中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030407

透視法中的尺規作圖

學校名稱：臺中市立漢口國民中學

作者：	指導老師：
國二 吳柏燁	陳嘉祥 陳麒任

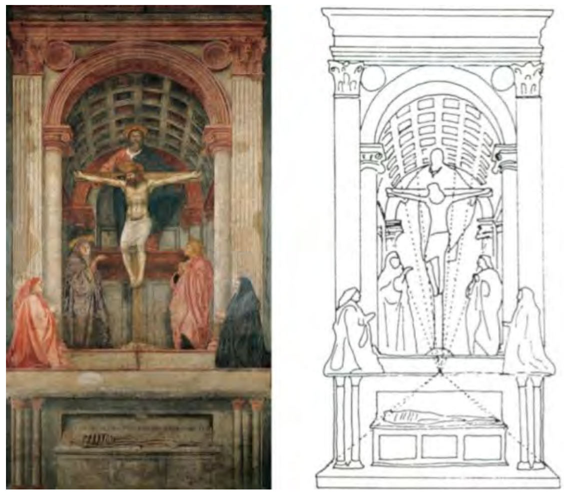
關鍵詞：尺規作圖、透視法、圓錐曲線

摘要

透視法在建築圖學上是常被使用的方法，例如一點透視、兩點透視、三點透視等。透視法在文藝復興時期對繪畫也產生重要的影響，例如馬薩喬的「聖三位一體」。

我試著不使用幾點透視的看法，而是對透視法建立一個模型，再根據這個模型中得到的性質，去進行一般化情形的尺規作圖，並對透視法中常用的理論進行驗證。

作品說明書中所有的幾何圖形，都是利用 Geogebra 自行繪製而成。



馬薩喬，聖三位一體

Masaccio, Holy Trinity, 1426 ~ 1428

福音聖母教堂，佛羅倫斯，義大利

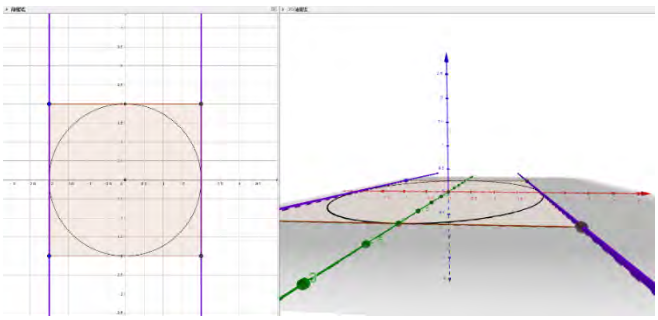
（圖片來源：參考資料九）

壹、 研究動機

在課堂上使用 Geogebra 製作列車在山洞前進的模擬動態圖時，我產生了一個疑問，這個動態圖究竟像不像，也就是我需要解決一個問題，什麼叫做「像」？

為了解決這個問題，我搜尋了畫家是怎麼描繪他們看到的世界。我發現在繪畫中，畫家使用透視法來呈現立體的事物，其中「平行線會交於一點」被視為真理直接使用，但是我卻對這個結論抱持懷疑。因此，建立一個可以檢驗透視法理論是否正確的方法，以及將透視法以數學來描述，就成為我想研究的課題。

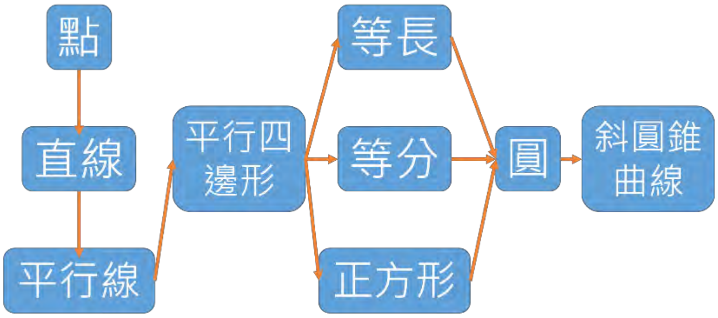
我發現在 Geogebra 中，3D 繪圖區是可以選擇成透視法的形式，如下圖。左邊的 2D 繪圖區包含了平行線、正方形和圓，右邊的 3D 繪圖區則是它們的透視圖。這三者就是我研究的對象。



貳、 研究目的

一、檢驗透視法中「平行線交於一點」是否正確。

二、建立透視法的尺規作圖規則，並以透視法的尺規作圖作平行線、正方形、圓的透視圖。



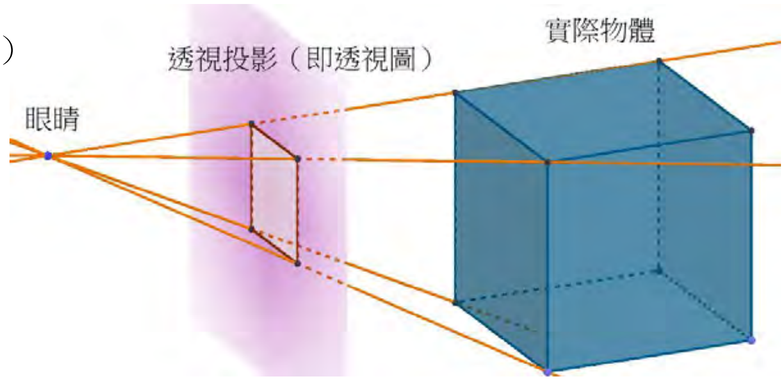
參、 研究設備及器材

自由軟體 Geogebra Classic、圓規、直尺。

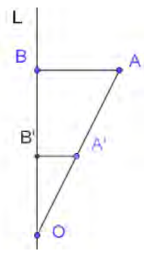
肆、 研究過程或方法

一、透視原理：透視法是一種把立體三維空間的形象表現在二維平面上的方法，如下圖。

（改寫自參考資料七）

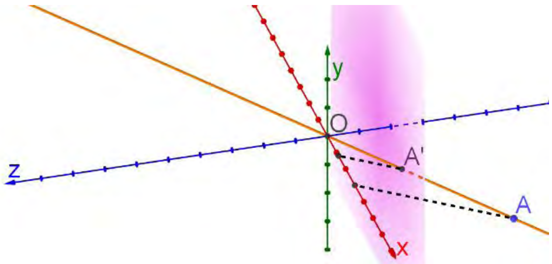


二、透視投影坐標：為了簡化透視投影情況，設眼睛為一點，稱為**視點**，坐標為$O(0,0,0)$。



(一) 首先從一個幾何問題著手。如右圖，O在直線L上，$\overline{AB}$、$\overline{A'B'}$分別垂直L於B、B'，則$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$。

(二) 如右下圖，設$A(x,y,z)$，$z<0$，$\overleftrightarrow{OA}$（稱為**投影線**）交平面$z=-a$於A'，則$A'(-\dfrac{ax}{z},-\dfrac{ay}{z},-a)$。



(三) 承第(二)點，如果假設投影的**投影面**（Picture Plane，符號為 PP）為$z=-1$，則$A'(-\dfrac{x}{z},-\dfrac{y}{z},-1)$。因為我是使用 Geogebra 進行猜測、驗證與作圖，而 Geogebra 是使用右手定則的系統，為了後續的一致性，投影面採用$z=-1$而不是$z=1$。

(四) 由第(三)點，為了區別實物與透視圖，透視圖的坐標以中括號表示，即實物上的 $A(x,y,z)$ 透視圖為 $A'[-\frac{x}{z},-\frac{y}{z}]$。而且在後續的命題 1 至命題 17 中，我使用 A、B、C…代表空間中實物上的點，分別以 A'、B'、C'…代表在透視圖上對應的點。

(五) 由投影坐標可知，投影點 A' 是 A 的函數（當 $z\le -1$），但因為同一條投影線上有無限多點，所以 A 不是 A' 的函數。但是如果只限於同一個和投影線相交（不重合）的平面上的話，因為直線和平面恰交於一點，所以可以確定唯一的一點 A。

(六) 由模型可知，在 PP 上的圖形，其透視圖即為圖形本身。

三、直線的透視投影：設空間中一直線參數式 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, t\in\mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$。

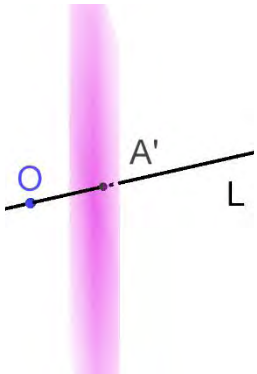
如果只考慮 $z\le -1$ 的情況，也就是 PP 中，與視點不同側的部份，

則透視投影後的參數式為 $\begin{cases} X = -\dfrac{x_0+at}{z_0+ct} \\ Y = -\dfrac{y_0+bt}{z_0+ct} \end{cases}, t\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \begin{cases} (cX+a)t = -z_0X - x_0 \\ (cY+b)t = -z_0Y - y_0 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} (cX+a)(cY+b)t = (-z_0X-x_0)(cY+b) \\ (cY+b)(cX+a)t = (-z_0Y-y_0)(cX+a) \end{cases}, t\in\mathbb{R}$，化簡後可得

$(cy_0 - bz_0)X + (az_0 - cx_0)Y + (ay_0 - bx_0) = 0$ ……………………………………………1-1 式

另外還有一個特殊的情況：通過視點的直線，即投影線。如右圖，過 O 點的直線 L 透視圖為一點 A'。為了簡化透視圖的討論情形，後續不特別討論這一個特殊情形。



由上面討論可知，空間中的直線透視投影後仍為一直線，方程式為 1-1 式。

四、兩平行線的透視投影：

設任意兩條平行線 L、M，方向向量為 $\vec{v}=(a,b,c)$，分別取 L、M 上一點 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，$z_1\le -1$，$z_2\le -1$，可知 $\overline{AB}$ 不平行 (a,b,c)，設 L、M 在同一平面 E 上。

則兩直線參數式為 $L:\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt, t\in\mathbb{R} \\ z = z_1 + ct \end{cases}$，$M:\begin{cases} x = x_2 + as \\ y = y_2 + bs, s\in\mathbb{R} \\ z = z_2 + cs \end{cases}$

由 1-1 式可知，經透視投影後為兩直線，方程式分別為

$L':(cy_1-bz_1)X+(az_1-cx_1)Y+(ay_1-bx_1)=0$，

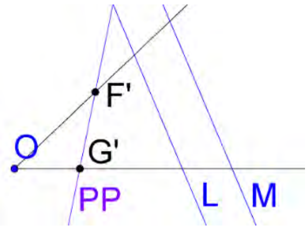
$M':(cy_2-bz_2)X+(az_2-cx_2)Y+(ay_2-bx_2)=0$

(一) 若 $(cy_1-bz_1):(az_1-cx_1)\neq(cy_2-bz_2):(az_2-cx_2)$，則 L' 和 M' 相交於一點。

(二) 若比例式各項都不為 0 且 $(cy_1-bz_1):(az_1-cx_1)=(cy_2-bz_2):(az_2-cx_2)$，化簡後得

$c[a(y_1z_2-y_2z_1)-b(x_1z_2-x_2z_1)+c(x_1y_2-x_2y_1)]=0$，

即 $c\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$



1. 若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$，代表三向量 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\vec{v}$ 在同一平面上，也就是 O 在平面 E 上。如右圖，此時 L、M 的透視投影圖形為二重合直線，即 $\overleftrightarrow{F'G'}$。

2. 若 $c=0$，則兩平行線方向向量為 $(a,b,0)$，且 $(a,b,0)\cdot(0,0,1)=0$，即 L、M 平行 PP。透視投影後 $L':-bz_1X+az_1Y+(ay_1-bx_1)=0$，$M':-bz_2X+az_2Y+(ay_2-bx_2)=0$

   所以 L、M 平行 PP 時，透視圖為二平行直線或二重合直線。

   其中若 L' 和 M' 為二重合直線時，$z_1:z_2=(ay_1-bx_1):(ay_2-bx_2)$，

   化簡可得 $z_2(ay_1-bx_1)-z_1(ay_2-bx_2)=0$，即 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$，

   也就是 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\vec{v}$ 三向量共面，即 O 在平面 E 上。

(三) 若 (az_1-cx_1) 或 (az_2-cx_2) 其中之一為 0，則 L' 和 M' 相交於一點，與情形(一)相同。

(四) 若 $az_1-cx_1=0$ 且 $az_2-cx_2=0$，則 $x_1:z_1=x_2:z_2=a:c$，

設 $x_1=ak_1$，$z_1=ck_1$，$x_2=ak_2$，$z_2=ck_2$，$k_1k_2\neq0$，

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ ak_1 & y_1 & ck_1 \\ ak_2 & y_2 & ck_2 \end{vmatrix}=k_1k_2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & \frac{y_1}{k_1} & c \\ a & \frac{y_2}{k_2} & c \end{vmatrix}=0$$，O 在平面 E 上。

此時 L、M 透視投影圖形為二重合直線 $X=-\dfrac{a}{c}$。

五、綜合第四點的討論可以知道，兩平行線透視圖共有三種情形：

(一) O 在平面 E 上：為二重合直線。因為 O 在平面 E 上時，平面上實物的透視圖都是直線（或直線的一部份），所以後面不特別討論視點 O 在平面上的情形。

(二) L、M 平行 PP：為二平行直線。

(三) 其他：相交於一點。

六、任意一組平行線會交於一點：如果不平行 PP 上的情況，由第五點的結論已知兩條平行線會交於一點，那麼同一組平行線是否會交於同一點？

(一) 設任意三條不平行 PP 的平行線 L_1、L_2、L_3，方向向量為 (a,b,c)，$c \neq 0$，分別取三條直線參數式為

$$L_1:\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt, t \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + ct \end{cases}，L_2:\begin{cases} x = x_2 + as \\ y = y_2 + bs, s \in \mathbb{R} \\ z = z_2 + cs \end{cases}，L_3:\begin{cases} x = x_3 + ar \\ y = y_3 + br, r \in \mathbb{R} \\ z = z_3 + cr \end{cases}$$

經透視投影後透視圖方程式分別為

$L_1':(cy_1 - bz_1)X + (az_1 - cx_1)Y + (ay_1 - bx_1) = 0$，

$L_2':(cy_2 - bz_2)X + (az_2 - cx_2)Y + (ay_2 - bx_2) = 0$，

$L_3':(cy_3 - bz_3)X + (az_3 - cx_3)Y + (ay_3 - bx_3) = 0$，

由第五點可知，L_1'、L_2'、L_3'互不平行。

(二) 如果 a、b 不全為 0，我們設 $a \neq 0$，

$$\begin{vmatrix} cy_1 - bz_1 & az_1 - cx_1 & ay_1 - bx_1 \\ cy_2 - bz_2 & az_2 - cx_2 & ay_2 - bx_2 \\ cy_3 - bz_3 & az_3 - cx_3 & ay_3 - bx_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} acy_1 - abz_1 & az_1 - cx_1 & ay_1 - bx_1 \\ acy_2 - abz_2 & az_2 - cx_2 & ay_2 - bx_2 \\ acy_3 - abz_3 & az_3 - cx_3 & ay_3 - bx_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a}\begin{vmatrix} acy_1 - abz_1 + b(az_1 - cx_1) - c(ay_1 - bx_1) & az_1 - cx_1 & ay_1 - bx_1 \\ acy_2 - abz_2 + b(az_2 - cx_2) - c(ay_2 - bx_2) & az_2 - cx_2 & ay_2 - bx_2 \\ acy_3 - abz_3 + b(az_3 - cx_3) - c(ay_3 - bx_3) & az_3 - cx_3 & ay_3 - bx_3 \end{vmatrix} = 0$$

又 L_1'、L_2'、L_3'互不平行，因此我們可以得知 L_1'、L_2'、L_3'三線共點。

(三) 如果 a、b 皆為 0，也就是垂直 PP 的三條直線，則透視投影後的方程式為

$L_1': y_1X - x_1Y = 0$，$L_2': y_2X - x_2Y = 0$，$L_3': y_3X - x_3Y = 0$

三條直線顯然有共同交點$[0,0]$，我們一樣可以得知 L_1'、L_2'、L_3'三線共點。

(四) 由前面的討論可以得知，不平行 PP 的任意一組平行線透視投影後交於同一點，我採用繪畫中的名稱，把這一點稱為**消失點**（Vanishing Point，符號為 VP），其中所

有垂直 PP 的直線消失點為$[0,0]$。

七、如果把平行 PP 的直線（或線段）稱為**原線**，把不平行 PP 的直線稱為**變線**，則

(一) 同一組互相平行的原線，其透視圖仍然平行。

(二) 同一組互相平行的變線，其透視圖（含延長線）相交於一點。

(三) 空間中在 PP 上的直線，圖形本身即為其透視圖，且同一組平行線的透視圖仍然平行，所以我把在 PP 上的直線歸類為原線。

八、同一平面上的消失點共線：給定空間中某一平面和 PP 的交線上相異二點$A(x_1,y_1,-1)$、$B(x_2,y_2,-1)$，以及平面上不平行 PP 的三組方向向量$\overline{v_1}=(a,b,c)$，$c\neq 0$，$\overline{v_2}=\overline{v_1}+h\overline{AB}$，$\overline{v_3}=\overline{v_1}+k\overline{AB}$，$h,k\in\mathbb{R}$，$hk\neq 0$，$h\neq k$。可以得到三組通過$A$、$B$兩點且相異的平行線$L_1$和$L_2$、$M_1$和$M_2$、$N_1$和$N_2$，透視圖為三組分別相交於一點的直線，其方程式分別為：

$$\begin{cases} L_1':(cy_1+b)X+(-a-cx_1)Y+(ay_1-bx_1)=0 \\ L_2':(cy_2+b)X+(-a-cx_2)Y+(ay_2-bx_2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1':(cy_1+b+hy_2-hy_1)X+(-a-hx_2+hx_1-cx_1)Y+(ay_1+hx_2y_1-bx_1-hx_1y_2)=0 \\ M_2':(cy_2+b+hy_2-hy_1)X+(-a-hx_2+hx_1-cx_2)Y+(ay_2+hx_2y_1-bx_2-hx_1y_2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1':(cy_1+b+ky_2-ky_1)X+(-a-kx_2+kx_1-cx_1)Y+(ay_1+kx_2y_1-bx_1-kx_1y_2)=0 \\ N_2':(cy_2+b+ky_2-ky_1)X+(-a-kx_2+kx_1-cx_2)Y+(ay_2+kx_2y_1-bx_2-kx_1y_2)=0 \end{cases}$$

設L_1'、L_2'交點V_1（即消失點），M_1'、M_2'交點V_2，N_1'、N_2'交點V_3，以及直線方程式

$$\boxed{c(y_1-y_2)X-c(x_1-x_2)Y+a(y_1-y_2)-b(x_1-x_2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{1-2 式}}$$

由直線系可知，1-2 式同時為通過V_1、V_2、V_3三點的直線，也就是**同一不平行 PP 的平面，其消失點共線**，這條直線稱為**消失線**（Vanishing Line）。也就是給定一個不平行 PP 的平面E，已知E和 PP 交線，以及平面上另一組方向向量，可以決定唯一的消失線。

九、不平行 PP 的平面和 PP 相交的直線，透視圖會平行該平面的消失線：

承第八點，$\overleftrightarrow{AB}$為平面與 PP 的交線，而A、B兩點透視投影後坐標分別為$A'[x_1,y_1]$、$B'[x_2,y_2]$，則$\overline{A'B'}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$顯然為 1-2 式的一組方向向量，所以$\overleftrightarrow{A'B'}$和消失線平行或重合。其中如果$O$在平面上，則$\overleftrightarrow{A'B'}$和消失線重合。

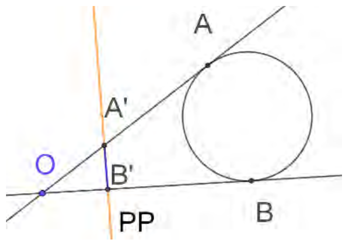
十、圓的透視投影：提到尺規作圖一定會探討圓，以下分成平行 PP 和不平行 PP 來討論。

(一) 平行 PP 的圓：設圓的參數式為$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta, \theta \in \mathbb{R} \\ z = z_0 \end{cases}$。

則透視投影的參數式為$\begin{cases} X = -\dfrac{x_0}{z_0} - \dfrac{r}{z_0}\cos\theta \\ Y = -\dfrac{y_0}{z_0} - \dfrac{r}{z_0}\sin\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$，為圓的參數式。

因此可以得知，平行 PP 的圓透視投影後仍然是圓。

(二) 不平行 PP 的圓：分成視點 O 與圓共面與不共面來討論。



1. 視點 O 與圓共面：如右圖，投影為一線段，即 $\overline{A'B'}$。
2. 視點 O 與圓不共面：此時視點與圓之間形成一個斜圓錐，其中圓錐的母線為投影線，而圓的透視投影就是 PP 和斜圓錐的斜圓錐截痕。

十一、 直角的透視投影：在不平行 PP 的情況下，直角透視投影後不一定是直角。但是如果將條件設定為二條原線互相垂直，則透視投影後仍然垂直；反之亦然。我利用向量的內積來檢查是否垂直，設一原線上二點 $A(x_1, y_1, -h)$、$B(x_2, y_2, -h)$，另一原線上二點 $C(x_3, y_3, -k)$、$D(x_4, y_4, -k)$，$h \ge 1$，$k \ge 1$。透視投影後分別為 $A'[\frac{x_1}{h}, \frac{y_1}{h}]$、$B'[\frac{x_2}{h}, \frac{y_2}{h}]$、$C'[\frac{x_3}{k}, \frac{y_3}{k}]$、$D'[\frac{x_4}{k}, \frac{y_4}{k}]$，$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$，$\overline{CD} = (x_4 - x_3, y_4 - y_3, 0)$，

$\overline{A'B'} = (\frac{x_2 - x_1}{h}, \frac{y_2 - y_1}{h})$，$\overline{C'D'} = (\frac{x_4 - x_3}{k}, \frac{y_4 - y_3}{k})$。

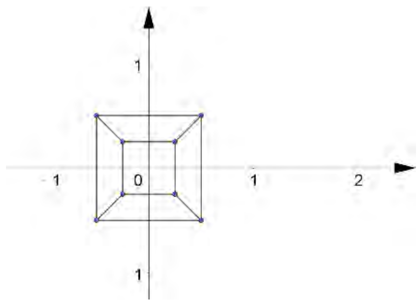
(一) 若 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$：$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) = 0$

$\Rightarrow \frac{(x_2 - x_1)}{h} \cdot \frac{(x_4 - x_3)}{k} + \frac{(y_2 - y_1)}{h} \cdot \frac{(y_4 - y_3)}{k} = 0 \Rightarrow \overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'} = 0$，即 $\overline{A'B'} \perp \overline{C'D'}$。

(二) 若 $\overline{A'B'} \perp \overline{C'D'}$：$\frac{(x_2 - x_1)}{h} \cdot \frac{(x_4 - x_3)}{k} + \frac{(y_2 - y_1)}{h} \cdot \frac{(y_4 - y_3)}{k} = 0$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) = 0 \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$，即 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$。

十二、 利用透視投影的實例：假設視點與 PP 的距離為 25 公分，則 1 單位為 25 公分。



(一) 空間中八點 $(1,1,-2)$、$(1,-1,-2)$、$(-1,-1,-2)$、$(-1,1,-2)$、$(1,1,-4)$、$(1,-1,-4)$ $(1,-1,-4)$、

$(-1,-1,-4)$、$(-1,1,-4)$ 代表一個邊長 50 公分，且位於視點前方 50 公分的一個正立方體。這八個點透視投影後的坐標為 $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$、$[\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]$、$[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]$、$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$、$[\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$、$[\frac{1}{4},-\frac{1}{4}]$、$[-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}]$、$[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$。

(二) 作品主題將著重於透視法的尺規作圖，希望用作圖方法來取代複雜的計算。

伍、 研究結果

一、透視法的尺規作圖：根據前面的討論，可以歸納透視法的尺規作圖規則為

（一）規則一：由任意一點到任意一點可作直線。

（二）規則二：任意線段能無限延伸成一直線。

（三）規則三：同一組互相平行的變線在透視圖中交於同一點；同一組互相平行的原線在透視圖中仍然平行。

二、名詞：下列名詞參考一般繪畫中的使用的名詞。

(一) 視點：觀察者眼睛的位置。

(二) 投影面：在眼睛與物體之間的透明平面，用以形成透視圖的平面。

(三) 消失點：不平行 PP 的同一組平行線交於一點，交點稱為消失點。

(四) 消失線：同一平面消失點的連線。

(五) 原線：和 PP 平行的直線。其中 PP 上的直線皆為原線。

(六) 變線：和 PP 不平行的直線。

三、線的性質：性質 1-2 至 1-3 參考一般繪畫中常用的手法整理並寫成數學的敘述，其餘性質則是因後續命題中的需要而找出來的。

(一)性質 1-1：二平行線 L 和 M 形成平面 E，且透視圖為二重合直線，則視點在平面 E 上。

詳細請看「研究過程或方法」的第四點及第五點。

(二)性質 1-2：兩直線交於一點，且兩直線透視圖也交於一點，則兩直線透視圖交點為交點的透視投影。

設兩直線 L_1 和 L_2 交點 $A(x_0,y_0,z_0)$，二直線的方向向量分別為 (a_1,b_1,c_1)，(a_2,b_2,c_2)。

可得透視圖的直線方程式分別為 $L_1':(c_1y_0-b_1z_0)X+(a_1z_0-c_1x_0)Y+(a_1y_0-b_1x_0)=0$ 和

$L_2':(c_2y_0-b_2z_0)X+(a_2z_0-c_2x_0)Y+(a_2y_0-b_2x_0)=0$，$A$ 點透視投影後為 $A'[-\frac{x_0}{z_0},-\frac{y_0}{z_0}]$。

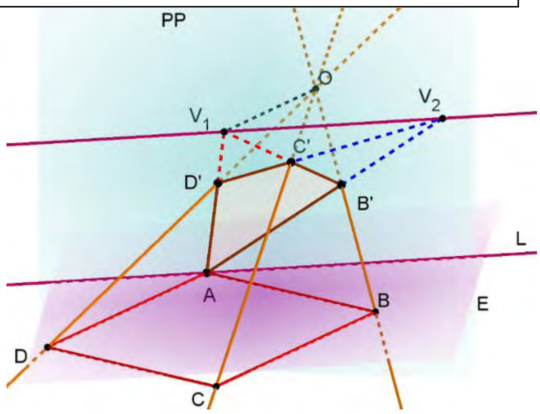
可以發現 A' 同時符合 L_1' 和 L_2' 的方程式，因此 A' 是 L_1' 和 L_2' 的交點。

(三)性質 1-3：同一個不平行 PP 的平面，其消失點共線。

詳細請看「研究過程或方法」的第八點。

(四)性質 1-4：如果平面 E 和 PP 相交於直線 L，直線 L 的透視圖平行平面 E 的消失線。

詳細請看「研究過程或方法」的第九點。以右圖為例，已知平行四邊形 $ABCD$ 的透視圖 $AB'C'D'$，$ABCD$ 在平面 E 上，PP 和 E 相交於直線 L，平面 E 的消失線 $\overleftrightarrow{V_1V_2}$。因為在 PP 上的圖形，其透視圖為圖形本身，則 L 和 $\overleftrightarrow{V_1V_2}$ 平行。



(五)性質 1-5：已知平面 E（視點 O 不在平面 E 上）和 PP 相交於直線 L，M 為平面 E 上另一直線。

1. 若 M 為原線，則透視圖 M' 平行交線 L 的透視圖 L'，且 M' 平行消失線。
2. 若透視圖 M' 平行消失線，則 M 必為原線。

1. 設 L 透視投影後為 L'，M 透視投影後為 M'，L、M 為平面 E 上兩平行原線，則 $M'//L'$（規則三）。由性質 1-4 知，L' 平行消失線，則 M' 平行消失線。
2. 假設 M 為變線。

   (1) 已知直線 L 和 M 皆在平面 E 上，則 L 和 M 相交於一點 A。

   (2) 已知 M' 平行消失線，且 L' 也平行同一條消失線（性質 1-4）。

   (3) 而 A 的透視圖 A' 同時在 L' 和 M' 上，則 L' 和 M' 為二重合直線。

   (4) 由性質 1-1 知，視點 O 在平面 E 上，與已知矛盾。

   (5) 所以假設錯誤，M 為原線。

(六)性質 1-6：在 PP 上的線段在透視投影後長度不變。

設 PP 上兩點 $A(x_1,y_1,-1)$、$B(x_2,y_2,-1)$，透視投影後為 $A'[x_1,y_1]$，$B'[x_2,y_2]$，

則 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\overline{A'B'}$。

(七)性質 1-7：在同一個平行 PP 的平面上：

1. 任意兩個等長線段透視投影後仍然等長；2. 透視投影後等長的線段，原線段也等長。

設平面方程式為 $z=-k$ ，$k\ge 1$，

平面上四點 $A(x_1,y_1,-k)$、$B(x_2,y_2,-k)$、$C(x_3,y_3,-k)$、$D(x_4,y_4,-k)$，

透視投影後四點坐標為 $A'[\frac{x_1}{k},\frac{y_1}{k}]$、$B'[\frac{x_2}{k},\frac{y_2}{k}]$、$C'[\frac{x_3}{k},\frac{y_3}{k}]$、$D'[\frac{x_4}{k},\frac{y_4}{k}]$，

1. 如果 $\overline{AB}=\overline{CD}$，則 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}$，

$$\overline{A'B'}=\frac{1}{k}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{1}{k}\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}=\overline{C'D'}$$

2. 如果 $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$，則 $\frac{1}{k}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{1}{k}\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}$

$$\Rightarrow\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}\Rightarrow\overline{AB}=\overline{CD}$$

(八)性質 1-8：若任意二原線互相垂直，透視投影後仍然互相垂直；若任意二原線透視投影後互相垂直，則二原線互相垂直。

詳細請看「研究過程或方法」的第十一點。

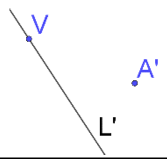
(九)性質 1-9：任意四邊形都可以視為平行四邊形的透視圖。

1. 兩組對邊平行：可視為兩組互相平行的原線所形成的平行四邊形透視圖。
2. 一組對邊平行：可視為一組對邊互相平行的原線，另一組為互相平行的變線。
3. 兩組對邊都不平行：可視為相異兩組互相平行的變線。

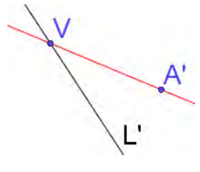
四、基本技法：

(一) 平行線：

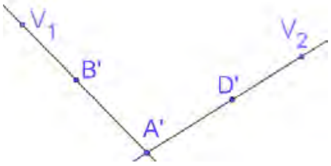
命題 1：已知一直線 L 的透視圖 L' 及 L' 的消失點 V，過 A' 點作 L 平行線的透視圖。



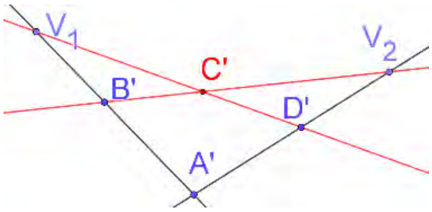
作法：連接 $\overleftrightarrow{VA'}$，則 $\overleftrightarrow{VA'}$ 即為所求（規則三）。



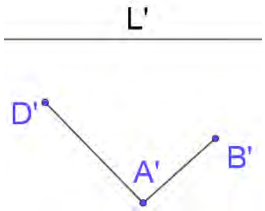
命題 2：已知二線段的透視圖$\overline{A'B'}$、$\overline{A'D'}$，V_1、V_2分別為$\overleftrightarrow{A'B'}$、$\overleftrightarrow{A'D'}$上的消失點，作平行四邊形$ABCD$的透視圖$A'B'C'D'$。



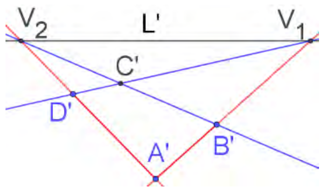
作法：作$\overleftrightarrow{V_1D'}$、$\overleftrightarrow{V_2B'}$，設兩直線交於$C'$，則四邊形$A'B'C'D'$即為所求。



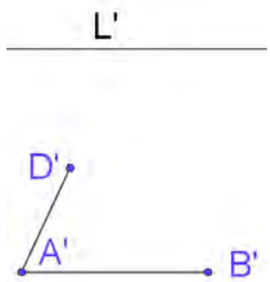
命題 3：已知透視圖中，同一平面上二線段$\overline{A'B'}$、$\overline{A'D'}$及消失線L'，其中$\overline{A'B'}$、$\overline{A'D'}$皆為變線的透視圖，作平行四邊形$ABCD$的透視圖$A'B'C'D'$。



作法：延長$\overleftrightarrow{A'B'}$、$\overleftrightarrow{A'D'}$分別交$L'$於$V_1$、$V_2$，連接$\overleftrightarrow{B'V_2}$、$\overleftrightarrow{D'V_1}$交於$C'$，則四邊形$A'B'C'D'$即為所求。



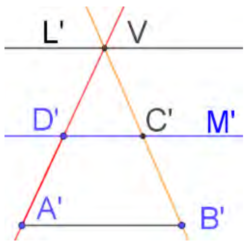
命題 4：已知透視圖中，同一平面上二線段$\overline{A'B'}$、$\overline{A'D'}$及消失線L'，其中$\overline{A'B'}$為原線$\overleftrightarrow{AB}$的透視圖，作平行四邊形$ABCD$的透視圖$A'B'C'D'$。



作法：1. 延長$\overleftrightarrow{A'D'}$交$L'$於$V$。

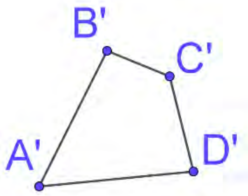
2. 利用一般尺規作圖，過D'作L'的平行線M'。

3. 連接$\overrightarrow{B'V}$交M'於C'，則四邊形$A'B'C'D'$ 即為所求。



(二) 二等分及三等分：引用參考資料二改寫成數學的敘述。

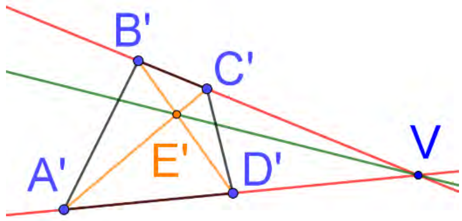
命題 5：已知平行四邊形 $ABCD$ 的透視圖 $A'B'C'D'$，平行四邊形 $ABCD$ 任一邊皆為變線，如果有一直線平行 $\overleftrightarrow{AD}$ 且平分 $\overline{AB}$，求作此直線的透視圖。



作法：1. 連接 $\overline{A'C'}$、$\overline{B'D'}$，設二線段交於 E'。

2. 延長 $\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$，設二直線交於 V。

3. 連接 $\overleftrightarrow{E'V}$，則 $\overleftrightarrow{E'V}$ 即為所求。

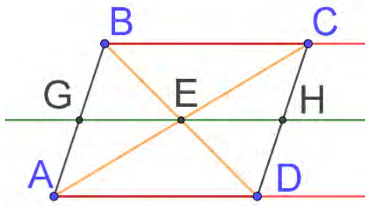


證明：平行四邊形 $ABCD$ 中，如右圖。

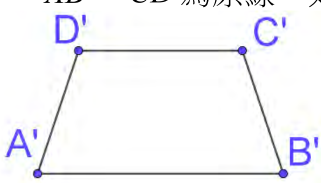
1. 平行四邊形對角線互相平分 $\Rightarrow \overline{BE}=\overline{DE}$。

2. $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 透視圖的消失點為 V，而過 E 且平行 $\overleftrightarrow{AD}$ 的直線 $\overleftrightarrow{EH}$ 分別交 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 於 G、H，則 $\overleftrightarrow{E'V}$ 為 $\overleftrightarrow{EH}$ 的透視圖。

3. $\overline{AG}:\overline{BG}=\overline{DE}:\overline{BE}=1:1$（平行線截比例線段性質），即 $\overleftrightarrow{EH}$ 平分 $\overline{AB}$。

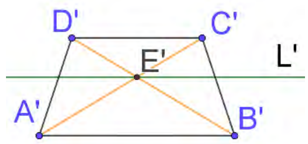


命題 6：已知平行四邊形 $ABCD$ 的透視圖 $A'B'C'D'$，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 為原線，如果有一直線平行 $\overleftrightarrow{AB}$ 且平分 $\overline{AD}$，求作此直線的透視圖。

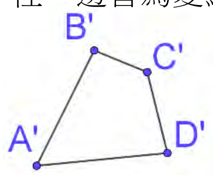


作法：1. 連接 $\overline{A'C'}$、$\overline{B'D'}$，設二線段交於 E'。

2. 過 E' 點作一直線 L' 平行 $\overleftrightarrow{A'B'}$，則 L' 即為所求。



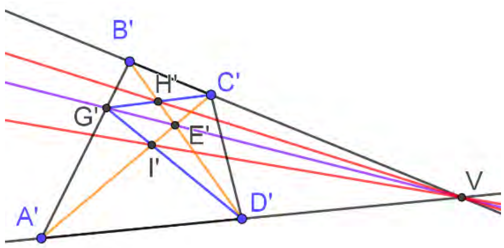
命題 7：已知平行四邊形 $ABCD$ 的透視圖 $A'B'C'D'$，平行四邊形 $ABCD$ 任一邊皆為變線，如果有二直線平行 $\overleftrightarrow{AD}$ 且三等分 $\overline{AB}$，求作二直線的透視圖。



作法：1. 連接 $\overline{A'C'}$、$\overline{B'D'}$，設二線段交於 E'。

2. 延長 $\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$，設二直線交於 V。

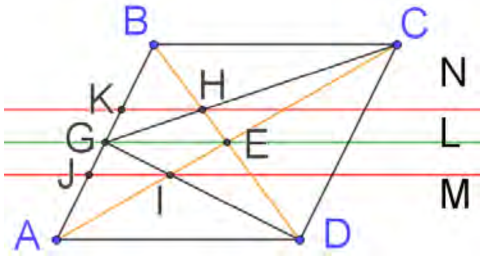
3. 連接 $\overleftrightarrow{E'V}$ 交 $\overline{A'B'}$ 於 G'。



4. 連接$\overline{C'G'}$、$\overline{D'G'}$，設$\overline{C'G'}$、$\overline{D'G'}$分別交$\overline{B'D'}$、$\overline{A'C'}$於H'、I'。

5. 連接$\overleftrightarrow{H'V}$、$\overleftrightarrow{I'V}$，則$\overleftrightarrow{H'V}$、$\overleftrightarrow{I'V}$即為所求。

證明：1. 如右圖，L 為過 E 且平行$\overleftrightarrow{AB}$的直線，則 L 平分 $\overline{AB} \Rightarrow \overline{AG} = \overline{BG}$。(命題 5)



2. $\overline{AE} = \overline{CE}$，$\overline{BE} = \overline{DE}$（對角線互相平分）。

3. 設 M、N 分別為過 I、H 且平行 L 的直線，

M、N 分別交 $\overline{AB}$ 於 J、K。

4. $\overleftrightarrow{E'V}$、$\overleftrightarrow{I'V}$、$\overleftrightarrow{H'V}$ 分別為 L、M、N 的透視圖。

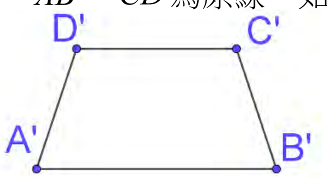
5. $\overline{CG}$ 和 $\overline{BE}$ 為$\triangle ABC$的中線，所以 H 是$\triangle ABC$的重心

$\Rightarrow \overline{BH} = \frac{2}{3}\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BD}$ $\Rightarrow \overline{BK} = \frac{1}{3}\overline{AB}$（平行線截比例線段性質）。

6. 同理可證，$\overline{AJ} = \frac{1}{3}\overline{AB}$。

7. $\overline{AJ} = \overline{JK} = \overline{KB} = \frac{1}{3}\overline{AB}$，即直線 M、N 三等分 $\overline{AB}$。

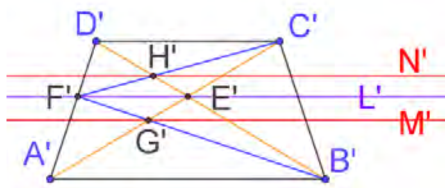
命題 8：已知平行四邊形 $ABCD$ 的透視圖 $A'B'C'D'$，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 為原線，如果有二直線平行 $\overleftrightarrow{AB}$ 且三等分 $\overline{AD}$，求作二直線的透視圖。



作法：1. 連接$\overline{A'C'}$、$\overline{B'D'}$，設二線段交於E'。

2. 利用一般尺規作圖，過E'點作直線L'平行$\overline{A'B'}$交$\overline{A'D'}$於F'。

3. 連接$\overline{B'F'}$、$\overline{C'F'}$。



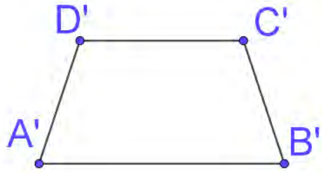
4. 設$\overline{B'F'}$、$\overline{C'F'}$分別交$\overline{A'C'}$、$\overline{B'D'}$於G'、H'。

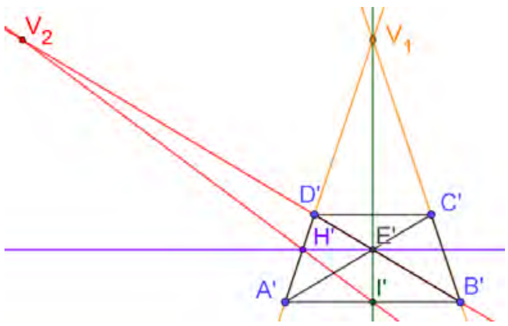
5. 利用一般尺規作圖，分別過G'、H'作直線M'、N'平行L'，則M'、N'即為所求。

(三) n 等分：由第(二)點的討論可知，透視圖的二等分及三等分是可以完成的。事實上，$2^a \times 3^b$ 等分都可以完成，其中 a、b 為非負整數。那麼 5 等分是否可以完成呢？7、11、13 等分是否可以完成呢？如果是 n 等分呢？利用參考資料八，我將 n

等分的作法一般化，在命題 9 至 12 中，說明如何任意等分。

命題 9：已知平行四邊形 $ABCD$ 的透視圖 $A'B'C'D'$，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 為原線，求透視圖中 2 個相異的消失點。





作法：1. 延長 $\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$，設兩直線交於 V_1。

2. 連接 $\overline{A'C'}$、$\overline{B'D'}$，設兩線段交於 E'。

3. 利用一般尺規作圖，過 E' 作 $\overleftrightarrow{H'E'} // \overleftrightarrow{A'B'}$ 交 $\overline{A'D'}$ 於 H'。

4. 連接 $\overleftrightarrow{E'V_1}$ 交 $\overline{A'B'}$ 於 I'。連接 $\overleftrightarrow{B'D'}$、$\overleftrightarrow{H'I'}$，設兩直線交於 V_2。

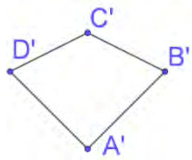
5. 則 V_1、V_2 即為所求。

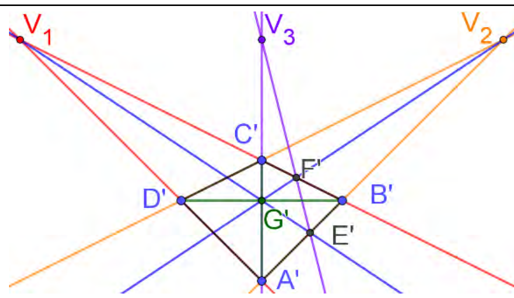
證明：1. $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$ 且 $\overleftrightarrow{A'D'}$ 和 $\overleftrightarrow{B'C'}$ 交於 V_1，所以 V_1 是一個消失點。

2. $\triangle ABD$ 中，H、I 分別為 $\overline{AD}$、$\overline{AB}$ 中點 $\Rightarrow \overleftrightarrow{HI} // \overleftrightarrow{BD}$。

3. $\overleftrightarrow{HI} // \overleftrightarrow{BD}$ 且 $\overleftrightarrow{H'I'}$ 和 $\overleftrightarrow{B'D'}$ 交於 V_2，所以 V_2 是另一個消失點。

命題 10：已知平行四邊形 $ABCD$ 的透視圖 $A'B'C'D'$，平行四邊形 $ABCD$ 任一邊皆為變線，求透視圖中 3 個相異的消失點。





作法：1. 延長 $\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$，設兩直線交於 V_1。

2. 延長 $\overleftrightarrow{A'B'}$、$\overleftrightarrow{C'D'}$，設兩直線交於 V_2。

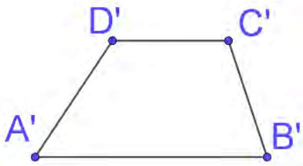
3. 連接 $\overline{A'C'}$、$\overline{B'D'}$，設兩線段交於 G'。

4. 連接 $\overleftrightarrow{V_1G'}$、$\overleftrightarrow{V_2G'}$ 分別交 $\overline{A'B'}$、$\overline{B'C'}$ 於 E'、F'。

5. 連接 $\overline{A'C'}$、$\overleftrightarrow{E'F'}$，設兩直線交於 V_3。

6. 則 V_1、V_2、V_3 即為所求。

命題 11：已知平行四邊形 $ABCD$ 的透視圖 $A'B'C'D'$，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 為原線，如果有四直線平行 $\overleftrightarrow{AB}$ 且五等分 $\overline{AD}$，求作四直線的透視圖。

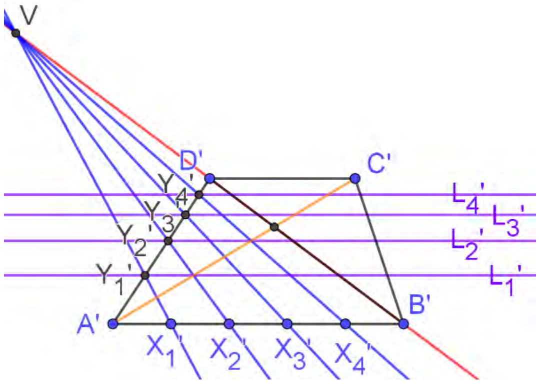


作法：1. 如命題 9，可得 $\overleftrightarrow{B'D'}$ 上的消失點 V。

2. 利用一般尺規作圖，在 $\overline{A'B'}$ 上依序取四點 X_1'、X_2'、X_3'、X_4' 將 $\overline{A'B'}$ 五等分。

3. 連接 $\overleftrightarrow{VX_1'}$、$\overleftrightarrow{VX_2'}$、$\overleftrightarrow{VX_3'}$、$\overleftrightarrow{VX_4'}$ 分別交 $\overline{A'D'}$ 於 Y_1'、Y_2'、Y_3'、Y_4'。

4. 利用一般尺規作圖，分別過 Y_1'、Y_2'、Y_3'、Y_4' 作 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 平行線 L_1'、L_2'、L_3'、L_4'，則 L_1'、L_2'、L_3'、L_4' 即為所求。

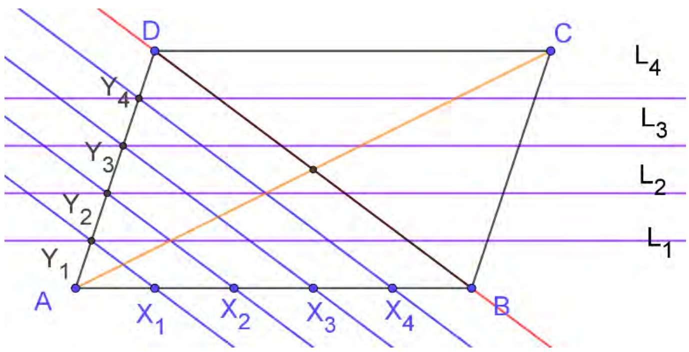


證明：1. 已知 $\overleftrightarrow{AB}$ 為原線，且 $\overline{A'X_1'} = \overline{X_1'X_2'} = \overline{X_2'X_3'} = \overline{X_3'X_4'} = \overline{X_4'B'}$，

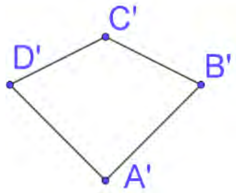
由性質 1-7 可得，$\overline{AX_1} = \overline{X_1X_2} = \overline{X_2X_3} = \overline{X_3X_4} = \overline{X_4B}$。

2. $\triangle ABD$ 中，$\overleftrightarrow{X_1Y_1} // \overleftrightarrow{X_2Y_2} // \overleftrightarrow{X_3Y_3} // \overleftrightarrow{X_4Y_4} // \overleftrightarrow{BD}$，由平行線截比例線段性質可知，

$\overline{AY_1} : \overline{Y_1Y_2} : \overline{Y_2Y_3} : \overline{Y_3Y_4} : \overline{Y_4D} = \overline{AX_1} : \overline{X_1X_2} : \overline{X_2X_3} : \overline{X_3X_4} : \overline{X_4B} = 1:1:1:1:1$，所以 L_1、L_2、L_3、L_4 五等分 $\overline{AD}$。



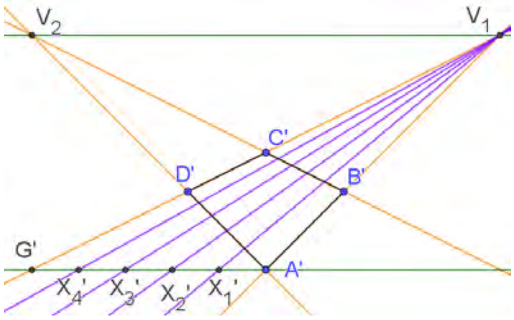
命題 12：已知平行四邊形 $ABCD$ 的透視圖 $A'B'C'D'$，平行四邊形 $ABCD$ 任一邊皆為變線，如果有四直線平行 $\overrightarrow{AB}$ 且五等分 $\overline{AD}$，求作四直線的透視圖。



作法：1. 延長 $\overleftrightarrow{A'B'}$、$\overleftrightarrow{C'D'}$，設兩直線交於 V_1。

2. 延長 $\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$，設兩直線交於 V_2。

3. 連接 $\overleftrightarrow{V_1V_2}$，利用一般尺規作圖，過 A' 作 $\overleftrightarrow{V_1V_2}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{C'D'}$ 於 G'。



4. 利用一般尺規作圖，在 $\overline{A'G'}$ 上依序取四點 X_1'、X_2'、X_3'、X_4' 將 $\overline{A'G'}$ 五等分。

5. 連接 $\overleftrightarrow{V_1X_1'}$、$\overleftrightarrow{V_1X_2'}$、$\overleftrightarrow{V_1X_3'}$、$\overleftrightarrow{V_1X_4'}$ 即為所求。

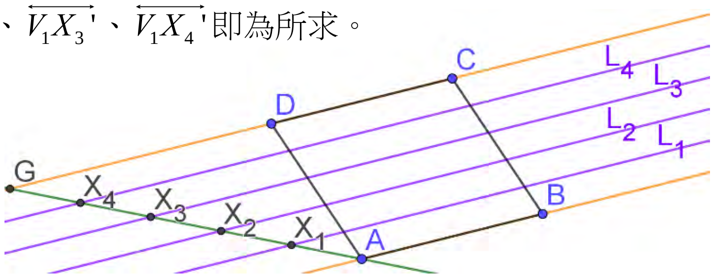
證明：1. 設平行四邊形 $ABCD$ 形成一平面 E，則 $\overleftrightarrow{V_1V_2}$ 為平面 E 透視圖的消失線。

2. $\overleftrightarrow{A'G'} // \overleftrightarrow{V_1V_2} \Rightarrow \overleftrightarrow{A'G'}$ 可視為平面 E 上原線 $\overleftrightarrow{AG}$ 的透視圖。（性質 1-5）

3. $\overline{A'X_1'} = \overline{X_1'X_2'} = \overline{X_2'X_3'} = \overline{X_3'X_4'} = \overline{X_4'G'}$

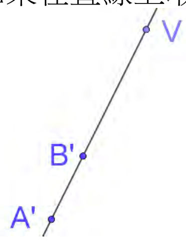
$\Rightarrow \overline{AX_1} = \overline{X_1X_2} = \overline{X_2X_3} = \overline{X_3X_4} = \overline{X_4G}$（性質 1-7）

4. 由平行線截比例線段性質可知，L_1、L_2、L_3、L_4 五等分 $\overline{AD}$，所以 $\overleftrightarrow{V_1X_1'}$、$\overleftrightarrow{V_1X_2'}$、$\overleftrightarrow{V_1X_3'}$、$\overleftrightarrow{V_1X_4'}$ 即為所求。

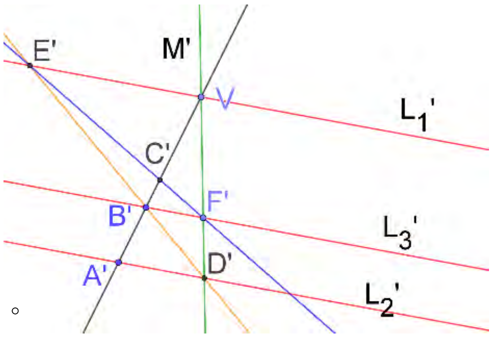


(四) 等長：由性質 1-7 可知，在同一個平行 PP 的平面上，可以使用一般的尺規作圖作等長，那如果是不平行 PP 的平面呢？舉例來說，如果給定道路旁的兩根電線桿，可以畫出下一根等距離的電線桿嗎？給定鐵軌上的兩根枕木，可以畫出下一個嗎？

命題 13：已知一直線的透視圖上二點 A'、B'，以及消失點 V，如果在直線上取一點 C，使 $\overline{AB}=\overline{BC}$，求作透視圖中的 C' 點。



作法：1. 過 V 作一直線 L_1'。



2. 利用一般尺規作圖，分別過 A'、B' 作 L_1' 的平行線 L_2'、L_3'。

3. 過 V 作一直線 M'，分別交 L_2'、L_3' 於 D'、F'。

4. 連接 $\overleftrightarrow{B'D'}$ 交 L_1' 於 E'。

5. 連接 $\overleftrightarrow{E'F'}$ 交 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 於 C'，則 C' 即為所求。

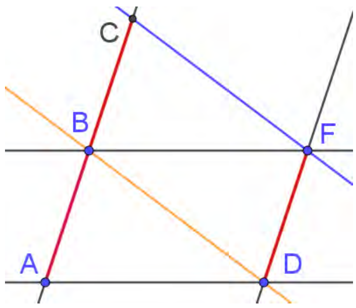
證明：1. L_1' 可以視為 PP 上一直線 L_1 的透視圖，則 L_1 為一原線。

2. $L_1' // L_2' // L_3'$，則 L_1'、L_2'、L_3' 可以視為同一組互相平行的原線 L_1、L_2、L_3 的透視圖。

3. M' 可以視為 $\overleftrightarrow{DF}$ 的透視圖 $\Rightarrow \overleftrightarrow{DF} // \overleftrightarrow{AB}$。

4. $A'B'F'D'$ 為平行四邊形 $ABFD$ 的透視圖 $\Rightarrow \overline{AB}=\overline{FD}$。

5. 設 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{FD}$ 形成平面 E 交 PP 於 L，則透視圖 L' 平行消失線（性質 1-4）。



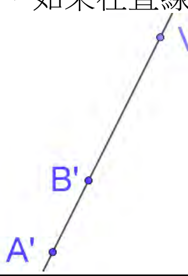
6. 又 $L_1' // L'$（L 和 L_1 都是平面 E 上的原線）且通過消失點 V，所以 L_1' 是平面 E 透視圖的消失線。

7. $\overleftrightarrow{B'D'}$ 和 $\overleftrightarrow{C'F'}$ 交於 L_1' 上一點 $E' \Rightarrow \overleftrightarrow{BD} // \overleftrightarrow{CF}$。

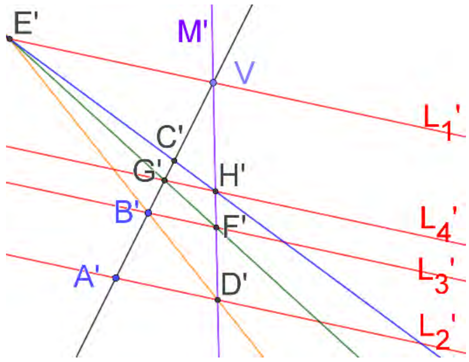
8. $B'C'F'D'$ 為平行四邊形 $BCFD$ 的透視圖 $\Rightarrow \overline{BC}=\overline{FD}$。

9. $\overline{AB}=\overline{FD}=\overline{BC}$，所以 C' 為所求。

命題 14：已知一直線的透視圖上二點 A'、B'，以及消失點 V，如果在直線上取一點 C，使 $\overline{AB}=2\overline{BC}$，求作透視圖中的 C'點。

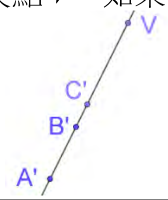


作法：本題採用和命題 13 類似的作法。

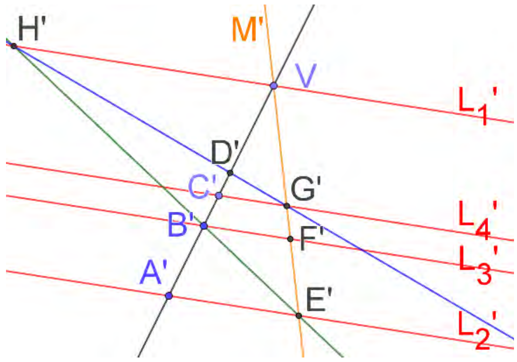


1. 過 V 作一直線 L_1'。
2. 利用一般尺規作圖，分別過 A'、B' 作 L_1' 的平行線 L_2'、L_3'。
3. 過 V 作一直線 M'，分別交 L_2'、L_3' 於 D'、F'。
4. 連接 $\overleftrightarrow{B'D'}$ 交 L_1' 於 E'，再連接 $\overleftrightarrow{E'F'}$ 交 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 於 G'。
5. 利用一般尺規作圖，過 G' 作 L_1' 的平行線 L_4' 交 M' 於 H'。
6. 連接 $\overleftrightarrow{E'H'}$ 交 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 於 C'，C'則即為所求。

命題 15：已知一直線的透視圖中，直線上三點 A'、B'、C'，以及消失點 V，如果在直線上取一點 D，使 $\overline{AB}=\overline{CD}$，求作透視圖中的 D'點。

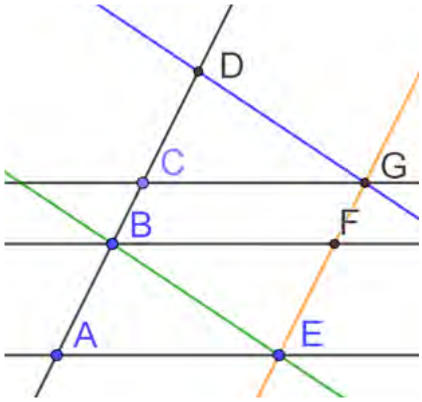


作法：1. 過 V 作一直線 L_1'。



2. 利用一般尺規作圖，分別過 A'、B'、C' 作 L_1' 的平行線 L_2'、L_3'、L_4'。
3. 過 V 作一直線 M'，分別交 L_2'、L_3'、L_4' 於 E'、F'、G'。
4. 連接 $\overleftrightarrow{B'E'}$ 交 L_1' 於 H'。
5. 連接 $\overleftrightarrow{G'H'}$ 交 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 於 D'，則 D'即為所求。

證明：1. 採用和命題 13 類似的證法，可得 L_1' 是 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{EF}$ 所成平面透視圖的消失線。



2. $ABFE$ 是平行四邊形 $\Rightarrow \overline{AB}=\overline{EF}$ 。

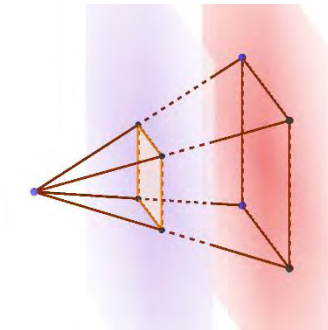
3. $BCGF$ 是平行四邊形 $\Rightarrow \overline{BC}=\overline{FG}$ 。

4. $DBEG$ 是平行四邊形 $\Rightarrow \overline{BD}=\overline{EG}$

$\Rightarrow \overline{CD}=\overline{BD}-\overline{BC}=\overline{EG}-\overline{FG}=\overline{EF}=\overline{AB}$ 。

五、正方形：下面將會說明，多數種類的四邊形都可以視為正方形的透視圖。

(一) 正方形可視為正方形的透視圖：如右圖，正方形平行 PP，則透視圖為正方形。從理論上也可以得知，正方形可以是正方形的透視圖，以下分成三個步驟來討論。



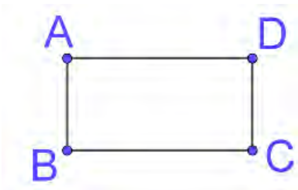
1. 由規則三知，正方形是兩組互相平行原線的透視圖，所以正方形可以視為平行四邊形的透視圖。

2. 因為平行四邊形的四邊都是原線，由性質 1-7 知，這個平行四邊形四邊等長；由性質 1-8 知，這個平行四邊形四個角都是直角。

3. 所以這個平行四邊形可以視為四邊都是原線的正方形的透視圖。

(二) 正方形以外的平行四邊形都不是正方形的透視圖：以下分成長方形和長方形以外的平行四邊形來討論。

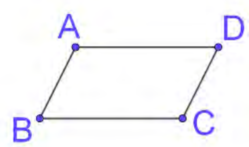
1. 長方形（不含正方形）：如果透視圖為長方形 $ABCD$。



(1) 如果四邊都是原線：則四邊形平行 PP，由性質 1-7 知，$\overline{AB}\neq\overline{BC}$ ，所以原圖形不是正方形。

(2) 如果有任一組對邊不是原線：由規則三知，這一組原線不平行，所以原圖形不是正方形。

2. 長方形以外的平行四邊形：



(1) 如果四邊都是原線：由性質 1-8 知，鄰邊不互相垂直，所以原線不垂直，原圖形不是正方形。

(2) 如果有任一組對邊不是原線：由規則三知，這一組對邊不平行，所以原圖形不是正

方形。

(三) 至少一組對邊不平行的四邊形都可以視為正方形的透視圖：同一個圖形可以是不同圖形的透視圖，以下將試著找出其中一個是正方形，也就是有解。

引理 2-1：平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle A = 90^\circ$，則 $ABCD$ 為長方形。

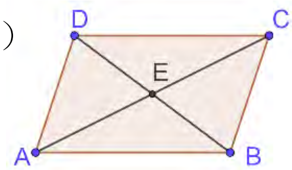
證明：$\overline{AB} // \overline{CD}$，則 $\angle A + \angle D = 180^\circ$（同側內角互補），則 $\angle D = 180^\circ - \angle A = 90^\circ$。

所以 $\angle B = \angle D = 90^\circ$，$\angle C = \angle A = 90^\circ$（平行四邊形對角相等），

即 $ABCD$ 為長方形。

引理 2-2：平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 於 E，則 $ABCD$ 為菱形。

證明：$ABCD$ 是平行四邊形 $\Rightarrow \overline{BE} = \overline{DE}$（平行四邊形對角線互相平分）

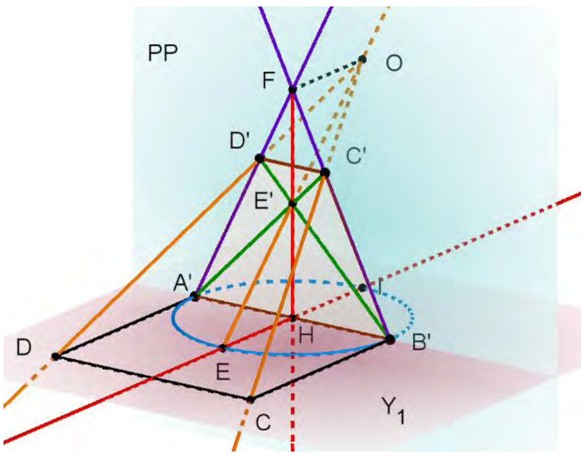


$\overline{AC} \perp \overline{BD} \Rightarrow \angle BEC = \angle DEC = 90^\circ$ 且 $\overline{CE} = \overline{CE}$

所以 $\triangle BEC \cong \triangle DEC$（$SAS$ 全等）$\Rightarrow \overline{BC} = \overline{DC} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{DC} = \overline{AB}$，即 $ABCD$ 是菱形。

接著把透視圖分成以下 3 種情形來討論。參考資料一中已經有了下列情形 1 和情形 2 的作圖，並對情形 2 作了證明，但證明中未考慮情形 3 的部分。我補充了情形 1 的證明，並修正了情形 2 的證明，以及新增了情形 3 的作圖、作法及證明。

1. 透視圖恰有一組對邊平行（即透視圖為梯形）：如右圖，PP 上的四邊形 $A'B'C'D'$ 為 $A'B'CD$ 的透視圖，$\overline{A'B'}$ 平行 $\overline{C'D'}$。



$\overline{A'C'}$、$\overline{B'D'}$ 交於 E'，$\overleftrightarrow{B'C'}$、$\overleftrightarrow{A'D'}$ 交於 F，$\overleftrightarrow{E'F}$ 交 $\overline{A'B'}$ 於 H。設平面 Y_1 垂直 PP 於 $\overleftrightarrow{A'B'}$，過 F 作一平面 Y_2 平行 Y_1。在平面 Y_1 上以 $\overline{A'B'}$ 為直徑作一圓，過 H 作 $\overline{A'B'}$ 垂直線交圓於 E、I。作 $\overleftrightarrow{EE'}$ 交 Y_2 於 O（即視點），作 $\overrightarrow{OC'}$、$\overrightarrow{OD'}$ 分別交 Y_1 於 C、D。

(1) 設 B'、C、C' 形成平面 X_1，且 O、F 分別在 $\overleftrightarrow{CC'}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$ 上，所以 O、F 也在平面

X_1上。O、F在Y_2上，B'、C在Y_1上，且Y_2平行Y_1，所以$\overleftrightarrow{OF}$平行$\overleftrightarrow{B'C}$。

(2) $\overleftrightarrow{OF}$平行$\overleftrightarrow{B'C} \Rightarrow \triangle OC'F \sim \triangle CC'B\,(AA$ 相似$) \Rightarrow \overline{OF}:\overline{B'C}=\overline{C'F}:\overline{B'C'}$。

(3) 同理，$\overleftrightarrow{OF}$平行$\overleftrightarrow{A'D}$且$\overline{OF}:\overline{A'D}=\overline{D'F}:\overline{A'D'}$。

(4) $\overline{A'B'}$平行$\overline{C'D'} \Rightarrow \overline{D'F}:\overline{A'D'}=\overline{C'F}:\overline{B'C'} \Rightarrow \overline{OF}:\overline{A'D}=\overline{OF}:\overline{B'C} \Rightarrow \overline{A'D}=\overline{B'C}$。

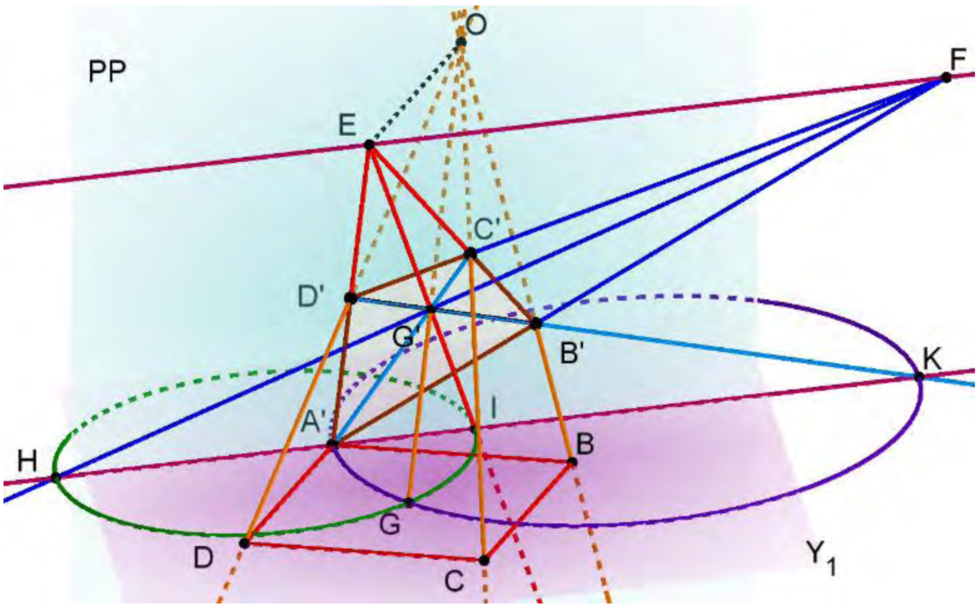
(5) $\overleftrightarrow{A'D}//\overleftrightarrow{OF}//\overleftrightarrow{B'C}$且$\overline{A'D}=\overline{B'C}$，則$A'B'CD$是平行四邊形（一組對邊平行且等長）。

(6) $\overline{A'C'}$和$\overline{B'D'}$交於E'，則$\overline{A'C}$和$\overline{B'D}$交於E（性質 1-2），又$\angle A'EB'=\dfrac{1}{2}\times$弧$A'B'=90°$（圓周角），由引理 2-2 知，$A'B'CD$是菱形。

(7) 設E、E'、H形成平面X_2，且O、F分別在$\overleftrightarrow{EE'}$、$\overleftrightarrow{E'H}$上，所以O、F也在平面X_2上。O、F在Y_2上，H、E在Y_1上，且Y_2平行Y_1，所以$\overleftrightarrow{OF}$平行$\overleftrightarrow{HE}$。

(8) $\overleftrightarrow{A'D}//\overleftrightarrow{OF}//\overleftrightarrow{HE}$且$\overleftrightarrow{HE}\perp\overleftrightarrow{A'B'}$，所以$\angle DA'B'=\angle EHB'=90°$（同位角相等），由引理 2-1 知，$A'B'CD$是長方形。

(9) 由(6)和(8)可知，$A'B'CD$是正方形。所以當O為視點，四邊形$A'B'C'D'$是正方形$A'B'CD$的透視圖。



2. 透視圖兩組對邊都不平行（對角線不平行消失線）：如上圖，PP 上的四邊形$A'B'C'D'$為$A'B'CD$的透視圖，$\overleftrightarrow{A'D'}$和$\overleftrightarrow{B'C'}$交於$E$，$\overleftrightarrow{A'B'}$和$\overleftrightarrow{C'D'}$交於$F$，$\overline{A'C'}$

和 $\overleftrightarrow{B'D'}$ 交於 G'，過 A' 作 $\overleftrightarrow{EF}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{EG'}$ 於 I，$\overleftrightarrow{G'F}$ 和 $\overleftrightarrow{B'D'}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A'I}$ 於 H、K。設平面 Y_1 垂直 PP 於 $\overleftrightarrow{A'I}$，過 E 作一平面 Y_2 平行 Y_1，在 Y_1 上分別以 $\overline{HI}$、$\overline{A'K}$ 為直徑畫圓相交於 G，作 $\overleftrightarrow{GG'}$ 交 Y_2 於 O，作 $\overleftrightarrow{OB'}$、$\overleftrightarrow{OC'}$、$\overleftrightarrow{OD'}$ 分別交 Y_1 於 B、C、D。

(1) 設 O、B、C 形成平面 X_1，$\overleftrightarrow{B'C'}$ 在 X_1 上，且 E 在 $\overleftrightarrow{B'C'}$ 上，則 E 也在 X_1 上。O、E 在 Y_2 上，B、C 在 Y_1 上，且 Y_2 平行 Y_1，所以 $\overleftrightarrow{OE}$ 平行 $\overleftrightarrow{BC}$。

(2) 設 O、A'、D 形成平面 X_2，$\overleftrightarrow{A'D'}$ 在 X_2 上，且 E 在 $\overleftrightarrow{A'D'}$ 上，則 E 也在 X_2 上。O、E 在 Y_2 上，A'、D 在 Y_1 上，且 Y_2 平行 Y_1，所以 $\overleftrightarrow{OE}$ 平行 $\overleftrightarrow{A'D}$。

(3) 由(1)和(2)可得，$\overleftrightarrow{A'D} // \overleftrightarrow{OE} // \overleftrightarrow{BC}$。

(4) 同理，$\overleftrightarrow{A'B} // \overleftrightarrow{OF} // \overleftrightarrow{CD}$。

(5) 由(3)和(4)可得，$A'BCD$ 是平行四邊形。

(6) $\overleftrightarrow{BD}$ 和 $\overleftrightarrow{B'D'}$ 相交於 K，而 G、G' 分別為 $\overleftrightarrow{BD}$ 和 $\overleftrightarrow{B'D'}$ 上一點，$\overleftrightarrow{A'C}$ 和 $\overleftrightarrow{BD}$ 交於 G，且 $\angle A'GK = \frac{1}{2} \times$ 弧 $A'K = 90°$（圓周角），所以 $\overleftrightarrow{A'C} \perp \overleftrightarrow{BD}$。由引理 2-2 可得，$A'BCD$ 是菱形。

(7) 設 G、G'、I 形成平面 X_3，O、E 分別為 $\overleftrightarrow{GG'}$ 和 $\overleftrightarrow{IG'}$ 上一點，則 O、E 也在 X_3 上。G、I 在 Y_1 上，O、E 在 Y_2 上，且 Y_2 平行 Y_1，所以 $\overleftrightarrow{IG} // \overleftrightarrow{OE} // \overleftrightarrow{BC}$。

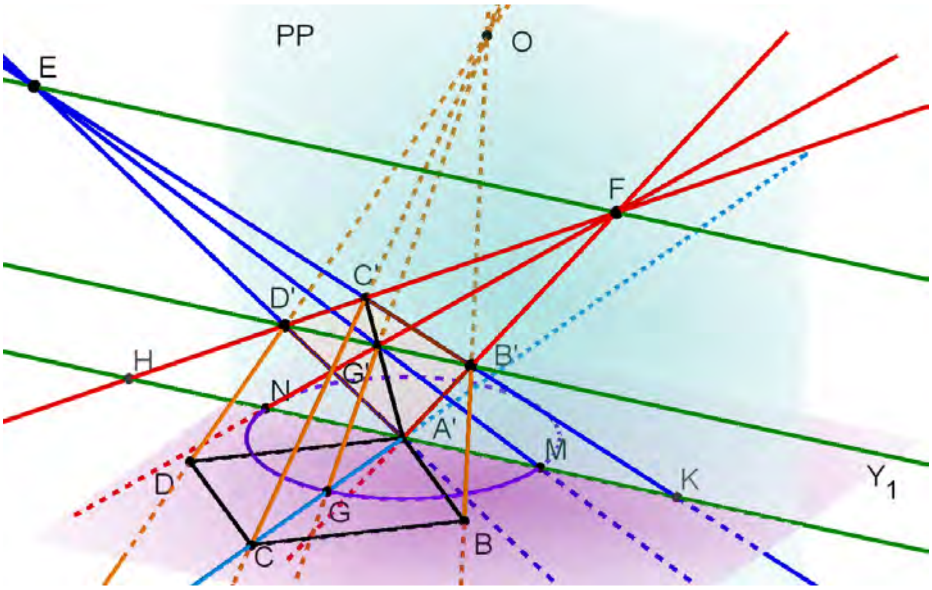
(8) 同理，$\overleftrightarrow{HG} // \overleftrightarrow{OF} // \overleftrightarrow{A'B}$。

(9) $\angle HGI = \frac{1}{2} \times$ 弧 $HI = 90° \Rightarrow \overleftrightarrow{IG} \perp \overleftrightarrow{HG} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{A'B} \Rightarrow \angle A'BC = 90°$，由引理 2-1 可得，$A'BCD$ 是長方形。

(10) 由(6)和(9)可知，$A'BCD$ 是正方形。所以當 O 為視點，四邊形 $A'B'C'D'$ 是正方形 $A'BCD$ 的透視圖。

3. 透視圖兩組對邊都不平行（對角線平行消失線）：如下頁圖，PP 上的四邊形

$A'B'C'D'$為$A'B'CD$的透視圖，$\overleftrightarrow{A'D'}$和$\overleftrightarrow{B'C'}$交於$E$，$\overleftrightarrow{A'B'}$和$\overleftrightarrow{C'D'}$交於$F$，$\overline{A'C'}$和$\overleftrightarrow{B'D'}$交於$G'$，$\overleftrightarrow{B'D'} // \overleftrightarrow{EF}$，過$A'$作$\overleftrightarrow{EF}$平行線交$\overleftrightarrow{EG'}$於$M$，$\overleftrightarrow{G'F}$交$\overleftrightarrow{A'M}$於$N$。設平面$Y_1$垂直 PP 於$\overleftrightarrow{A'M}$，過$E$作一平面$Y_2$平行$Y_1$，在$Y_1$上以$\overline{NM}$為直徑畫圓，過$A'$作$\overleftrightarrow{A'G}$垂直$\overleftrightarrow{A'M}$交圓於$G$，作$\overleftrightarrow{GG'}$交$Y_2$於$O$，作$\overleftrightarrow{OB'}$、$\overleftrightarrow{OC'}$、$\overleftrightarrow{OD'}$分別交$Y_1$於$B$、$C$、$D$。



(1) 設O、B、C形成平面X_1，$\overleftrightarrow{B'C'}$在$X_1$上，且$E$在$\overleftrightarrow{B'C'}$上，則$E$也在$X_1$上。$O$、$E$在$Y_2$上，$B$、$C$在$Y_1$上，且$Y_2$平行$Y_1$，所以$\overleftrightarrow{OE}$平行$\overleftrightarrow{BC}$。

(2) 設O、A'、D形成平面X_2，$\overleftrightarrow{A'D'}$在$X_2$上，且$E$在$\overleftrightarrow{A'D'}$上，則$E$也在$X_2$上。$O$、$E$在$Y_2$上，$A'$、$D$在$Y_1$上，且$Y_2$平行$Y_1$，所以$\overleftrightarrow{OE}$平行$\overleftrightarrow{A'D}$。

(3) 由(1)和(2)可得，$\overleftrightarrow{A'D} // \overleftrightarrow{OE} // \overleftrightarrow{BC}$。

(4) 同理，$\overleftrightarrow{A'B} // \overleftrightarrow{OF} // \overleftrightarrow{CD}$。

(5) 由(3)和(4)可得，$A'BCD$是平行四邊形。

(6) $\overleftrightarrow{B'D'} // \overleftrightarrow{EF} \Rightarrow \overleftrightarrow{BD}$是原線$\Rightarrow \overleftrightarrow{BD}$平行 PP。

(7) Y_1和 PP 相交於$\overleftrightarrow{A'M}$，且$\overleftrightarrow{BD}$在Y_1上，則$\overleftrightarrow{BD} // \overleftrightarrow{A'M}$。

(8) 因為$\overleftrightarrow{A'G} \perp \overleftrightarrow{A'M} \Rightarrow \angle MA'G = 90° \Rightarrow \angle BGA' = 90°$（同側內角互補），又$\overleftrightarrow{A'C}$和$\overleftrightarrow{BG}$

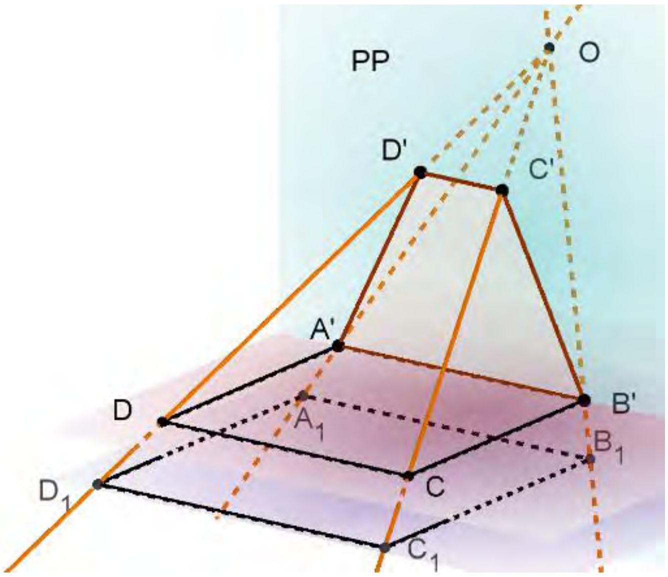
交於 G，所以 $\overleftrightarrow{A'C} \perp \overleftrightarrow{BG}$。由引理 2-2 可知，$A'BCD$ 是菱形。

(9) 設 N、G、G' 形成平面 X_3，O、F 分別為 $\overleftrightarrow{GG'}$ 和 $\overleftrightarrow{NG'}$ 上一點，則 O、F 也在 X_3 上。N、G 在 Y_1 上，O、F 在 Y_2 上，且 Y_2 平行 Y_1，所以 $\overleftrightarrow{NG} // \overleftrightarrow{OF} // \overleftrightarrow{A'B}$。

(10) 同理，$\overleftrightarrow{MG} // \overleftrightarrow{OE} // \overleftrightarrow{A'D}$。

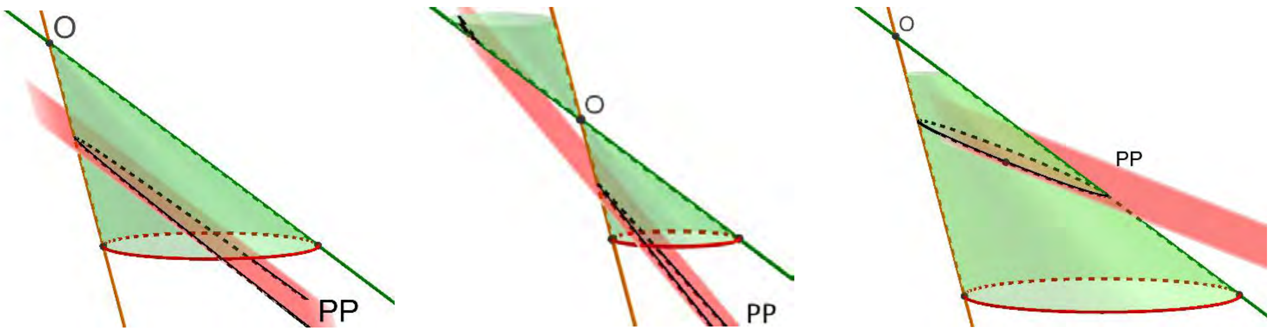
(11) $\angle MGN = \frac{1}{2} \times$ 弧 $MN = 90°$（圓周角）$\Rightarrow \overleftrightarrow{MG} \perp \overleftrightarrow{NG}$，$\overleftrightarrow{MG} // \overleftrightarrow{A'D}$，且 $\overleftrightarrow{NG} // \overleftrightarrow{A'B}$，可得 $\overleftrightarrow{A'D} \perp \overleftrightarrow{A'B}$，所以 $\angle BA'D = 90°$。由引理 2-1 知，$A'BCD$ 是長方形。

(12) 由(8)和(11)可知，$A'BCD$ 是正方形。所以當 O 為視點，四邊形 $A'B'C'D'$ 是正方形 $A'BCD$ 的透視圖。



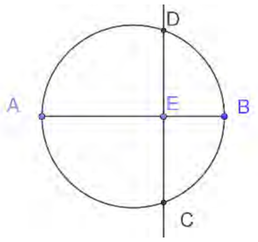
4. 如果將視點與前面 1~3 點所得的正方形構成角錐，則平行角錐底面的平面與角錐的稜延長線相交可得另一個正方形，所以顯然正方形不是唯一解。

六、圓：在前面已經討論過，如果圓所在的平面平行 PP，那透視圖仍然是圓；如果視點和圓共面，則透視圖是線段；其他情形時，圓的透視圖是斜圓錐截痕。根據阿波羅尼斯的《錐線論》(引用自參考資料三)，可以知道斜圓錐截痕可能為拋物線、雙曲線和橢圓。



所以如果我可以看到整個圓的透視圖，那麼除了線段（此時眼睛和圓共平面）以外，整個圓的透視圖不是圓（平行 PP）就是橢圓（不平行 PP）。為了更有說服力，以下將試著找出透視圖的方程式，並探討至少需要多少個點才能確定一個橢圓。

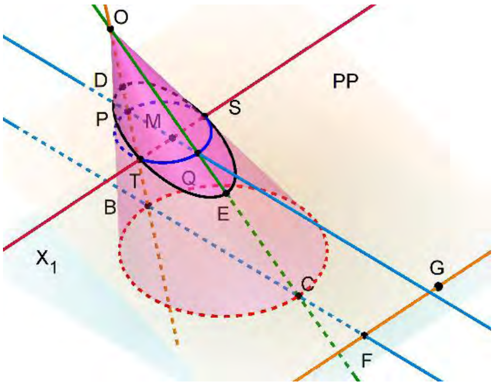
引理 3-1：以 $\overline{AB}$ 為直徑作圓，C、D 為圓上二點且 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ 交於 E，試證 $\overline{CE}^2=\overline{AE}\times\overline{BE}$。

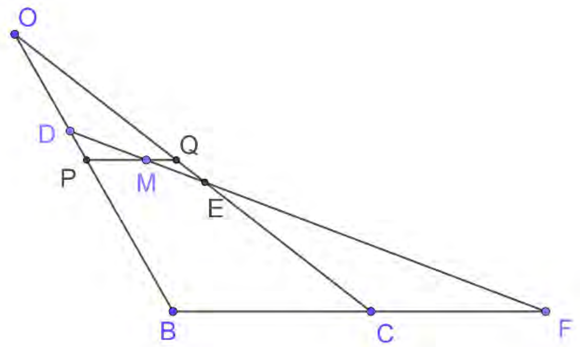


證明：1. $\overline{AB}$ 為直徑且垂直 $\overline{CD}\Rightarrow\overline{DE}=\overline{CE}$。

2. 由圓冪性質知，$\overline{CE}\times\overline{DE}=\overline{AE}\times\overline{BE}\Rightarrow\overline{CE}^2=\overline{AE}\times\overline{BE}$。

(一) 截痕方程式：以下將參考阿波羅尼斯的《錐線論》卷一命題 13（命題記載於參考資料四），找出透視圖的方程式。（作法引用自參考資料五並改寫）





1. 設有一圓錐，頂點為 O，底面為圓 BC，$\overline{BC}$ 為底圓的直徑。令其被過軸的平面所截成的三角形為 OBC，設底圓 BC 所在的平面為 X_1，OBC 所形成的平面為 X_2，則 X_1 和 X_2 交於 $\overleftrightarrow{BC}$。

2. 設 PP 與 X_1 不平行，交 $\triangle OBC$ 於 D、E，與 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 F，與圓錐截一曲線 DE，M 為 $\overline{DE}$ 上一動點，過 M 作一平面 X_3 平行 X_1，交 $\triangle OBC$ 於 P、Q，可知所截曲線為圓 PQ，其中 $\overline{PQ}$ 為圓 PQ 的直徑。

3. 在平面 X_3 上，過 M 作直線 $\overleftrightarrow{TS}$ 垂直 $\overleftrightarrow{PQ}$ 交圓 PQ 於 T、S，由引理 3-1 知 $\overline{MT}^2=\overline{MP}\times\overline{MQ}$。

4. 在 PP 上設透視投影坐標 $D(0,0)$、$T(x,y)$，以 $\overline{DE}$ 為 x 軸正向，取 $\overline{DR}=\overline{MS}$ 為 y 軸正

向，則$\overline{MD}=x$，$\overline{MT}=|y|$。

5. $\triangle BDF \sim \triangle PDM$（$AA$ 相似），則$\overline{MD}:\overline{MP}=\overline{FD}:\overline{FB} \Rightarrow \overline{MP}=\dfrac{\overline{FB}}{\overline{FD}}\times\overline{MD}$。因為 B、D、F 是定點，所以$\dfrac{\overline{FB}}{\overline{FD}}$是大於 0 的常數，可設$\overline{MP}=m\overline{MD}=mx$。

6. $\triangle EMQ \sim \triangle EFC$，則$\overline{ME}:\overline{MQ}=\overline{FE}:\overline{FC} \Rightarrow \overline{MQ}=\dfrac{\overline{FC}}{\overline{FE}}\times\overline{ME}=\dfrac{\overline{FC}}{\overline{FE}}\times(\overline{DE}-\overline{MD})$。因為 C、D、E、F 是定點，所以$\dfrac{\overline{FC}}{\overline{FE}}$和$\overline{DE}$都是大於 0 的常數，可設$\overline{MQ}=n(k-x)$。

7. 代入第 3 點的式子可得，$y^2=mx\cdot n(k-x)$，可表示成$mn(x-\dfrac{k}{2})^2+y^2=\dfrac{mnk^2}{4}$，為橢圓的標準式。所以當 O 為視點，圓 BC 的透視圖為一個橢圓。

(二) 五點可決定圓錐曲線（引用自參考資料六並改寫）：圓錐曲線的一般式為

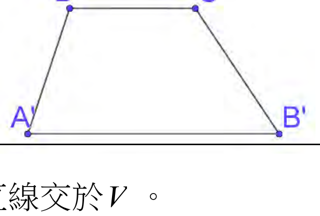
$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，其中 a、b、c 不同時為 0，所以可化簡為

$x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$，$a_2x^2+xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$，

$a_3x^2+b_3xy+y^2+d_3x+e_3y+f_3=0$三者其中之一，如果代入 5 個點，可以得到五元一次方程組，即可求得圓錐曲線的一般式。

(三) 圓的透視圖：由第(一)點的討論，如果圓不平行 PP，則完整圓的透視圖是橢圓。而尺規作圖僅能使用有限次，顯然是無法畫出橢圓的，但是如果借助其他的工具，仍然可以作出透視圖（但不是尺規作圖），在這裡我使用 Geogebra 工具中的「圓錐曲線（過五點）」來完成。

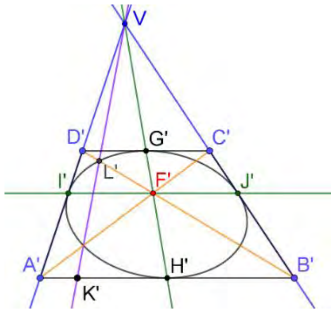
命題 16：已知正方形 $ABCD$ 的透視圖 $A'B'C'D'$，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 為原線，求作 $ABCD$ 內切圓的透視圖。（不是尺規作圖）



作法：1. 延長$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$，設兩直線交於 V。

2. 連接$\overline{A'C'}$、$\overline{B'D'}$，設兩直線交於 F'。

3. 作$\overleftrightarrow{VF'}$分別交$\overleftrightarrow{C'D'}$、$\overleftrightarrow{A'B'}$於 G'、H'。

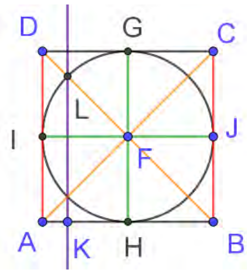


4. 過 F' 作 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 平行線分別交 $\overline{A'D'}$ 、 $\overline{B'C'}$ 於 I' 、 J' 。

5. 利用一般尺規作圖，在 $\overline{A'B'}$ 上取一點 K' ，使 $\overline{A'K'}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\overline{A'B'}$ 。

6. 作 $\overleftrightarrow{VK'}$ 交 $\overline{B'D'}$ 於 L' 。

7. 利用 Geogebra 的工具「圓錐曲線（過五點）」，過 G' 、 H' 、 I' 、 J' 、 L' 作一橢圓，則此橢圓即為所求。



證明：1. 內切圓與正方形相切於四邊中點 G、H、I、J。

2. 設 $\overline{AB}=a$ ，設 $\overleftrightarrow{BD}$ 和內切圓交於兩點，其中一點為 L，

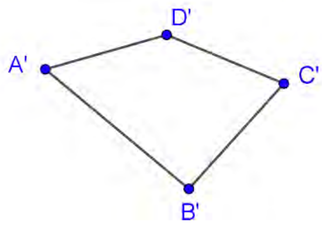
過 L 作 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 K，則

$\overline{AK}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\overline{AB}$ 。所以如果取

$\overline{AK}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\overline{AB}$ ，則 L 為圓上一點。

3. 由 1、2 知，G、H、I、J、L 為圓上 5 點，過這 5 點透視圖的橢圓即為所求。

命題 17：已知正方形 $ABCD$ 的透視圖 $A'B'C'D'$ ，$ABCD$ 任一邊皆為變線，求作 $ABCD$ 內切圓的透視圖。（不是尺規作圖）



作法：1. 延長 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 、 $\overleftrightarrow{C'D'}$ ，設兩直線交於 V_1 。

2. 延長 $\overleftrightarrow{A'D'}$ 、 $\overleftrightarrow{B'C'}$ ，設兩直線交於 V_2 。

3. 連接 $\overleftrightarrow{V_1V_2}$ ，利用一般尺規作圖，過 B' 作 $\overleftrightarrow{B'G'}$ 平行 $\overleftrightarrow{V_1V_2}$ 交 $\overleftrightarrow{C'D'}$ 於 G' 。

4. 連接 $\overline{A'C'}$ 、 $\overline{B'D'}$ ，設兩線段交於 H' 。

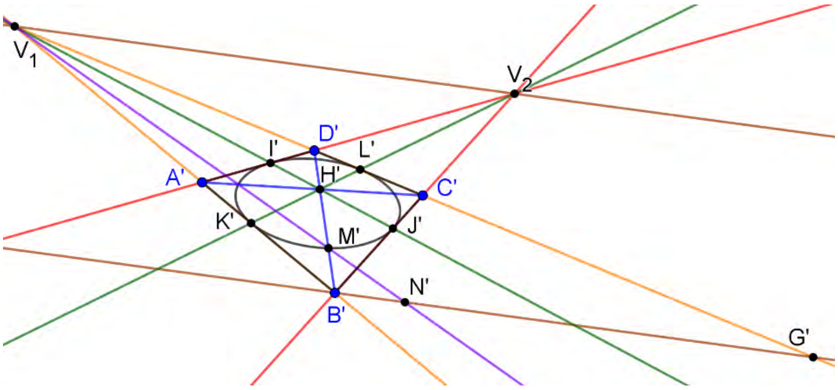
5. 作 $\overleftrightarrow{V_1H'}$ 分別交 $\overline{A'D'}$ 、 $\overline{B'C'}$ 於 I' 、 J' 。

6. 作 $\overleftrightarrow{V_2H'}$ 分別交 $\overline{A'B'}$ 、 $\overline{C'D'}$ 於 K' 、 L' 。

7. 利用一般尺規作圖，在 $\overline{B'G'}$ 上取一點 N' ，使 $\overline{B'N'}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\overline{B'G'}$ 。

8. 作$\overleftrightarrow{V_1N'}$交$\overline{B'D'}$於$M'$。

9. 利用 Geogebra 的工具「圓錐曲線（過五點）」，過I'、J'、K'、L'、M' 作一橢圓，則此橢圓即為所求。



陸、討論

一、任意四邊形是否存在內切橢圓：

命題 16 和命題 17 雖然不是尺規作圖，但是除了畫橢圓的部分之外，仍然遵守尺規作圖的規則，如果可以放寬規則（例如使用 Geogebra 畫橢圓）的情況下，仍然是可以完成的。此外，由於我們已經證明，除了平行四邊形以外的四邊形，都可以視為正方形的透視圖；而已知正方形一定存在內切圓，所以如果將圓視為橢圓的子集合，四邊形的內切橢圓可以視為正方形內切圓的透視圖。只要再找出任意平行四邊形的內切橢圓，就可以解決「任意四邊形皆存在內切橢圓」這個問題。雖然這是與這份作品不直接相關的問題，我還是想提一下這個成果，因此作品說明書中仍然放進這 2 個命題。

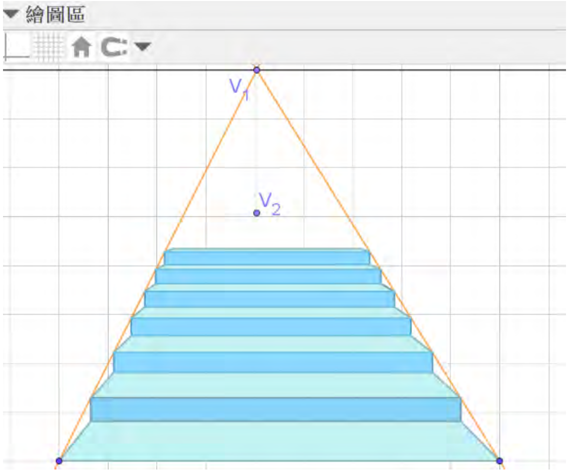
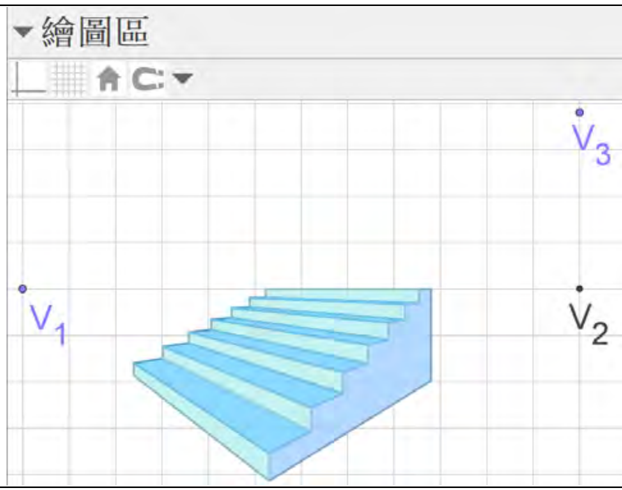
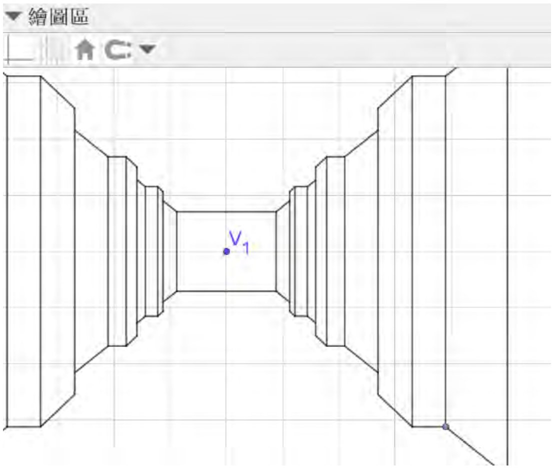
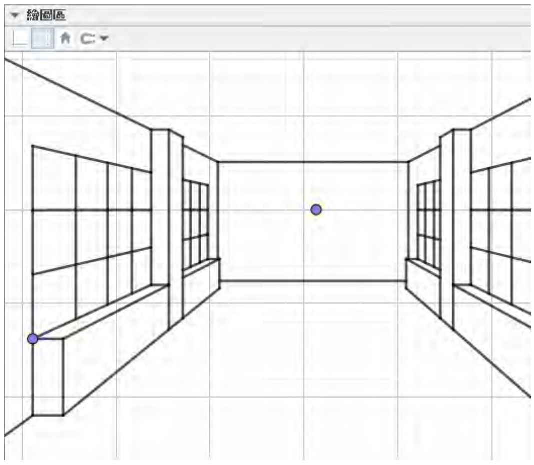
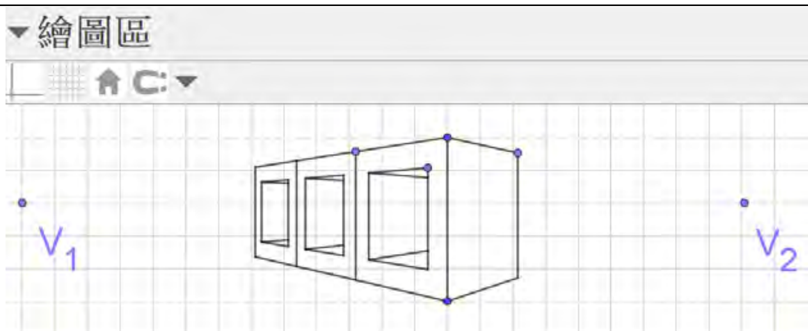
二、垂直線、等角、角平分線：

在國中數學二下第四冊中，尺規作圖常用的技巧有等長、等角、中垂線、垂直線、角平分線、平行線，在這個作品中已經完成了等長、平行線。剩餘的作圖需要在特定的條件限定下，才能做出特定的圖形，例如在繪畫和建築中，會加入站點（Standing Point）的條件來繪製垂直線。在這個作品中我傾向先完成一般化的透視圖尺規作圖，至於特定條件的透視圖尺規作圖可以作為下一步的研究方向。

三、使用自由軟體 Geogebra 進行實際應用：

最後回到這個作品的初衷，我希望可以在 2 維的平面上，描繪出我所看到的三維圖形，因此我使用了 Geogebra 作了幾個實驗作品（僅使用 2D 繪圖區，作法使用參考資料

三進行修改)。

樓梯一：使用 2 個消失點 V_1 和 V_2 。	樓梯二：使用 3 個消失點。
	
有柱子的走廊：使用 1 個消失點。	教室：使用 1 個消失點。
	
三層櫃：使用 2 個消失點。	
	

柒、結論

一、透視法是一種把立體三維空間的形象表現在二維平面上的方法，如果已知 $A(x,y,z)$ ，$z<0$，透視投影後為 $A'[-\frac{x}{z},-\frac{y}{z}]$ 。

二、同一組互相平行的變線在透視圖中交於同一點；同一組互相平行的原線在透視圖中仍然

平行。

三、如果視點與下列圖形不在同一個平面時：

(一) 任意四邊形都可以是平行四邊形的透視圖。

(二) 平行四邊形（不含正方形）不是正方形的透視圖。

(三) 平行四邊形以外的四邊形（含正方形）都是正方形的透視圖。

(四) 平行 PP 的圓透視投影後仍然是圓。

(五) 不平行 PP 的圓透視投影後是拋物線、雙曲線、橢圓。

捌、參考資料及其他

一、Matrix67:The Aha Moments。（2015 年 6 月 23 日）趣題：正方形能被畫成什麼樣？取自 http://www.matrix67.com/blog/archives/6433

二、齊藤宗男、喜多野土竜（2017）。OX秒懂：任何人都能學會！立體透視構圖技法。旗標科技股份有限公司。

三、曹亮吉（2016）。阿草的圓錐曲線。三民書局。

四、蘇惠玉（2008）。HPM 與高中幾何教學：以圓錐曲線的正焦弦為例。HPM 通訊第十一卷第二、三期合刊。

五、江銘輝（2010）。阿波羅尼奧斯與〈圓錐曲線〉的巨著。取自 http://www.fivedream.com/page1.aspx?no=221249&step=1&newsno=21692。

六、項武義（2004）。圓錐截線的故事。取自 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/ar/ar_wy_geo_08/。

七、吳宗鴻（民 90）。室內設計本位訓練教材-透視圖的認識。中華民國職業訓練研究發展中心。

八、吉爾・羅南（2014）。超簡單！立體透視畫法一學就會。野人出版社。

九、Masaccio’s Holy Trinity（2015）。取自 https://thesacredtheprofane.wordpress.com/2015/05/19/masaccios-holy-trinity/。

【評語】030407

作者利用簡單射影幾何的理論建立透視法的尺規作圖規則，如能提供更多實務上的應用，作品會更有價值。

作品海報

壹、摘要

透視法在建築圖學上是常被使用的方法，例如一點透視、兩點透視、三點透視等。

透視法在文藝復興時期對繪畫也產生重要的影響，例如馬薩喬的作品「聖三位一體」。

我試著不使用幾點透視的看法，而是對透視法建立一個模型，再根據這個模型中得到的性質，去進行一般化情形的尺規作圖，並對透視法中常用的理論進行驗證。

而尺規作圖是源於古希臘的數學課題，使用的工具是無刻度的直尺和圓規，研究的對象是直線和圓，因此我的命題也以這兩個方向來進行。

馬薩喬，聖三位一體
Masaccio, Holy Trinity, 1426 ~ 1428
福音聖母教堂，佛羅倫斯，義大利
（取自參考資料一）

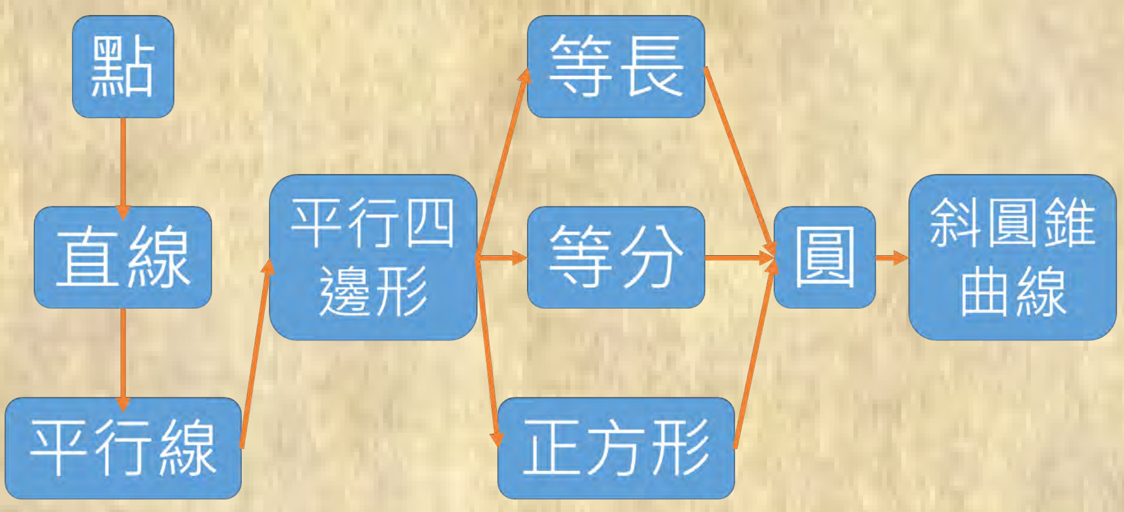
貳、研究動機

在課堂上使用 Geogebra 製作列車在山洞前進的模擬動態圖時，我產生了一個疑問，這個動態圖究竟像不像，我需要解決一個問題，什麼叫做「像」？

在繪畫中，畫家使用透視法來呈現立體的事物，其中「平行線會交於一點」被視為真理直接使用，但是我卻對這個結論抱持懷疑。因此，建立一個可以檢驗透視法理論是否正確的方法，並將透視法以數學來描述，就成為我想研究的課題。

參、研究目的

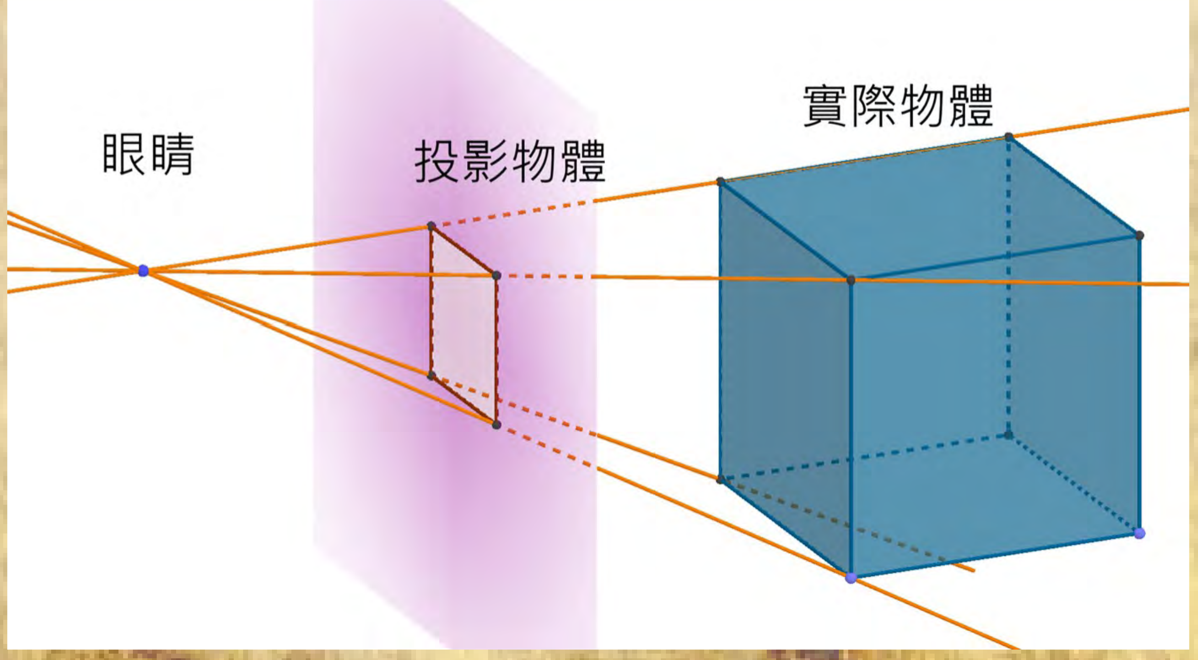
一、檢驗透視法中平行線交於一點是否正確。
二、建立透視法的尺規作圖規則，以透視法的尺規作圖作平行線、正方形、圓的透視圖。



肆、研究過程或方法

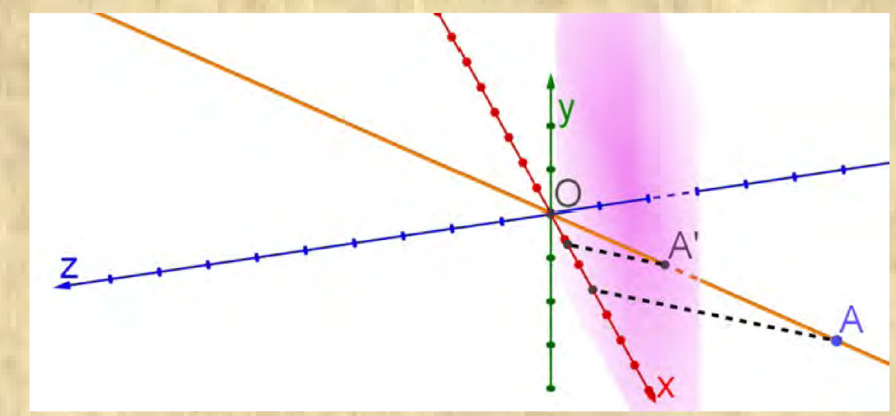
一、透視原理

透視法是一種把立體三維空間的形象表現在二維平面上的方法，模型如下圖。



二、透視投影座標

設眼睛為一點，稱為視點，坐標為 $(0,0,0)$；設投影的投影面(Picture Plane，符號為 PP)方程式為 $z=-1$。透視投影後的坐標如下表，其中 A' 是 A 的函數，但 A 不是 A' 的函數。



空間中的三維坐標	投影面上的二維坐標
$A(x,y,z)$	$A'(\frac{-x}{z},\frac{-y}{z})$

三、直線的透視圖

設空間中一直線參數式 $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$。透視投影後仍為一直線，方程式為 $(cy_0-bz_0)x+(az_0-cx_0)y+(ay_0-bx_0)=0$。

四、平行線的透視圖

透視圖分為以下三種：
(一) 二重合直線。
(二) 二平行直線：兩條平行 PP 的直線 (原線)得到的透視圖。
(三) 二直線交於一點：兩條不平行 PP 的直線(變線)得到的透視圖。

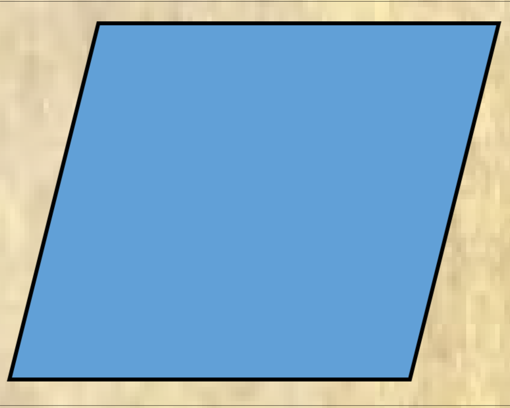
五、平行線的性質

(一) 同一組互相平行的變線交於一點，交點稱為消失點(Vanishing Point)。
(二) 同一平面的消失點共線，直線稱為消失線(Vanishing Line)。

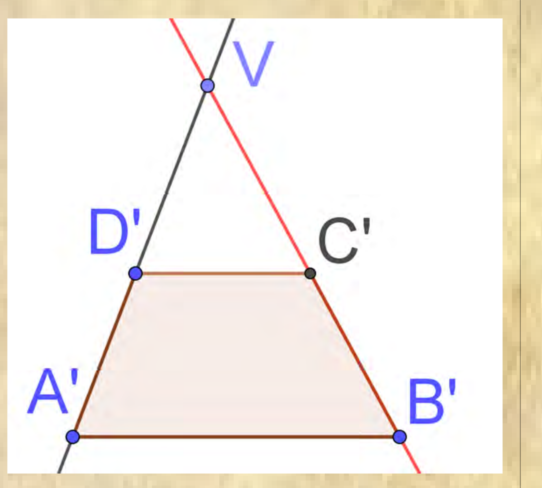
六、平行四邊形的透視圖

任意四邊形皆可視為平行四邊形的透視圖。

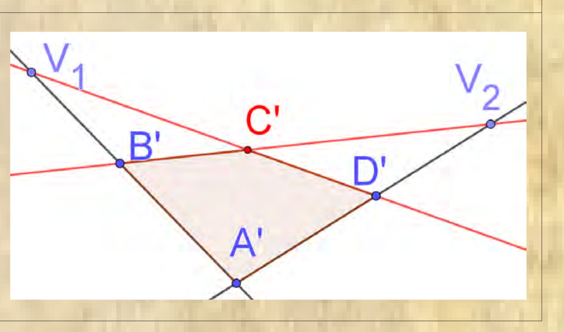
兩組對邊互相平行：
兩組互相平行的原線所形成的平行四邊形。



恰一組對邊互相平行：
可視為一組對邊互相平行的原線，另一組為互相平行的變線。



沒有對邊互相平行：
可視為兩組相異的互相平行變線。



伍、研究結果

一、透視法的尺規作圖規則

規則一：由任意一點到任意一點可作直線。
規則二：任意線段能無限延伸成一直線。
規則三：同一組互相平行的變線在透視圖中交於同一點；同一組互相平行的原線在透視圖中仍然平行。

二、線的性質

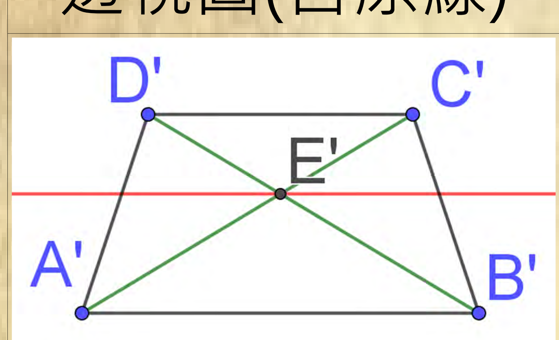
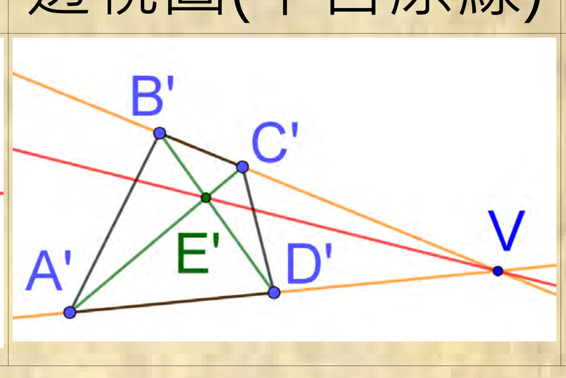
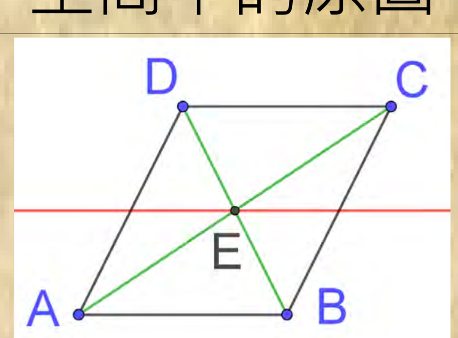
性質 1-1：二平行線 L 和 M 形成平面 E，且透視圖為二重合直線，則視點在平面 E 上。
性質 1-2：兩直線交於一點，且兩直線透視圖也交於一點，則兩直線透視圖交點為交點的透視投影。

性質 1-3：同一個不平行 PP 的平面，其消失點共線。
性質 1-4：如果平面 E 和 PP 相交於直線 L，直線 L 的透視圖平行平面 E 的消失線。
性質 1-5：已知平面 E (視點 O 不在平面 E 上)和 PP 相交於直線 L，M 為平面 E 上另一直線。
1. 若 M 為原線，則透視圖 M' 平行交線 L 的透視圖 L'，且 M' 平行消失線。
2. 若透視圖 M' 平行消失線，則 M 必為原線。
性質 1-6：在 PP 上的線段在透視投影後長度不變。
性質 1-7：在同一個平行 PP 的平面上：
1. 任意兩個等長線段透視投影後仍然等長。
2. 透視投影後等長的線段，原線段也等長。
性質 1-8：若任意二原線互相垂直，透視投影後仍然互相垂直；若任意二原線透視投影後互相垂直，則二原線互相垂直。

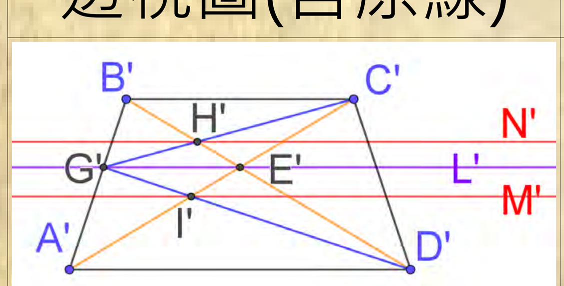
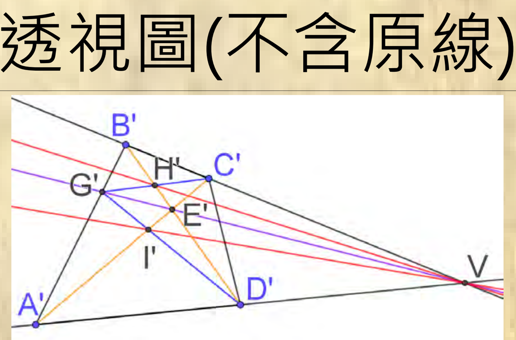
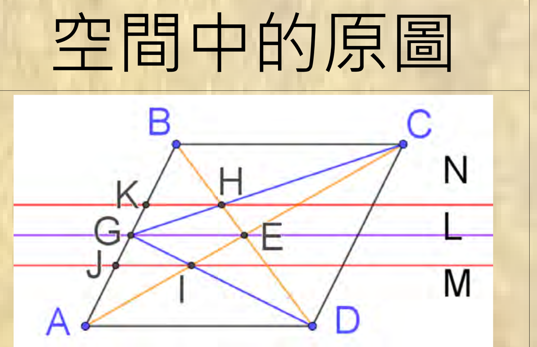
三、等分

(以下改寫自參考資料二、三)

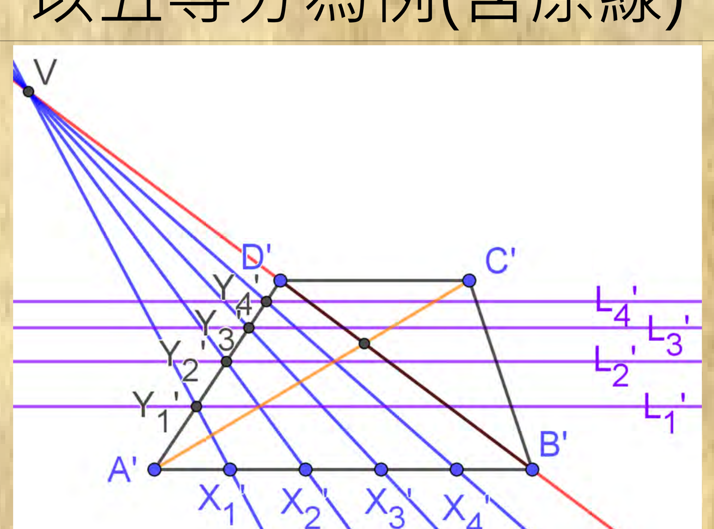
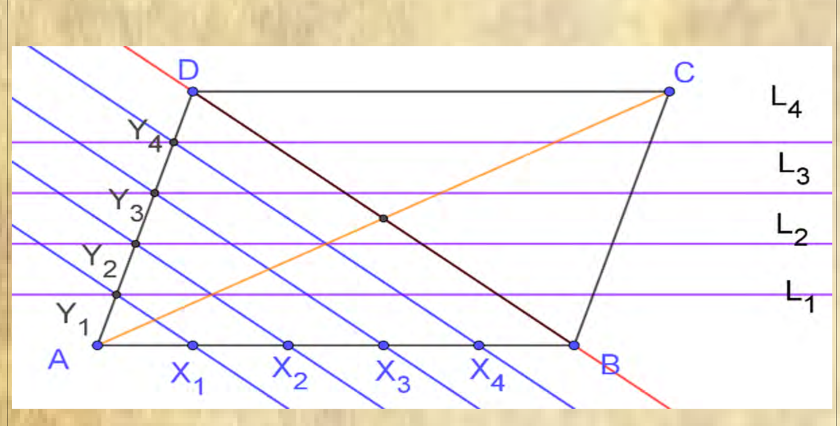
二等分：運用平行四邊形對角線互相平分以及平行線截比例線段性質。

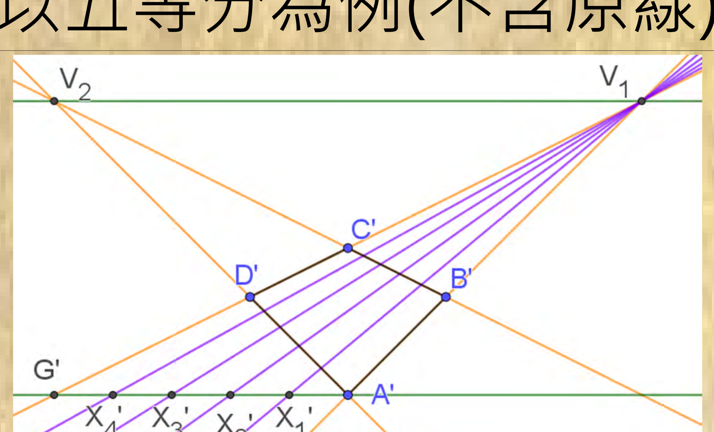
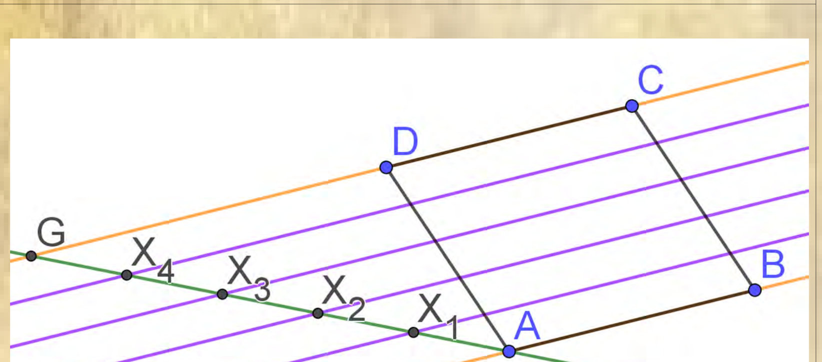
透視圖(含原線)	透視圖(不含原線)	空間中的原圖
		

三等分：運用三角形重心性質以及二等分的作法。

透視圖(含原線)	透視圖(不含原線)	空間中的原圖
		

N 等分：運用性質 1-7 以及平行線截比例線段性質。

以五等分為例(含原線)	空間中的原圖
	

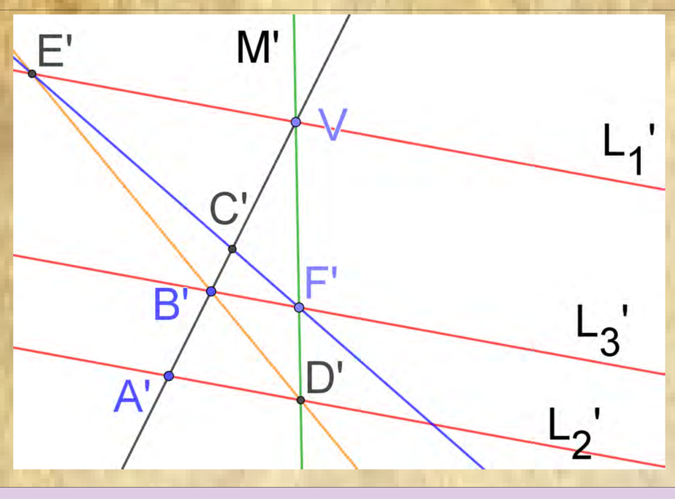
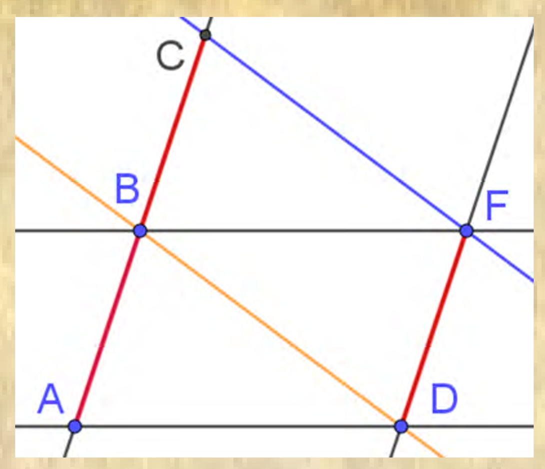
以五等分為例(不含原線)	空間中的原圖
	

四、等長

(一)、一般等長

題目原型：解決已知兩根柱子，如何找出下一根柱子的位置。(圖片取自參考資料四)

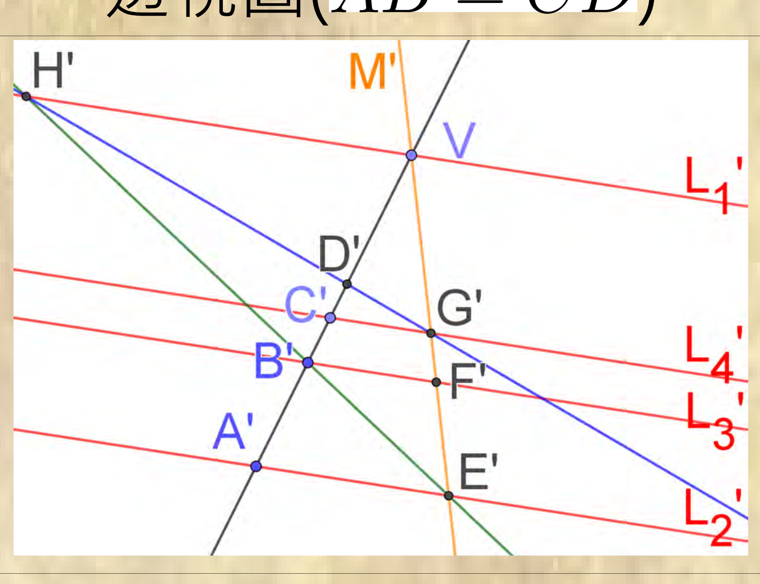
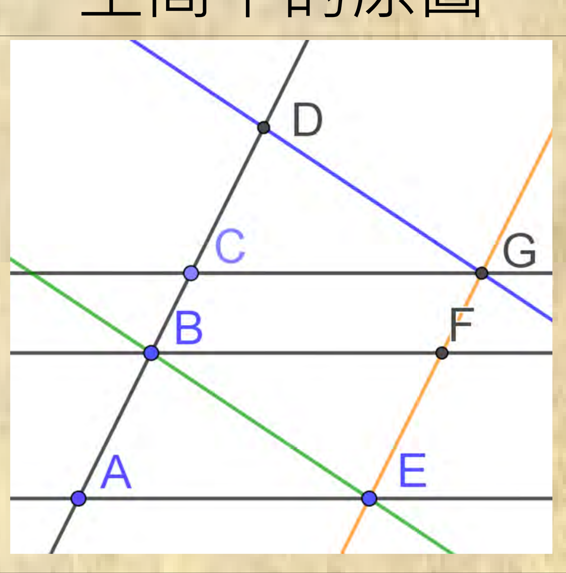
方法：利用平行四邊形對邊相等。

透視圖($\overline{AB}=\overline{BC}$)	空間中的原圖
	

(二)、分段等長

題目原型：解決已知道路分隔線的一段以及下一段的起點，如何找出下一段分隔線。

方法：利用平行四邊形對邊相等。

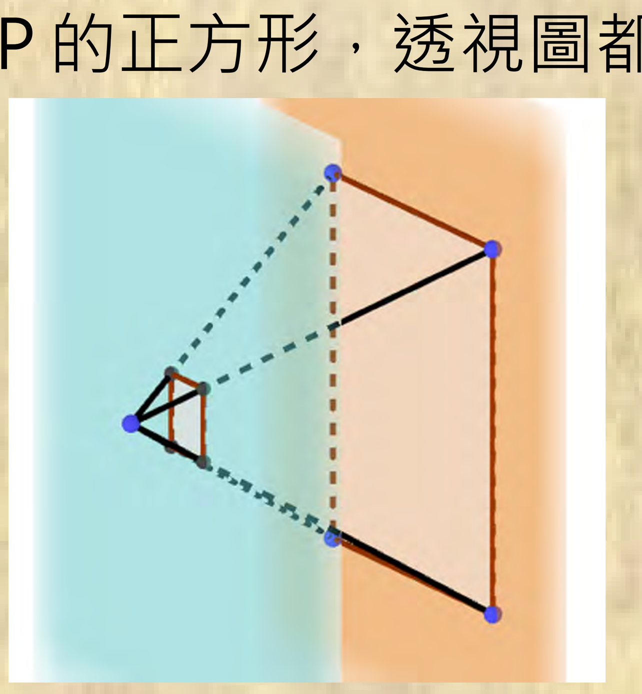
透視圖($\overline{AB}=\overline{CD}$)	空間中的原圖
	

五、正方形

問題：哪些四邊形可以視為正方形的透視圖？

(一)、兩組對邊平行

1. 正方形：平行 PP 的正方形，透視圖都是正方形。

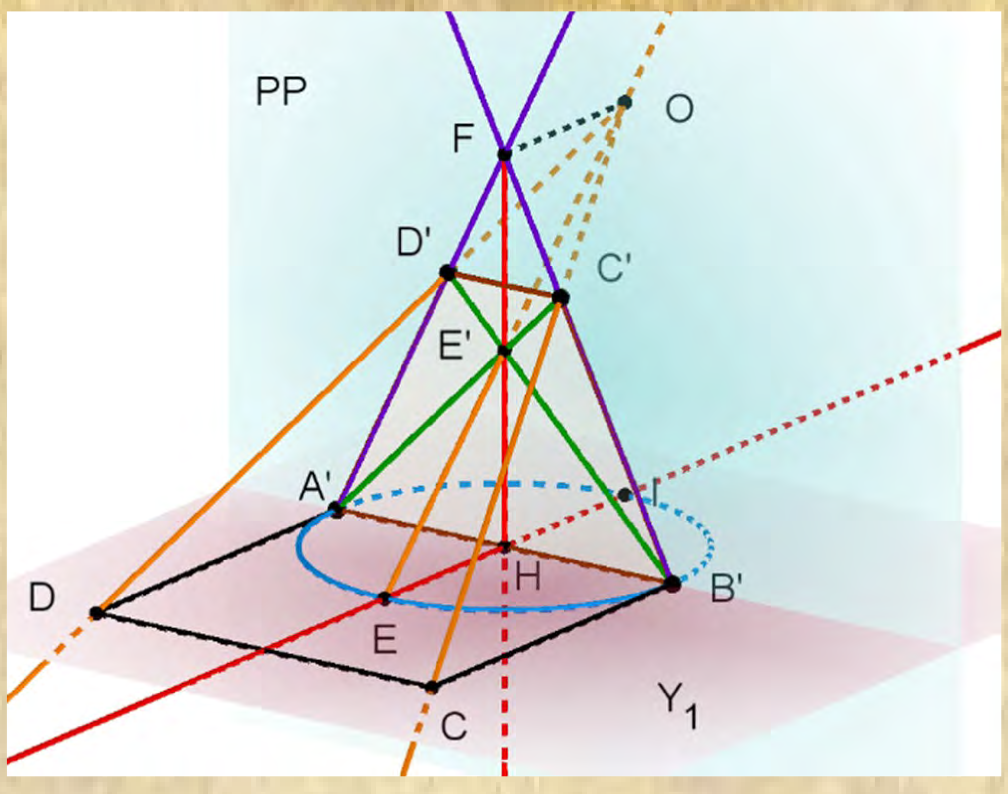


2. 長方形：(不含正方形)
(1) 如果四邊都是原線：則四邊形平行 PP，由性質 1-7 知，鄰邊不相等，所以原圖形不是正方形。
(2) 如果有任一組對邊不是原線：由規則三知，這一組原線不平行，所以原圖形不是正方形。

3. 平行四邊形：(不含正方形)
(1) 如果四邊都是原線：由性質 1-8 知，鄰邊不互相垂直，所以原線不互相垂直，原圖形不是正方形。
(2) 如果有任一組對邊不是原線：由規則三知，這一組對邊不平行，所以原圖形不是正方形。

(二)、恰一組對邊平行

已知：$A'B'C'D'$ 為 PP 上的四邊形，$\overline{A'B'}$ 平行$\overline{C'D'}$。
作法：(修改自參考資料五)
(1) $\overline{A'C'}$、$\overline{B'D'}$交於E'，$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$交於 F。$\overleftrightarrow{E'F}$交$\overline{A'B'}$於 H。
(2) 設平面Y_1垂直 PP 於$\overleftrightarrow{A'B'}$，過 F 作一平面Y_2平行Y_1。
(3) 在平面上Y_1以$\overline{A'B'}$為直徑作一圓，過 H 作$\overline{A'B'}$垂直線交圓於 E、I。
(4) 作$\overleftrightarrow{EE'}$交Y_2於 O，作 $\overleftrightarrow{OC'}$、$\overleftrightarrow{OD'}$分別交Y_1於 C、D。
(5) 可得四邊形$A'B'C'D'$是正方形$A'B'CD$的透視圖。



(三)、對邊皆不平行

1. 對角線不平行消失線

已知：$A'B'C'D'$ 為 PP 上的四邊形，且$\overline{B'D'}$和$\overline{A'C'}$皆不平行消失線。

作法：(參考資料五)

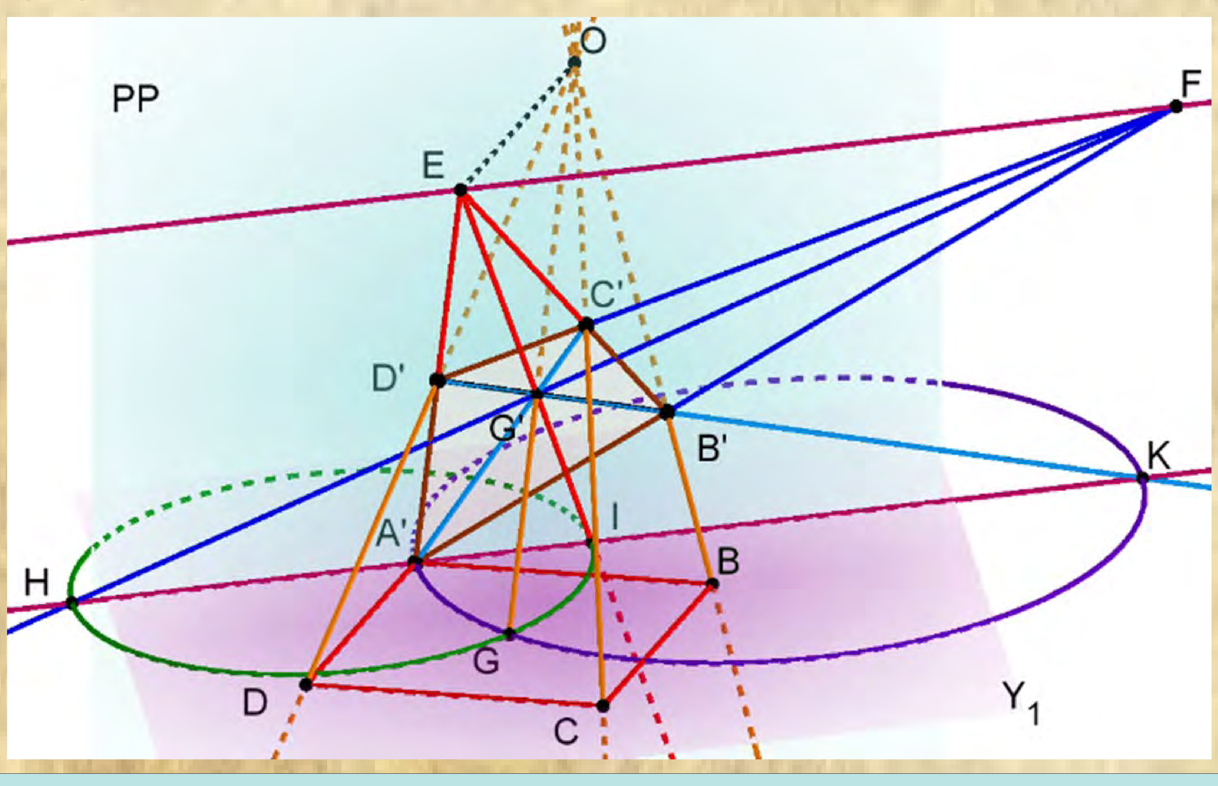
(1) $\overleftrightarrow{A'D'}$和$\overleftrightarrow{B'C'}$交於 E，$\overleftrightarrow{AB}$和$\overleftrightarrow{CD}$交於 F，$\overline{AC}$和$\overline{BD}$交於G'。

(2) 過A'作$\overleftrightarrow{EF}$平行線交$\overleftrightarrow{EG'}$於 I，$\overleftrightarrow{FG'}$和$\overleftrightarrow{B'G'}$分別交$\overleftrightarrow{A'I}$於 H、K。

(3) 設平面Y_1垂直 PP 於$\overleftrightarrow{A'I}$，過 E 作一平面Y_2平行Y_1。

(4) 在Y_1上分別以$\overline{HI}$、$\overline{A'K}$為直徑畫圓相交於 G，作$\overleftrightarrow{GG'}$交Y_2於 O，作$\overleftrightarrow{OB'}$、$\overleftrightarrow{OC'}$、$\overleftrightarrow{OD'}$分別交Y_1於 B、C、D。

(5) 可得四邊形$A'B'C'D'$是正方形$A'BCD$的透視圖。



2. 對角線平行消失線

已知：$A'B'C'D'$ 為 PP 上的四邊形，且$\overline{B'D'}$和$\overline{A'C'}$之中其中一條平行消失線。

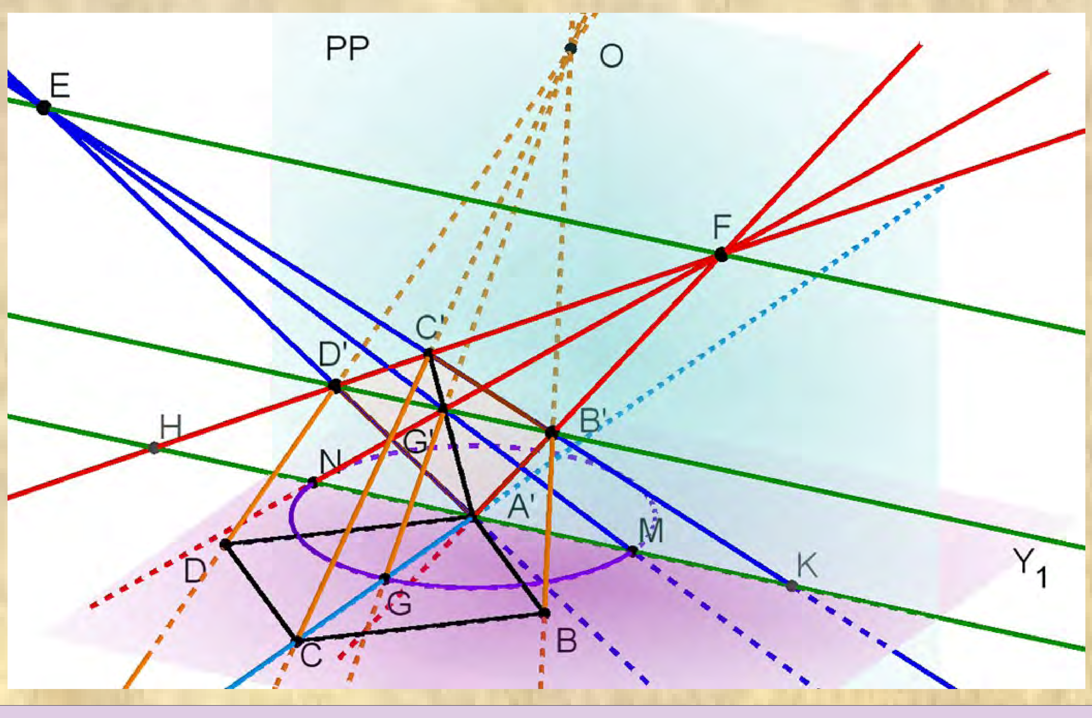
作法：(補充參考資料五)

(1) $\overleftrightarrow{A'D'}$和$\overleftrightarrow{B'C'}$交於 E，$\overleftrightarrow{A'B'}$和$\overleftrightarrow{C'D'}$交於 F，$\overline{A'C'}$和$\overline{B'D'}$交於G'，$\overleftrightarrow{B'D'} // \overleftrightarrow{EF}$，過$A'$作$\overleftrightarrow{EF}$平行線分別交$\overleftrightarrow{EG'}$、$\overleftrightarrow{FG'}$於 M、N。

(2) 設平面Y_1垂直 PP 於$\overleftrightarrow{A'M}$，過 E 作一平面Y_2平行Y_1。

(3) 在Y_1上以$\overline{MN}$為直徑畫圓，過A'作$\overleftrightarrow{A'G}$垂直$\overleftrightarrow{A'M}$交圓於 G，作$\overleftrightarrow{GG'}$交Y_2於 O，作$\overleftrightarrow{OB'}$、$\overleftrightarrow{OC'}$、$\overleftrightarrow{OD'}$分別交Y_1於 B、C、D。

(4) 可得四邊形$A'B'C'D'$是正方形$A'BCD$的透視圖。

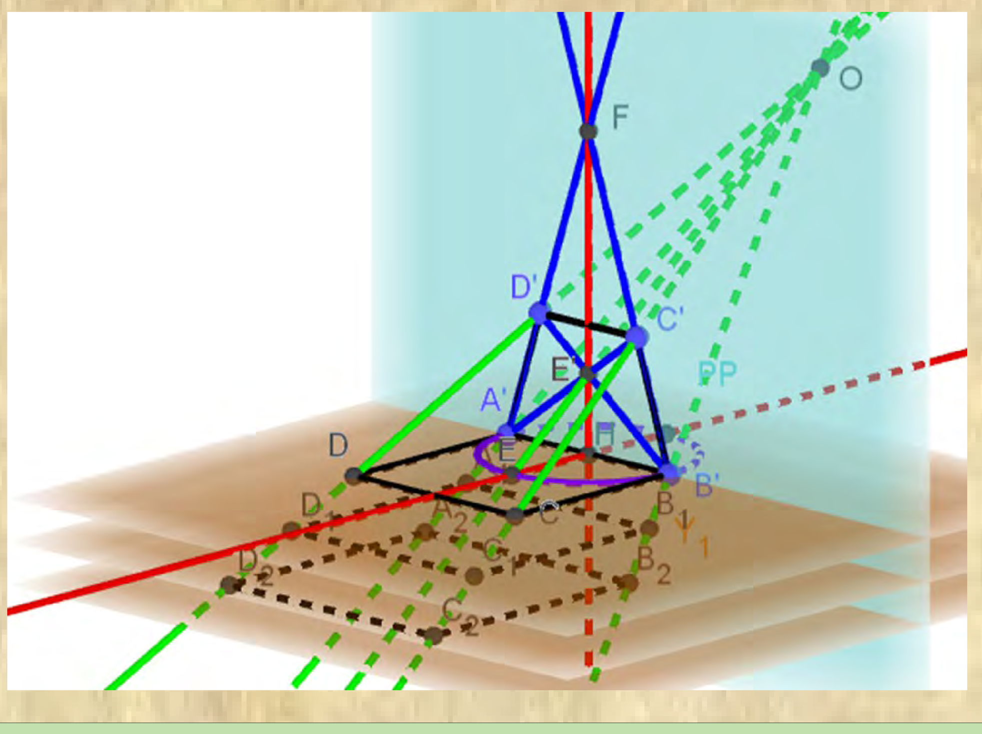


(四)、結論

除了平行四邊形(不含正方形)以外的四邊形都可視為正方形的透視圖。

(五)、是否唯一

每一個和原平面平行的平面皆可再找出一個正方形，所以並不唯一。



六、圓的透視圖

(一)、圓平行 PP

透視圖依然是圓形

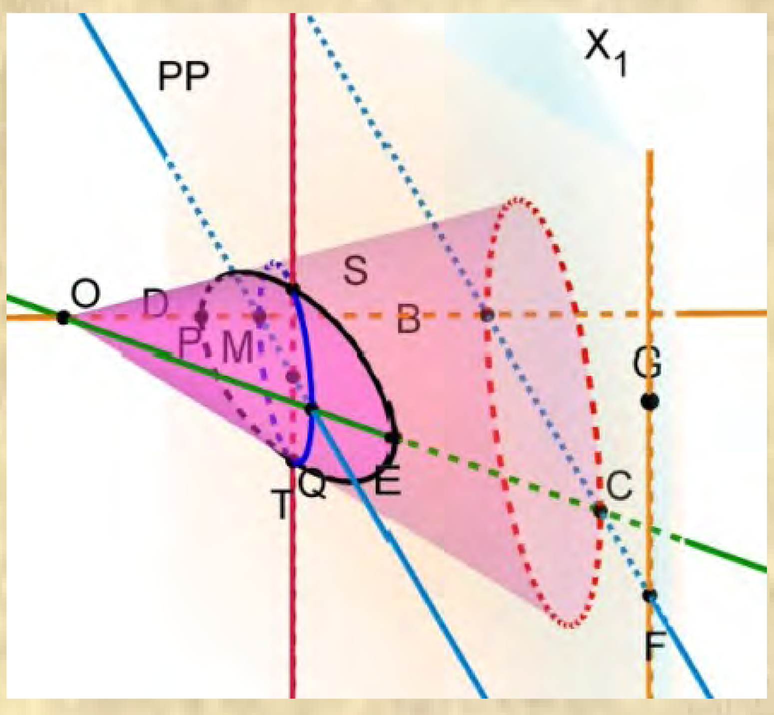
(二)、圓不平行 PP

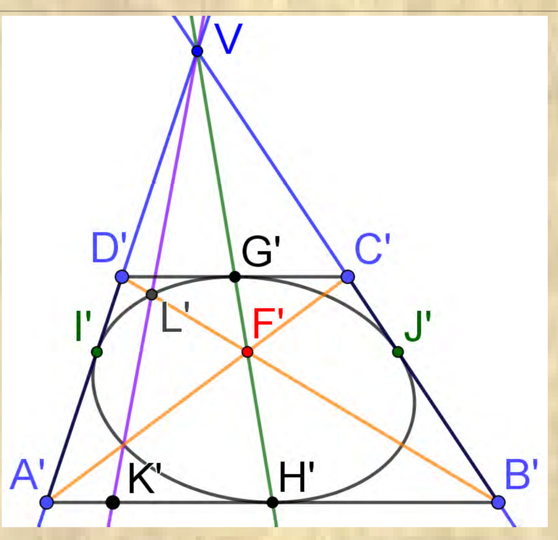
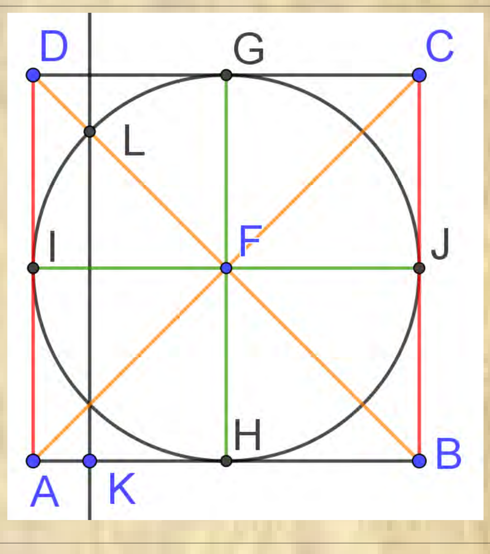
1. 視點和圓同一平面

透視圖為一線段

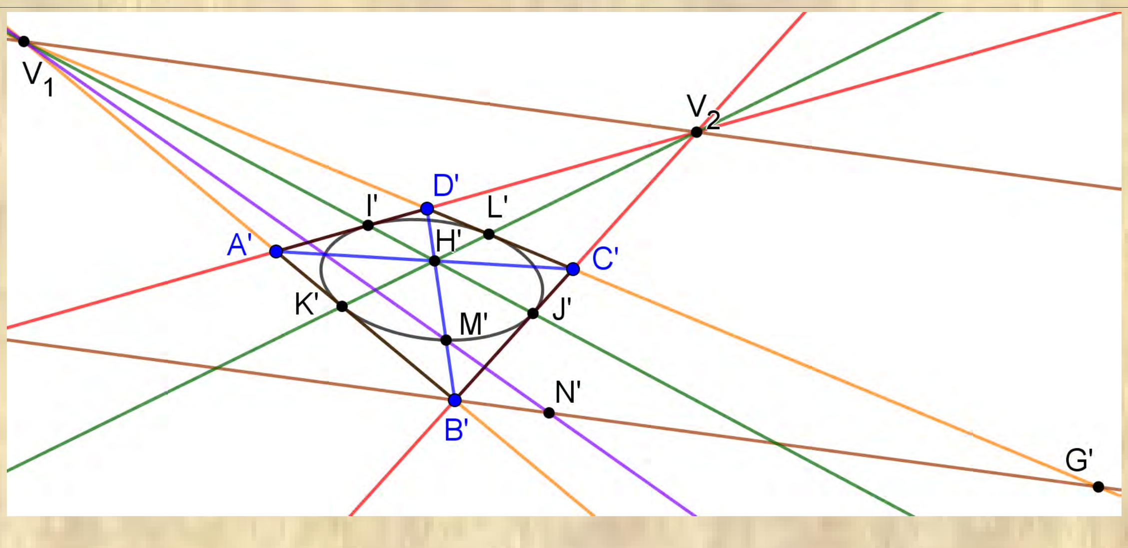
2. 視點和圓不同平面

可以將視點以及圓形連接形成斜圓錐，PP 截過斜圓錐的圖形就是斜圓錐截痕，由阿波羅尼斯的《錐線論》可以得知 (參考資料六)，斜圓錐截痕就是雙曲線、拋物線或橢圓。



透視圖(含原線)	空間中的原圖
	

透視圖(不含原線)



陸、參考資料

一、Masaccio's Holy Trinity (2015)。取自 https://thesacredtheprofane.wordpress.com/2015/05/19/masaccios-holy-trinity/。

二、齊藤宗男、喜多野土竜 (2017)。〇✕秒懂：任何人都能學會！立體透視構圖技法。旗標科技股份有限公司。

三、吉爾·羅南 (2014)。超簡單！立體透視畫法一學就會 。

四、郭志禹 (2017)。取自 http://pansci.asia/archives/120777 。

五、Matrix67:The Aha Moments (2015) 趣題：正方形能被畫成什麼樣？取自 http://www.matrix67.com/blog/archives/6433

六、曹亮吉 (2016)。阿草的圓錐曲線。三民書局。