中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030408

Poker Traveler

學校名稱：澎湖縣立文光國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳彥宇	陳銘羣
國一 謝俊藝	陳玉惠
國一 呂宗祥	

關鍵詞：撲克牌魔術、分堆

摘要

台上魔術師的表演總是會讓人驚嘆不已，「天啊！」「怎麼可能？」「他怎麼做到的？」，這些驚呼聲代表了這些魔術手法的奇妙之處，然而，我們了解，任何魔術其實都只是障眼法，背後必定有其對應的原理存在，尤其越是看似公平公正或是不可能完成的遊戲，背後隱藏的原理常是超乎想像的單純。

在一次的土法煉鋼中，發現它們也是有規律的，我們試著了解這些牌的流向及收斂位置，進而利用代數證明推導出老師所使用的手法，接著好奇心強大的我們又想到:如果 27 張分三堆呢?33 張?39 張?可想而知接下來就是一連串的研究與觀察結果

壹、研究動機

有天，數學魔術師{Tr.chen}來到了我們班視察，發現，大多數同學上課時都是一副哀怨的表情，氣氛也是一片死寂，魔術師內心 os{上數學課應該要是快樂的啊!}。為拯救這堂無趣的數學課，魔術師變施展他的拿手絕活(當然是變魔術啊)

他拿出任意 21 張樸克牌並請我抽一張(不能被魔術師看到)，再把牌混排堆中，魔術師將 21 張牌分為 3 堆，並逐一拿起牌堆問我有沒有在這堆中?就這樣重複了 2 次。诶!神奇的事情發生了!他竟然能猜出我抽的那張牌，全班一陣譁然，都清醒了呢!就在此刻老師說:{這跟數學有關。}全班又倒下了(似乎是"數"睡症發作)，唯獨我充滿好奇，想要一探這其中的奧秘。不知不覺就” 入坑” 了。

貳、研究目的

一、探討撲克牌魔術之規律及原理。

二、根據研究結果，推廣其原理。

三、探討能否將其原理延伸至相關數學議題，設計出更有趣的另類玩法。

參、研究設備與器材

撲克牌、紙和筆、三個臭皮匠似的頭腦。

肆、研究過程與方法

魔術表演總是令人瞠目結舌，但背後所隱藏的原理，卻往往不如我們想像得如此複雜，老師的心算速度看似神奇，實則暗藏玄機，耐人尋味。在研究的過程中，我們分析每個骰子各面數字彼此之間的關係，並探討這些數字的和是否暗藏什麼原理？

一、遊戲規則說明

表演者先從一副撲克牌中任意拿 21 張撲克牌，請一位觀眾選定一張牌（目標牌，只有觀眾知道花色和數字並記住），之後表演者將目標牌混入牌堆中洗勻，接著按順序發牌分成 3 疊每疊 7 張（字面朝下），並請觀眾確認目標牌在哪一疊，將含有目標牌的那疊放在 3 疊的中間並隨機疊合將牌收攏，以上稱為一次洗牌，重複三次洗牌後表演者就能準確找出目標牌，令現場觀眾驚呼連連。

二、規律探討

(一)洗牌後位置的規律

我們試著針對目標牌的移動情形來作討論，根據規則會將 21 張牌分三堆 A 、 B 及 C ，如下表【**表 4-1**】所示，我們將 21 張牌編號 1 至 21 來觀察第 1 次洗牌後的結果，假設 B 堆是目標牌堆，其整理的結果如下表【**表 4-2**】所示：

【表 4-1】未洗牌前之位置

位置＼牌堆	A	B	C
第 1 張	1	8	15
第 2 張	2	9	16
第 3 張	3	10	17
第 4 張	4	11	18
第 5 張	5	12	19
第 6 張	6	13	20
第 7 張	7	14	21

【表 4-2】第 1 次洗牌後各牌的位置

位置＼牌堆	A	B	C
第 1 張	19	20	21
第 2 張	16	17	18
第 3 張	13	14	15
第 4 張	10	11	12
第 5 張	7	8	9
第 6 張	4	5	6
第 7 張	1	2	3

依據規則，確定目標牌所在的牌堆後，下次洗牌會隨機將另兩堆其中一堆放在目標牌堆上，另一堆放在目標牌堆的底下，然後重新洗牌依照規則排放，我們可以發現目標堆上的每一張牌，上層會多加 7 張後再去分三堆排，我們可以試著用代數式來表示位置。

(二)收斂情形

現為討論方便及將問題簡單化，我們單純只觀察目標牌所在的牌堆的變化，現將目標牌堆的 7 張牌按順序編號為 1~7，現假設目標牌在這 7 張的其中 1 張，依據上述得到的結果，來以洗牌次數來觀察目標牌的移動情形，整理如下表【表 4-3】所示：

【表 4-3】洗牌後各牌的位置變化(一堆 7 張)

洗牌次數 / 目標牌位置	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
1	5	4	4	4
2	5	4	4	4
3	4	4	4	4
4	4	4	4	4
5	4	4	4	4
6	3	4	4	4
7	3	4	4	4

由上表我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第 4 張，所以我們大膽假設若以此洗牌法，不論目標牌在牌堆的那一張，經過多次洗牌後，最後都會在同一個位置，且剛好是牌堆正中間的位置，我們接下來也是以代數式作驗證。

伍、研究結果

透過前面的討論，我們運用代數式證明來找出這洗牌法背後的玄機，以下是我們的研究成果。

一、每堆 7 張分三堆

(一)洗牌後位置的規律

若一堆有 7 張，目標牌在第 x 張，x 為正整數，$1 \le x \le 7$，則下次洗牌會先疊 7 張後再分三堆，以此規則我們可以分兩種情形：

1.若 $y < \frac{x+7}{3} < y+1$，目標牌會是目標堆中的倒數第 y+1 張，即第 7-(y+1)+1=7-y 張，又 $7-y-1 < 7-\frac{x+7}{3} = \frac{14-x}{3} < 7-y$，所以若 $a < \frac{14-x}{3} < a+1$，則位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張。

2.若 $\frac{x+7}{3} = y$，目標牌會是倒數第 y 張，即第 7-y+1 張，又 $7-y = 7-\frac{x+7}{3} = \frac{14-x}{3}$，若 $\frac{14-x}{3} = a$，則位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張。

由上述討論可知，當 $a \le \frac{14-x}{3} < a+1$，位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張

(二)收斂情形

由【表 4-3】所示，我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第 4 張，且剛好是牌堆正中間的位置，我們試著由此來推演到每堆 k 張分三堆。

二、每堆 k 張分三堆($k \ge 2$，k 為正整數)

(一)洗牌後位置的規律

我們可以此類推，令每一堆牌有 k 張，若目標牌在第 x 張，$1 \le x \le k$，則下次洗牌後的位置如下：

1.若 $y < \frac{x+k}{3} < y+1$，目標牌會是倒數第 y+1 張，即第 k-(y+1)+1=k-y 張，又 $k-y-1 < k-\frac{x+k}{3} = \frac{2k-x}{3} < k-y$，所以若 $a < \frac{2k-x}{3} < a+1$，則位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張。

2.若 $\frac{x+k}{3}=y$，目標牌會是倒數第 y 張，即第 k-y+1 張，又 $k-y=k-\frac{x+k}{3}=\frac{2k-x}{3}$，

若 $\frac{2k-x}{3}=a$，則位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張。

所以由上述討論可知，當 $a\le\frac{2k-x}{3}<a+1$，位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張

(二)收斂情形

由【表 4-3】我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第 4 張，所以我們大膽假設若以此洗牌法，不論目標牌在牌堆的那一張，經過多次洗牌後，最後都會在同一個位置，且剛好是牌堆正中間的位置。為了證實我們的假設，我們去更動牌堆的數目來觀察結果，整理後如下表【表 5-1】、【表 5-2】、【表 5-3】及【表 5-4】所示：

【表 5-1】洗牌後各牌的位置變化(一堆 5 張)

洗牌次數 / 目標牌位置	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
1	4	3	3	3
2	3	3	3	3
3	3	3	3	3
4	3	3	3	3
5	2	3	3	3

【表 5-2】洗牌後各牌的位置變化(一堆 6 張)

洗牌次數 / 目標牌位置	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
1	4	3	4	3
2	4	3	4	3
3	4	3	4	3
4	3	4	3	4
5	3	4	3	4
6	3	4	3	4

【表 5-3】洗牌後各牌的位置變化(一堆 8 張)

洗牌次數 / 目標牌位置	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
1	6	4	5	4
2	5	4	5	4
3	5	4	5	4
4	5	4	5	4
5	4	5	4	5
6	4	5	4	5
7	4	5	4	5
8	3	5	4	5

【表 5-4】洗牌後各牌的位置變化(一堆 9 張)

洗牌次數 / 目標牌位置	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
1	6	4	5	5
2	6	4	5	5
3	5	5	5	5
4	5	5	5	5
5	5	5	5	5
6	4	5	5	5
7	4	5	5	5
8	4	5	5	5
9	3	5	5	5

我們有了新的發現，在偶數張時不會收斂在同一張，且第 1 張到第 7 張的順序在洗牌一次後會反過來，如第 1 張會疊在 k 張裡的後半位置，以此類推，且洗牌多次後會往中間收斂。

在此整理目前要驗證的課題：1.牌堆是偶數張時不會收斂在同一張。2.不論目標牌在牌堆的那一張，經過多次洗牌後，最後都會在同一個位置，且剛好是牌堆正中間的位置。驗證過程整理如下：

令每一堆牌有 k 張，若目標牌在第 x 張，$1 \le x \le k$

1.牌堆是偶數張時的變化情形

若 k 為偶數，則令 k＝2b，b 為正整數

若 x=b，則 $\frac{2k-x}{3}=\frac{4b-b}{3}=b$，代表第 b 張的牌經過洗牌後會在第 b+1 張

若 x=b+1，則 $b-1<\frac{2k-x}{3}=\frac{4b-b-1}{3}=b-\frac{1}{3}<b$，第 b+1 張的牌洗牌後會在第 b 張

由上述可知當牌堆是偶數張牌時，至少會有兩張牌洗牌後不會收斂在同一張

2.中間張的變化情形

若最後會收斂在中間那一張，那麼當目標牌在中間位置時，經過洗牌後，理論上也應該會在中間位置，我們試著對此作驗證。

由上述證明可知，若要收斂在同一張，則每堆張數不能是偶數，故令每堆張數 k=2d+1，d 為正整數，我們去觀察中間那一張，意即第 d+1 張，是否經過洗牌後還會在中間的位置。

當 x=d+1，則 $d<\frac{2k-x}{3}=\frac{4d+2-d-1}{3}=d+\frac{1}{3}<d+1$，代表第 d+1 張的牌洗牌後會在第 d+1 張

接下來我們將牌分成兩堆，第一堆是第 1 張到第 d 張，第二堆為第 d+2 張到第 2d+1 張，我們想試著證這兩堆的每一張經過洗牌後，都會向中間收斂，意即每次洗牌後的位置都會比洗牌前的位置更靠近第 d+1 張

3.第 1 張到第 d 張的變化情形

每堆有 2d+1 張，$1 \le x \le d$ 時，$\frac{2k-x}{3}=\frac{4d+2-x}{3}$

當 x=d 時，$d<\frac{4d+2-d}{3}=d+\frac{2}{3}<d+1$，即第 d 張的牌在洗牌後會移到第 d+1 張，

所以當 $1 \le x \le d$ 時，$d<\frac{4d+2-d}{3}<\frac{4d+2-x}{3}<\frac{4d+2-1}{3}<\frac{6d+3}{3}=2d+1$，代表位置在第 d+1 張前的牌洗牌後會移至第 d+1 張後

若$b \le \frac{4d+2-x}{3} < b+1$，則第 x 張的牌洗牌後會到第 b+1 張，依上述結論，第 b+1 張會在第 d+1 張後，我們希望能證明每次洗牌後的位置會往 d+1 張收斂，意即每次洗牌後的位置和 d+1 的距離會越來越小，所以我們現在的目標為證明

$b+1-(d+1) < d+1-x$

(pf)假設$b+1-(d+1) \ge d+1-x$，則$x \ge 2d+1-b$

又$2d+1-b \ge 2d+1-\frac{4d+2-x}{3} \Longrightarrow x \ge 2d+1-\frac{4d+2-x}{3} \Longrightarrow x \ge d+\frac{1}{2}$

但和$1 \le x \le d$矛盾，所以當$1 \le x \le d$時，$b+1-(d+1) < d+1-x$得證

由上述討論可得知當$1 \le x \le d$時，洗牌後的位置會移至第 d+1 張後，且比原來的位置更接近第 d+1 張

4.第 d+2 張到第 2d+1 張的變化情形

每堆有 2d+1 張，當$d+2 \le x \le 2d+1$時，$\frac{2k-x}{3} = \frac{4d+2-x}{3}$

當 x=d 時，$d < \frac{4d+2-d}{3} = d+\frac{2}{3} < d+1$，即第 d 張的牌在洗牌後會移到第 d+1 張，

所以當$d+2 \le x \le 2d+1$時，$0 < \frac{4d+2-(2d+1)}{3} < \frac{4d+2-x}{3} < \frac{4d+2-(d+2)}{3} < \frac{3d}{3} = d$，代表位置在第 d+1 張後的牌洗牌後會移至第 d+1 張前

若$b \le \frac{4d+2-x}{3} < b+1$，則第 x 張的牌洗牌後會到第 b+1 張，依上述結論，第 b+1 張會在第 d+1 張前，我們現在的目標為證明$d+1-(b+1) < x-(d+1)$

(pf)假設$d+1-(b+1) \ge x-(d+1)$，則$x \le 2d+1-b$

又$2d+1-b < 2d+1+1-\frac{4d+2-x}{3} \Longrightarrow x < 2d+1+1-\frac{4d+2-x}{3} \Longrightarrow x < d+2$

但和$d+2 \le x \le 2d+1$矛盾，所以當$d+2 \le x \le 2d+1$時，$d+1-(b+1) < x-(d+1)$得證

由上述討論可得知當$d+2 \le x \le 2d+1$時，洗牌後的位置會移至第 d+1 張前，且比原來的位置更接近第 d+1 張

陸、討論

根據研究的結果我們發現，只要我們事先決定好每堆的張數，再運用我們得到的發現，就可以知道我們所選出的目標牌洗牌後的位置，觀眾們也自然而然會被魔術師玩弄於股掌之上了，以下就是我們對於此研究結果之相關討論。

一、每堆 7 張分三堆

(一)洗牌後位置的規律

若一堆有 7 張，目標牌在第 x 張，x 為正整數，$1 \le x \le 7$，當 $a \le \frac{14-x}{3} < a+1$，位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張

(二)收斂情形

由【表 4-3】所示，我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第 4 張，意即整理牌後的第 11 張，且剛好是牌堆正中間的位置，我們試著由此來推演到每堆 k 張分三堆。

(三)洗牌次數

依照我們得到的結論可知，每一次洗牌後的位置都會比原位置更接近第 4 張，由此可知，第 1 和第 7 張離第 4 張最遠，最多要洗三次才會到第 4 張，但由【表 4-3】所示，我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第 4 張，次數比我們所想的還要少！

二、每堆 k 張分三堆($k \ge 2$ ，k 為正整數)

(一)洗牌後位置的規律

每一堆牌有 k 張，若目標牌在第 x 張，$1 \le x \le k$ ，當 $a \le \frac{2k-x}{3} < a+1$ ，位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張

(二)收斂情形

1.當牌堆是偶數(2b)張牌時，洗牌後不會收斂在同一張，但會收斂在第 b 和第 b+1 張

2.當牌堆是奇數(2d+1)張時，d 為正整數，目標牌不論在那一張，每次洗牌後的位置都會往第 d+1 張牌收斂，最後目標牌一定會在第 d+1 張牌的位置，所以當把牌堆上以後，我們可以確定目標牌位置會在第 k+d+1 張

(三)洗牌次數

我們由前面的研究結果可知每一次洗牌後，位置會比原來的位置更靠近第 d+1 張，由此發現離第 d+1 張最遠的是第 1 張和最後一張，距離的是 d 張，所以不論目標牌在那一個位置，最多洗 d 次就能讓目標牌位置到第 d+1 張，現在我們試著以數個實例來驗證我們的想法，整理後如下表【表 6-1】所示：

【表 6-1】洗牌次數(一堆 k 張分 3 堆)

牌堆數目 \ 收斂情形		洗牌次數	d	洗牌次數 $\leq d$
k	n			
5	3	2	2	成立
7	3	2	3	成立
9	3	3	4	成立
11	3	3	5	成立
13	3	3	6	成立
15	3	3	7	成立

註：1. k=2d+1。k 和 d 為正整數

2.若 k 為奇數，洗牌次數指不論目標牌在那一張，最多要洗幾次才能保證目標牌洗牌完後一定會在第 d+1 張

柒、結論

一、每堆 7 張分三堆

(一)洗牌後位置的規律

若一堆有 7 張，目標牌在第 x 張，x 為正整數，$1 \leq x \leq 7$，當 $a \leq \dfrac{14-x}{3} < a+1$，位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張

(二)收斂情形

由【表 4-3】所示，我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第 4 張，意即整理牌後的第 11 張，且剛好是牌堆正中間的位置。

(三)洗牌次數

由【表 4-3】所示，我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第 4 張！

二、每堆 k 張分三堆($k \geq 2$ ，k 為正整數)

(一)洗牌後位置的規律

每一堆牌有 k 張，若目標牌在第 x 張，$1 \leq x \leq k$ ，當 $a \leq \frac{2k-x}{3} < a+1$ ，位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張

(二)收斂情形

1.當牌堆是偶數(2b)張牌時，洗牌後不會收斂在同一張，但會收斂在第 b 和第 b+1 張

2.當牌堆是奇數(2d+1)張時，d 為正整數，目標牌不論在那一張，每次洗牌後的位置都會往第 d+1 張牌收斂，最後目標牌一定會在第 d+1 張牌的位置，所以當把牌堆上以後，我們可以確定目標牌位置會在第 k+d+1 張

(三)洗牌次數

不論目標牌在那一個位置，最多洗 d 次就能讓目標牌位置到第 d+1 張

三、未來展望

(一)未來研究可朝每堆 k 張分 n 堆時來作研究。

(二)本研究中洗牌規則皆是將目標堆放中間，未來可朝目標堆在其他疊作研究。

(三)本研究中分的每堆牌數皆相同，未來可以由每堆牌數不盡相同時作研究。

(四)未來可朝最少洗牌次數才會收斂到同一張為主題作研究。

(五)可試著設計更多規則與限制，增添遊戲樂趣。

捌、參考資料及其他

一、【陳民芳、陳惠琦】：第46屆的全國中小學數學科科展參賽作品【Magic Poker－撲克牌遊戲分析】

二、康軒版國中數學第2冊（1下）。康軒書局企業股份有限公司。民國107年2月三版三刷。

三、南一版國中數學第5冊（3上）。南一書局企業股份有限公司。民國106年8月三版。

【評語】030408

本作品探討某種將樸克牌等分為 3 堆的魔術遊戲，這是一個有趣的問題，作者得出的結論也正確，如能將結果推廣到分成 n 堆的一般情況，內容會更加完備。

作品海報

壹、研究動機

有天，數學魔術師{Tr.chen}來到了我們班視察，發現，大多數同學上課時都是一副哀怨的表情，氣氛也是一片死寂，魔術師內心 os{上數學課應該要是快樂的啊!}。為拯救這堂無趣的數學課，魔術師變施展他的拿手絕活(當然是變魔術啊)

他拿出任意 21 張樸克牌並請我抽一張(不能被魔術師看到)，再把牌混排堆中，魔術師將 21 張牌分為 3 堆，並逐一拿起牌堆問我有沒有在這堆中?就這樣重複了 2 次。? !神奇的事情發生了!他竟然能猜出我抽的那張牌，全班一陣譁然，都清醒了呢!就在此刻老師說:{這跟數學有關。}全班又倒下了(似乎是"數"睡症發作)，唯獨我充滿好奇，想要一探這其中的奧秘。不知不覺就" 入坑" 了。

貳、研究目的

一、探討撲克牌魔術之規律及原理。

二、根據研究結果，推廣其原理。

三、探討能否將其原理延伸至相關數學議題，設計出更有趣的另類玩法。

参、研究設備與器材

撲克牌、紙和筆、三個臭皮匠似的頭腦。

肆、研究過程與方法

魔術表演總是令人瞠目結舌，但背後所隱藏的原理，卻往往不如我們想像得如此複雜，老師的心算速度看似神奇，實則暗藏玄機，耐人尋味。在研究的過程中，我們分析每個骰子各面數字彼此之間的關係，並探討這些數字的和是否暗藏什麼原理？

一、遊戲規則說明

表演者先從一副撲克牌中任意拿 21 張撲克牌，請一位觀眾選定一張牌（目標牌，只有觀眾知道花色和數字並記住），之後表演者將目標牌混入牌堆中洗勻，接著按順序發牌分成 3 疊每疊 7 張（字面朝下），並請觀眾確認目標牌在哪一疊，將含有目標牌的那疊放在 3 疊的中間並隨機疊合將牌收攏，以上稱為一次洗牌，重複三次洗牌後表演者就能準確找出目標牌，令現場觀眾驚呼 連連。

依據規則，確定目標牌所在的牌堆後，下次洗牌會隨機將另兩堆其中一堆放在目標牌堆上，另一堆放在目標牌堆的底下，然後重新洗牌依照規則排放，我們可以發現目標堆上的每一張牌，上層會多加7張後再去分三堆排，我們可以試著用代數式來表示位置。

(二)收斂情形

現為討論方便及將問題簡單化，我們單純只觀察目標牌所在的牌堆的變化，現將目標牌堆的7張牌按順序編號為1~7，現假設目標牌在這7張的其中1張，依據上述得到的結果，來以洗牌次數來觀察目標牌的移動情形，整理如下表【表4-3】所示：

【表4-3】洗牌後各牌的位置變化(一堆7張)

洗牌次數／目標牌位置	第1次	第2次	第3次	第4次
1	5	4	4	4
2	5	4	4	4
3	4	4	4	4
4	4	4	4	4
5	4	4	4	4
6	3	4	4	4
7	3	4	4	4

由上表我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第4張，所以我們大膽假設若以此洗牌法，不論目標牌在牌堆的那一張，經過多次洗牌後，最後都會在同一個位置，且剛好是牌堆正中間的位置，我們接下來也是以代數式作驗證。

二、規律探討

(一)洗牌後位置的規律

我們試著針對目標牌的移動情形來作討論，根據規則會將21 張牌分三堆A、B及C，如下表【表4-1】所示，我們將21 張牌編號1 至21 來觀察第1 次洗牌後的結果，假設B堆是目標牌堆，其整理的結果如下表【表4-2】所示：

【表4-1】未洗牌前之位置

牌堆／位置	A	B	C
第1張	1	8	15
第2張	2	9	16
第3張	3	10	17
第4張	4	11	18
第5張	5	12	19
第6張	6	13	20
第7張	7	14	21

【表4-2】第1次洗牌後各牌的位置

牌堆／位置	A	B	C
第1張	19	20	21
第2張	16	17	18
第3張	13	14	15
第4張	10	11	12
第5張	7	8	9
第6張	4	5	6
第7張	1	2	3

伍、研究結果

透過前面的討論，我們運用代數式證明找出這洗牌法背後的玄機，以下是我們的研究成果。

一、每堆7張分三堆

(一)洗牌後位置的規律

若一堆有7張，目標牌在第x張，x 為正整數，$1\le x\le 7$，則下次洗牌會先疊7張後再分三堆，以此規則我們可以分兩種情形：

1.若$y<\frac{x+7}{3}<y+1$，目標牌會是目標堆中的倒數第y+1 張，即第7-(y+1)+1=7-y 張，又$7-y-1<7-\frac{x+7}{3}=\frac{14-x}{3}<7-y$，所以若$a<\frac{14-x}{3}<a+1$，則位置第x 張的牌下次洗牌後會到第a+1 張。

2.若$\frac{x+7}{3}=y$，目標牌會是倒數第y 張，即第7-y+1 張，又$7-y=7-\frac{x+7}{3}=\frac{14-x}{3}$，若$\frac{14-x}{3}=a$，則位置第x 張的牌下次洗牌後會到第a+1 張。

由上述討論可知，當$a\le\frac{14-x}{3}<a+1$，位置第x 張的牌下次洗牌後會到第a+1 張

(二)收斂情形

由【表4-3】所示，我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第4張，且剛好是牌堆正中間的位置，我們試著由此來推演到每堆k 張分三堆。

二、每堆k 張分三堆($k\ge 2$，k 為正整數)

(一)洗牌後位置的規律

我們可以此類推，令每一堆牌有k 張，若目標牌在第x 張，$1\le x\le k$，則下次洗牌後的位置如下：

1.若$y<\frac{x+k}{3}<y+1$，目標牌會是倒數第y+1 張，即第k-(y+1)+1=k-y 張，又$k-y-1<k-\frac{x+k}{3}=\frac{2k-x}{3}<k-y$，所以若$a<\frac{2k-x}{3}<a+1$，則位置第x 張的牌下次洗牌後會到第a+1 張。

2.若 $\frac{x+k}{3}=y$，目標牌會是倒數第 y 張，即第 k-y+1 張，又 $k-y=k-\frac{x+k}{3}=\frac{2k-x}{3}$，

若 $\frac{2k-x}{3}=a$，則位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張。

所以由上述討論可知，當 $a\le\frac{2k-x}{3}<a+1$，位置第 x 張的牌下次洗牌後會到第 a+1 張

(二)收斂情形

由【表 4-3】我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第 4 張，所以我們大膽假設若以此洗牌法，不論目標牌在牌堆的那一張，經過多次洗牌後，最後都會在同一個位置，且剛好是牌堆正中間的位置。為了證實我們的假設，我們去更動牌堆的數目來觀察結果，整理後如下表【表 5-1】、【表 5-2】、【表 5-3】及【表 5-4】所示：

【表 5-1】洗牌後各牌的位置變化(一堆 5 張)

洗牌次數 / 目標牌位置	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
1	4	3	3	3
2	3	3	3	3
3	3	3	3	3
4	3	3	3	3
5	2	3	3	3

【表 5-2】洗牌後各牌的位置變化(一堆 6 張)

洗牌次數 / 目標牌位置	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
1	4	3	4	3
2	4	3	4	3
3	4	3	4	3
4	3	4	3	4
5	3	4	3	4
6	3	4	3	4

【表5-3】洗牌後各牌的位置變化(一堆8張)

洗牌次數 / 目標牌位置	第1次	第2次	第3次	第4次
1	6	4	5	4
2	5	4	5	4
3	5	4	5	4
4	5	4	5	4
5	4	5	4	5
6	4	5	4	5
7	4	5	4	5
8	3	5	4	5

【表5-4】洗牌後各牌的位置變化(一堆9張)

洗牌次數 / 目標牌位置	第1次	第2次	第3次	第4次
1	6	4	5	5
2	6	4	5	5
3	5	5	5	5
4	5	5	5	5
5	5	5	5	5
6	4	5	5	5
7	4	5	5	5
8	4	5	5	5
9	3	5	5	5

我們有了新的發現，在偶數張時不會收斂在同一張，且第 1 張到第 7 張的順序在洗牌一次後會反過來，如第 1 張會疊在 k 張的後半位置，以此類推，且洗牌多次後會往中間收斂。

在此整理目前要驗證的課題：1.牌堆是偶數張時不會收斂在同一張。2.不論目標牌在牌堆的那一張，經過多次洗牌後，最後都會在同一個位置，且剛好是牌堆正中間的位置。驗證過程整理如下：

令每一堆牌有 k 張，若目標牌在第 x 張，$1\le x\le k$

1.牌堆是偶數張時的變化情形

若 k 為偶數，則令 k＝2b，b 為正整數

若 x=b，則 $\frac{2k-x}{3}=\frac{4b-b}{3}=b$，代表第 b 張的牌經過洗牌後會在第 b+1 張

若 x=b+1，則 $b-1<\frac{2k-x}{3}=\frac{4b-b-1}{3}=b-\frac{1}{3}<b$，第 b+1 張的牌洗牌後會在第 b 張

由上述可知當牌堆是偶數張牌時，至少會有兩張牌洗牌後不會收斂在同一張

2.中間張的變化情形

若最後會收斂在中間那一張，那麼當目標牌在中間位置時，經過洗牌後，理論上也應該會在中間位置，我們試著對此作驗證。

由上述證明可知，若要收斂在同一張，則每堆張數不能是偶數，故令每堆張數 k=2d+1，d 為正整數，我們去觀察中間那一張，意即第 d+1 張，是否經過洗牌後還會在中間的位置。

當 x=d+1，則 $d<\frac{2k-x}{3}=\frac{4d+2-d-1}{3}=d+\frac{1}{3}<d+1$，代表第 d+1 張的牌洗牌後會在第 d+1 張

接下來我們將牌分成兩堆，第一堆是第 1 張到第 d 張，第二堆為第 d+2 張到第 2d+1 張，我們想試著證這兩堆的每一張經過洗牌後，都會向中間收斂，意即每次洗牌後的位置都會比洗牌前的位置更靠近第 d+1 張

3.第 1 張到第 d 張的變化情形

每堆有 2d+1 張，$1\le x\le d$ 時，$\frac{2k-x}{3}=\frac{4d+2-x}{3}$

當 x=d 時，$d<\frac{4d+2-d}{3}=d+\frac{2}{3}<d+1$，即第 d 張的牌在洗牌後會移到第 d+1 張，

所以當 $1\le x\le d$ 時，$d<\frac{4d+2-d}{3}<\frac{4d+2-x}{3}<\frac{4d+2-1}{3}<\frac{6d+3}{3}=2d+1$，代表位置在第 d+1 張前的牌洗牌後會移至第 d+1 張後

若 $b\le\frac{4d+2-x}{3}<b+1$，則第x張的牌洗牌後會到第b+1張，依上述結論，第b+1張會在第d+1張後，我們希望能證明每次洗牌後的位置會往d+1張收斂，意即每次洗牌後的位置和d+1的距離會越來越小，所以我們現在的目標為證明

$b+1-(d+1)<d+1-x$

(pf)假設 $b+1-(d+1)\ge d+1-x$，則 $x\ge 2d+1-b$

又 $2d+1-b\ge 2d+1-\frac{4d+2-x}{3}$ ⇒ $x\ge 2d+1-\frac{4d+2-x}{3}$ ⇒ $x\ge d+\frac{1}{2}$

但和 $1\le x\le d$ 矛盾，所以當 $1\le x\le d$ 時，$b+1-(d+1)<d+1-x$ 得證

由上述討論可得知當 $1\le x\le d$ 時，洗牌後的位置會移至第d+1張後，且比原來的位置更接近第d+1張

4.第d+2張到第2d+1張的變化情形

每堆有2d+1張，當 $d+2\le x\le 2d+1$ 時，$\frac{2k-x}{3}=\frac{4d+2-x}{3}$

當x=d時，$d<\frac{4d+2-d}{3}=d+\frac{2}{3}<d+1$，即第d張的牌在洗牌後會移到第d+1張，

所以當 $d+2\le x\le 2d+1$ 時，$0<\frac{4d+2-(2d+1)}{3}<\frac{4d+2-x}{3}<\frac{4d+2-(d+2)}{3}<\frac{3d}{3}=d$，

代表位置在第d+1張後的牌洗牌後會移至第d+1張前

若 $b\le\frac{4d+2-x}{3}<b+1$，則第x張的牌洗牌後會到第b+1張，依上述結論，第b+1張會在第d+1張前，我們現在的目標為證明 $d+1-(b+1)<x-(d+1)$

(pf)假設 $d+1-(b+1)\ge x-(d+1)$，則 $x\le 2d+1-b$

又 $2d+1-b<2d+1+1-\frac{4d+2-x}{3}$ ⇒ $x<2d+1+1-\frac{4d+2-x}{3}$ ⇒ $x<d+2$

但和 $d+2\le x\le 2d+1$ 矛盾，所以當 $d+2\le x\le 2d+1$ 時，$d+1-(b+1)<x-(d+1)$ 得證

由上述討論可得知當 $d+2\le x\le 2d+1$ 時，洗牌後的位置會移至第d+1張前，且比原來的位置更接近第d+1張

若$b\le\frac{4d+2-x}{3}<b+1$，則第x張的牌洗牌後會到第b+1張，依上述結論，第b+1張會在第d+1張後，我們希望能證明每次洗牌後的位置會往d+1張收斂，意即每次洗牌後的位置和d+1的距離會越來越小，所以我們現在的目標為證明

$b+1-(d+1)<d+1-x$

(pf)假設$b+1-(d+1)\ge d+1-x$，則$x\ge 2d+1-b$

又$2d+1-b\ge 2d+1-\frac{4d+2-x}{3}\Rightarrow x\ge 2d+1-\frac{4d+2-x}{3}\Rightarrow x\ge d+\frac{1}{2}$

但和$1\le x\le d$矛盾，所以當$1\le x\le d$時，$b+1-(d+1)<d+1-x$得證

由上述討論可得知當$1\le x\le d$時，洗牌後的位置會移至第d+1張後，且比原來的位置更接近第d+1張

4.第d+2張到第2d+1張的變化情形

每堆有2d+1張，當$d+2\le x\le 2d+1$時，$\frac{2k-x}{3}=\frac{4d+2-x}{3}$

當x=d時，$d<\frac{4d+2-d}{3}=d+\frac{2}{3}<d+1$，即第d張的牌在洗牌後會移到第d+1張，

所以當$d+2\le x\le 2d+1$時，$0<\frac{4d+2-(2d+1)}{3}<\frac{4d+2-x}{3}<\frac{4d+2-(d+2)}{3}<\frac{3d}{3}=d$，代表位置在第d+1張後的牌洗牌後會移至第d+1張前

若$b\le\frac{4d+2-x}{3}<b+1$，則第x張的牌洗牌後會到第b+1張，依上述結論，第b+1張會在第d+1張前，我們現在的目標為證明$d+1-(b+1)<x-(d+1)$

(pf)假設$d+1-(b+1)\ge x-(d+1)$，則$x\le 2d+1-b$

又$2d+1-b<2d+1+1-\frac{4d+2-x}{3}\Rightarrow x<2d+1+1-\frac{4d+2-x}{3}\Rightarrow x<d+2$

但和$d+2\le x\le 2d+1$矛盾，所以當$d+2\le x\le 2d+1$時，$d+1-(b+1)<x-(d+1)$得證

由上述討論可得知當$d+2\le x\le 2d+1$時，洗牌後的位置會移至第d+1張前，且比原來的位置更接近第d+1張

(三)洗牌次數

我們由前面的研究結果可知每一次洗牌後，位置會比原來的位置更靠近第d+1張，由此發現離第d+1張最遠的是第1張和最後一張，距離的是d張，所以不論目標牌在那一個位置，最多洗d次就能讓目標牌位置到第d+1張，現在我們試著以數個實例來驗證我們的想法，整理後如下表【表6-1】所示：

【表6-1】洗牌次數(一堆k張分3堆)

收斂情形 / 牌堆數目		洗牌次數	d	洗牌次數≤d
k	n			
5	3	2	2	成立
7	3	2	3	成立
9	3	3	4	成立
11	3	3	5	成立
13	3	3	6	成立
15	3	3	7	成立

註：1. k=2d+1。k和d為正整數。

2.若k為奇數，洗牌次數指不論目標牌在那一張，最多要洗幾次才能保證目標牌洗牌完後一定會在第d+1張

柒、結論

一、每堆7張分三堆

(一)洗牌後位置的規律

若一堆有7張，目標牌在第x張，x為正整數，$1\le x\le 7$，當$a\le\frac{14-x}{3}<a+1$，位置第x張的牌下次洗牌後會到第a+1張

(二)收斂情形

由【表4-3】所示，我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第4張，意即整理牌後的第11張，且剛好是牌堆正中間的位置。

(三)洗牌次數

陸、討論

根據研究的結果我們發現，只要我們事先決定好每堆的張數，再運用我們得到的發現，就可以知道我們所選出的目標牌洗牌後的位置，觀眾們也自然而然會被魔術師玩弄於股掌之上了，以下就是我們對於此研究結果之相關討論。

一、每堆7張分三堆

(一)洗牌後位置的規律

若一堆有7張，目標牌在第x張，x為正整數，$1\le x\le 7$，當$a\le\frac{14-x}{3}<a+1$，位置第x張的牌下次洗牌後會到第a+1張

(二)收斂情形

由【表4-3】所示，我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第4張，意即整理牌後的第11張，且剛好是牌堆正中間的位置，我們試著由此來推演到每堆k張分三堆。

(三)洗牌次數

依照我們得到的結論可知，每一次洗牌後的位置都會比原位置更接近第4張，由此可知，第1和第7張離第4張最遠，最多要洗三次才會到第4張，但由【表4-3】所示，我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第4張，次數比我們所想的還要少！

二、每堆k張分三堆($k\ge 2$，k為正整數)

(一)洗牌後位置的規律

每一堆牌有k張，若目標牌在第x張，$1\le x\le k$，當$a\le\frac{2k-x}{3}<a+1$，位置第x張的牌下次洗牌後會到第a+1張

(二)收斂情形

1.當牌堆是偶數(2b)張牌時，洗牌後不會收斂在同一張，但會收斂在第b和第b+1張

2.當牌堆是奇數(2d+1)張時，d為正整數，目標牌不論在那一張，每次洗牌後的位置都會往第d+1張牌收斂，最後目標牌一定會在第d+1張牌的位置，所以當把牌堆上以後，我們可以確定目標牌位置會在第k+d+1張

由【表4-3】所示，我們發現從第二次洗牌後，不論一開始在牌堆的那一張，最後都會收斂到第4張！

二、每堆k張分三堆($k\ge 2$，k為正整數)

(一)洗牌後位置的規律

每一堆牌有k張，若目標牌在第x張，$1\le x\le k$，當$a\le\frac{2k-x}{3}<a+1$，位置第x張的牌下次洗牌後會到第a+1張

(二)收斂情形

1.當牌堆是偶數(2b)張牌時，洗牌後不會收斂在同一張，但會收斂在第b和第b+1張

2.當牌堆是奇數(2d+1)張時，d為正整數，目標牌不論在那一張，每次洗牌後的位置都會往第d+1張牌收斂，最後目標牌一定會在第d+1張牌的位置，所以當把牌堆上以後，我們可以確定目標牌位置會在第k+d+1張

(三)洗牌次數

不論目標牌在那一個位置，最多洗d次就能讓目標牌位置到第d+1張

三、未來展望

(一)未來研究可朝每堆k張分n堆時來作研究。

(二)本研究中洗牌規則皆是將目標堆放中間，未來可朝目標堆在其他疊作研究。

(三)本研究中分的每堆牌數皆相同，未來可以由每堆牌數不盡相同時作研究。

(四)未來可朝最少洗牌次數才會收斂到同一張為主題作研究。

(五)可試著設計更多規則與限制，增添遊戲樂趣。

捌、參考資料及其他

一、【陳民芳、陳惠琦】：第46屆的全國中小學數學科科展參賽作品【Magic Poker－撲克牌遊戲分析】

二、康軒版國中數學第2冊（1下）。康軒書局企業股份有限公司。民國107年2月三版三刷。

三、南一版國中數學第5冊（3上）。南一書局企業股份有限公司。民國106年8月三版。