-7：角平分線。

二、 任意西瓦線上的點 P 構造的 $\overline{PB} + \overline{PC}$ 極值

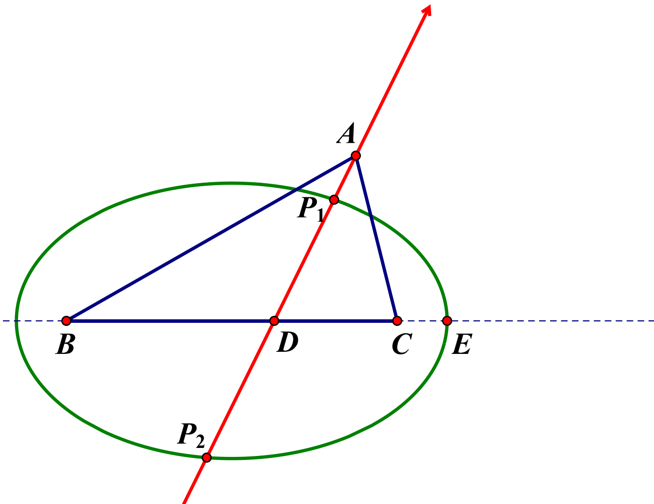
給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，且 P 為 $\overleftrightarrow{AD}$ 上一點，其中 $\overline{AB} > \overline{AC}$。利用「橢圓」刻劃西瓦線上 P 點所構成的線段和 $\overline{PB} + \overline{PC}$。

先討論 $\overline{PB} + \overline{PC}$ 的範圍，在 ΔPBC 中，依據三角不等式可得出 $\overline{PB} + \overline{PC} \ge \overline{BC}$。

【構造工具】

如圖 3-2-1，在邊 $\overline{BC}$ 的延長線上取一點 E，令 $\overline{EB} + \overline{EC} = 2\lambda > \overline{BC}$，以 B、C 點為焦點且 2λ 為定長作橢圓 Γ。

因為西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 與橢圓 Γ 的長軸 $\overline{BC}$ 交於 D 點，所以 E 點動態運動時，$\overleftrightarrow{AD}$ 跟橢圓 Γ 必相交於兩點 P_1 與 P_2，即表示 $\overline{P_1B} + \overline{P_1C} = \overline{P_2B} + \overline{P_2C} = \overline{EB} + \overline{EC} = 2\lambda$。

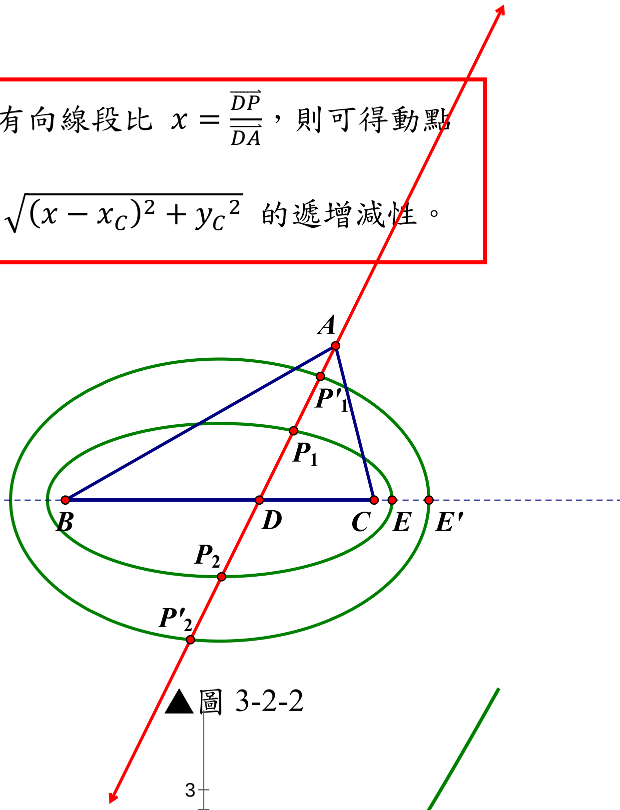


▲圖 3-2-1

引理 3-2-1：相同焦點、不同數值 λ 構造的橢圓彼此不相交。

引理 3-2-2：令 $D(0,0)$、$A(1,0)$、$B(x_B,y_B)$、$C(x_C,y_C)$ 且有向線段比 $x=\frac{\overline{DP}}{\overline{DA}}$，則可得動點 $P(x,0)$。刻劃函數 $F(x)=\overline{PB}+\overline{PC}=\sqrt{(x-x_B)^2+{y_B}^2}+\sqrt{(x-x_C)^2+{y_C}^2}$ 的遞增減性。

證明. 如圖 3-2-2，依據引理 3-2-1 的橢圓族的不相交性質，當橢圓與 $\overleftrightarrow{AD}$ 相交於 P_1 與 P_2 點時，令 $\overline{P_1B}+\overline{P_1C}=\overline{P_2B}+\overline{P_2C}=\overline{EB}+\overline{EC}=2\lambda$，考慮 E 點往右移動變為 E' 點，可得 $\overline{P_1'B}+\overline{P_1'C}=\overline{P_2'B}+\overline{P_2'C}=\overline{E'B}+\overline{E'C}>2\lambda$，可得 $\overline{P_1'B}+\overline{P_1'C}=\overline{P_2'B}+\overline{P_2'C}>\overline{P_1B}+\overline{P_1C}=\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$ 而嚴格遞增。橢圓退化為 $\overline{BC}$ 線段時，$F(x)=\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{DB}+\overline{DC}$ 有極小值。



▲圖 3-2-2

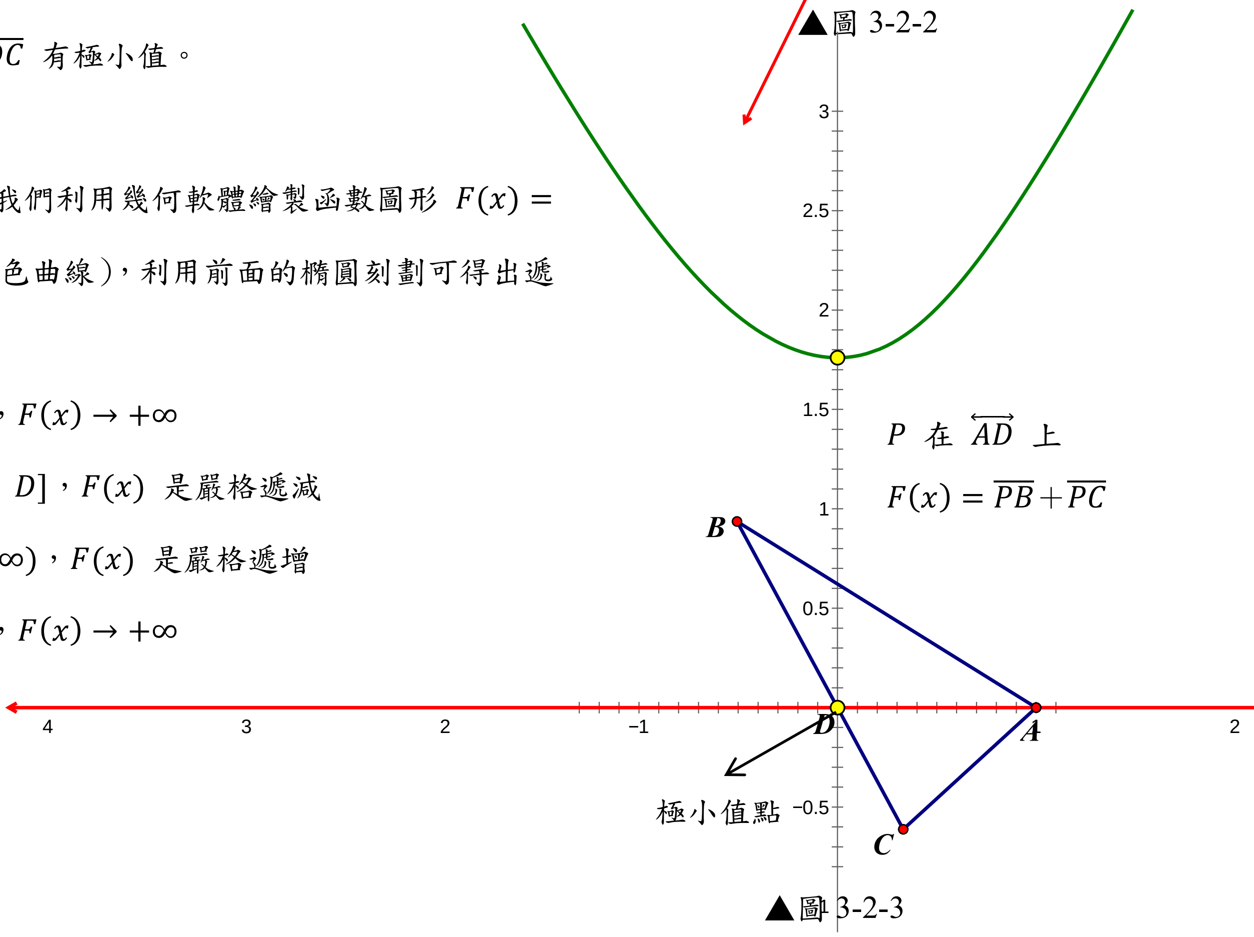
如圖 3-2-3，我們利用幾何軟體繪製函數圖形 $F(x)=\overline{PB}+\overline{PC}$（綠色曲線），利用前面的橢圓刻劃可得出遞增遞減性

(1) $x\to-\infty$，$F(x)\to+\infty$

(2) $x\in(-\infty,\ D]$，$F(x)$ 是嚴格遞減

(3) $x\in[D,+\infty)$，$F(x)$ 是嚴格遞增

(4) $x\to+\infty$，$F(x)\to+\infty$



▲圖 3-2-3

□

定理 3-2-3（極值）：$\overline{PB}+\overline{PC}$ 有極小值 $\overline{BC}$，極小值點為西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的交點。

證明. 由性質 3-2-2 可證明。

□

三、 任意西瓦線上的點 P 構造的 $\overline{PB} \div \overline{PC}$ 極值

給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，且 P 為 $\overleftrightarrow{AD}$ 上一點，其中 $\overline{AB} > \overline{AC}$。同樣的，我們找一個「幾何圖形」來刻劃西瓦線上 P 點所構成的線段比值 $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$。

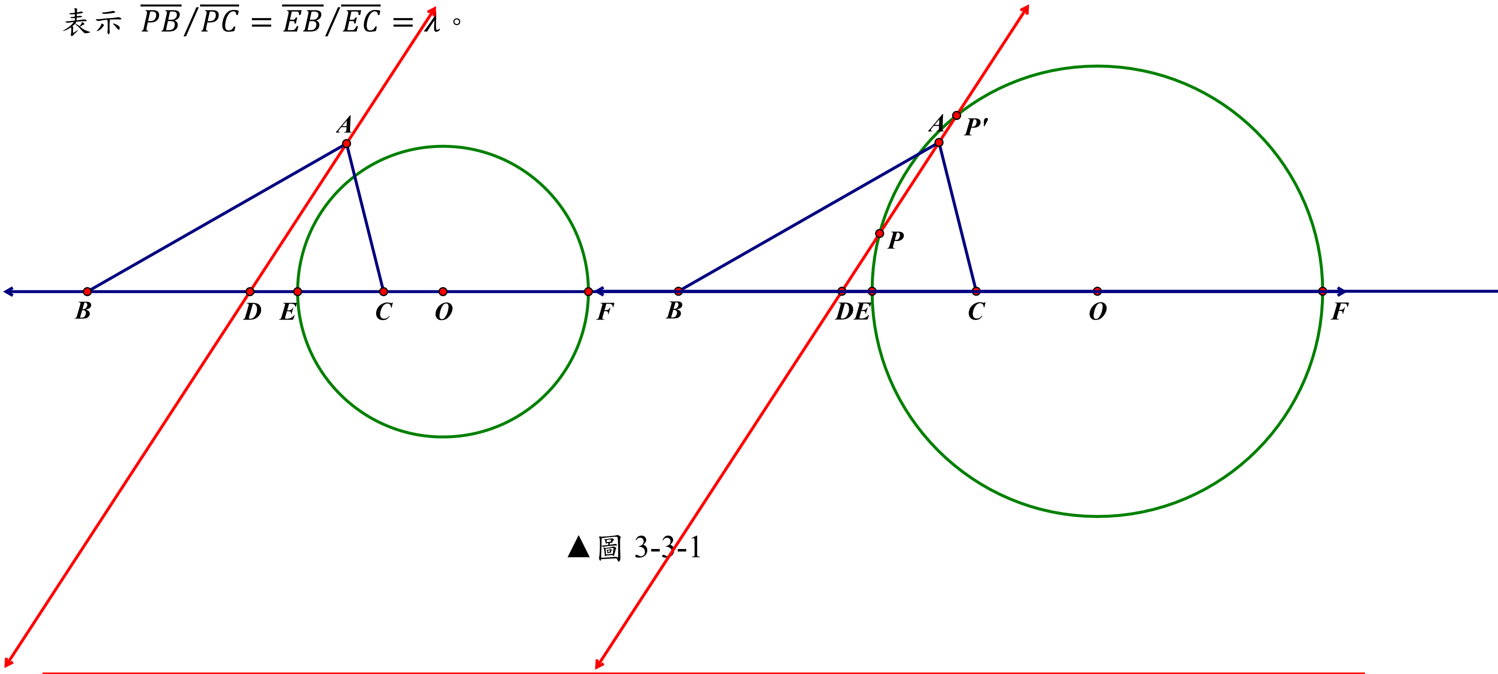
$\overline{PB}/\overline{PC}$ 以及 $\overline{PB} \times \overline{PC}$ 的極值刻劃是本研究較具價值的、難度也是最高的。

考慮使用「阿波羅尼奧斯圓」作為工具進行 $\overline{PB}/\overline{PC}$ 的刻劃。因為平面上給定兩相異定點 A、B，平面上所有滿足 $\overline{PA}/\overline{PB} = \lambda > 0$ 的點所形成的圖形為阿波羅尼奧斯圓。

【構造工具】

如圖 3-3-1，在邊 $\overline{BC}$ 上取一點 E，令 $\overline{EB}/\overline{EC} = \lambda$，作 B、C 點的阿波羅尼奧斯圓，其中比值為 λ，也就是在 $\overleftrightarrow{BC}$ 取一點 F，滿足 $\overline{FB}/\overline{FC} = \lambda$，再作 $\overline{EF}$ 的直徑圓 O。

E 點是動點，當 $\overleftrightarrow{AD}$ 跟圓 O 不相交時，表示 $\overleftrightarrow{AD}$ 上沒有任何一點到 B 點距離與到 C 點的距離比值等於 $\overline{EB}/\overline{EC} = \lambda$。當 $\overleftrightarrow{AD}$ 跟圓 O 相交於 P 點（交於一點或交於兩點）時，表示 $\overline{PB}/\overline{PC} = \overline{EB}/\overline{EC} = \lambda$。



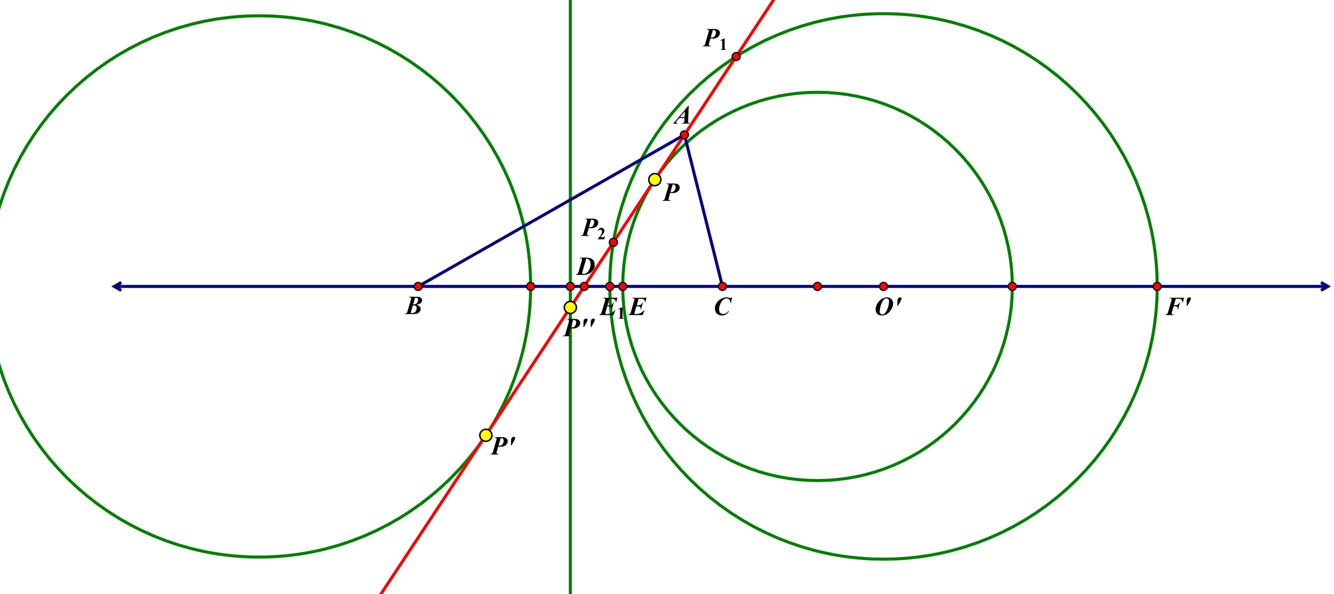
▲圖 3-3-1

引理 3-3-1：若圓 O 為 B、C 點為定點且比值 λ，構造的阿波羅尼奧斯圓，則當 $\lambda > 1$ 時，圓 O 的半徑長度為 $\frac{\lambda}{\lambda^2-1} \times \overline{BC}$；$\lambda < 1$ 時，圓 O 的半徑長度為 $\frac{\lambda}{1-\lambda^2} \times \overline{BC}$。

引理 3-3-2：相同兩定點、不同 λ 構造的阿波羅尼奧斯圓彼此不相交。

引理 3-3-3：令 $D(0,0)$、$A(1,0)$、$B(x_B,y_B)$、$C(x_C,y_C)$ 且有向線段比 $x=\frac{\overline{DP}}{\overline{DA}}$，則可得動點 $P(x,0)$。刻劃函數 $F(x)=\overline{PB}/\overline{PC}=\sqrt{(x-x_B)^2+{y_B}^2}/\sqrt{(x-x_C)^2+{y_C}^2}$ 的遞增減性。

證明. 如圖 3-3-2，依據引理 3-3-2 的阿波羅尼奧斯圓族的不相交性質，當圓與 $\overleftrightarrow{AD}$ 相切於 P 點時，令 $\overline{PB}/\overline{PC}=\overline{EB}/\overline{EC}=\lambda>1$，考慮 E 點往左移動變為 E_1 點，可得 $\overline{P_1B}/\overline{P_1C}=\overline{P_2B}/\overline{P_2C}=\overline{E_1B}/\overline{E_1C}<\overline{EB}/\overline{EC}=\lambda$ 變小，則阿波羅尼奧斯圓變大且與圓相割兩點，可得 $\frac{\overline{P_1B}}{\overline{P_1C}}=\frac{\overline{P_2B}}{\overline{P_2C}}<\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ 嚴格遞減，此時點 P_1 與點 P_2 會沿 $\overleftrightarrow{AD}$ 往兩側遠離 P 點。當阿波羅尼奧斯圓退化為 $\overline{BC}$ 的中垂線時，交於 $\overleftrightarrow{AD}$ 於 P'' 點，此時 $\overline{P''B}/\overline{P''C}=1$。同理，利用對稱性也可以刻劃 $\lambda<1$ 的情形（即阿波羅尼奧斯圓在 $\overleftrightarrow{AD}$ 的左側）。



▲圖 3-3-2

如圖 3-3-3，令函數 $F(x)=\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$，其中 $x=\frac{\overline{DP}}{\overline{DA}}$，可以看出

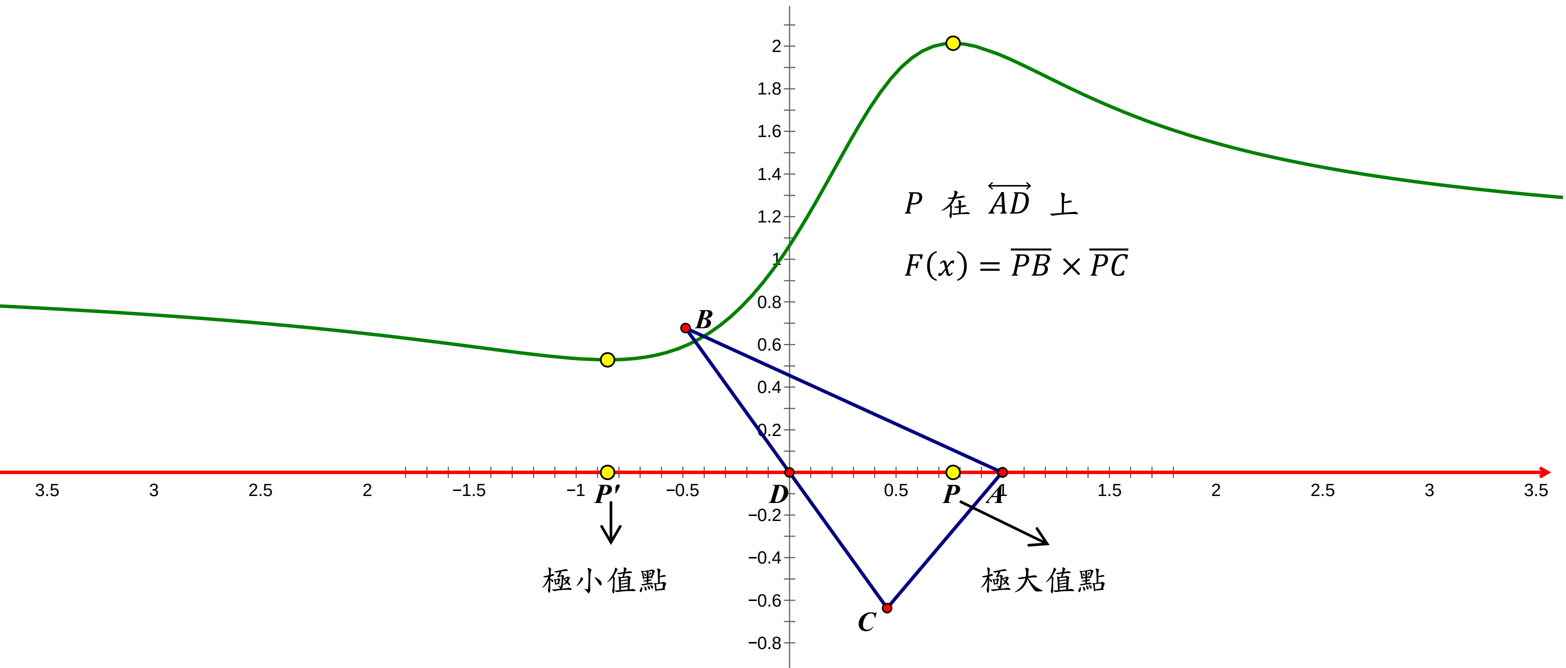
(1) $x\to-\infty$，$F(x)\to 1$

(2) $x\in(-\infty,\ P']$，$F(x)$ 是嚴格遞減

(3) $x\in[P',\ P]$，$F(x)$ 是嚴格遞增

(4) $x\in[P,+\infty)$，$F(x)$ 是嚴格遞減

(5) $x\to+\infty$，$F(x)\to 1$



▲圖 3-3-3

□

接著，我們找出任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上 P 點，使得 $\overline{PB}/\overline{PC}$ 有極大值、極小值的兩個點，並且想知道這個極值的確切數值。

給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，$\overline{AB} > \overline{AC}$、點 E 在 $\overline{BC}$ 上。令 $\overline{EB}/\overline{EC} = \lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$、 $\overline{DB}/\overline{DC} = t$、$\angle ADC = \theta$。

定理 3-3-4（極值）：$\overline{PB}/\overline{PC}$ 有極大值 $\frac{t+1+\sqrt{(t+1)^2-4t\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$、極小值 $\frac{t+1-\sqrt{(t+1)^2-4t\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$

證明.

如圖 3-3-4，因為 $\overline{EB}/\overline{EC} = \overline{FB}/\overline{FC} = \lambda$，所以不失一般性，令 $\overline{BC} = \lambda + 1$。依據引理 3-3-1，阿波羅尼奧斯圓 O 的半徑為 $\frac{\lambda}{\lambda-1}$。考慮阿波羅尼奧斯圓 O 與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相切於 P 點

1. E 點在 D 點右側時

可得 $\overline{DE} = \overline{DC} - \overline{EC} = \frac{1}{t+1} \times (\lambda + 1) - 1 = \frac{\lambda - t}{t+1}$、$\overline{OD} = \frac{\lambda - t}{t+1} + \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{\lambda^2 + t}{(t+1)(\lambda-1)}$，所以

$$\sin\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OD}} = \frac{\lambda(t+1)}{\lambda^2 + t}$$

化簡後

$$\lambda = \frac{(t+1) \pm \sqrt{(t+1)^2 - 4t\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$$

2. E' 點在 D 點左側時

可得 $\overline{DE'}=\overline{DB}-\overline{E'B}=\frac{t}{t+1}\times(\lambda+1)-\lambda=\frac{t-\lambda}{t+1}$、$\overline{O'D}=\frac{t-\lambda}{t+1}+\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{\lambda^2+t}{(t+1)(1-\lambda)}$，所以

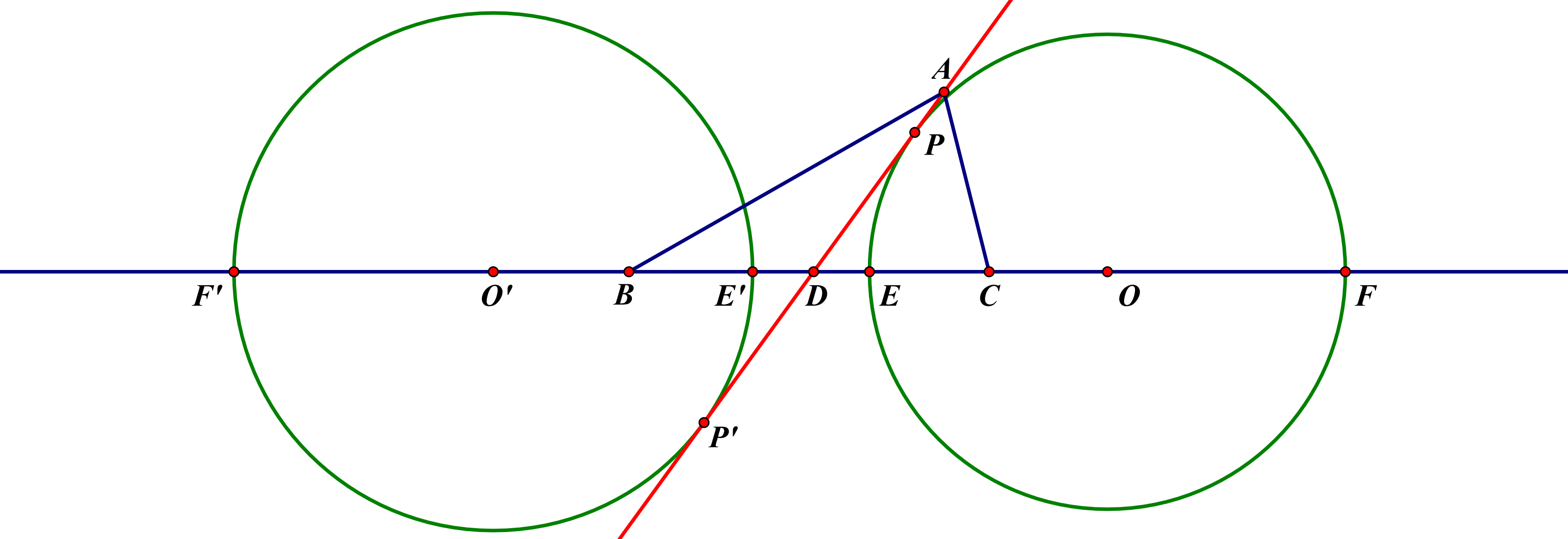
$$\sin\theta=\frac{\overline{O'P'}}{\overline{O'D}}=\frac{\lambda(t+1)}{\lambda^2+t}$$

化簡後

$$\lambda=\frac{t+1\pm\sqrt{(t+1)^2-4t\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$$

所以，$\overline{PB}/\overline{PC}=\overline{EB}/\overline{EC}$ 有兩個極值點，其值為 $\frac{t+1\pm\sqrt{(t+1)^2-4t\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$

也就是 $\frac{t+1-\sqrt{(t+1)^2-4t\sin^2\theta}}{2\sin\theta}\leq\overline{PB}/\overline{PC}\leq\frac{t+1+\sqrt{(t+1)^2-4t\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$



▲圖 3-3-4

□

接著，我們討論給定 ΔABC 及三條特殊西瓦線，高 $\overleftrightarrow{AH_A}$、中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$、角平分線 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 上的動點 P，探討 $\overline{PB}/\overline{PC}$ 的極值情形。

推論 3-3-5（高）：若 P 在 ΔABC 的高 $\overleftrightarrow{AH_A}$ 上，則 $1\leq\overline{PB}/\overline{PC}\leq\overline{H_AB}/\overline{H_AC}$。極大值的點為垂足 H_A。

證明. 因為 $\overleftrightarrow{AH_A}$ 是 ΔABC 的高，所以 $\sin\angle ADC=1$，代回性質 3-3-4 的式子可得

$$\frac{(t+1)-\sqrt{(t+1)^2-4t}}{2}\leq\overline{PB}/\overline{PC}\leq\frac{(t+1)+\sqrt{(t+1)^2-4t}}{2}$$

又 $\overline{AB}>\overline{AC}$，所以 $t>1$，化簡上式得到 $1\leq\overline{PB}/\overline{PC}\leq\overline{H_AB}/\overline{H_AC}$，所以極大值的點為垂足

H_A。當 P 點趨近無群遠處，$\overline{PB}/\overline{PC}$ 趨近 1。

□

推論 3-3-6（中線）：若 P 在 ΔABC 的中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 上，則 $\tan\frac{\theta}{2} \le \overline{PB}/\overline{PC} \le \cot\frac{\theta}{2}$。

證明. 因為 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 是 ΔABC 的中線，令 $t = 1$ 代回性質 3-3-4 的式子可得

$$\frac{1-\sqrt{1-2\sin^2\theta}}{\sin\theta} \le \overline{PB}/\overline{PC} \le \frac{1+\sqrt{1-2\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$$

化簡可得

$$\tan\frac{\theta}{2} \le \overline{PB}/\overline{PC} \le \cot\frac{\theta}{2}$$

□

從推論 3-3-6 可知道中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 上的兩個極值點不是 ΔABC 的五心，但是這兩個極值點其實是某一種的特殊的點，我們發現它們是阿波羅尼奧斯圓與 $\overline{BC}$ 的直徑圓交點。

性質 3-3-7：若 P 在 ΔABC 的中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 上，滿足 $\overline{PB}/\overline{PC}$ 有極大值或極小值時（即中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 與阿波羅尼奧斯圓 O 相切時），則 P 點落在 $\overline{BC}$ 的直徑圓上。

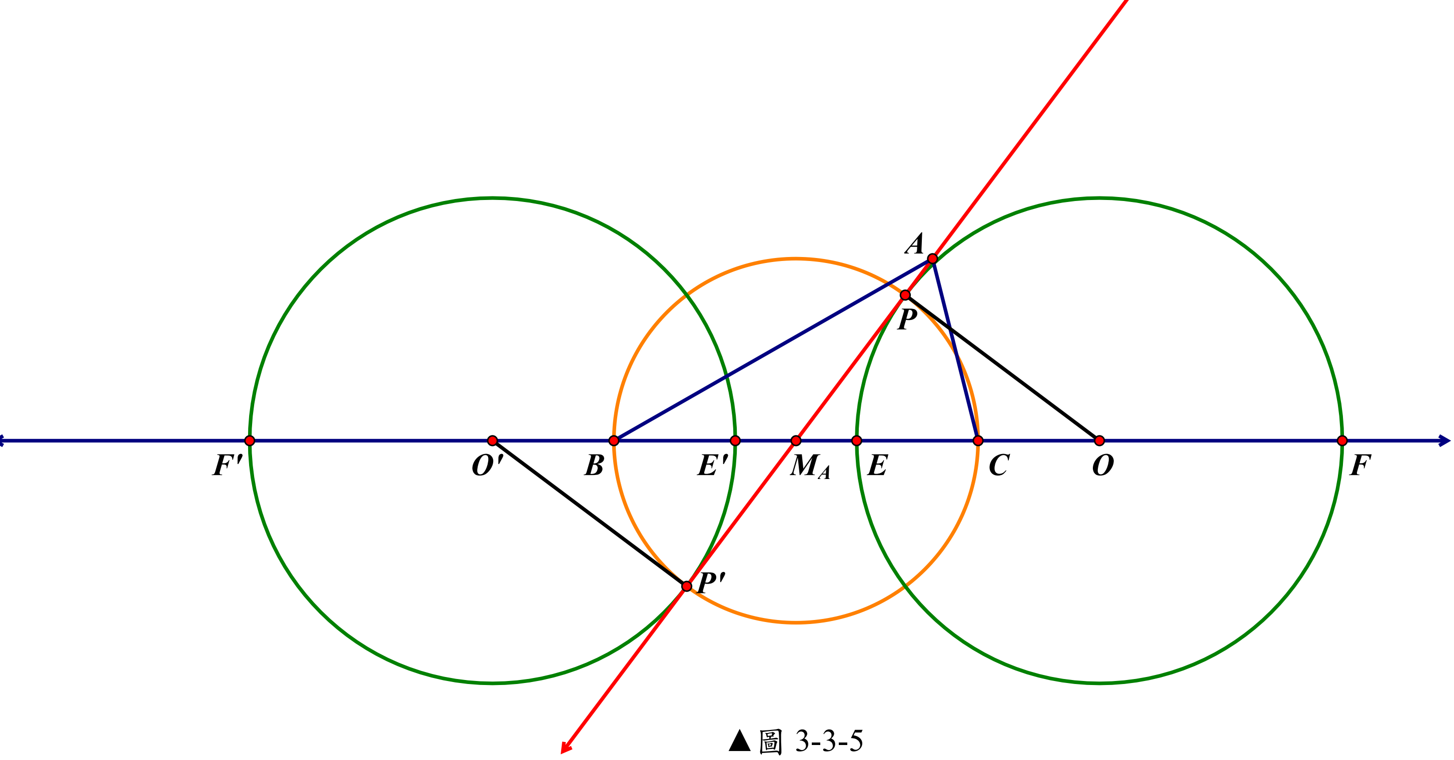
證明.

如圖 3-3-5，利用同一法，令以兩定點 B 與 C 構造的阿波羅尼奧斯圓 O 與圓 O' 與 $\overline{BC}$ 的直徑圓的交點為 P。我們只需要證明 $\angle OPM_A = 90°$（阿波羅尼奧斯圓 O 與中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 相切）就等價性質 3-3-7 的命題。

不失一般性，令 $\overline{BC} = \lambda + 1$ 且 $\overline{EB}/\overline{EC} = \overline{FB}/\overline{FC} = \lambda$，因此阿波羅尼奧斯圓 O 的半徑為 $\frac{\lambda}{\lambda-1}$，即 $\overline{OP} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$。$\overline{BC}$ 的直徑圓的半徑為 $\frac{\lambda+1}{2}$。再因 $\overline{OM_A} = \overline{OE} + \overline{EM_A} = \frac{\lambda}{\lambda-1} + \left(\frac{\lambda+1}{2} - 1\right) = \frac{\lambda^2+1}{2(\lambda-1)}$，考慮

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2 = \frac{4\lambda^2 + (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{4(\lambda-1)^2} = \frac{(\lambda^2+1)^2}{4(\lambda-1)^2}$$

所以 $\overline{OP}^2 + \overline{PM_A}^2 = \overline{OM_A}^2$，$\angle OPM_A = 90°$，同理 $\angle O'P'M_A = 90°$。



▲圖 3-3-5

□

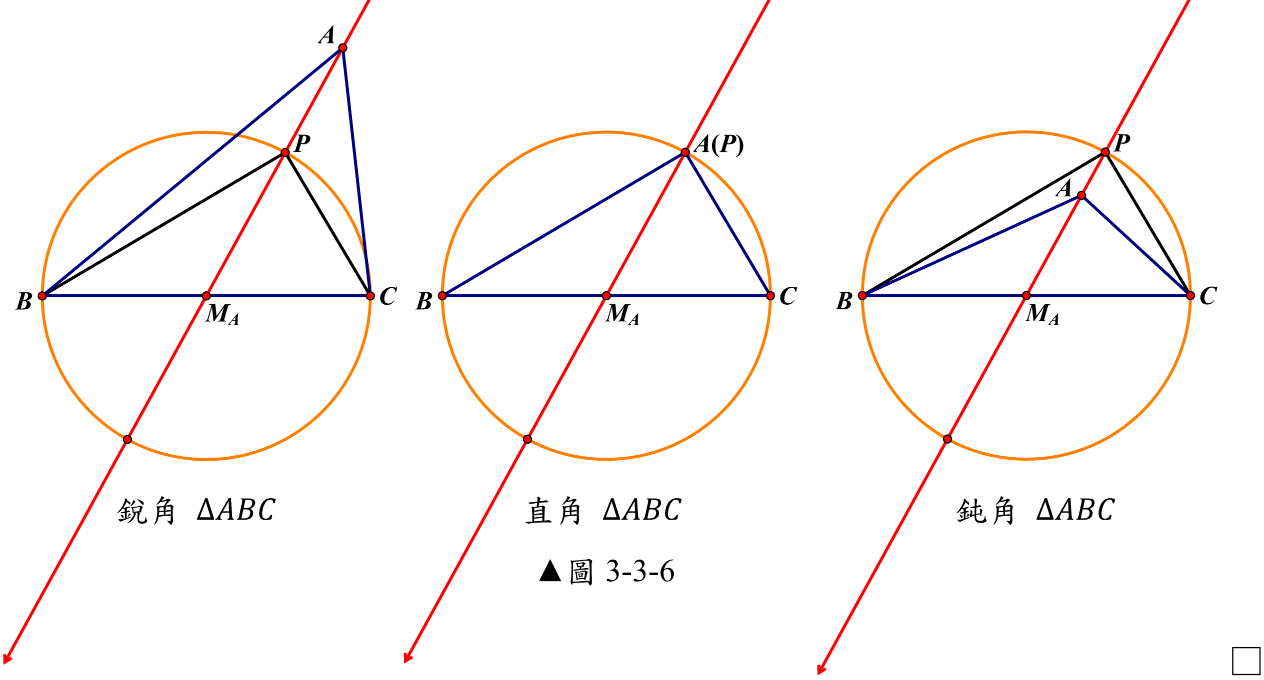
推論 3-3-8：P 在 ΔABC 的中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 上，刻劃滿足 $\overline{PB}/\overline{PC}$ 有極大值的 P 點位置。

(1) 若 $\angle A = 90°$，則極大值的極值 P 點為頂點 A 點。

(2) 若 $\angle A > 90°$，則極大值的極值 P 點在 ΔABC 的外部。

(3) 若 $\angle A < 90°$，則極大值的極值 P 點在 ΔABC 的內部。

證明. 依據性質 3-3-7 的結果，考慮 $\overline{BC}$ 的直徑圓與中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 的交點 P 點位置，如圖 3-3-6 再利用圓周角、圓內角、圓外角的計算定義可證明 P 點在 ΔABC 的外部、內部或頂點。



銳角 ΔABC　　直角 ΔABC　　鈍角 ΔABC

▲圖 3-3-6

□

推論 3-3-9（角平分線）：若 P 在 ΔABC 的內角平分線 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 上，則

$\sqrt{\frac{c(a+b-c)}{b(a-b+c)}} \le \overline{PB}/\overline{PC} \le \sqrt{\frac{c(a-b+c)}{b(a+b-c)}}$。極大值的點為內心 I，極小值點為旁心 I_A。

證明. 如圖 3-3-7，因為 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 是內角平分線，所以 $\frac{\overline{L_AB}}{\overline{L_AC}} = \frac{c}{b}$，再得內角平分線 $\overline{AL_A} =$

$\sqrt{\frac{bc(-a+b+c)(a+b+c)}{(c+b)^2}}$、$\sin\theta = \sqrt{\frac{(c+b)^2(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2bc}}$

依據性質 3-3-4，可得 $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \lambda = \frac{\frac{c}{b}+1+\sqrt{(\frac{c}{b}+1)^2-\frac{4c}{b}\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$，將 $\sin\theta = \sqrt{\frac{(c+b)^2(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2bc}}$ 代入

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \lambda = \sqrt{\frac{c(a-b+c)}{b(a+b-c)}}$$

作外角平分線 $\overline{AK}$，由長度公式可得 $\overline{AK} = \sqrt{\frac{a^2bc}{(c-b)^2} - bc} = \sqrt{\frac{bc(a-b+c)(a+b-c)}{(c-b)^2}}$

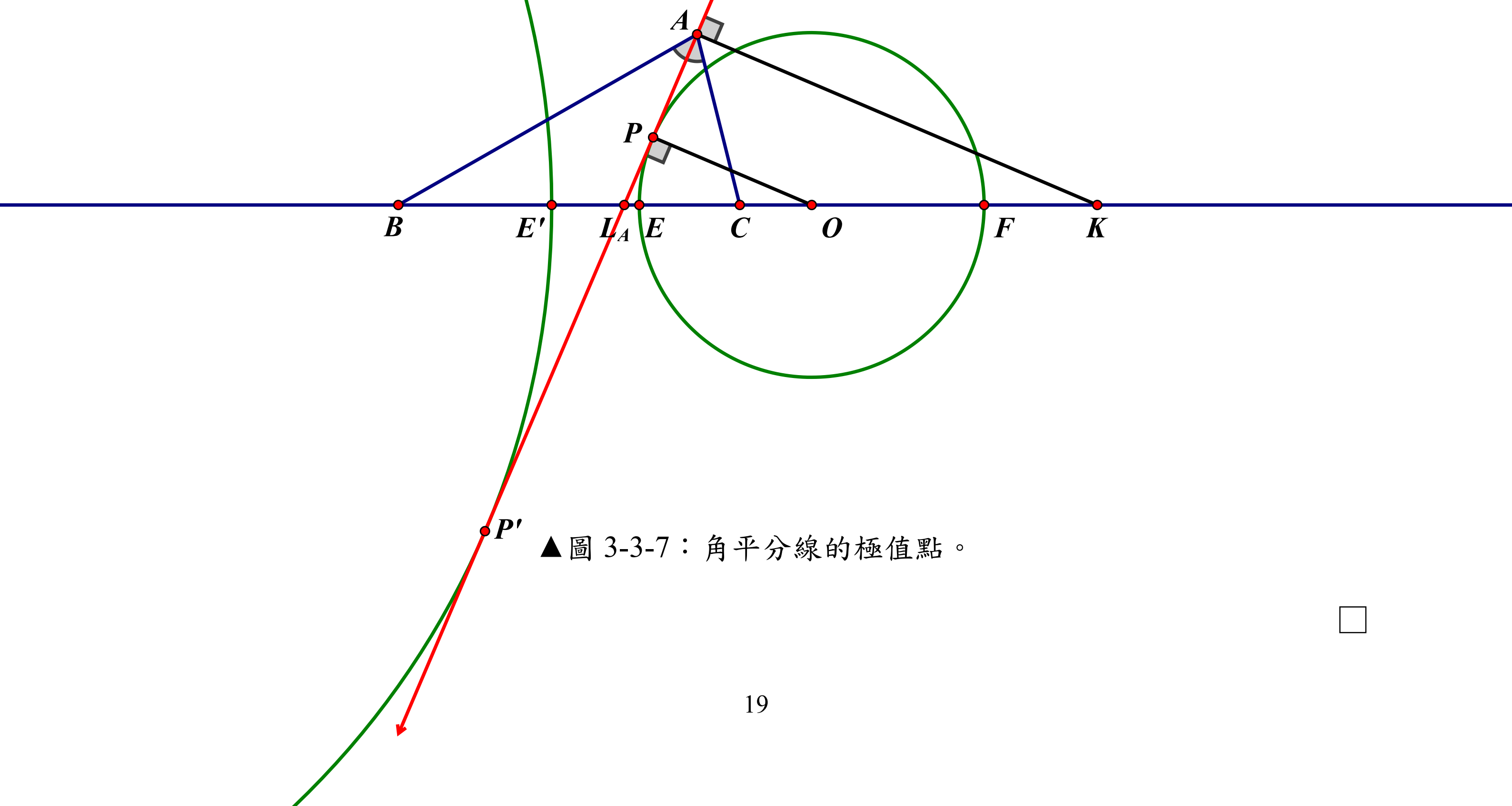
由引理 3-3-1 可知 $\overline{OP} = \frac{\sqrt{\frac{c(a-b+c)}{b(a+b-c)}}}{\frac{c(a-b+c)}{b(a+b-c)}-1} \times a = \sqrt{\frac{a^2bc(a-b+c)(a+b-c)}{(c-b)^2(a+b+c)^2}}$

因為 $\overline{AK} \parallel \overline{OP}$，所以 $\overline{AP}:\overline{PL_A} = (\overline{AK} - \overline{OP}):\overline{OP} = \left(\frac{\overline{AK}}{\overline{OP}} - 1\right):1$

化簡可得 $\frac{\overline{AK}}{\overline{OP}} = \frac{a+b+c}{a}$，所以 $\overline{AP}:\overline{PL_A} = (b+c):a$。因此，$P$ 點為 ΔABC 的內心

同理可得，$\frac{\overline{E'B}}{\overline{E'C}} = \sqrt{\frac{c(a+b-c)}{b(a-b+c)}}$、$\overline{O'P'} = \sqrt{\frac{a^2bc(a-b+c)(a+b-c)}{(c-b)^2(-a+b+c)^2}}$

所以 $\overline{AP'}:\overline{L_AP'} = \left(\frac{\overline{AK}}{\overline{O'P'}} + 1\right):1 = (b+c):a$。因此，$P'$ 點為 ΔABC 的旁心

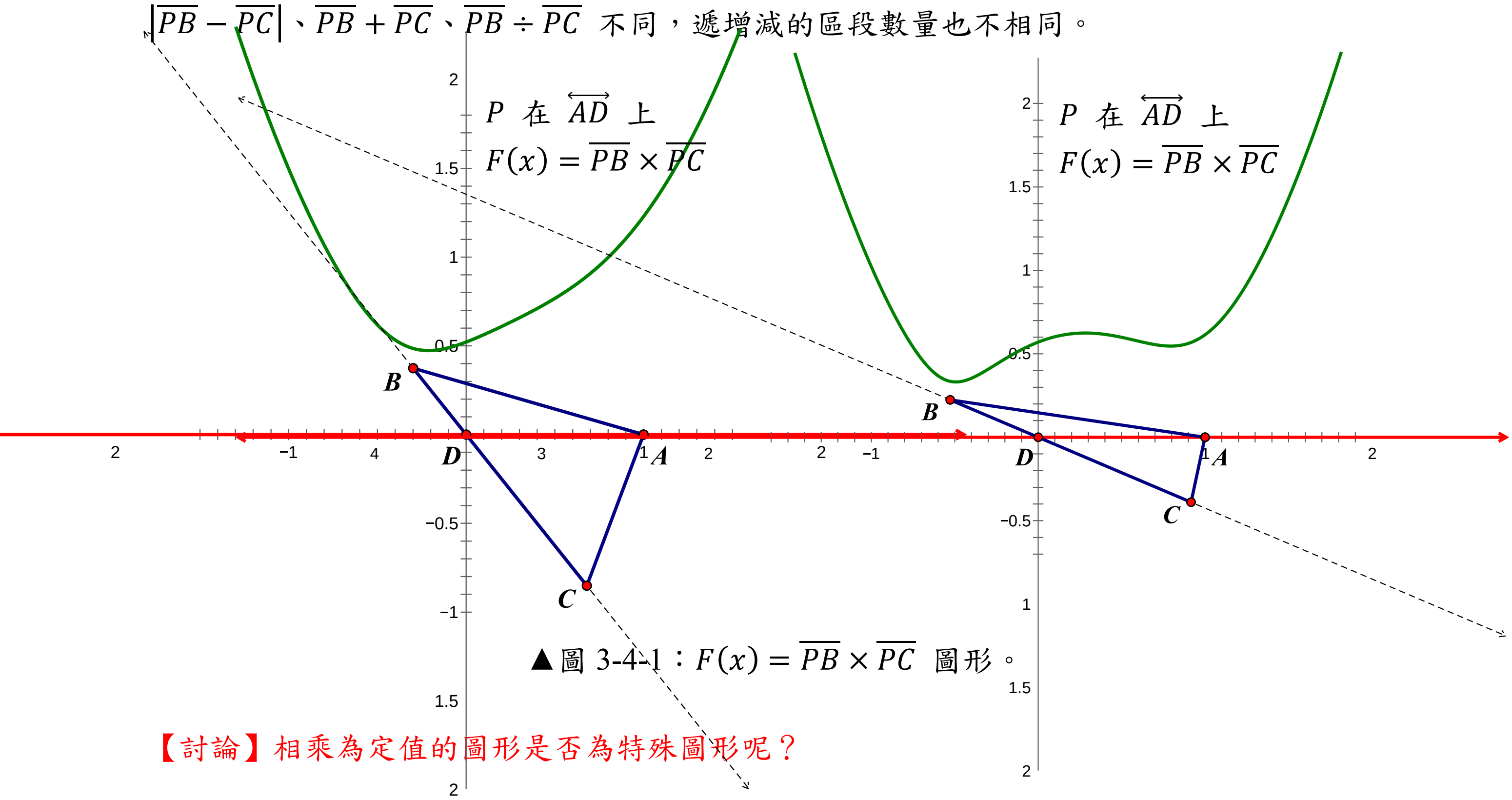


▲圖 3-3-7：角平分線的極值點。

□

四、 任意西瓦線上的點 P 構造的 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 極值

在 ΔABC 中，令 $D(0,0)$、$A(1,0)$、$B(x_B,y_B)$、$C(x_C,y_C)$ 且有向線段比 $x=\frac{\overline{DP}}{\overline{DA}}$，則可得動點 $P(x,0)$。再令函數 $F(x)=\overline{PB}\times\overline{PC}=\sqrt{(x-x_B)^2+{y_B}^2}\times\sqrt{(x-x_C)^2+{y_C}^2}$，利用幾何軟體繪製 $F(x)$ 圖形，如圖 3-4-1，發現西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上 P 點所構造的值 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的函數圖形，會隨著 D 點在 $\overline{BC}$ 的位置而改變，也會因為 ΔABC 的邊長而改變，這一點與前面的 $\left|\overline{PB}-\overline{PC}\right|$、$\overline{PB}+\overline{PC}$、$\overline{PB}\div\overline{PC}$ 不同，遞增減的區段數量也不相同。

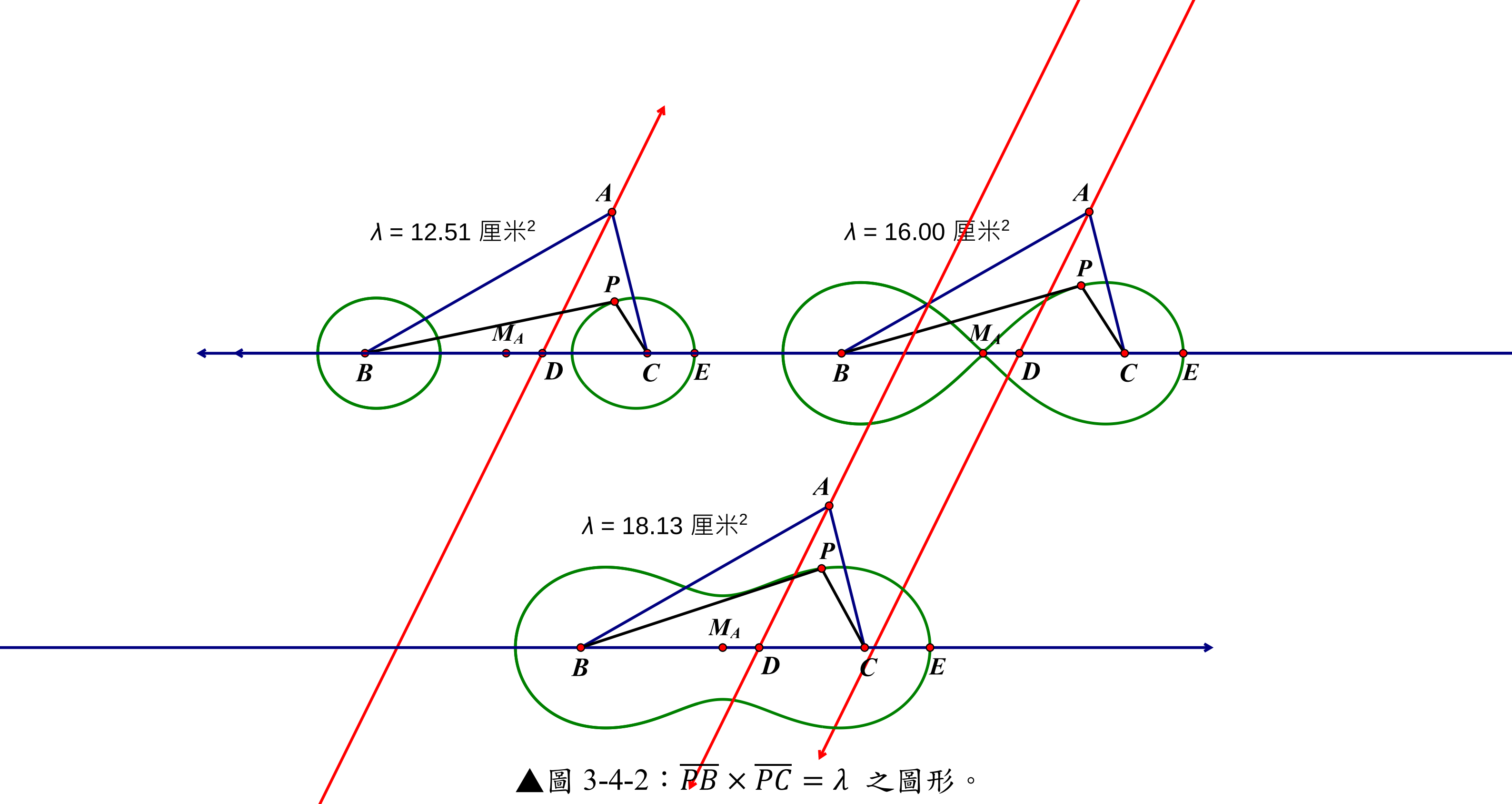


▲圖 3-4-1：$F(x)=\overline{PB}\times\overline{PC}$ 圖形。

【討論】相乘為定值的圖形是否為特殊圖形呢？

我們是不是能夠仿照前面的作法，利用一個「幾何圖形」來刻劃西瓦線上 P 點所構成的線段乘積 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 呢？

利用幾何軟體繪製圖形，平面上給定兩點 B 與 C，以及數值 $\lambda>0$，所有滿足 $\overline{PB}\times\overline{PC}=\lambda$ 的點 P 所形成的圖形。如圖 3-4-2 中綠色曲線，依據定義可以知道此圖形是對稱於中點 M_A 的點對稱圖形，但它不是常見的幾何圖形，我們對於此圖形的幾何性質也不了解，若要用解交點的方式，就會要處理四次方程次的解，非常複雜，因此我們沒有辦法討論出綠色曲線與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相切時的切點位置。



▲圖 3-4-2：$\overline{PB}\times\overline{PC}=\lambda$ 之圖形。

注意到，顯然 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 沒有極大值（一個確定值），所以只需要討論極小值。以下我們用兩種方法來討論，第一個方法是使用解析微分、第二個方法二是我們最近花了三個多月才討論出來的幾何方法「等腰梯形相似分割法」。

【方法一】微分

我們參考 Arie Bialostocki 與 Rob Ely [3] 的坐標假設，但是他們的論文中只有一種假設（$\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線之交點在三角形內部），其實應該要分兩種情形討論，因為 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線交點 O 可能在三角形外部或內部或 $\overline{BC}$ 邊上，但是兩位作者 Arie Bialostocki 與 Rob Ely 只有寫出交點 O 在三角形內部之情形。例如：$\overleftrightarrow{AD}$ 是角平分線時，$\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 中垂線的交點 O 必在 ΔABC 外部（O 點在 ΔABC 的外接圓上），於是需要分為圖 3-4-3(a) 與圖 3-4-3(b) 的兩種情形。

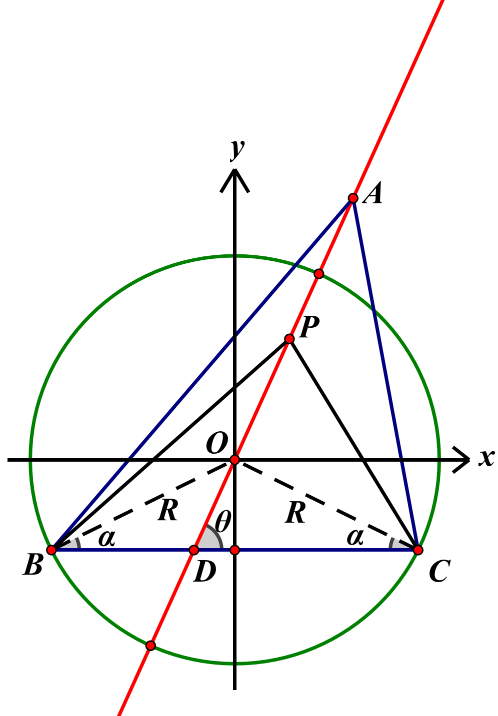
令 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線之交點為原點 O，$\angle ADC=\theta$、$\angle OBC=\angle OCB=\alpha$、$\overline{OC}=\overline{OB}=R$，則在圖 3-4-3$(a)$中 $B=R(-\cos\alpha,-\sin\alpha)$、$C=R(\cos\alpha,-\sin\alpha)$、$P=k(\cos\theta,\sin\theta)$ 或在圖 3-4-3(b)中 $B=R(-\cos\alpha,\sin\alpha)$、$C=R(\cos\alpha,\sin\alpha)$、$P=k(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 k 為實數（$k>0$ 表示 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 同向。$k<0$，則為異向），利用兩點距離公式可得

圖 3-4-3(a) 為

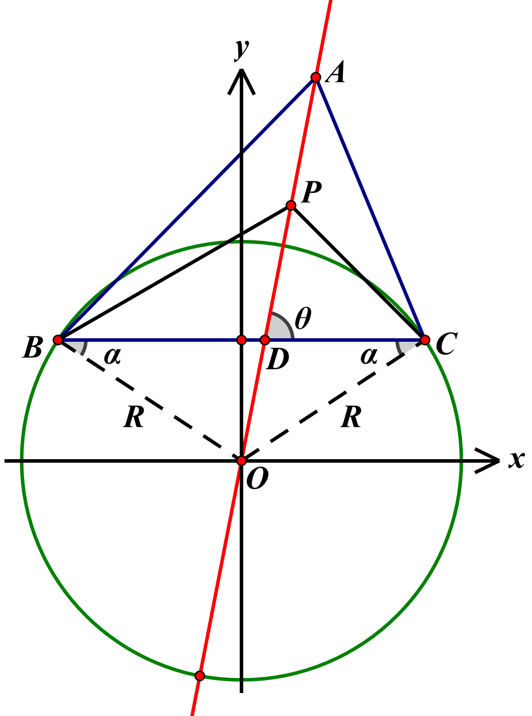
$$F(k)=\overline{BP}^2\times\overline{CP}^2=(k^2+2Rk\cos(\theta-\alpha)+R^2)(k^2-2Rk\cos(\theta+\alpha)+R^2)$$

圖 3-4-3(b) 為

$$G(k)=\overline{BP}^2\times\overline{CP}^2=(k^2+2Rk\cos(\theta+\alpha)+R^2)(k^2-2Rk\cos(\theta-\alpha)+R^2)$$



▲圖 3-4-3(a)



▲圖 3-4-3(b)

再利用 WolframAlpha 計算網站將 $F(k)$ 與 $G(k)$ 進行微分可得 $F'(k)$ 與 $G'(k)$

$$F'(k)=4k^3+(12R\sin\alpha\,\sin\theta)k^2-4R^2(\cos2\theta+\cos2\alpha-1)k+4R^3\sin\alpha\,\sin\theta$$

$$G'(k)=4k^3-(12R\sin\alpha\,\sin\theta)k^2-4R^2(\cos2\theta+\cos2\alpha-1)k-4R^3\sin\alpha\,\sin\theta$$

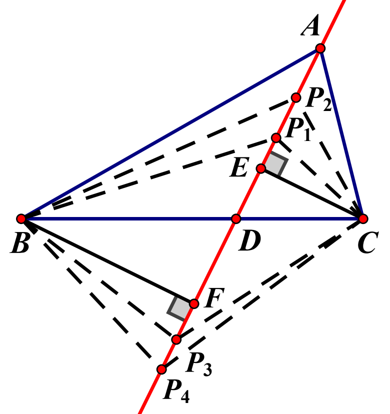
我們可以利用 WolframAlpha 計算網站去解 $F'(k)=0$ 或 $G'(k)=0$，會得到三個根，但是這只代表切線斜率等於零的情況，還是無法直接確認哪一個是最小值點，又在必須將這三個根分帶回 $F(k)$ 或 $G(k)$ 才能檢驗哪個是極小值點。

我們嘗試繼續找出純幾何的方法，從一百零七年三月縣市科展比賽後開始嘗試突破，直到一百零七年六月才找出以下的方法，我們利用「等腰梯形相似分割」與「畢氏定理」就可以對極小值點進行實質上範圍刻劃，這是我們研究上很大的突破與成果。

【方法二】等腰梯形相似分割法

給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，$\overline{AB}>\overline{AC}$，如圖 3-4-4，分別作 $\overline{CE}\perp\overleftrightarrow{AD}$、$\overline{BF}\perp\overleftrightarrow{AD}$，在 $\overleftrightarrow{AD}$ 取兩相異點 P_1 與 P_2，其中 $\overrightarrow{DP_1}$ 與 $\overrightarrow{DP_2}$ 同向且 $|\overrightarrow{DP_1}|<|\overrightarrow{DP_2}|$，依據畢氏定理可得 $\overline{BP_1}<\overline{BP_2}$ 且 $\overline{CP_1}<\overline{CP_2}$，所以 $\overline{BP_1}\times\overline{CP_1}<\overline{BP_2}\times\overline{CP_2}$。

同理可得出 $\overline{BP_3}\times\overline{CP_3}<\overline{BP_4}\times\overline{CP_4}$。因此，我們證明在西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上滿足 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 有極小值的 P 點必位於線段 $\overline{EF}$ 上，可得出引理 3-4-1。

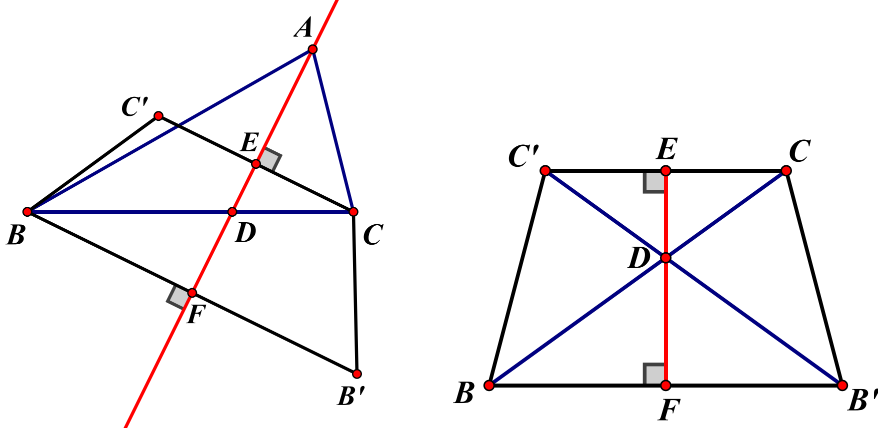


▲圖 3-4-4

引理 3-4-1：西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上滿足 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 有極小值的 P 點位於 $\overline{EF}$ 上。

我們繼續將「極小值點 P 點」的位置範圍再「縮小」一點。我們利用等腰梯形相似分割法成功證明對於 ΔABC 的西瓦線上的極小值點的範圍在 $\overline{ED}$ 上

考慮以 $\overleftrightarrow{AD}$ 為對稱軸，分別做 B 點與 C 點的對稱點 B' 與 C'，四邊形 $BB'CC'$ 為等腰梯形且 D 點為對角線交點。不失一般性，假設 $\overline{BF}>\overline{CE}$（即 $\overline{BD}>\overline{DC}$ 或 $\overline{BD}>\frac{1}{2}\overline{BC}$），以下我們證明 $\overline{EF}$ 上滿足 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 有極小值的 P 點位置位於線段 $\overline{DE}$ 上（若 $\overline{BD}<\frac{1}{2}\overline{BC}$，則 $\overline{EF}$ 上滿足 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 有極小值的 P 點位置位於線段 $\overline{DF}$ 上）。



▲圖 3-4-5

定理 3-4-2（極小值點位置）：對於 ΔABC 的西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上滿足 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 有極小值的 P 點位於 $\overline{DE}$ 上。

證明.

如圖 3-4-6，令 $\overline{BF}=y>\overline{CE}=x$，因為 $\Delta CDE\sim\Delta B'FD$，所以 $\overline{DF}>\overline{DE}$。考慮在線段 $\overline{DE}$ 上任取一點 P，則必可以在線段 $\overline{DF}$ 上取一點 Q，使得 $\Delta CEP\sim\Delta B'FQ$。再令 $\overline{EP}=x\delta$、$\overline{FQ}=y\delta$、$\overline{PQ}=d$

依據畢氏定理可得

$\overline{PB}^2\times\overline{PC}^2-\overline{QB}^2\times\overline{QC}^2$

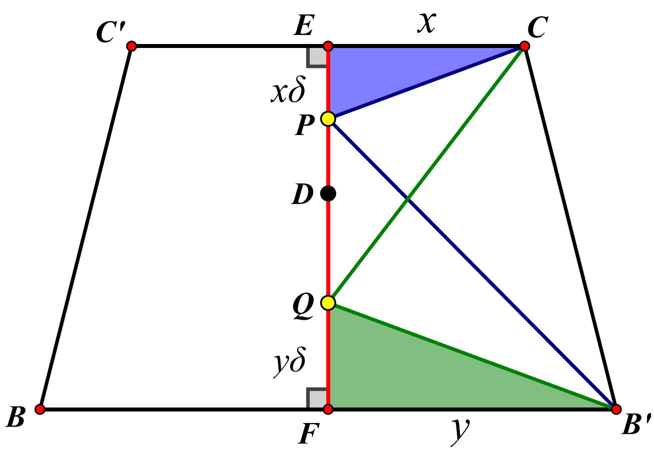
$=\overline{PB'}^2\times\overline{PC}^2-\overline{QB'}^2\times\overline{QC}^2$

$=(y^2+(y\delta+d)^2)(x^2+x^2\delta^2)-(y^2+y^2\delta^2)(x^2+(x\delta+d)^2)$

$=d(\delta^2+1)(x-y)(xd+yd+2\delta xy)$

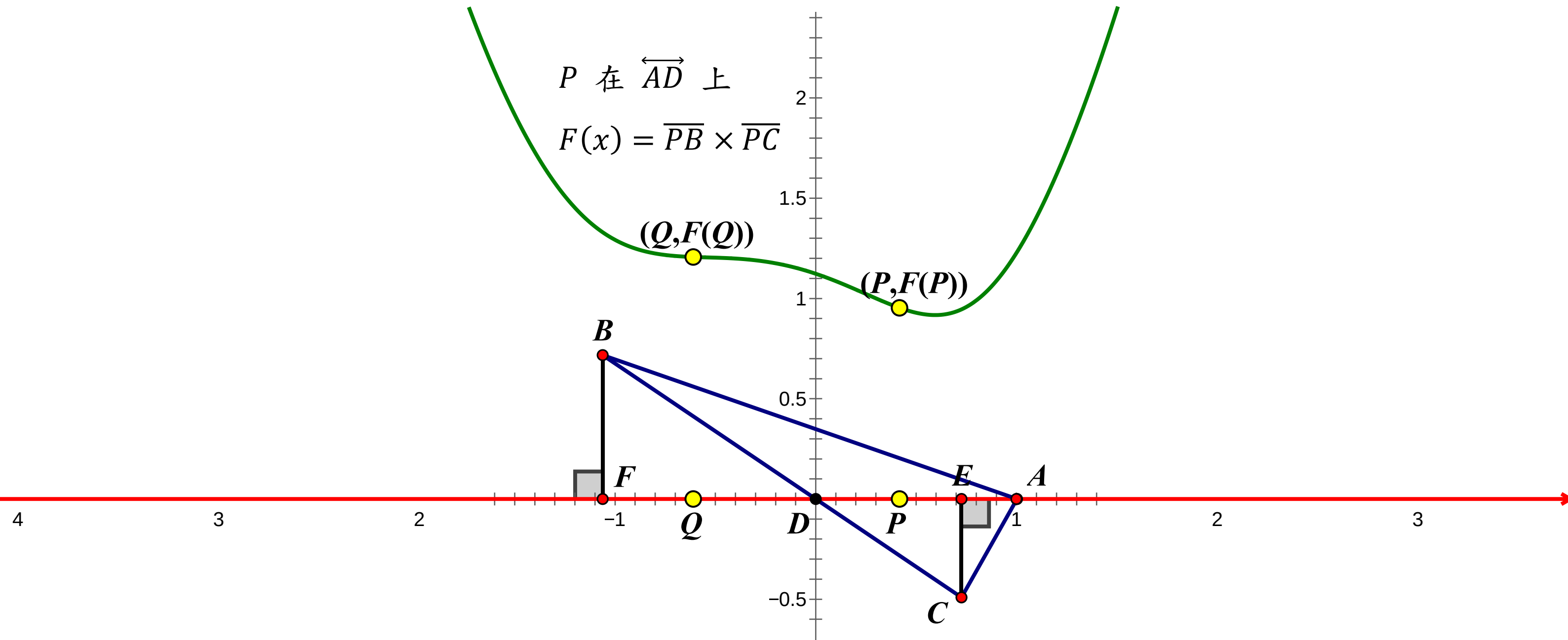
注意到，因為 $x<y$，所以 $d(\delta^2+1)(x-y)(xd+yd+2\delta xy)<0$

因此 $\overline{PB}^2\times\overline{PC}^2<\overline{QB}^2\times\overline{QC}^2$



▲圖 3-4-6：「等腰梯形相似分割」方法

如圖 3-4-7，在線段 $\overline{DE}$ 上任取任意一點 P，都可以在線段 $\overline{DF}$ 上找到對應的唯一一點 Q，使得 $\overline{PB}^2\times\overline{PC}^2<\overline{QB}^2\times\overline{QC}^2$，所以極小值點位於 $\overline{DE}$ 上。換句話說，對於 ΔABC 的西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上滿足 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 有極小值的 P 點位於 $\overline{DE}$ 上。



▲圖 3-4-7：極小值點必在 $\overline{ED}$ 上

□

接著，我們討論給定 ΔABC 及三條特殊西瓦線，高 $\overleftrightarrow{AH_A}$、中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$、角平分線 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 上的動點 P，探討 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的極小值情形。

推論 3-4-3（高）： 若 P 在 ΔABC 的高 $\overleftrightarrow{AH_A}$ 上，則 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的極小值的點為垂足 H_A。

證明. 依據引理 3-4-1 可知極小值的點在 $\overline{EF}$ 上，又因為 $\overleftrightarrow{AH_A}\perp\overline{BC}$，所以點 E、點 F 以及垂足 H_A 三點重合，所以極小值的點即為垂足 H_A。

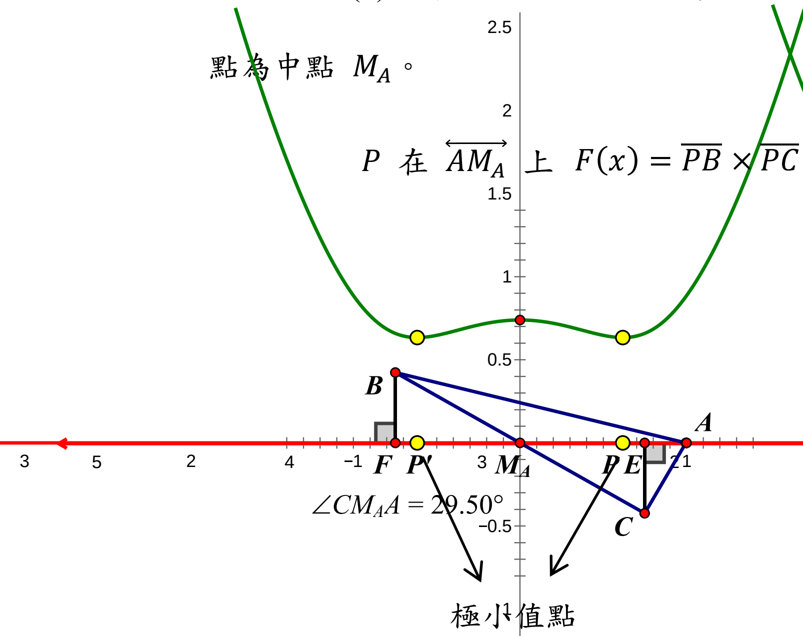
□

推論 3-4-4（中線）： 刻劃 P 在 ΔABC 的中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 上，使得 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 極小值點。

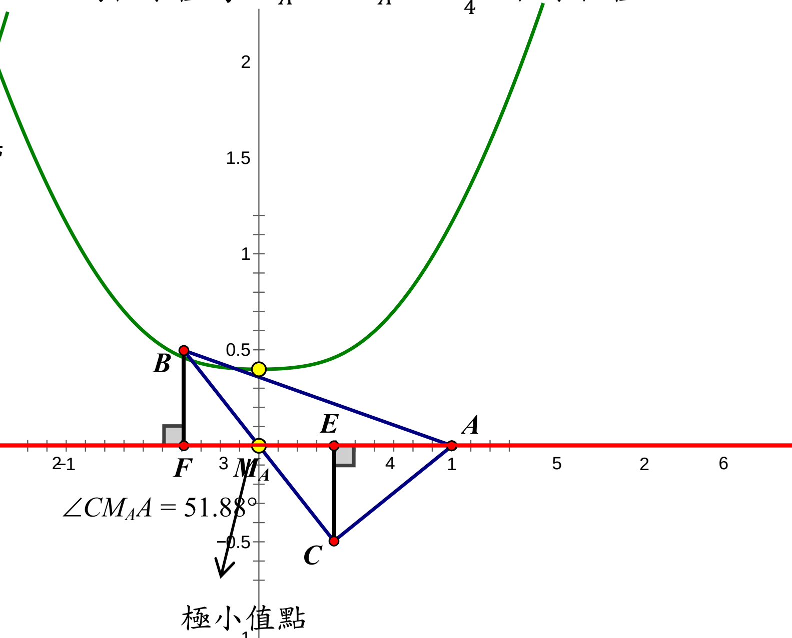
證明. 因為 P 在任意 ΔABC 的中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 上，依據引理 3-4-1 與畢氏定理得知，極小值點有兩點（對稱於中點 M_A）或退化為中點 M_A。我們知道極小值點的數量與位置關係後，再利用函數微分求出確切的極小值。令 $\alpha=0°$ 且 $R=\frac{a}{2}$，代回 $F'(k)=0$ 或 $G'(k)=0$ 可得 $4k^3-4R^2(\cos2\theta)k=0$，解方程式 $k=0$ 或 $\frac{a}{2}\sqrt{\cos2\theta}$ 或 $-\frac{a}{2}\sqrt{\cos2\theta}$，再因為 k 為實數，所以可分為以下兩類：

1. 如圖 3-4-8(a)，當 $0°<\theta<45°$ 時，將 $k=\frac{a}{2}\sqrt{\cos2\theta}$ 或 $-\frac{a}{2}\sqrt{\cos2\theta}$ 帶回 $F(k)$，則 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的極小值為 $\frac{a^2}{4}\times\sin2\theta$，極小極值點為圖中的 P 與 P' 點。

2. 如圖 3-4-8(b)，當 $45° \leq \theta < 90°$ 時，$\overline{PB} \times \overline{PC}$ 的極小值為 $\overline{M_A B} \times \overline{M_A C} = \frac{a^2}{4}$，極小極值點為中點 M_A。



▲圖 3-4-9(a)



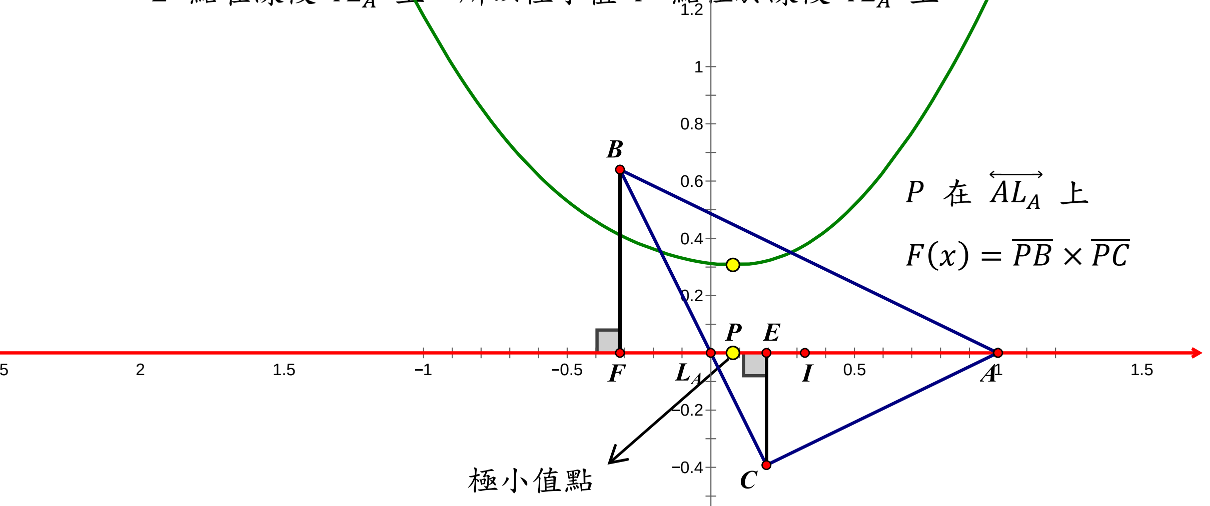
▲圖 3-4-9(b)

□

最後討論角平分線上的極小值的 P 點的幾何性質。

推論 3-4-5(角平分線)：若 P 在銳角 ΔABC 的角平分線 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 上，若 P 點使得 $\overline{PB} \times \overline{PC}$ 有極小值，則 P 點位於內心 I 與角平分線截點 L_A 的線段 $\overline{IL_A}$ 上。

證明. 如圖 3-4-9，依據定理 3-4-2 可知極小值 P 點位於 $\overline{EL_A}$ 上，再考慮 ΔABC 的內心 I 與 E 點的位置關係，依據內心定義可得出 $\angle CIA = 90° + \frac{1}{2}\angle B > 90°$，又因為 $\overline{CE} \perp \overleftrightarrow{AL_A}$，所以 E 點在線段 $\overline{IL_A}$ 上，所以極小值 P 點位於線段 $\overline{IL_A}$ 上。



▲圖 3-4-9

□

肆、 結論

本研究從九十五年第一次國中基測數學試題第十九題的重心（中線）構造的兩條線段長度問題提出討論，並且推廣出一系列的數學定理。本研究的條件是給定平面上 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，且 P 為 $\overleftrightarrow{AD}$ 上一動點，令高 $\overleftrightarrow{AH_A}\cap\overline{BC}=H_A$、中線 $\overleftrightarrow{AM_A}\cap\overline{BC}=M_A$、角平分線 $\overleftrightarrow{AL_A}\cap\overline{BC}=L_A$、$\overline{BE}\perp\overleftrightarrow{AD}=E$、$\overline{CF}\perp\overleftrightarrow{AD}=F$，其中 $\overline{AB}>\overline{AC}$、$\angle ADC=\theta$、$\overline{M_AD}/\overline{M_AC}=s$、$\overline{DB}/\overline{DC}=t$。

我們依序討論任意西瓦線上的 P 點構造的四種函數 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$、$\overline{PB}+\overline{PC}$、$\overline{PB}\div\overline{PC}$、$\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的數值變化，並找出其極大值與極小值。微積分是典型處理極值的方法，但是微分並無法直接知道極大值點與極小值點在原圖形上的幾何意義，因此本研究採用「幾何圖形」為工具，分別以「雙曲線、橢圓、阿波羅尼奧斯圓、等腰梯形」等圖形來刻劃四種函數的極大值、極小值，尤其分別利用「阿波羅尼奧斯圓」、「等腰梯形相似分割」處理相除函數與相乘函數是本研究的創意與突破。

最後，我們將一般化的結果推論到特殊西瓦線（直線）高 $\overleftrightarrow{AH_A}$、中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$、角平分線 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 上，發現這些極值點都是具有幾何意義的特定點。

本研究完整解決三角形西瓦線上的點到兩頂點的距離極值問題，如表 1 與表 2。

表 1：$|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 與 $\overline{PB}+\overline{PC}$ 的極值點

項目	$\|\overline{PB}-\overline{PC}\|$		$\overline{PB}+\overline{PC}$	
方法	雙曲線與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相切		橢圓與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 的交點	
對象	極大值點	極小值點	極大值點	極小值點
任意西瓦線	$\overleftrightarrow{AD}$ 與雙曲線的切點	$\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 中垂線交點	——	$\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$的交點 D
高	垂足 H_A 點	——	——	垂足 H_A
中線	非特殊點	中點 M_A	——	中點 M_A
角平分線	頂點 A 點	$\overleftrightarrow{AL_A}$ 與 $\overline{BC}$ 中垂線交點	——	截點 L_A

表 2：$\overline{PB} \div \overline{PC}$ 與 $\overline{PB} \times \overline{PC}$ 的極值點

<table>
<tr><th>項目</th><th colspan="2">$\overline{PB} \div \overline{PC}$</th><th colspan="2">$\overline{PB} \times \overline{PC}$</th></tr>
<tr><td>方法</td><td colspan="2">阿波羅尼奧斯圓與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相切</td><td colspan="2">等腰梯形相似分割法</td></tr>
<tr><td>對象</td><td>極大值點</td><td>極小值點</td><td>極大值點</td><td>極小值點</td></tr>
<tr><td rowspan="2">任意
西瓦線</td><td rowspan="2">$\overleftrightarrow{AD}$ 與阿波羅尼
奧斯圓的切點</td><td rowspan="2">$\overleftrightarrow{AD}$ 與阿波羅尼
奧斯圓的切點</td><td rowspan="2">——</td><td>若 $t > 1$，
則在 $\overline{ED}$ 上</td></tr>
<tr><td>若 $t < 1$，
則在 $\overline{FD}$ 上</td></tr>
<tr><td>高</td><td>垂足 H_A</td><td>——</td><td>——</td><td>垂足 H_A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">中線</td><td rowspan="2">$\overleftrightarrow{AM_A}$ 與 $\overline{BC}$ 的
直徑圓的交點</td><td rowspan="2">$\overleftrightarrow{AM_A}$ 與 $\overline{BC}$ 的
直徑圓的交點</td><td rowspan="2">——</td><td>若 $0° < \theta < 45°$
則有兩個點</td></tr>
<tr><td>若 $45° \leq \theta < 90°$
則為中點 M_A</td></tr>
<tr><td>角平分線</td><td>內心 I</td><td>旁心 I_A</td><td>——</td><td>$\overline{IL_A}$ 上
（不包含兩端點）</td></tr>
</table>

伍、 未來展望

平面上給定ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，且 P 為 $\overleftrightarrow{AD}$ 上一動點，我們分別將 $|\overline{PB} - \overline{PC}|$、$\overline{PB} + \overline{PC}$、$\overline{PB} \div \overline{PC}$ 的極大值點與極小值點都找出來了，並且發現極值點的幾何意義。

關於 $\overline{PB} \times \overline{PC}$，我們先用微分算出其極小值，並且透過自創的「等腰梯形相似分割法」刻畫出極小值點的位置（在某線段上），但是切確的極小值點如何用尺規作圖作出來？極小值點是否為三角形有意義的特殊點？（或著這個極小值點沒有特定的幾何意義）。以上這兩個問題都是我們未來想繼續研究的地方。

陸、 參考資料

[1] 95 年第一次國民中學學生基本學力測驗數學科題本。網址：

https://cap.nace.edu.tw/exam/9501/9501Math.pdf

[2] 黃家禮（2000）。幾何明珠。臺北市：九章出版社。

[3] A. Bialostocki and R. Ely (2015). Points on a Line that Maximize and Minimize the Ratio of the Distances to Two Given Points. *Forum Geom.*, 15, 177–178.

【評語】030409

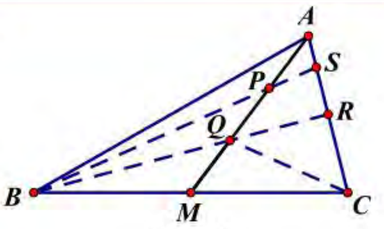
考慮三角形 ABC 與其西瓦線 AD 上一點 P 到另兩頂點 B、C 的距離差絕對值、距離和、距離比與距離乘積的最大可能值與最小可能值，針對所有的情形給出了完整的分析並得到了一些有趣的結果。

作品海報

壹、原始問題

本研究源自於九十五年第一次國中基測數學試題第十九題的中線問題：

給定 ΔABC，$\overline{AB}=\overline{BC}>\overline{AC}$，$P$、$Q$ 兩點在中線 $\overline{AM}$ 上，其中 $\overline{AP}=\overline{PQ}$，且 Q 為 ΔABC 的重心。若兩直線 $\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{BQ}$ 與 $\overline{AC}$ 分別交於 S、R 兩點，則下列關係何者正確？
(A) $\overline{AS}=\overline{SR}$ ＊(B) $\overline{AR}=\overline{RC}$ (C) $\overline{QB}=\overline{QC}$ (D) $\overline{QR}=2\overline{PS}$



▲ 圖1

我們好奇 (C) 選項 $\overline{QB}$ 與 $\overline{QC}$ 的大小關係，再將重心 Q 點推廣為**任意動點 P**，同時將中線一般化為**任意西瓦線**。我們完整研究西瓦線上的任意點 P 到兩頂點 B、C 的距離所構成四種運算 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$、$\overline{PB}+\overline{PC}$、$\overline{PB}\div\overline{PC}$ 與 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的數值變化及極大與極小值。

貳、預備知識

預備性質1.(阿波羅尼奧斯圓) 平面上給定兩相異定點 B、C 與定值 $\lambda>0$，所有滿足 $\overline{PB}\div\overline{PC}=\lambda$ 的點 P 所形成的圖形稱為阿波羅尼奧斯圓.

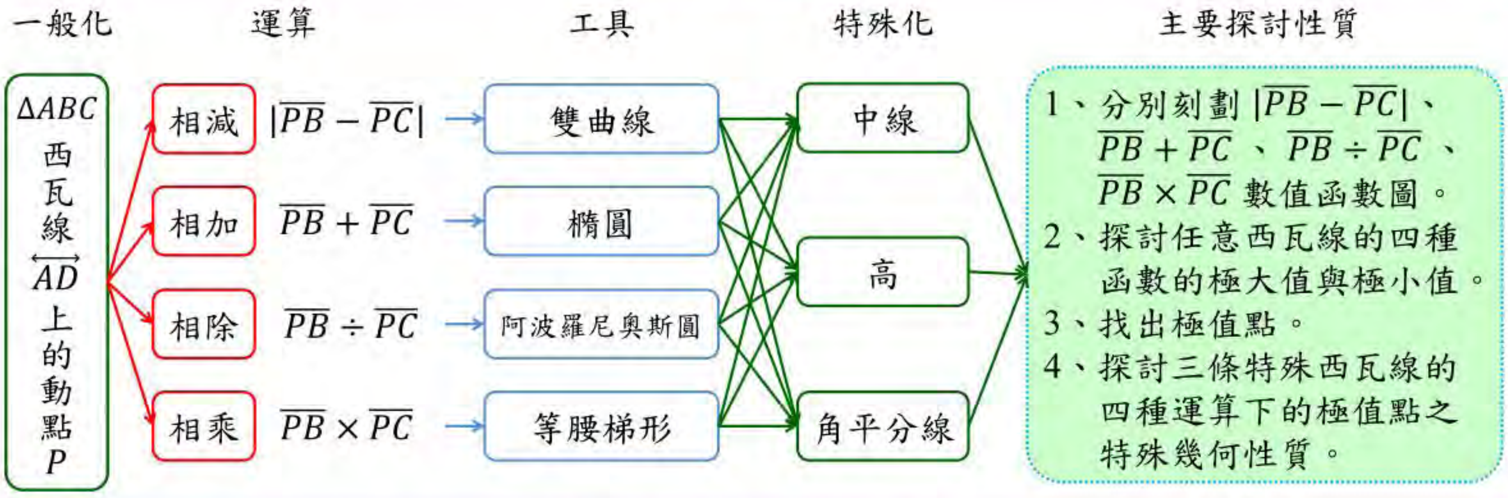
預備性質2.(橢圓、雙曲線) 平面上給定兩相異定點 F_1、F_2 與定值 $\lambda>0$，所有滿足 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2\lambda$ 的點 P 所形成的圖形稱為橢圓；所有滿足 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2\lambda$ 的點 P 所形成的圖形稱為雙曲線.

本研究約定在 ΔABC 中，$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$ 且 $c>b$

預備性質3.(斯霍騰定理) 若 $\overline{AL_A}$ 是 $\angle A$ 的內角平分線，$\overline{AT_A}$ 是 $\angle A$ 的外角平分線，則
$\overline{AL_A}=\sqrt{\frac{bc(-a+b+c)(a+b+c)}{(b+c)^2}}$，且 $\overline{AT_A}=\sqrt{\frac{bc(a-b+c)(a+b-c)}{(b-c)^2}}$.

預備性質4. (中線定理) 若 $\overline{AM_A}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的中線，則 $2\overline{AM_A}=\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}$.

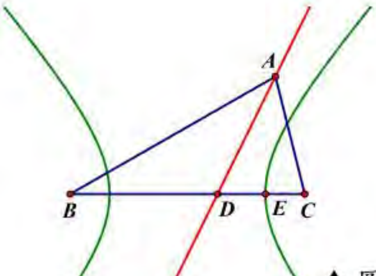
參、研究架構



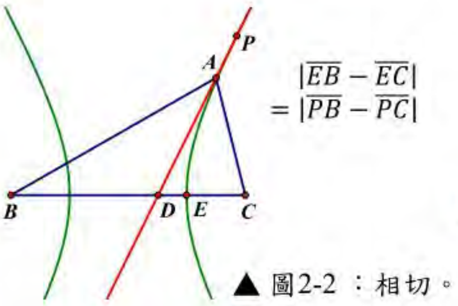
肆、研究結果

1.任意西瓦線上的點 P 構造的 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 極值

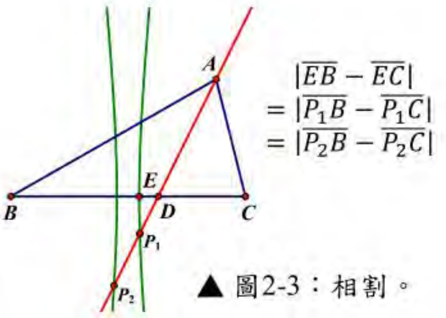
1.1.構造雙曲線 Γ 與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相交情形



▲ 圖2-1：相離。



▲ 圖2-2 ：相切。



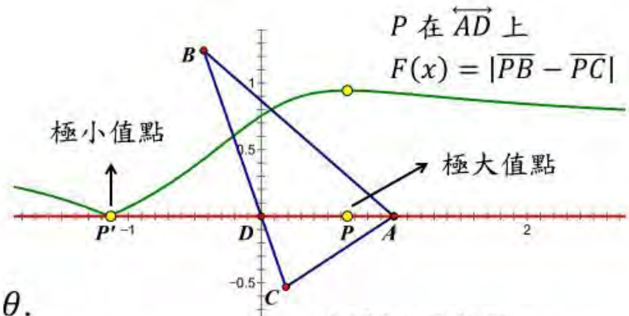
▲ 圖2-3：相割。

1.2.$|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 函數的遞增、遞減性

性質1.刻劃函數 $F(x)=|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 的遞增減性.

1.3.任意西瓦線的 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 之極值

給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，點 E 在 $\overline{BC}$ 上
點 M_A 為 $\overline{BC}$ 的中點、點 H_A 為 $\overline{BC}$ 上垂足
令 $|\overline{EB}-\overline{EC}|=2\lambda$、有向線段比值 $\frac{\overline{M_AD}}{\overline{M_AC}}=s$、$\angle ADC=\theta$.



▲圖3：函數圖。

定理2. (極值) 極大值 $\sqrt{\frac{s^2\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta+1}}\times\overline{BC}$、極小值0 (西瓦線與 $\overline{BC}$ 中垂線之交點).

推論3. (中線) 若 P 點在中線上，則 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 有極大值 $\cos\theta\times\overline{BC}$、有極小值 0.

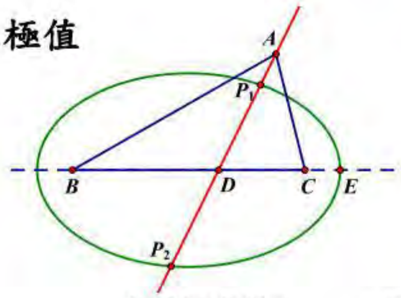
推論4. (高) 若 P 點在高上，則 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 有極大值 $|\overline{H_AB}-\overline{H_AC}|$.

推論5. (角平分線) 若 P 點在角平分線上，則 $|\overline{PB}-\overline{PC}|$ 有極大值 $c-b$、有極小值 0.

2.任意西瓦線上的點 P 構造的 $\overline{PB}+\overline{PC}$ 極值

2.1.構造橢圓 Γ 與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相交情形

$\overline{EB}+\overline{EC}=\overline{P_1B}+\overline{P_1C}=\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$



▲圖4：相割。

2.2.$\overline{PB}+\overline{PC}$ 函數的遞增、遞減性

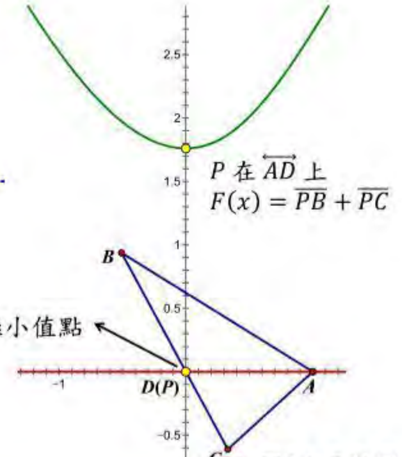
性質6. 刻劃函數 $F(x)=\overline{PB}+\overline{PC}$ 的遞增減性.

2.3.任意西瓦線的 $\overline{PB}+\overline{PC}$ 之極值

給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，點 E 在 $\overline{BC}$ 延長線上

點 M_A 為 $\overline{BC}$ 的中點、點 H_A 為 $\overline{BC}$ 上垂足、點 L_A 為角平分線在 $\overline{BC}$ 上截點

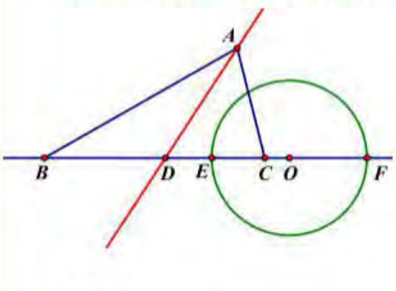
定理7.（極值）$\overline{PB}+\overline{PC}$ 有極小值 $\overline{BC}$.



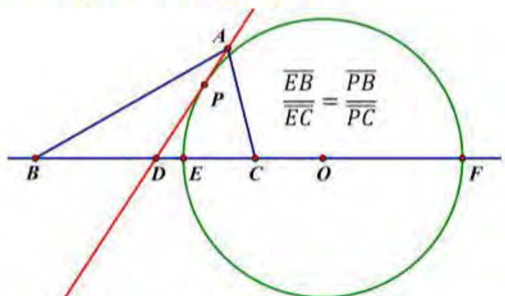
▲圖5：函數圖。

3.任意西瓦線上的點 P 構造的 $\overline{PB}\div\overline{PC}$ 極值

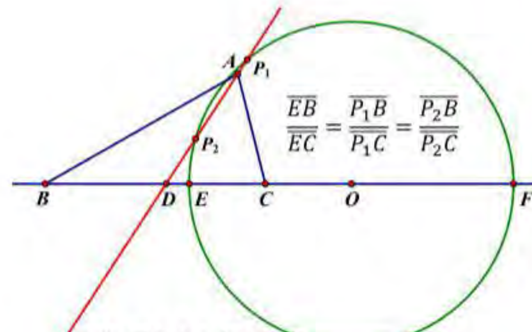
3.1.構造阿波羅尼奧斯圓 O 與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相交情形



▲圖6-1：相離。



▲圖6-2：相切。



▲圖6-3：相割。

3.2.$\overline{PB}\div\overline{PC}$ 函數的遞增、遞減性

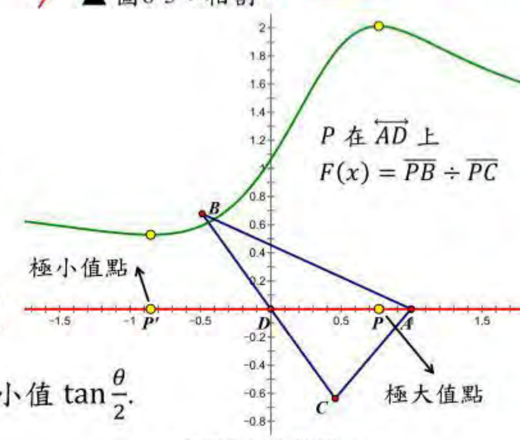
性質8. 刻劃函數 $F(x)=\overline{PB}\div\overline{PC}$ 的遞增減性.

3.3.任意西瓦線的 $\overline{PB}\div\overline{PC}$之極值

給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，點 E 在 $\overline{BC}$ 上、點 M_A 為 $\overline{BC}$ 的中點

點 H_A 為 $\overline{BC}$ 上垂足、點 L_A 為角平分線在 $\overline{BC}$ 上截點

令 $\overline{EB}\div\overline{EC}=\lambda>0$、$\overline{DB}\div\overline{DC}=t$、$\angle ADC=\theta$



▲圖7：函數圖。

定理9.（極值）極大值 $\frac{t+1+\sqrt{(t+1)^2-4t\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$、極小值 $\frac{t+1-\sqrt{(t+1)^2-4t\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$

推論10.（中線）若 P 點在中線上，則 $\overline{PB}\div\overline{PC}$ 有極大值 $\cot\frac{\theta}{2}$、有極小值 $\tan\frac{\theta}{2}$.

推論11.（高）若 P 點在高上，則 $\overline{PB}\div\overline{PC}$ 有極大值 $\overline{H_AB}\div\overline{H_AC}$.

推論12.（角平分線）若 P 點在角平分線上，則 $\overline{PB}\div\overline{PC}$ 有極大值 $\sqrt{\frac{c(a-b+c)}{b(a+b-c)}}$（極大值點為**內心**）

有極小值 $\sqrt{\frac{c(a+b-c)}{b(a-b+c)}}$（極小值點為**旁心**）

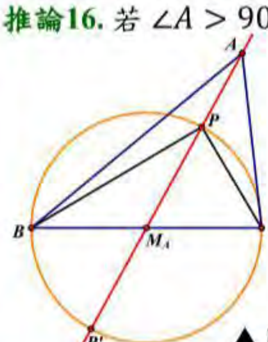
3.4.中線上的極值點的幾何性質

性質13. 若 P 在 ΔABC 的中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 上，使得 $\overline{PB}\div\overline{PC}$ 有極大值或極小值，則 P 點落在 $\overline{BC}$ 的直徑圓上.

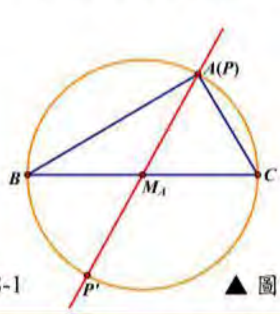
推論14. 若 $\angle A<90°$，則極大值的極值 P 點在 ΔABC 的內部.

推論15. 若 $\angle A=90°$，則極大值的極值 P 點為頂點 A 點.

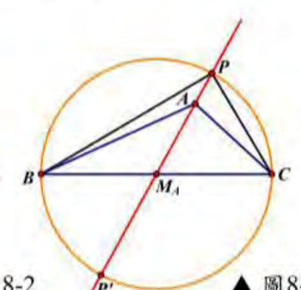
推論16. 若 $\angle A>90°$，則極大值的極值 P 點在 ΔABC 的外部.



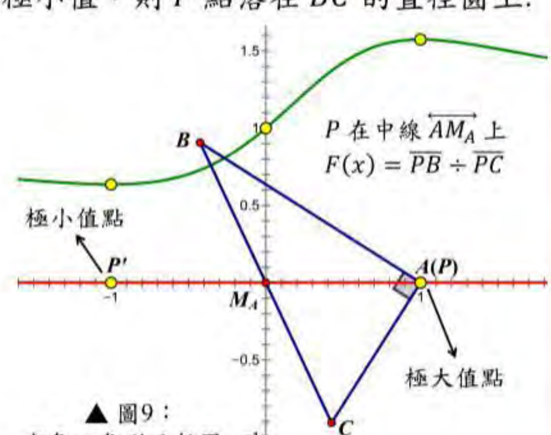
▲圖8-1



▲圖8-2



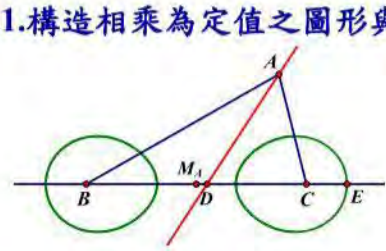
▲圖8-3



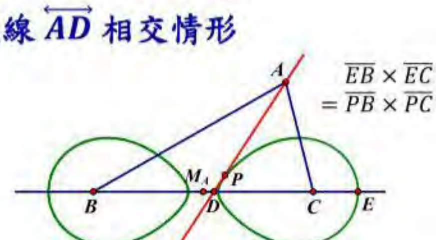
▲圖9：直角三角形函數圖。

4.任意西瓦線上的點 P 構造的 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 極值

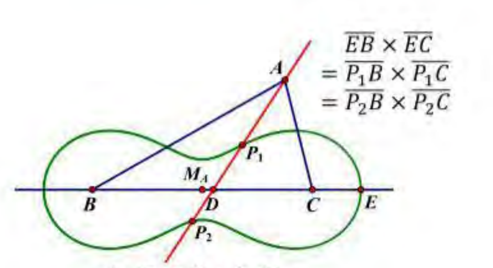
4.1.構造相乘為定值之圖形與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相交情形



▲圖10-1：相離。



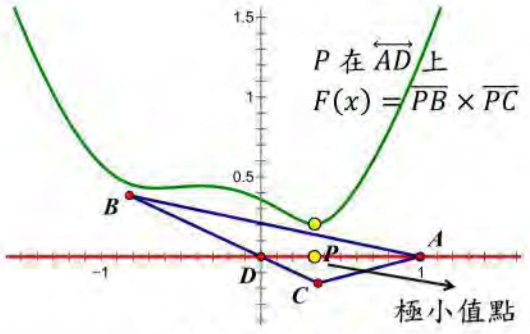
▲圖10-2：相切。



▲圖10-3：相割。

4.2. $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 之函數的遞增、遞減性

性質17. 刻劃函數 $F(x)=\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的遞增減性.



▲ 圖11：函數圖。

4.3. 任意西瓦線的 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 之極值

【方法一】微分

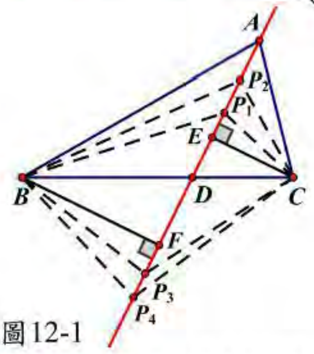
給定 ΔABC 及其任意西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$，令 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線之交點為原點 O，$\angle ADC=\theta$、$\angle OBC=\angle OCB=\alpha$、$\overline{OC}=\overline{OB}=R$、有向線段比值 $\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=k$、$\overline{DB}\div\overline{DC}=t$

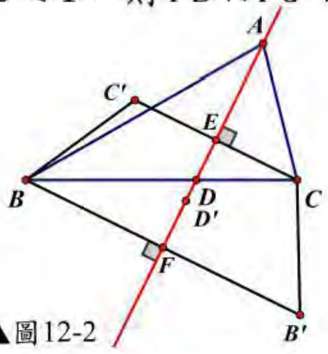
可得坐標 $B=R(-\cos\alpha,\sin\alpha)$、$C=R(\cos\alpha,\sin\alpha)$、$P=k(\cos\theta,\sin\theta)$

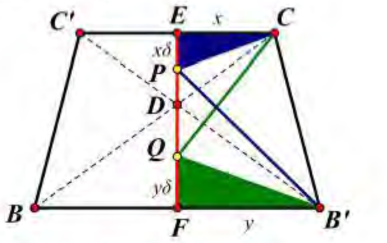
定理18.（極值）$F'(k)=4k^3+(12R\sin\alpha\sin\theta)k^2-4R^2(\cos2\theta+\cos2\alpha-1)k+4R^3\sin\alpha\sin\theta$.

【方法二】等腰梯形相似分割法

定理19.（極值點位置）（1）若 $t>1$，則 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的極小值點在 $\overline{ED}$ 上.
（2）若 $t<1$，則 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的極小值點在 $\overline{FD}$ 上.


▲圖12-1

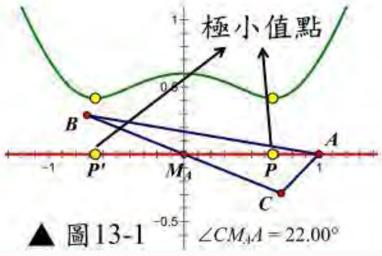

▲圖12-2


$\Delta CEP\sim\Delta B'FQ$
$\overline{PC}\times\overline{PB'}<\overline{QC}\times\overline{QB'}$
▲圖12-3

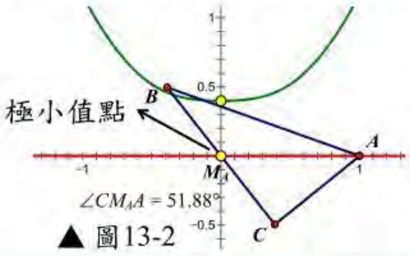
推論20.（中線）（1）若 P 在 ΔABC 的中線上且 $0°<\theta<45°$，則 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的極小值點有兩個，對稱於中點 M_A，其值為 $\frac{a^2}{4}\times\sin2\theta$.
（2）若 P 在 ΔABC 的中線上且 $45°\le\theta<90°$，則 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的極小值點為中點 M_A，其值為 $\frac{a^2}{4}$.

推論21.（高）若 P 在 ΔABC 的高上，則 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的極小值為 $\overline{H_AB}\times\overline{H_AC}$.

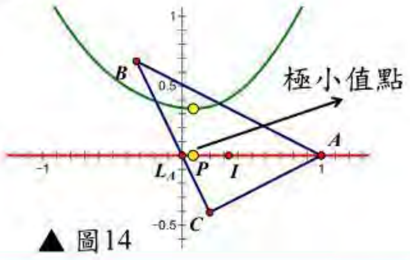
推論22.（角平分線）若 P 在 ΔABC 的角平分線 $\overleftrightarrow{AL_A}$ 上，若 P 點使得 $\overline{PB}\times\overline{PC}$ 有極小值，則 P 點位於內心 I 與角平分線截點 L_A 的線段 $\overline{IL_A}$ 上.



▲ 圖13-1



▲ 圖13-2



▲ 圖14

伍、結論

項目	$\lvert\overline{PB}-\overline{PC}\rvert$		$\overline{PB}+\overline{PC}$	
方法	雙曲線與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相切		橢圓與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 的交點	
對象	極大值點	極小值點	極大值點	極小值點
任意西瓦線	$\overleftrightarrow{AD}$ 與雙曲線的切點	$\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 中垂線交點	——	$\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的交點 D
中線	非特殊點	中點 M_A	——	中點 M_A
高	垂足 H_A 點	——	——	垂足 H_A
角平分線	頂點 A 點	$\overleftrightarrow{AL_A}$ 與 $\overline{BC}$ 中垂線交點	——	截點 L_A

項目	$\overline{PB}\div\overline{PC}$		$\overline{PB}\times\overline{PC}$	
方法	阿波羅尼奧斯圓與西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 相切		微分、等腰梯形相似分割法	
對象	極大值點	極小值點	極大值點	極小值點
任意西瓦線	$\overleftrightarrow{AD}$ 與阿波羅尼奧斯圓的切點	$\overleftrightarrow{AD}$ 與阿波羅尼奧斯圓的切點	——	$t>1$，在 $\overline{ED}$ 上 $t<1$，在 $\overline{FD}$ 上
中線	$\overleftrightarrow{AM_A}$ 與以 $\overline{BC}$ 為直徑的圓之交點	$\overleftrightarrow{AM_A}$ 與以 $\overline{BC}$ 為直徑的圓之交點	——	$0°<\theta<45°$ 兩個點 $45°\le\theta<90°$ 中點 M_A
高	垂足 H_A	——	——	垂足 H_A
角平分線	內心 I	旁心 I_A	——	$\overline{IL_A}$上（不含端點）

陸、參考文獻

[1] 95年第一次國民中學學生基本學力測驗數學科題本。
[2] 黃家禮（2000）。幾何明珠。臺北市：九章出版社。
[3] A. Bialostocki and R. Ely (2015). Points on a Line that Maximize and Minimize the Ratio of the Distances to Two Given Points. *Forum Geom.*, 15, 177–178.