中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

探究精神獎

030406

呼天換「遞」「迴」山倒海--從佩爾方程式談起

學校名稱：高雄市立三民國民中學

作者：	指導老師：
國二 王子儀	蔡震珊 郭逸民

關鍵詞：佩爾方程式、結合繁衍鏈、中線垂直三角形

摘要

在遞迴方程式$x^2-ky^2=c$中，我們分成四個階段進行研究，首先由目的一找到其系統性解法後，接著適當代入 k 值或者是 c 值，得到的方程式運用在國中數學上，依目的二到目的四分成三個部分逐一探討。

一、探討遞迴方程式$x^2-ky^2=1$與$x^2-ky^2=c$解之間的關聯性。

二、利用遞迴方程式$x^2-ky^2=1$的解，探討無理數$\sqrt{k}$的近似值。

三、利用遞迴方程式$x^2-2y^2=-d^2$，探討直角三角形畢氏數的繁衍。

四、利用遞迴方程式$x^2-10y^2=-d^2$，探討中線垂直三角形三邊長的繁衍。

經過研究後，發現遞迴方程式$x^2-ky^2=c$的應用性及實用性比想像中的要好太多了，不只得到的結果，還與國中課本所教的的觀念是可互相呼應，且還更為精準與具備解的完備性，其推廣範圍真的非常廣大。

壹、研究動機

在某一次機會下，我看到了一份有關佩爾方程式的文章，其中在探討二元二次方程式$x^2-ky^2=1$的解法，這令我驚訝不已，畢竟在一般國中課本內，通常只有一元一次、一元二次、二元一次的方程式解法。

對於這$x^2-ky^2=1$的這類佩爾方程式在於只解決常數為 1 是相當侷限的，我想是否可以找到方法推廣到$x^2-ky^2=c$的解法，進而解決國中相關的數學問題，於是我便著手開始進行收集資料。

後來我在一篇國際科展作品「數形合一」中發現該研究也是使用佩爾方程式來解決多角形數的遞迴解(或說前幾個解)，其中有關廣義佩爾方程式$x^2-ky^2=c$(其中 k 為非完全平方數，c 為正整數)，能透過$x^2-ky^2=1$的最小正整數解(x_1,y_1)(此可用連分數的展開式來求，詳見初等數論第三版)，來找出$x^2-ky^2=c$的最小正整數解(s_1,t_1)的範圍，其中與我研究有關的是 c=$-d^2$時(d 為正整數)，可得$0\leq s_1\leq\sqrt{\frac{(x_1-1)}{2}}\times d$與$\frac{d}{\sqrt{k}}\leq t_1\leq\frac{dy_1}{\sqrt{2(x_1-1)}}$。(註：因為文獻符號與本研究不盡相同，所以改成符合本研究的符號使用範圍)

因而，在上述文獻的基礎上就可以比較確定找出第一組解，接下來一一代入的去找出後

面的每一個解，此種解法不切實際也沒有效益，不同的是我們藉由所謂結合繁衍鏈的方式將$x^2-ky^2=c$的所有解作分類，進而找出所有獨立結合繁衍鏈(是有限條的)，就可求出所有解，依此方向開始進行我們的研究。

貳、研究目的

一、探討遞迴方程式$x^2-ky^2=1$與$x^2-ky^2=c$解之間的關聯性。

二、利用遞迴方程式$x^2-ky^2=1$的解，探討無理數$\sqrt{k}$的近似值。

三、利用遞迴方程式$x^2-2y^2=-d^2$，探討直角三角形畢氏數的繁衍。

四、利用遞迴方程式$x^2-10y^2=-d^2$，探討中線垂直三角形三邊長的繁衍。

參、名詞解釋

一、廣義佩爾(pell)方程式：形如$x^2-ky^2=c$且 k 為非完全平方數的正整數，c 為整數不一定有解，若有解則為無限多組解。

二、數對(x_i,y_i)：方程式$x^2-ky^2=1$(k 為非完全平方數的正整數)中任意一組正整數解以(x_i,y_i)表示，其中 i 為任意正整數且為方程式的第 i 個解，而(x_1,y_1)為最小的正整數解(或稱初始解)。

三、數對(s_j,t_j)：方程式$x^2-ky^2=c$(k 為非完全平方數的正整數，c 為正整數)中任意一組正整數解以(s_j,t_j)表示，其中 j 為任意正整數且為方程式的第 j 個解，而(s_1,t_1)為最小的正整數解(或稱初始解)。

四、繁衍鏈<1>：將方程式$x^2-ky^2=1$的所有解中，找到其中一個解(不一定是初始解)後，利用遞迴方程將該解往前(逆推)或往後(順推)的解全部繁衍出來串成一條鏈，稱為<1>的繁衍鏈。

五、結合繁衍鏈(s_j,t_j)×<1>：將方程式$x^2-ky^2=c$中其中一個解(s_j,t_j)與繁衍鏈<1>中的任意解透過連結計算式所得到的解，其中 j 為任意正整數。

六、數對(U_{ji},V_{ji})：經由(s_j,t_j)×<1>繁衍結合鏈所產生的第 j 條繁衍鏈中的第 i 個解，如(U_{23},V_{23})為第 2 條繁衍鏈(s_2,t_2)×<1>中第 3 個解，餘依此規則類推。

肆、研究設備及器材

一、電腦、紙、筆。

二、Word、Excel、Devcpp(c 語言程式)。

伍、研究過程

目的一：探討遞迴方程式$x^2-ky^2=1$和$x^2-ky^2=c$解之間的關聯性

在開始進行$x^2-ky^2=c$的討論時，我們原本有考慮直接從$x^2-ky^2=c$下手，但是發現直接去求解似乎不是那麼簡單，正好在數論書籍中有提到關於$x^2-ky^2=1$的論點，其中只有 c 和 1 的差別，這一點，讓我們想要先研究$x^2-ky^2=1$，再試著從中找到$x^2-ky^2=1$和$x^2-ky^2=c$間的關聯性

要討論$x^2-ky^2=c$的解，需要先知道$x^2-ky^2=1$這種形式的解，依據數論相關書籍的內容，我們得知形如$x^2-ky^2=1$的二元二次方程式稱為佩爾方程，其解可設 k 是一個正整數且不是一個完全平方數，則不定方程x^2-ky^2=1有無限多組正整數解(x_i,y_i)，i 為任意正整數；假設(x_1,y_1)是所有正整數解中使 $x+y\sqrt{k}$最小的那一組解，則$x^2-ky^2=1$的全部正整數解(x,y)可由$x_n+y_n\sqrt{k}=(x_1+y_1\sqrt{k})^n$表示出來，及$x_n=\frac{(x_1+y_1\sqrt{k})^n+(x_1-y_1\sqrt{k})^n}{2}$, $y_n=\frac{(x_1+y_1\sqrt{k})^n-(x_1-y_1\sqrt{k})^n}{2}$，其中 n 為正整數。

由上述的解的連動關係，我們以定理一來說明x^2-ky^2=1的遞迴關係式。

定理一：**(x^2-ky^2=1解本身的遞迴性)**

若x^2-ky^2=1的正整數解依序由小到大排列成(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…(x_n,y_n)，

則$\begin{cases} x_{n+1}=x_1x_n+ky_1y_n \\ y_{n+1}=y_1x_n+x_1y_n \end{cases}$。

說明：依據文獻x^2-ky^2=1的解為$x_n+y_n\sqrt{k}=(x_1+y_1\sqrt{k})^n$

因為$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{k}=(x_1+y_1\sqrt{k})^{n+1}$

$=(x_1+y_1\sqrt{k})^n\times(x_1+y_1\sqrt{k})$

$=(x_n+y_n\sqrt{k})\times(x_1+y_1\sqrt{k})=(x_1x_n+ky_1y_n)+(y_1x_n+x_1y_n)\sqrt{k}$

所以$x_{n+1}=x_1x_n+ky_1y_n$，$y_{n+1}=y_1x_n+x_1y_n$，故得證。

接下來回到我們原本要探討的$x^2-ky^2=c$的正整數解，我們試著將$x^2-ky^2=1$和x^2-

$ky^2 = c$的解進行連結，也確實讓我們找出來了，有了這個發現，解出$x^2 - ky^2 = 1$的正整數解(x_i, y_i)，i 為任意正整數，就可以找到$x^2 - ky^2 = c$對應的解了。以定理二來說明。

定理二：**$(x^2 - ky^2 = c$與$x^2 - ky^2 = 1$的連動關係$)$**

若(s_j, t_j)為$x^2 - ky^2 = c$的任意一個正整數解，而(x_i, y_i)為$x^2 - ky^2 = 1$的任意一個正整數解，其中 i、j 皆為正整數，則透過$(s_j + t_j\sqrt{k})(x_i + y_i\sqrt{k})$的相乘積，

則可得到$(U_{ji}, V_{ji}) = (s_j x_i + k t_j y_i, s_j y_i + t_j x_i)$為$x^2 - ky^2 = c$ 的正整數解

即$(s_j, t_j) \times$<1>為$x^2 - ky^2 = c$ 的正整數解。

說明：因為$(x_i + y_i\sqrt{k})(s_j + t_j\sqrt{k}) = (x_i s_j + k y_i t_j) + (x_i t_j + y_i s_j)\sqrt{k}$

且(s_j, t_j)為$x^2 - ky^2 = c$的任意一個正整數解，得$s_j^2 - k t_j^2 = c$

又(x_i, y_i)為$x^2 - ky^2 = 1$的任意一個正整數解，得$x_i^2 - k y_i^2 = 1$

所以$(s_j x_i + k t_j y_i)^2 - k(s_j y_i + t_j x_i)^2$

$= x_i^2 s_j^2 + 2k x_i s_j y_i t_j + k^2 y_i^2 t_j^2 - k x_i^2 t_j^2 - 2k x_i t_j y_i s_j - k y_i^2 s_j^2$

$= (x_i^2 s_j^2 - k x_i^2 t_j^2) + (k^2 y_i^2 t_j^2 - k y_i^2 s_j^2)$

$= x_i^2 (s_j^2 - k t_j^2) + k y_i^2 (k t_j^2 - s_j^2)$

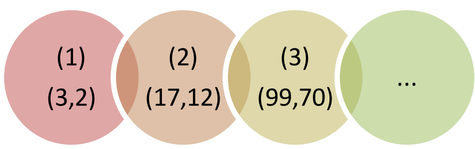
$= x_i^2 \times c + k y_i^2 \times (-c) = c(x_i^2 - k y_i^2) = c \times 1 = c$

即$(s_j x_i + k t_j y_i, s_j y_i + t_j x_i)$為$x^2 - ky^2 = c$的解。

我們統整後，以 k=2，c=－49 為例如下進行說明：

(一) $x^2 - 2y^2 = 1$的第一個解為(3,2)，依定理一形成連結繁衍鏈<1>的依序解為：

<1>:



(二) $x^2 - 2y^2 = -49$的第一個解為(7,7)，依定理二連結繁衍鏈<1>後為：

(1)第二個解：(7,7) ×(3,2)→(49,35)為$x^2 - 2y^2 = -49$的解。

(2)第三個解：(7,7) ×(17,12)→(287, 203)為$x^2 - 2y^2 = -49$的解。

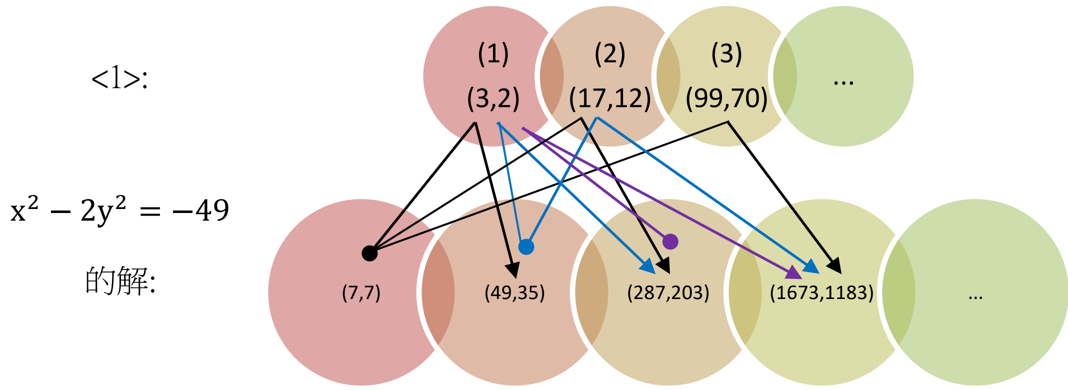
或(49,35) ×(3,2)→$(287,203)$為$x^2-2y^2=-49$的解。

(3) 第四個解：(7,7) ×(99,70)→(1673,1183)為$x^2-2y^2=-49$的解。

或(49,35) ×(17,12) →$(1673,1183)$為$x^2-2y^2=-49$的解。

或(287,203) ×(3,2) →$(1673,1183)$為$x^2-2y^2=-49$的解。

整理圖示$x^2-2y^2=-49$的解結合繁衍鏈<1>如下：



換句話說，只要找到$x^2-2y^2=-49$中任意一個解，就能透過結合繁衍鏈去求出$x^2-2y^2=-49$其他的解，換句話說，可以從一個解去找到無限多個解，這就是所謂的鏈，因為定理一中$x^2-ky^2=1$的解具有「遞迴」關係，則$(s_j,t_j)\times<1>$為$x^2-ky^2=c$的解是否也會具有「遞迴」的關係?由定理三來說明。

定理三：**(繁衍結合鏈的遞迴)**

已知(s_j,t_j)×<1>為$x^2-ky^2=c$的解，若從由小到大的解依序為(U_{j1},V_{j1})，$(U_{j2},V_{j2})\cdots(U_{ji},V_{ji})$ ...其中$(U_{j1},V_{j1})=(s_j,t_j)$

則$\begin{cases}U_{j(i+1)}=x_1U_{ji}+ky_1V_{ji}\\V_{j(i+1)}=y_1U_{ji}+x_1V_{ji}\end{cases}$，其中 j,i 為正整數。

說明：

$$\text{因為}U_{j(i+1)}+V_{j(i+1)}\sqrt{k}=(s_j+t_j\sqrt{k})(x_i+y_i\sqrt{k})$$
$$=(s_j+t_j\sqrt{k})(x_1+y_1\sqrt{k})^i$$
$$=(s_j+t_j\sqrt{k})(x_1+y_1\sqrt{k})^{i-1}(x_1+y_1\sqrt{k})$$
$$=(U_{ji}+V_{ji}\sqrt{k})(x_1+y_1\sqrt{k})$$
$$=(x_1U_{ji}+ky_1V_{ji})+(y_1U_{ji}+x_1V_{ji})\sqrt{k}$$

所以$\begin{cases}U_{j(i+1)}=x_1U_{ji}+ky_1V_{ji}\\V_{j(i+1)}=y_1U_{ji}+x_1V_{ji}\end{cases}$ 故得證。

由上面的推論得知$(s_j,t_j)\times<1>$中對於每一個 j 的其結合繁衍鏈的遞迴係數都與$<1>$的遞迴係數相同，因此，若不同結合繁衍鏈之間的解有遞迴關係，則此兩結合繁衍鏈的解必會互相包含，反之，則這兩個結合繁衍鏈不會有交集，以定理四來說明。

定理四：**(繁衍鏈的獨立性)**

若(s_e,t_e)與(s_m,t_m)為$x^2-ky^2=c$的解且(s_e,t_e)與(s_m,t_m)不能用結合繁衍鏈的遞迴係數互相遞迴，則求證$(s_e,t_e)\times<1>\cap(s_m,t_m)\times<1>=\emptyset$

說明：不失一般性可假設$s_e<s_m$，$t_e<t_m$

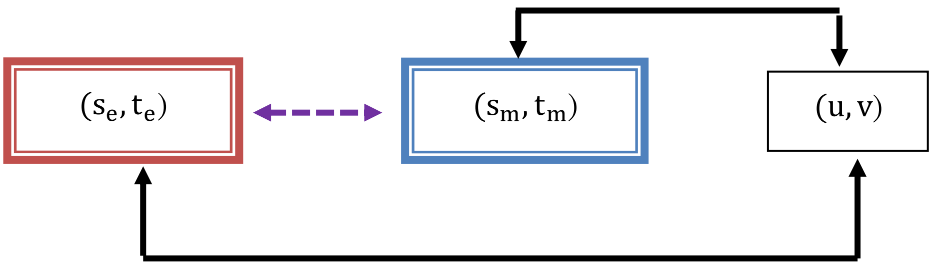
若存在一組解(u,v)同時滿足$(s_e,t_e)\times<1>$與$(s_m,t_m)\times<1>$的解

故(s_e,t_e)經遞迴可得(u,v)，反之，(u,v)也可逆向遞迴至(s_e,t_e)

同時 (s_m,t_m)經遞迴也可得(u,v)，反之，(u,v)也可逆向遞迴至(s_m,t_m)

又因為定理三知$(s_e,t_e)\times<1>$與$(s_m,t_m)\times<1>$的遞迴係數相同

因此(s_e,t_e)與(s_m,t_m)可互相遞迴，這與已知矛盾。如下圖所示：



故得證$(s_e,t_e)\times<1>\cap(s_m,t_m)\times<1>=\emptyset$。

定理四說明了各自不能遞迴的解其所屬結合繁衍鏈是獨立的，但因為(s_1,t_1)、(s_2,t_2)、(s_3,t_3)、、、是$x^2-ky^2=c$的解，若$(s_1,t_1)\times<1>$，$(s_2,t_2)\times<1>$，…，$(s_k,t_k)\times<1>$也是$x^2-ky^2=c$的解且各自獨立，則表示經過結合繁衍鏈出來的解個數的總和勢必大於原本$x^2-ky^2=c$的解個數總和這是不可能的，因此可得一結論：並不是所有的結合繁衍鏈都是獨立的，只要找出各自獨立的結合繁衍鏈就是找出$x^2-ky^2=c$全部的解，我們現在的問題在於到底有幾條獨立的結合繁衍鏈，我們想從解的排列順序來找出其間的連動關係，我們用底下兩個定理來說明。

定理五：**(結合繁衍鏈與解的排列一)**

已知(s_1,t_1)x<1>，(s_2,t_2)x<1>，⋯，(s_N,t_N)x<1>為$x^2-ky^2=c$的解且為兩兩獨立之結合繁衍鏈。

若(s_{N+1},t_{N+1})x<1>存在於 (s_1,t_1)x<1>，(s_2,t_2)x<1>，⋯，(s_N,t_N)x<1>這些結合繁衍鏈中，則(s_{N+1},t_{N+1})必為此結合繁衍鏈(s_1,t_1)x<1>的第二個解，即$(s_{N+1},t_{N+1})=(U_{12},V_{12})$。

說明：

$\because(s_{N+1},t_{N+1})$x<1>存在於 (s_1,t_1)x<1>，(s_2,t_2)x<1>，⋯，(s_N,t_N)x<1>這些結合繁衍鏈中，

$\therefore$存在某個正整數 m 使得$(s_{N+1},t_{N+1})\in(s_m,t_m)$x<1>其中 $1\leqq m\leqq N$

$\because(s_{N+1},t_{N+1})\in(s_m,t_m)$x<1>

$\therefore s_{N+1}+t_{N+1}\sqrt{k}=\left(s_m+t_m\sqrt{k}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)=U_{m2}+V_{m2}\sqrt{k}$

假設 $m\neq1$

$\because s_1+t_1\sqrt{k}<s_m+t_m\sqrt{k}$

$\therefore\left(s_1+t_1\sqrt{k}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)<\left(s_m+t_m\sqrt{k}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)$

即$U_{12}+V_{12}\sqrt{k}<U_{m2}+V_{m2}\sqrt{k}=s_{N+1}+t_{N+1}\sqrt{k}$

因為 (U_{12},V_{12})為$x^2-ky^2=c$之解且$U_{12}+V_{12}\sqrt{k}<s_{N+1}+t_{N+1}\sqrt{k}$

所以可知(s_{N+1},t_{N+1})不可能為$x^2-ky^2=c$之第 N+1 個解

故 $m=1$ 即(s_{N+1},t_{N+1})為(s_1,t_1)x<1>此繁衍鏈的第二個解且$(s_{N+1},t_{N+1})=(U_{12},V_{12})$。

定理六：**(結合繁衍鏈與解的排列二)**

已知(s_1,t_1)x<1>，(s_2,t_2)x<1>，⋯，(s_N,t_N)x<1>為$x^2-ky^2=c$的解且為兩兩獨立之結合繁衍鏈。

若(s_{N+1},t_{N+1})x<1>存在於 (s_1,t_1)x<1>，(s_2,t_2)x<1>，⋯，(s_N,t_N)x<1>這些結合繁衍鏈中，則(s_{N+2},t_{N+2})必為此結合繁衍鏈為(s_2,t_2)x<1>的第二個解，即$(s_{N+2},t_{N+2})=(U_{22},V_{22})$。

說明：

假設(s_{N+2},t_{N+2})x<1>不存在於 (s_1,t_1)x<1>，(s_2,t_2)x<1>，⋯，(s_N,t_N)x<1>這些結合繁衍鏈中，

依定理五(s_{N+1},t_{N+1})為(s_1,t_1)x<1>此繁衍鏈的第二個解及(s_{N+1},t_{N+1})遞迴反推回去的解

為(s_1,t_1)又$(s_{N+2},t_{N+2})>(s_{N+1},t_{N+1})$

因而(s_{N+2},t_{N+2})反推的解必存在於(s_2,t_2)，⋯，(s_N,t_N)這些解之中此與假設矛盾

故(s_{N+2},t_{N+2})×<1>必存在於(s_1,t_1)×<1>，(s_2,t_2)×<1>，⋯，(s_N,t_N)×<1>這些結合繁衍鏈中，

即存在某個正整數 m 使得$(s_{N+2},t_{N+2})\in(s_m,t_m)$×<1>其中 1≦m≦N+1

$\because(s_{N+2},t_{N+2})\in(s_m,t_m)\times\langle 1\rangle$

$\therefore s_{N+2}+t_{N+2}\sqrt{k}=\left(s_m+t_m\sqrt{k}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)=U_{m2}+V_{m2}\sqrt{k}$

(1)假設 3≦m≦N

$\because\left(s_1+t_1\sqrt{k}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)<\left(s_2+t_2\sqrt{k}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)<\left(s_m+t_m\sqrt{k}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)$

$\therefore U_{12}+V_{12}\sqrt{k}<U_{22}+V_{22}\sqrt{k}<U_{m2}+V_{m2}\sqrt{k}$

依定理五因為 (U_{12},V_{12})為$x^2-ky^2=c$第 N+1 個解

但$U_{22}+V_{22}\sqrt{k}<U_{m2}+V_{m2}\sqrt{k}$

所以可知(U_{m2},V_{m2})不可能為$x^2-ky^2=c$之第 N+2 個解

(2)m＝1 或 m＝N+1

①若 m＝1，則$(s_{N+2},t_{N+2})\in(s_1,t_1)$×<1>

因此$s_{N+2}+t_{N+2}\sqrt{k}=\left(s_1+t_1\sqrt{k}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)^2=U_{13}+V_{13}\sqrt{k}$

又$U_{13}+V_{13}\sqrt{k}=(U_{12}+V_{12}\sqrt{k})\times\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)$

依定理五$U_{13}+V_{13}\sqrt{k}=(s_{N+1},t_{N+1})\times\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)>(s_2,t_2)\times\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)$

所以可知(U_{13},V_{13})不可能為$x^2-ky^2=c$之第 N+2 個解，故 m$\neq 1$

②若 m＝$N+1$，則$(s_{N+2},t_{N+2})\in(s_{N+1},t_{N+1})$×<1>

因此$s_{N+2}+t_{N+2}\sqrt{k}=\left(s_{N+1}+t_{N+1}\sqrt{k}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)>(s_2,t_2)\times\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)$

依定理五$U_{13}+V_{13}\sqrt{k}=(s_{N+1},t_{N+1})\times\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)>(s_2,t_2)\times\left(x_1+y_1\sqrt{k}\right)$

所以可知(U_{13},V_{13})不可能為$x^2-ky^2=c$之第 N+2 個解，故 m$\neq N+1$

綜合(1)與(2)可知 m＝2

即$(s_{N+2},t_{N+2})\in(s_2,t_2)\times\langle 1\rangle$

故(s_{N+2},t_{N+2})＝(U_{22},V_{22})。

依定理五與定理六模式層層類推結果：

(1)當 i=2 時可得

$(s_{N+1},t_{N+1})=(U_{12},V_{12})$、$(s_{N+2},t_{N+2})=(U_{22},V_{22})$、$(s_{N+3},t_{N+3})=(U_{32},V_{32})\cdots$

$(s_{N+j},t_{N+j})=(U_{j2},V_{j2})$。

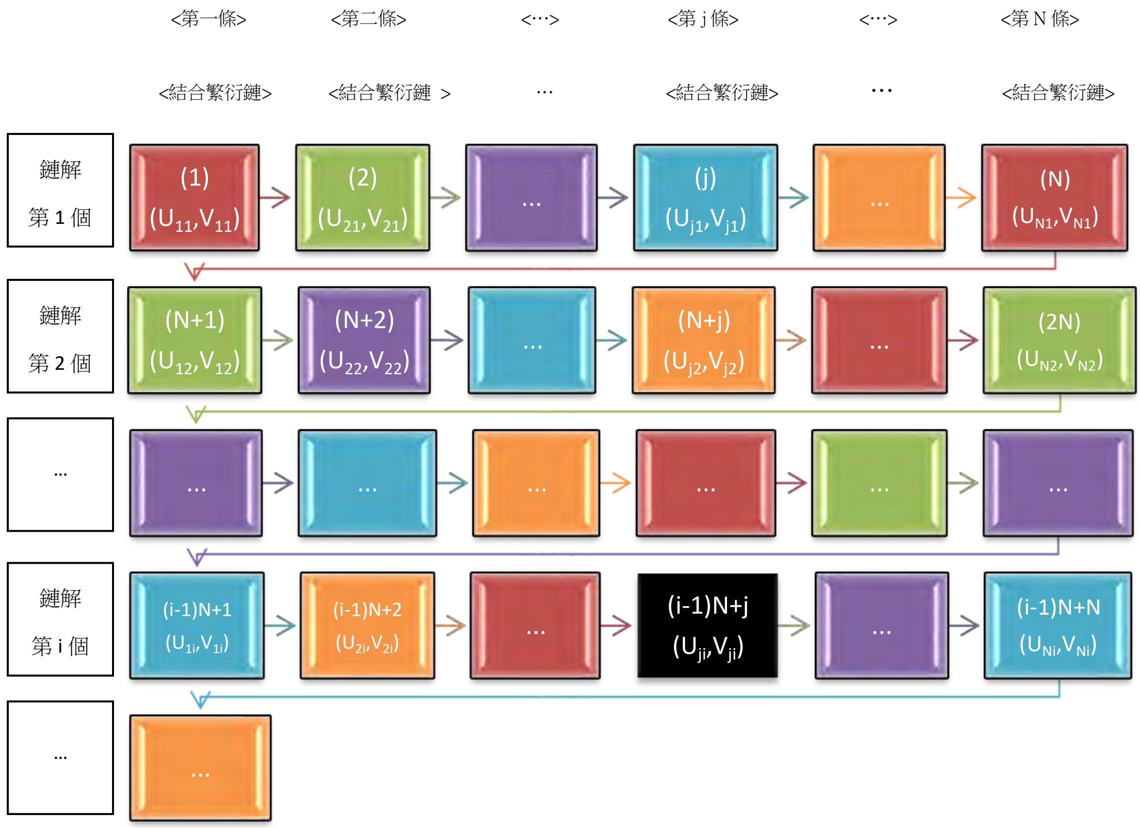
(2)當 i=3 時可得

$(s_{2N+1},t_{2N+1})=(U_{13},V_{13})$、$(s_{2N+2},t_{2N+2})=(U_{23},V_{23})$、$(s_{2N+3},t_{2N+3})=$

$(U_{33},V_{33})\cdots(s_{2N+j},t_{2N+j})=(U_{j3},V_{j3})$。

(3)當 i=4、5、6⋯N 可得**一般式為$(s_{(i-1)N+j},t_{(i-1)N+j})=(U_{ji},V_{ji})$，其中 $1\leqq i\leqq N$**。

接著我們以圖示方式來說明上述定理五、六的具體意涵，排列出$x^2-ky^2=c$所有解由小到大為(1)、(2)、(3)、⋯(N)、(N+1)、(N+2) 、⋯、(2N)、(2N+1)、⋯其中(1)與(N+1)、(N)與(2N)為同一條結合繁衍鏈的解，即若$x^2-ky^2=c$有 N 條獨立的結合繁衍鏈時，其原始由小到大排列的解與結合繁衍鏈分類後的解關係如下：



因此，當我們釐清楚解的排列順序後，接著要如何確立$x^2-ky^2=c$結合繁衍鏈的個數呢?若能找到同一條結合繁衍鏈中連續兩個解之間的依序排列的**位置差**，就等於得到結合繁衍鏈的個數了，我們將 k=2，c= −49 代入$x^2-ky^2=c$得$x^2-2y^2=-49$，其依序的解為(7 ,7)、

(17,13)、(23,17)、(49, 35)、(103, 73)、(137, 97)⋯，如下表結合繁衍鏈的個數為(4)－(1) =(5)－(2) =(6)－(3) = 3，所以如 3-1 呈現的三條結合繁衍鏈。

表 3-1：$x^2-2y^2=-7^2$的結合繁衍鏈實例說明

$x^2-2y^2=1$	$x^2-2y^2=-7^2$		
<1>	<一> (7,7)x<1>	<二> (17,13)x<1>	<三> (23,17)x<1>
	(7, 7)　(1)	(17, 13)　(2)	(23,17)　(3)
(1) (3,2)	(49, 35)　(4)	(103, 73)　(5)	(137,97)　(6)
⋮	⋮	⋮	⋮

我們至此可以推論出找結合繁衍鏈個數的方法，以定理七來說明。

定理七：**(相異結合繁衍鏈的個數)**

已知(U_{ji},V_{ji})及$(U_{j(i+1)},V_{j(i+1)})$為(s_j,t_j)x<1>的兩個連續解，若(U_{ji},V_{ji})為$x^2-ky^2=c$ 的第 m 個解而$(U_{j(i+1)},V_{j(i+1)})$為第 m+N 個解，其中 i,j,m,N≧1，

則$x^2-ky^2=c$的結合繁衍鏈的個數為 N。

說明：

依定理五與六結合繁衍鏈解的排列方式得知結合繁衍鏈的個數為(m+N)－(m)=N，故有 N 條繁衍鏈。

在了解完$x^2-ky^2=c$佩爾方程式的各種定理以及性質，我們想透過在國中數學課程上的作用，讓人了解佩爾方程式的實用性。

因此，接下來分成三個部份來討論，一為針對無理數$\sqrt{k}$的近似值。二是探討直角三角形畢氏數的繁衍。三則是探討中線垂直三角形三邊長的繁衍。以上為目的一總結。

目的二：利用遞迴方程式$x^2-ky^2=1$的解，探討無理數$\sqrt{k}$的近似值。

在國二上的數學課本中有提到十分逼近法，其計算過程相當繁複，這時我們發現了遞迴方程式似乎也能做到同樣逼近的效果，其過程相對簡易也就是利用$x^2-ky^2=1$的遞迴方程式，遞迴解所產生的遞減分數數列逼近$\sqrt{k}$，也就是利用有理數列來探討無理數$\sqrt{k}$的近似值，以下是我們的證明。

定理八：

已知不定方程式 $x^2-ky^2=1$ 的正整數解依序為(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots(x_n,y_n)\cdots\cdots$

則$\frac{x_1}{y_1}$、$\frac{x_2}{y_2}$、$\frac{x_3}{y_3}\cdots\cdots\frac{x_n}{y_n}\cdots\cdots$為一遞減數列且當 n 夠大時$\frac{x_n}{y_n}\doteqdot\sqrt{k}$，n 為正整數。

說明: $\because x^2-ky^2=1$ 等式兩邊同除 y^2

將$\frac{x^2}{y^2}-k=\frac{1}{y^2}\rightarrow\frac{x^2}{y^2}=k+\frac{1}{y^2}=k(1+\frac{1}{ky^2})$

$\rightarrow\frac{x}{y}=\sqrt{k}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{ky^2}}$ 將(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots(x_n,y_n)\cdots$序代入

$\because y_1<y_2<y_3<\cdots<y_n<\cdots$

$\therefore\frac{x_1}{y_1}=\sqrt{k}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k{y_1}^2}}>\frac{x_2}{y_2}=\sqrt{k}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k{y_2}^2}}>\frac{x_3}{y_3}=\sqrt{k}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k{y_3}^2}}>\cdots>\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{k}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k{y_n}^2}}>\cdots$

故 $\frac{x_1}{y_1}$、$\frac{x_2}{y_2}$、$\frac{x_3}{y_3}\cdots\cdots\frac{x_n}{y_n}\cdots\cdots$為一遞減數列，得證。

$\because$當 n夠大時$\sqrt{1+\frac{1}{k{y_n}^2}}\doteqdot 1$

故$\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{k}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k{y_n}^2}}\doteqdot\sqrt{k}\cdot 1=\sqrt{k}$，即$\sqrt{k}\doteqdot\frac{x_n}{y_n}$。

當我們找到 $x^2-ky^2=1$ 的第 1 組解(x_1,y_1)後，依據定理一的遞迴關係與定理八就可以很快找出這一連串的遞減數列逼近$\sqrt{k}$，至於要如何求第 1 組解我們可以先用測試法將 $x^2-ky^2=1$ 的 y 值由 1,2,3⋯代入直到 $1+ky^2$ 為完全平方數，就可以找到(x_1,y_1) 。

另外我們查到文獻(初等數論第三版)中對於$x^2-ky^2=1$的第1組解可以由$\sqrt{k}$的連分數來求，其手法如下令$\sqrt{k}=(a_0,\overline{a_1a_2\ldots a_l})$，$a_0$為$\sqrt{k}$的整數部分，$\overline{a_1a_2\ldots a_l}$表示$\sqrt{k}$的循環週期為 l，即$\sqrt{k}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots\cfrac{\cdots}{a_{l-1}+\frac{1}{a_l}}}}}$當 l 為偶數時，其第一組解為$\frac{x_1}{y_1}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots\frac{1}{a_{l-1}}}}$；當 l 為奇數時，其第一組

解為$\frac{x_1}{y_1}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots\cfrac{1}{a_{2l-1}}}}$。

以 k=47 為例，文獻中$\sqrt{47}$=(6,$\overline{1,5,1,12}$)，l=4，則$x^2-47y^2=1$的第 1 組解

即$\frac{x_1}{y_1}=6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1}}}=\frac{48}{7}$，即$(x_1,y_1)=(48,7)$ 。

以 k=41 為例，文獻中$\sqrt{41}$=(6,$\overline{2,2,12}$)，l=3，則$x^2-41y^2=1$的第 1 組解

即$\frac{x_1}{y_1}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}=\frac{2049}{320}$，即$(x_1,y_1)=(2049,320)$ 。

最後我們呈現$x^2-47y^2=1$的前 3 組解，我們可得一個數列$\frac{x_1}{y_1}$、$\frac{x_2}{y_2}$、$\frac{x_3}{y_3}$，此數列可逼近$\sqrt{47}$≒6.855654600401040 的值，底下我們把$\frac{x_n}{y_n}$之比值整理成表(一)如下:

項數	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$	$\frac{x_n}{y_n}$之值	準確位數(小數點後)
1	48	7	$\frac{48}{7}$	6.85714285714286	2
2	4607	672	$\frac{4607}{672}$	6.85565476190476	6
3	42448897	6191808	$\frac{42448897}{6191808}$	6.855654600401050	13

接著我們呈現$x^2-41y^2=1$的前 2 組解(因數字過大)，我們可得一個數列$\frac{x_1}{y_1}$、$\frac{x_2}{y_2}$，此數列可逼近$\sqrt{41}$≒6.403124237432850 的值，底下我們把$\frac{x_n}{y_n}$之比值整理成表(二)如下:

項數	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$	$\frac{x_n}{y_n}$之值	準確位數(小數點後)
1	2049	320	$\frac{2049}{320}$	6.403125	5
2	8396801	1311360	$\frac{8396801}{1311360}$	6.403124237432890	11

果然繁衍出來的數值經過計算，的確非常逼近$\sqrt{47}$及$\sqrt{41}$，也驗證了這種方法的可行性及有效性。更進一步底下我們提供一個簡易誤差估計式，藉由此估計式來推估 n 值來達到一個目標：給定一個 n 值與要精準到小數點後的位數，則在$\frac{x_n}{y_n}$(包含)後的每一項都能達到此結果，

讓求逼近$\sqrt{k}$近似值的實用性提升。

定理九：**(誤差估計)**

若$x^2-ky^2=1$的解依序由小到大排列成(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots(x_n,y_n)$

則$0<\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{k}<\frac{1}{y_1^n}$，其中 n≧2。

說明：因為(x_n,y_n)為$x^2-ky^2=1$的解依序由小到大的一組解

所以$x_n{}^2-ky_n{}^2=1$(兩邊同除以$y_n{}^2$)得$(\frac{x_n}{y_n})^2-k=\frac{1}{y_n{}^2}$

$$\text{即}\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{k+\frac{1}{y_n{}^2}}=\sqrt{k+\frac{k}{ky_n{}^2}}=\sqrt{k}\left(\sqrt{1+\frac{1}{ky_n{}^2}}\right)=\sqrt{k}\left(\sqrt{\frac{ky_n{}^2+1}{ky_n{}^2}}\right)=\sqrt{k}\left(\sqrt{\frac{y_n{}^2+\frac{1}{k}}{y_n{}^2}}\right)$$

$$<\sqrt{k}\left(\sqrt{\frac{(y_n+1)^2}{y_n{}^2}}\right)=\sqrt{k}\times\frac{y_n+1}{y_n}=\sqrt{k}+\frac{\sqrt{k}}{y_n}$$

$$\text{可得}\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{k}<\frac{\sqrt{k}}{y_n}=\frac{\sqrt{k}}{\frac{(x_1+y_1\sqrt{k})^n-(x_1-y_1\sqrt{k})^n}{2}}=\frac{2\sqrt{k}}{(x_1+y_1\sqrt{k})^n-(x_1-y_1\sqrt{k})^n}$$

$$=\frac{2\sqrt{k}}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}\times(x_1+y_1\sqrt{k})-(x_1-y_1\sqrt{k})^{n-1}\times\frac{(x_1-y_1\sqrt{k})^n}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{k}}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}[(x_1+y_1\sqrt{k})-\frac{(x_1-y_1\sqrt{k})^n}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}}]}$$

$$=\frac{2\sqrt{k}}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}[(x_1+y_1\sqrt{k})-\frac{(x_1-y_1\sqrt{k})^{n-1}}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}}\times(x_1-y_1\sqrt{k})]}\left(\text{顯然}\frac{(x_1-y_1\sqrt{k})^{n-1}}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}}<1\right)$$

$$<\frac{2\sqrt{k}}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}[(x_1+y_1\sqrt{k})-(x_1-y_1\sqrt{k})]}=\frac{2\sqrt{k}}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}\times2y_1\sqrt{k}}=\frac{1}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}\times y_1}$$

又$x_1>y_1$

因此$\frac{1}{(x_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}\times y_1}<\frac{1}{(y_1+y_1\sqrt{k})^{n-1}\times y_1}=\frac{1}{y_1{}^n(1+\sqrt{k})^{n-1}}<\frac{1}{y_1{}^n}$，故$\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{k}<\frac{1}{y_1^n}$得證所謂誤差估計。

依定理九如果$\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{k}<\frac{1}{y_1^n}<10^{-s}$，此時表示$\frac{x_n}{y_n}$(含 n)後的每一項都至少精準到小數點後第 s 位。

目的三:利用遞迴方程式$x^2-2y^2=-d^2$，探討直角三角形畢氏數的繁衍。

在國中數學課本裡，最常用的定理便是商高定理 $a^2+b^2=c^2$，經過我們用變數變換的手法將商高定理轉換成遞迴方程式的形式如下:

我們可設畢氏數中兩股差為 d，d 為正整數。

直角三角形的三邊長分別為 a，b，c 且 b=a+d。

則可得$a^2+(a+d)^2=c^2$

➔$2a^2+2ad+d^2=c^2$　(兩邊乘以 2)

➔$4a^2+4ad+2d^2=2c^2$

➔$(2a+d)^2+d^2=2c^2$

令 c=y，$2a+d$＝x 得到$x^2+d^2=2y^2$　即$x^2-2y^2=-d^2$

這形式就是$x^2-ky^2=c$中 k=2，而 c=$-d^2$。，

接著我們依定理二若(s_j,t_j)為$x^2-ky^2=c$的任意一個正整數解，而(x_i,y_i)為$x^2-ky^2=1$的任意一個正整數解，其中 i、j 皆為正整數，則透過$(s_j+t_j\sqrt{k})(x_i+y_i\sqrt{k})$的相乘積，可得到$(U_{ji},V_{ji})=(s_jx_i+kt_jy_i\ ,s_jy_i+t_jx_i)$為$x^2-ky^2=c$ 的正整數解。

底下將(U_{ji},V_{ji})轉換成畢氏數的關係整理成定理十。

> 定理十：**(轉換)**
>
> 若(U_{ji},V_{ji})且為$x^2-2y^2=-d^2$的正整數解，其中 i、j 皆為正整數，
>
> 則可得畢氏數(a_{ji},b_{ji},c_{ji})＝$(\frac{U_{ji}-d}{2},\frac{U_{ji}+d}{2},V_{ji})$

說明：

因為(U_{ji},V_{ji})且為$x^2-2y^2=-d^2$的正整數解

所以$U_{ji}{}^2-2V_{ji}{}^2=-d^2$

由一開始畢氏數(a_{ji},b_{ji},c_{ji})中，令$c_{ji}=V_{ji}$，$2a_{ji}+d$＝U_{ji}

故a_{ji}＝$\frac{U_{ji}-d}{2}$，b_{ji}＝$a_{ji}+d$＝$\frac{U_{ji}+d}{2}$，c_{ji}＝V_{ji}，故得證。

定理十一：(遞迴)

若(U_{ji},V_{ji})為$x^2-2y^2=-d^2$的正整數解，且由小到大依序為(U_{j1},V_{j1})，

$(U_{j2},V_{j2})\cdots(U_{ji},V_{ji})$ ... 其中 i、j 皆為正整數

則$\begin{cases}U_{j(i+1)}=3U_{ji}+4V_{ji}\\V_{j(i+1)}=2U_{ji}+3V_{ji}\end{cases}$。

說明：

已知 $x^2-2y^2=1$的第一組解(x_1,y_1)=(3,2)

依定理三得$\begin{cases}U_{j(i+1)}=x_1U_{ji}+2y_1V_{ji}\\V_{j(i+1)}=y_1U_{ji}+x_1V_{ji}\end{cases}$

即$\begin{cases}U_{j(i+1)}=3U_{ji}+4V_{ji}\\V_{j(i+1)}=2U_{ji}+3V_{ji}\end{cases}$ 故得證。

有了定理十與定理十一，我們便可找出畢氏數(a_{ji},b_{ji},c_{ji})的繁衍，我們稱之為 SOP 解法。

定理十二：(繁衍鏈的遞迴與畢氏數解的 SOP 解法)

若$x^2-2y^2=-d^2$的解有 N 條繁衍鏈，$(s_1,t_1)\times$<1>，$(s_2,t_2)\times$<1>，⋯，$(s_N,t_N)\times$<1>，

當(U_{ji},V_{ji})為第$(s_j,t_j)\times$<1>之第 i 個解，其所對應的畢氏數為(a_{ji},b_{ji},c_{ji})，其中 i、j、N 皆為正整數，

則$\begin{cases}a_{j(i+1)}=2a_{ji}+b_{ji}+2c_{ji}\\b_{j(i+1)}=a_{ji}+2b_{ji}+2c_{ji}\\c_{j(i+1)}=2a_{ji}+2b_{ji}+3c_{ji}\end{cases}$。

說明：

由定理十知

(1)$a_{ji}=\frac{U_{ji}-d}{2}$，$b_{ji}=\frac{U_{ji}+d}{2}$，$c_{ji}=V_{ji}$

同理：

(2)$a_{j(i+1)}=\frac{U_{j(i+1)}-d}{2}$，$b_{j(i+1)}=\frac{U_{j(i+1)}+d}{2}$，$c_{j(i+1)}=V_{j(i+1)}$

由(1)可得

$\begin{cases}U_{ji}-d=2a_{ji}\\U_{ji}+d=2b_{ji}\end{cases}\Rightarrow U_{ji}=a_{ji}+b_{ji}$又 $d=b_{ji}-a_{ji}$

再依定理十一的遞迴關係可得

(3) $\begin{cases} U_{j(i+1)} = 3U_{ji} + 4V_{ji} \\ V_{j(i+1)} = 2U_{ji} + 3V_{ji} \end{cases}$

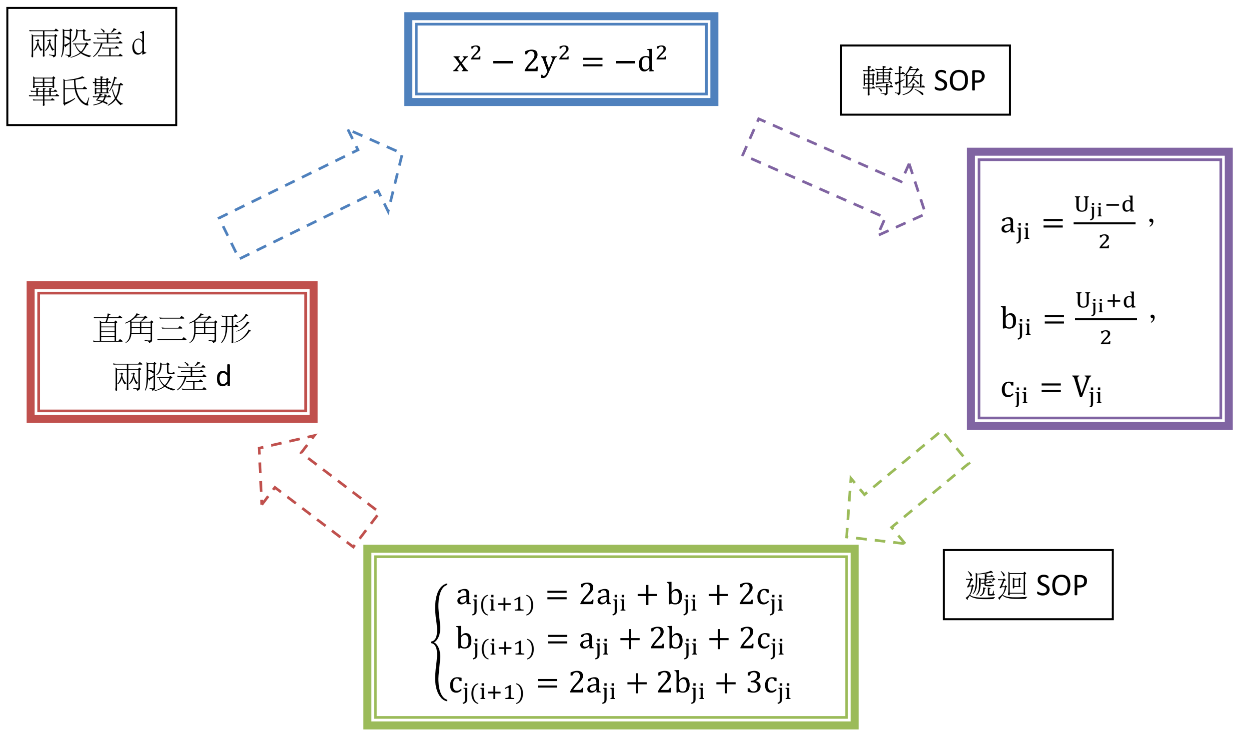
則由(3)代入(2)得 $a_{j(i+1)} = \frac{U_{j(i+1)}-d}{2} = \frac{3U_{ji}+4V_{ji}-d}{2} = \frac{3(a_{ji}+b_{ji})+4c_{ji}-(b_{ji}-a_{ji})}{2} = 2a_{ji} + b_{ji} + 2c_{ji}$

與$b_{j(i+1)} = \frac{U_{j(i+1)}+d}{2} = \frac{3U_{ji}+4V_{ji}+d}{2} = \frac{3(a_{ji}+b_{ji})+4c_{ji}+(b_{ji}-a_{ji})}{2} = a_{ji} + 2b_{ji} + 2c_{ji}$

$c_{j(i+1)} = V_{j(i+1)} = 2U_{ji} + 3V_{ji} = 2(a_{ji} + b_{ji}) + 3c_{ji} = 2a_{ji} + 2b_{ji} + 3c_{ji}$

故$\begin{cases} a_{j(i+1)} = 2a_{ji} + b_{ji} + 2c_{ji} \\ b_{j(i+1)} = a_{ji} + 2b_{ji} + 2c_{ji} \\ c_{j(i+1)} = 2a_{ji} + 2b_{ji} + 3c_{ji} \end{cases}$。

我們將前面定理以圖示方式來說明如下：



這樣一來，我們就可以算出所有兩股差為 d 為固定值時的畢氏數了，這跟我們一般直角三角形邊長為$(m^2 - n^2, 2mn, m^2+n^2)$的畢氏數通式解，兩者最大的不同是我們利用兩股差為 d 作為一種分類方式，因而較為整齊，也會比較有規律性。

接著為了檢驗公式的實用性及完備性，我們針對了兩股差 1 和兩股差 7 的直角三角形進行繁衍的整個 SOP流程。

(1)當 d＝1，即兩股差 1 時對應的遞迴方程式是$x^2 - 2y^2 = -1$：顯然有一個解為(1,1)且可肯定為最小正整數解，而$U_{11}=1$，$V_{11}=1$得第一組畢氏數依轉換 SOP 為

$a_{11}=\frac{U_{11}-d}{2}=\frac{1-1}{2}=0, b_{11}=\frac{U_{11}+d}{2}=\frac{1+1}{2}=1, c_{11}=V_{11}=1 \Longrightarrow$(0,1,1)

不符合幾何圖形的限制(代數有解但是幾何無解)，可再依遞迴 SOP 轉成

$(a_{12}=2a_{11}+b_{11}+2c_{11}=3\ , b_{12}=a_{11}+2b_{11}+2c_{11}=4\ , c_{12}=2a_{11}+2b_{11}+3c_{11}=5)$

$\Longrightarrow$ (3,4,5)是大家熟悉的兩股差 1 的畢氏數，而下一個兩股差 1 的畢氏數可就不見得大家都知道；可是藉由遞迴 SOP 可以找到下一組兩股差 1 的畢氏數為(20,21,29)依此再繼續下去就一網打盡全部找出來，扣除第一組不符合幾何條件的畢氏數，兩股差 1 的畢氏數前 5 組符合的以下表來表示：

順序	x	y	a	b	c
1.	7	5	3	4	5
2.	41	29	20	21	29
3.	239	169	119	120	169
4.	1393	985	696	697	985
5.	8119	5741	4059	4060	5741

(2)當 d＝7，即兩股差 7 時對應的遞迴方程式是$x^2-2y^2=-49$：顯然有一個解為(7,7)可是卻不能確定為第 1 組最小正整數解，我們藉由定理十一逆推(7,7)得(－7,7)顯然不合即(7,7)必為該結合繁衍鏈的第 1 個解，接著我們遞迴(7,7)得其下一個解為(49,35)，我們利用 Excel 或 C 語言程式發現其間還有不能由(7,7)遞迴卻符合$x^2-2y^2=-49$的解為(17,13)、(23,17)，故表示$x^2-2y^2=-49$有 3 條獨立結合繁衍鏈，依兩股差 1 方式可整理成下表的畢氏數且可見這 3 條獨立結合繁衍鏈將所有兩股差 7 的畢氏數一個都不少的找出來了。

順序	x	y	a	b	c
1-1	7	7	0	0	7
2-1	17	13	5	12	13
3-1	23	17	8	15	17
1-2	49	35	21	28	35
2-2	103	73	48	55	73
3-2	137	97	65	72	97
1-3	287	203	140	147	203
2-3	601	425	297	304	425
3-3	799	565	396	403	565

至此透過兩股差 1 與兩股差 7 的實際演算，我們順利的找到了符合條件的所有畢氏數即所有解的完備性，但也意外地發現了當兩股差數字很大時(d,d)不一定會是最小解與也不是只有一條結合繁衍鏈，因此能找到幾條相異結合繁衍鏈各自的鏈頭第 1 個解就能完備繁衍出所有符合兩股相差固定數 d 的所有畢氏數了，以定理十三來說明如何找相異結合繁衍鏈的個數。

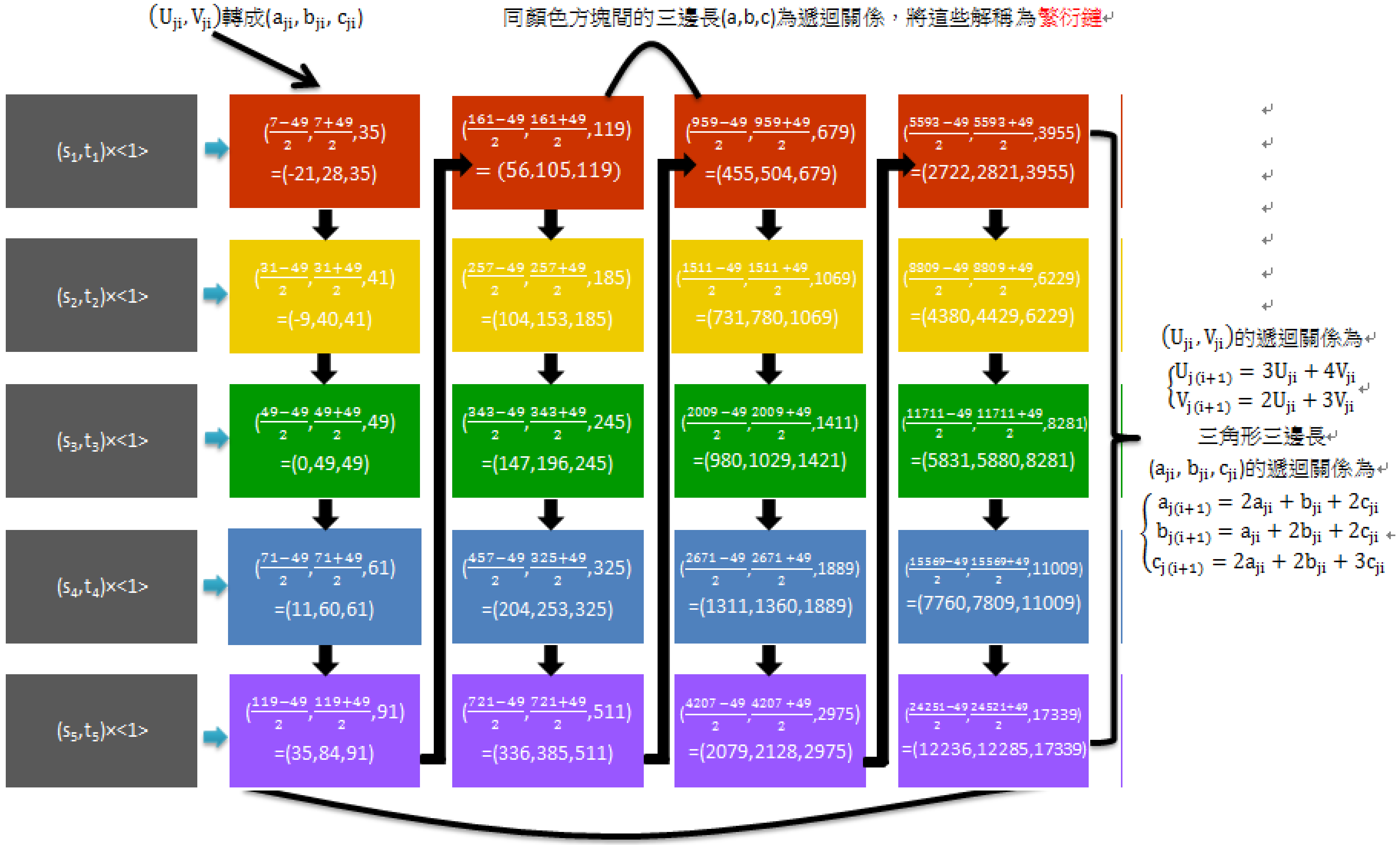
定理十三: **(相異繁衍鏈的個數)**
已知(d,d)為 $x^2-2y^2=-d^2$結合繁衍鏈中的第 Z 個解，而經遞迴後得(7d,5d)為其下一個解且為$x^2-2y^2=-d^2$中的第 N+Z 個解，則$x^2-2y^2=-d^2$繁衍鏈個數為在 y=d 到 y=(5d−1)中滿足不定方程的解個數且共有(N+Z)－Z =N 條繁衍鏈(N、Z 皆為正整數)。

說明：

因為(d,d)為(d,d)x<1>的第 Z 個解，
所以依照遞迴的方式可得其下一個解為(7d,5d)，
現在從 y=d, (d+1)⋯ (5d−1)中看看哪一個 y 值代入可符合$x^2-2y^2=-d^2$的解，
若(7d,5d)為$x^2-2y^2=-d^2$的第 N+Z 個解，則可以得到繁衍鏈數為(N+Z)－Z＝N。

由定理十三可以找到繁衍鏈的個數，但是(d,d)不一定是最小正整數解，至於如何找出最小正整數解，可依在「數形合一」文獻中有求第一個最小正整數解的範圍，透過$x^2-2y^2=1$的最小正整數解(3,2)，來找出$x^2-2y^2=-d^2$(d 為正整數)的最小正整數解(U_{11},V_{11})的範圍，可得$0\le U_{11}\le d$與$\frac{d}{\sqrt{2}}\le V_{11}\le d$，就可以確保所有繁衍鏈的鏈頭都能找到且一網打盡所有的解。

底下舉出兩股相差為 49 的所有畢氏數，其對應的佩爾方程式$x^2-2y^2=-49^2$，則最小正整數解(U_{11},V_{11})的範圍為$0\le U_{11}\le 49$與$\frac{49}{\sqrt{2}}\fallingdotseq 34.648\le V_{11}\le 49$，即$V_{11}=35,36\ldots 49$一一代入$x^2-2y^2=-49^2$可得(7,35)為最小正整數解而透過定理十三得 5 條相異結合繁衍鏈，經SOP 後轉成畢氏數的 5 條繁衍鏈，即可將畢氏數兩股差 49 的所有解一個不漏的都找出來，透過下圖的所有解的分類示意圖來作為目的三的總結，最後完整呈現即使兩股相差 49 一樣可以將符合的畢氏數完備性完美顯現。



呈現整齊規律的排列關係，因此只要找出第一條繁衍鏈的解為所有解中的第幾組解，就可以知道有多少條繁衍鏈

目的四: 利用遞迴方程式$x^2-10y^2=-d^2$，探討中線垂直三角形三邊長的繁衍。

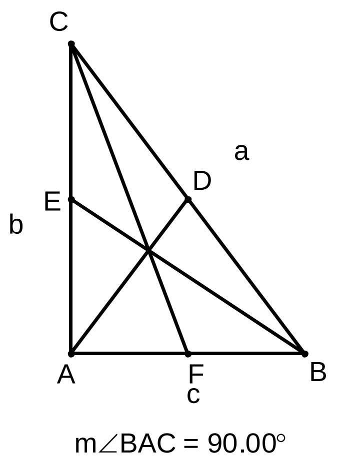
在一次機會下，我們看到了一份有關中線垂直三角形的研究，其中說到其方程式為$a^2+b^2=5c^2$，這不正好和目的三的$a^2+b^2=c^2$的畢氏數有很大的相似嗎?因此我設想是否能用相同的方法，並且能夠將遞迴方程式應用在其上。

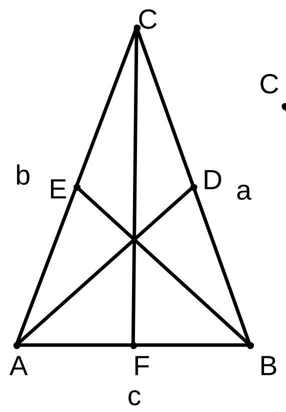
首先，我們先證明中線垂直三角形的性質$a^2+b^2=5c^2$以及其雙向證明，然後我們採用的是中線長度為主(如說明)的方式證明與文獻所用的重心方式有所不同。

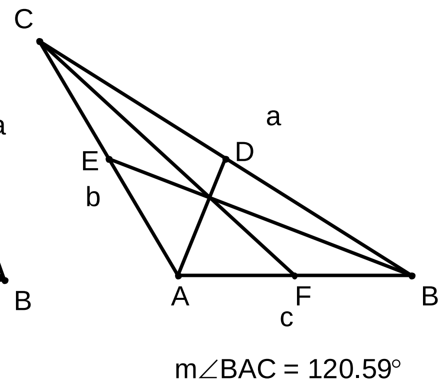
說明：**中線長與三邊長關係**

如圖(依序為直角、銳角與鈍角三角形)所示

其中$\overline{\mathbf{BC}}=a$，$\overline{\mathbf{AC}}=b$，$\overline{\mathbf{AB}}=c$，而$\overline{\mathbf{AD}}$、$\overline{\mathbf{BE}}$、$\overline{\mathbf{CF}}$分別為三中線。







則圖中$\overline{\mathbf{AD}}=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

$\overline{\mathbf{BE}}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$

$\overline{\mathbf{CF}}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$

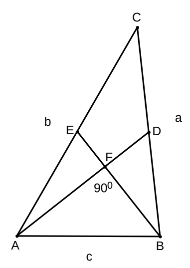
定理十四: **(中線垂直三角形)**(如圖示)

若ΔABC 中, $\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，則

$a^2+b^2=5c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ 的兩中線互相垂直，即

(1)若ΔABC 的兩中線互相垂直，則其三邊長必為$a^2+b^2=5c^2$ 。

(2)若ΔABC 的三邊長關係為$a^2+b^2=5c^2$，則此三角形的兩中線互相垂直。



(1)證明:

透過說明內容，得

線段$\overline{AF}^2+\overline{BF}^2$

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2)=\frac{4c^2+a^2+b^2}{9}$$

∵△ ABC 的兩中線互相垂直

$\therefore \overline{AF}^2+\overline{BF}^2=\overline{AB}^2$ 故 $\frac{4c^2+a^2+b^2}{9}=c^2 \Rightarrow \frac{4c^2+a^2+b^2}{9}=\frac{9c^2}{9} \Rightarrow \frac{a^2+b^2-5c^2}{9}=0 \Rightarrow a^2+b^2=5c^2$

(2)證明:

透過說明，得知

$$\overline{AF}^2+\overline{BF}^2=\frac{4c^2+a^2+b^2}{9}$$

又因為$a^2+b^2=5c^2$，所以$\overline{AF}^2+\overline{BF}^2=\frac{4c^2+a^2+b^2}{9}=\frac{4c^2+5c^2}{9}=\frac{9c^2}{9}=c^2=\overline{AB}^2$

因此ΔAFB為直角三角形，得證ΔABC為中線垂直三角形。

得證此結果後，我們知道$a^2+b^2=5c^2$和中線垂直三角形互為充要條件，因此我們從$a^2+b^2=5c^2$進行研究，就不用擔心其形成之三角形是否為中線垂直三角形

接著，我們利用和目的三一樣的方法得到中線垂直三角形的佩爾方程式

我們可設 a,b 差為 d，d 為正整數。

中線垂直三角形的三邊分別為 a，b＝a+d，c (兩邊長差 d)

依定理十四 則可得$a^2+(a+d)^2=5c^2$

$\rightarrow 2a^2+2ad+d^2=10c^2$ (兩邊乘以 2)

$\rightarrow 4a^2+4ad+2d^2=10c^2$

$\rightarrow (2a+d)^2+d^2=10c^2$

令 c=y，$2a+d$＝x 得到$x^2+d^2=10y^2$，即$x^2-10y^2=-d^2$。

我們仿照目的三的方式，先整理出若(U_{ji},V_{ji})為$x^2-10y^2=-d^2$的正整數解，其中 i、j 皆為正整數，則中線垂直三角形的三邊長(a_{ji},b_{ji},c_{ji})與(U_{ji},V_{ji})的關係如定理十五。

定理十五：(轉換)

若(U_{ji},V_{ji})為$x^2-10y^2=-d^2$的正整數解，其中i、j 皆為正整數，

則可得中線垂直三角形邊長$(a_{ji},b_{ji},c_{ji})=(\frac{U_{ji}-d}{2},\frac{U_{ji}+d}{2},V_{ji})$

說明：

仿照定理十，因為(U_{ji},V_{ji})為$x^2-10y^2=-d^2$的正整數解

所以$U_{ji}{}^2-10V_{ji}{}^2=-d^2$

令中線垂直三角形邊長中

$c_{ji}=V_{ji}$，$2a_{ji}+d=U_{ji}$

故$a_{ji}=\frac{U_{ji}-d}{2}$，$b_{ji}=\frac{U_{ji}+d}{2}$，$c_{ji}=V_{ji}$。

利用定理三與定理十一，我們可以$x^2-10y^2=-d^2$其遞迴關係如下定理十六。

定理十六：(遞迴)

若(U_{ji},V_{ji})為$x^2-10y^2=-d^2$的正整數解，且由小到大依序為(U_{j1},V_{j1})，

$(U_{j2},V_{j2})\cdots(U_{ji},V_{ji})$ ... 其中 i、j 皆為正整數

則$\begin{cases} U_{j(i+1)}=19U_{ji}+60V_{ji} \\ V_{j(i+1)}=6U_{ji}+19V_{ji} \end{cases}$。

說明：

已知 $x^2-10y^2=1$的第一組解$(x_1,y_1)=(19,6)$

依定理三得$\begin{cases} U_{j(i+1)}=x_1U_{ji}+10y_1V_{ji} \\ V_{j(i+1)}=y_1U_{ji}+x_1V_{ji} \end{cases}$

即$\begin{cases} U_{j(i+1)}=19U_{ji}+60V_{ji} \\ V_{j(i+1)}=6U_{ji}+19V_{ji} \end{cases}$ 故得證。

接下來回到我們原本要探討的$x^2-10y^2=-d^2$的正整數解，解出(U_{ji},V_{ji})就可以找到對應的中線垂直三角形的解了。

有了此定理十六的遞迴以及定理十五的轉換關係，就可以找出中線垂直三角形三邊長 (a_{ji},b_{ji},c_{ji})的繁衍解法 SOP。

定理十七：**(繁衍鏈的遞迴與中線垂直三角形解的 SOP 解法)**

已知：中線垂直三角形三邊長(a_{ji},b_{ji},c_{ji})，兩邊長相差 d 時。

若$x^2-10y^2=-d^2$的解有 N 條繁衍鏈，$(s_1,t_1)\times\langle 1\rangle$，$(s_2,t_2)\times\langle 1\rangle$，⋯，$(s_N,t_N)\times\langle 1\rangle$，當$(U_{ji},V_{ji})$為第$(s_j,t_j)\times\langle 1\rangle$之第 i 個解，其所對應的三邊長為$(a_{ji},b_{ji},c_{ji})$，其中 i、j、N 皆為正整數，

則$\begin{cases} a_{j(i+1)}=10a_{ji}+9b_{ji}+30c_{ji} \\ b_{j(i+1)}=9a_{ji}+10b_{ji}+30c_{ji} \\ c_{j(i+1)}=6a_{ji}+6b_{ji}+19c_{ji} \end{cases}$。

說明：由定理十五知

$(1)a_{ji}=\frac{U_{ji}-d}{2}$，$b_{ji}=\frac{U_{ji}+d}{2}$，$c_{ji}=V_{ji}$

同理：

$(2)a_{j(i+1)}=\frac{U_{j(i+1)}-d}{2}$，$b_{j(i+1)}=\frac{U_{j(i+1)}+d}{2}$，$c_{j(i+1)}=V_{j(i+1)}$

由(1)可得

$$\begin{cases} U_{ji}-d=2a_{ji} \\ U_{ji}+d=2b_{ji} \end{cases} \Rightarrow U_{ji}=a_{ji}+b_{ji} \text{又 } d=b_{ji}-a_{ji}$$

再依定理十六的遞迴關係可得

$$(3)\ \begin{cases} U_{j(i+1)}=19U_{ji}+60V_{ji} \\ V_{j(i+1)}=6U_{ji}+19V_{ji} \end{cases}$$

則由(3)代入(2)得

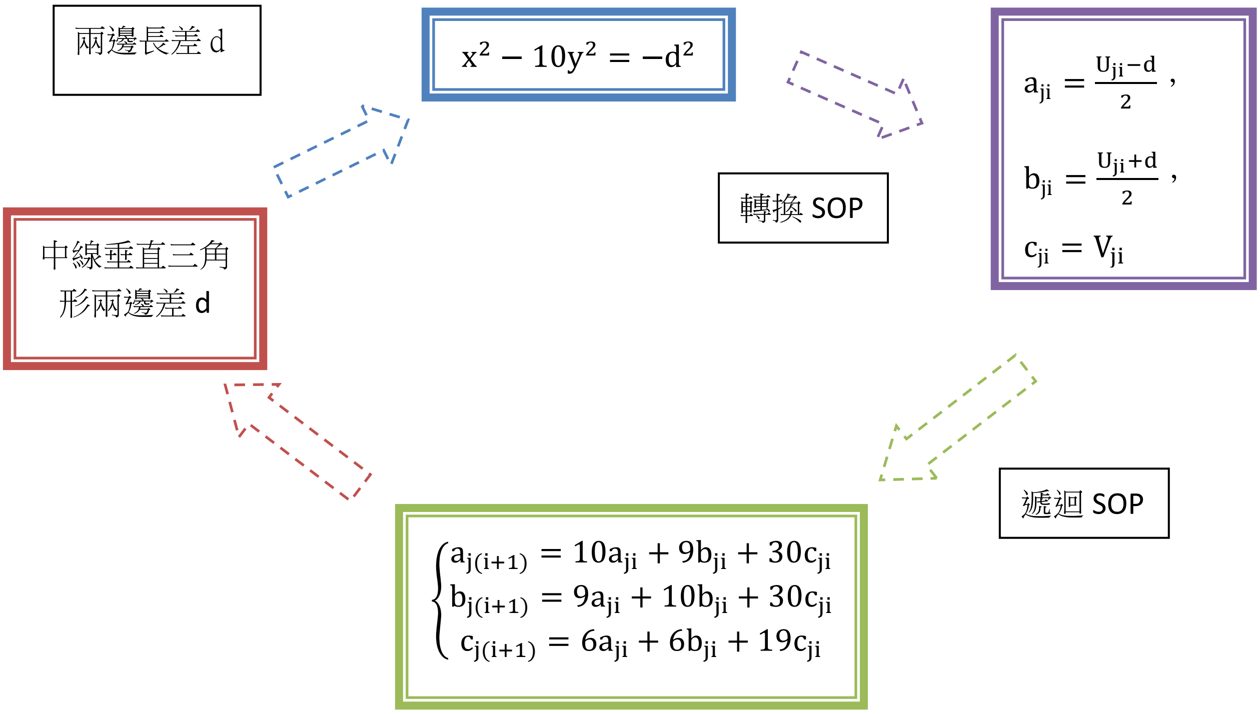
$$a_{j(i+1)}=\frac{U_{j(i+1)}-d}{2}=\frac{19U_{ji}+60V_{ji}-d}{2}=\frac{19(a_{ji}+b_{ji})+60c_{ji}-(b_{ji}-a_{ji})}{2}=10a_{ji}+9b_{ji}+30c_{ji}$$

與$b_{j(i+1)}=\frac{U_{j(i+1)}+d}{2}=\frac{19U_{ji}+60V_{ji}+d}{2}=\frac{19(a_{ji}+b_{ji})+60c_{ji}+(b_{ji}-a_{ji})}{2}=9a_{ji}+10b_{ji}+30c_{ji}$

$$c_{j(i+1)}=V_{j(i+1)}=6U_{ji}+19V_{ji}=6(a_{ji}+b_{ji})+19c_{ji}=6a_{ji}+6b_{ji}+19c_{ji}$$

則$\begin{cases} a_{j(i+1)}=10a_{ji}+9b_{ji}+30c_{ji} \\ b_{j(i+1)}=9a_{ji}+10b_{ji}+30c_{ji} \\ c_{j(i+1)}=6a_{ji}+6b_{ji}+19c_{ji} \end{cases}$

我們將上述的的定理直接以圖示方式來呈現其解法 SOP：



接著與目的三相同的問題在於$x^2-10y^2=-d^2$相異繁衍鏈的個數，透過找到幾條相異繁衍鏈各自的鏈頭第 1 個解就能完備繁衍出所有符合兩邊長相差固定數 d 的所有畢氏數了，以定理十八來說明如何找相異繁衍鏈的個數。

定理十八: **(相異繁衍鏈的個數)**

已知(3d,d)為 $x^2-10y^2=-d^2$結合繁衍鏈中的第 Z 個解，而經遞迴後得(117d,37d)為其下一個解且為$x^2-2y^2=-d^2$中的第 N+Z 個解，則$x^2-10y^2=-d^2$繁衍鏈個數為在 y=d 到 y=(37d−1)中滿足不定方程的解個數且共有(N+Z)－Z =N 條繁衍鏈(N、Z 皆為正整數)。

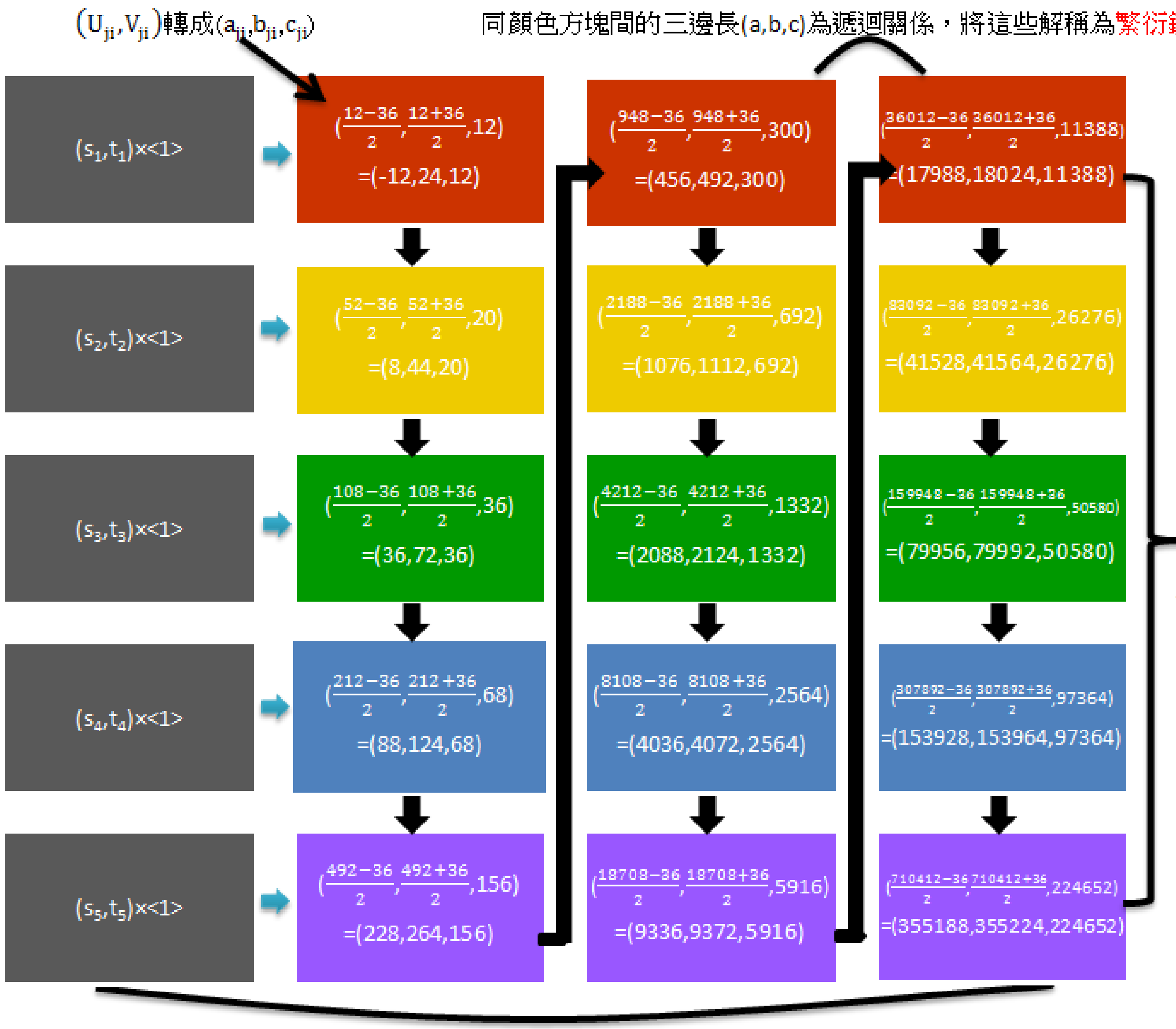
說明：

因為(3d,d)為(3d,d)x<1>的第 Z 個解，
所以依照遞迴的方式可得其下一個解為(117d,37d)，
現在從 y=d, (d+1)⋯ (37d－1)中看看哪一個 y 值代入可符合$x^2-10y^2=-d^2$的解，
若(117d,37d)為$x^2-10y^2=-d^2$的第 N+Z 個解，則可以得到繁衍鏈數為(N+Z)－Z＝N。

由定理十八可以找到繁衍鏈的個數，但是(3d,d)不一定是第 1 條鏈的鏈頭即不一定是最小正整數解，而且到下一個解的範圍也太大了，於是依在「數形合一」文獻中有求第一個最小正整數解的範圍，透過$x^2-10y^2=1$的最小正整數解(19,6)，來找出$x^2-10y^2=-d^2$ (d 為正

整數)的最小正整數解(U_{11},V_{11})的範圍，可得$0 \le U_{11} \le 3d$與$\frac{d}{\sqrt{10}} \le V_{11} \le d$，就可以確保所有繁衍鏈的鏈頭都能找到且一網打盡所有的解。

底下舉出**兩邊長相差為 36** 的所有中線垂直三角形，其對應的佩爾方程式$x^2 - 10y^2 = -36^2$，則最小正整數解(U_{11},V_{11})的範圍為$0 \le U_{11} \le 108$與$\frac{36}{\sqrt{10}} \doteq 11.3842 \le V_{11} \le 36$，即$V_{11} = 12,13 \ldots 36$一一代入$x^2 - 10y^2 = -36^2$可得(12,12)為最小正整數解而透過定理十八得 5 條相異結合繁衍鏈，經SOP 後轉成兩邊長相差 36 的 5 條繁衍鏈，即可將兩邊長相差 36 的中線垂直三角形三邊長所有解一個不漏的都找出來，透過下圖的完成圖來作為目的四的總結，且完整呈現即使兩邊長相差 36 一樣可以將符合的中線垂直三角形三邊長完備性完美顯現出來。



(U_{ji},V_{ji})的遞迴關係為

$$\begin{cases} U_{j(i+1)} = 19U_{ji} + 60V_{ji} \\ V_{j(i+1)} = 6U_{ji} + 19V_{ji} \end{cases}$$

三角形三邊長(a_{ji},b_{ji},c_{ji})的遞迴關係為

$$\begin{cases} a_{j(i+1)} = 10a_{ji} + 9b_{ji} + 30c_{ji} \\ b_{j(i+1)} = 9a_{ji} + 10b_{ji} + 30c_{ji} \\ c_{j(i+1)} = 6a_{ji} + 6b_{ji} + 19c_{ji} \end{cases}$$

呈現整齊規律的排列關係，因此只要找出第一條繁衍鏈的解為所有解中的第幾組解，就可以知道有多少條繁衍鏈

陸、研究結果

經過研究後，我們從佩爾方程式入手，經由我們的結合繁衍鏈的手法去分類其原本的無限多解，並實際用在$x^2-ky^2=1$中求$\sqrt{k}$的近似值以及找尋符合固定兩股差常數 d 的直角三角形畢氏數與固定兩邊差常數 d 的中線垂直三角形的三邊長，讓佩爾方程式的無限多解在國中的數學可以產生實質意義，底下將各目的所主要的結果條列如下，礙於篇幅不能盡書，有興趣者可從頭詳閱才能真的理解本研究的實質內涵所在。

一、若(s_j,t_j)為$x^2-ky^2=c$的任意一個正整數解，而(x_i,y_i)為$x^2-ky^2=1$的任意一個正整數解，其中 i、j 皆為正整數，則透過$(s_j+t_j\sqrt{k})(x_i+y_i\sqrt{k})$的相乘積，則可得到$(U_{ji},V_{ji})=(s_jx_i+kt_jy_i\ ,s_jy_i+t_jx_i)$為$x^2-ky^2=c$ 的正整數解即$(s_j,t_j)\times$<1>為$x^2-ky^2=c$ 的正整數解。

二、已知$(s_j,t_j)\times$<1>為$x^2-ky^2=c$ 的解，若從由小到大的解依序為(U_{j1},V_{j1})，$(U_{j2},V_{j2})\cdots(U_{ji},V_{ji})\ldots$其中$(U_{j1},V_{j1})=(s_j,t_j)$則$\begin{cases}U_{j(i+1)}=x_1\ U_{ji}+ky_1V_{ji}\\ V_{j(i+1)}=y_1\ U_{ji}+x_1V_{ji}\end{cases}$，其中 j,i 為正整數。

三、已知$(s_1,t_1)\times$<1>，$(s_2,t_2)\times$<1>，⋯，$(s_N,t_N)\times$<1>為$x^2-ky^2=c$的解且為兩兩獨立之結合繁衍鏈。若$(s_{N+1},t_{N+1})\times$<1>存在於$(s_1,t_1)\times$<1>，$(s_2,t_2)\times$<1>，⋯，$(s_N,t_N)\times$<1>這些結合繁衍鏈中，則(s_{N+1},t_{N+1})必為此結合繁衍鏈$(s_1,t_1)\times$<1>的第二個解，即$(s_{N+1},t_{N+1})=(U_{12},V_{12})$。

四、已知$(s_1,t_1)\times$<1>，$(s_2,t_2)\times$<1>，⋯，$(s_N,t_N)\times$<1>為$x^2-ky^2=c$的解且為兩兩獨立之結合繁衍鏈。若$(s_{N+1},t_{N+1})\times$<1>存在於$(s_1,t_1)\times$<1>，$(s_2,t_2)\times$<1>，⋯，$(s_N,t_N)\times$<1>這些結合繁衍鏈中，則(s_{N+2},t_{N+2})必為此結合繁衍鏈為$(s_2,t_2)\times$<1>的第二個解，即$(s_{N+2},t_{N+2})=(U_{22},V_{22})$。

五、已知不定方程式 $x^2-ky^2=1$ 的正整數解依序為(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，⋯(x_n,y_n)⋯⋯

則$\frac{x_1}{y_1}$、$\frac{x_2}{y_2}$、$\frac{x_3}{y_3}$⋯⋯$\frac{x_n}{y_n}$⋯⋯為一遞減數列且當 n 夠大時$\frac{x_n}{y_n}\fallingdotseq\sqrt{k}$，n 為正整數。

六、若$x^2-ky^2=1$的解依序由小到大排列成(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，⋯(x_n,y_n)

則$0<\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{k}<\frac{1}{y_1^n}$，其中 n≧2。

七、若$x^2-2y^2=-d^2$的解有 N 條繁衍鏈，$(s_1,t_1)\times<1>$，$(s_2,t_2)\times<1>$，⋯，$(s_N,t_N)\times<1>$，當(U_{ji},V_{ji})為第$(s_j,t_j)\times<1>$之第 i 個解，其所對應的畢氏數為(a_{ji},b_{ji},c_{ji})，其中 i、j、N 皆為正整數，則$\begin{cases}a_{j(i+1)}=2a_{ji}+b_{ji}+2c_{ji}\\ b_{j(i+1)}=a_{ji}+2b_{ji}+2c_{ji}\\ c_{j(i+1)}=2a_{ji}+2b_{ji}+3c_{ji}\end{cases}$。

八、已知(d,d)為 $x^2-2y^2=-d^2$結合繁衍鏈中的第 Z 個解，而經遞迴後得(7d,5d)為其下一個解且為$x^2-2y^2=-d^2$中的第 N+Z 個解，則$x^2-2y^2=-d^2$繁衍鏈個數為在 y=d 到 y=(5d−1)中滿足不定方程的解個數且共有(N+Z)－Z =N 條繁衍鏈(N、Z 皆為正整數)。

九、已知中線垂直三角形三邊長(a_{ji},b_{ji},c_{ji})，兩邊長相差 d 時。

若$x^2-10y^2=-d^2$的解有 N 條繁衍鏈，$(s_1,t_1)\times<1>$，$(s_2,t_2)\times<1>$，⋯，$(s_N,t_N)\times<1>$，當(U_{ji},V_{ji})為第$(s_j,t_j)\times<1>$之第 i 個解，其所對應的三邊長為(a_{ji},b_{ji},c_{ji})，其中 i、j、N 皆為正整數，則$\begin{cases}a_{j(i+1)}=10a_{ji}+9b_{ji}+30c_{ji}\\ b_{j(i+1)}=9a_{ji}+10b_{ji}+30c_{ji}\\ c_{j(i+1)}=6a_{ji}+6b_{ji}+19c_{ji}\end{cases}$。

十、已知(3d,d)為 $x^2-10y^2=-d^2$結合繁衍鏈中的第 Z 個解，而經遞迴後得(117d,37d)為其下一個解且為$x^2-2y^2=-d^2$中的第 N+Z 個解，則$x^2-10y^2=-d^2$繁衍鏈個數為在 y=d 到 y=(37d−1)中滿足不定方程的解個數且共有(N+Z)－Z =N 條繁衍鏈(N、Z 皆為正整數)。

柒、研究結論

一般研究佩爾方程式主要聚焦利用結構法在求出解並找出一般式，但是並不能證明出其結構手法可找出全部的解，但是我們把x^2-ky^2=c的無限多解分類成數條結合繁衍鏈，由於每條結合繁衍鏈都具有遞迴關係且每條結合繁衍鏈都是獨立的，因此只要找出每條鏈的鏈頭(該鏈的第一個解)就可以求出全部的解(完備性)，這是我們的研究最有意義的地方。

因而研究過程遇到的瓶頸在於求x^2-ky^2=c的第一組解，幸好有文獻國際科展作品「數形合一」中可以藉由第一組解的範圍，輕易就可以求出而再透過我們結合繁衍鏈來將所有解一網打盡，顯然站在巨人的肩膀上可以看得更遠也走得更遠的道理了。

最後將此對佩爾方程式的解的分類法，實際漂亮的應用在國中的課程之中，讓佩爾方程式對國中生而言是有用而非遙不可及的不定方程式，特別感謝指導老師的協助與引導，讓作品有完美的結果。

捌、參考資料

一、國中數學第三冊(2017 年 8 月)．第二章：平方根與近似值．畢氏定理．
康軒出版社三版三刷。

二、國中數學第五冊(2017 年 8 月)．第三章：外心、內心與重心．康軒出版社三版三刷。

三、許毓芳(2013) ．數形合一．台灣國際科展一等獎。

四、黃郁文、吳真、許涵嵋(2008 年 7 月)．正直的好朋友-發現三角形兩中線直交定理．
第四十八全國科展第三名。

五、潘承洞、潘承彪．初等數論第三版(2013 年 1 月 1 日) ．北京大學出版社．311．350。

【評語】030406

透過遞迴、繁衍鏈的方式提供廣義佩爾方程式求解的新的處理方式，想法別出心裁，值得嘉許，報告中並附有三個有趣的相關應用。

作品海報

摘　　要：略

壹、研究動機：略

貳、研究目的：略

参、名詞解釋：略

肆、研究設備及器材：略

伍、研究過程：

目的一：探討遞迴方程式$x^2-ky^2=1$和$x^2-ky^2=c$解之間的關聯性

在開始進行$x^2-ky^2=c$的討論時，我們原本有考慮直接從$x^2-ky^2=c$下手，但是發現直接去求解似乎不是那麼簡單，正好在數論書籍中有提到關於$x^2-ky^2=1$的論點，其中只有 c 和 1 的差別，這一點，讓我們想要先研究$x^2-ky^2=1$，再試著從中找到$x^2-ky^2=1$和$x^2-ky^2=c$間的關聯性

要討論$x^2-ky^2=c$的解，需要先知道$x^2-ky^2=1$這種形式的解，依據數論相關書籍的內容，我們得知形如$x^2-ky^2=1$的二元二次方程式稱為佩爾方程，其解可設 k 是一個正整數且不是一個完全平方數，則不定方程$x^2-ky^2=1$有無限多組正整數解(x_i,y_i)，i 為任意正整數；假設(x_1,y_1)是所有正整數解中使 $x+y\sqrt{k}$最小的那一組解，則$x^2-ky^2=1$的全部正整數解(x,y)可由$x_n+y_n\sqrt{k}=(x_1+y_1\sqrt{k})^n$表示出來，及$x_n=\frac{(x_1+y_1\sqrt{k})^n+(x_1-y_1\sqrt{k})^n}{2}$,$y_n=\frac{(x_1+y_1\sqrt{k})^n-(x_1-y_1\sqrt{k})^n}{2}$，其中 n 為正整數。

由上述的解的連動關係，我們以定理一來說明$x^2-ky^2=1$的遞迴關係式。

定理一：(x² − ky²=1解本身的遞迴性)

若$x^2-ky^2=1$的正整數解依序由小到大排列成(x_1,y_1) ，(x_2,y_2)，$\cdots(x_n,y_n)$，

則$\begin{cases}x_{n+1}=x_1x_n+ky_1y_n\\ y_{n+1}=y_1x_n+x_1y_n\end{cases}$ 。

定理二：(x² − ky² = c與x² − ky² = 1的連動關係)

若(s_j,t_j)為$x^2-ky^2=c$的任意一個正整數解，而(x_i,y_i)為$x^2-ky^2=1$的任意一個正整數解，其中 i、j 皆為正整數，則透過$(s_j+t_j\sqrt{k})(x_i+y_i\sqrt{k})$的相乘積，

則可得到$(U_{ji},V_{ji})=(s_jx_i+kt_jy_i\ ,s_jy_i+t_jx_i)$為$x^2-ky^2=c$ 的正整數解

即$(s_j,t_j)\times\langle 1\rangle$為$x^2-ky^2=c$ 的正整數解。

我們統整後，以 k=2，c=－49 為例如下進行說明：

(一)$x^2-2y^2=1$的第一個解為(3,2)，依定理一形成連結繁衍鏈<1>的依序解為：

<1>:

(二)$x^2-2y^2=-49$的第一個解為(7,7)，依定理二連結繁衍鏈<1>後為：

(1)第二個解：(7,7) ×(3,2)→(49,35)為$x^2-2y^2=-49$的解。

(2)第三個解：(7,7) ×(17,12)→(287, 203)為$x^2-2y^2=-49$的解。

或(49,35) ×(3,2)→(287, 203)為$x^2-2y^2=-49$的解。

(3) 第四個解：(7,7) ×(99,70)→(1673,1183)為$x^2-2y^2=-49$的解。

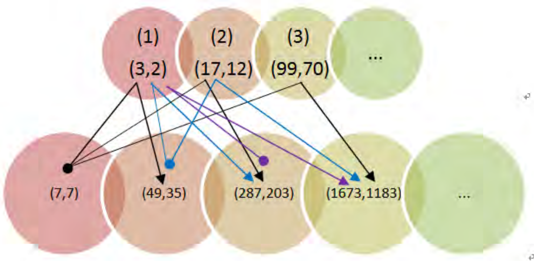
或(49,35) ×(17,12) →(1673, 1183)為$x^2-2y^2=-49$的解。

或(287,203) ×(3,2) →(1673, 1183)為$x^2-2y^2=-49$的解。

整理圖示$x^2-2y^2=-49$的解結合繁衍鏈<1>如下：

<1>:

$x^2-2y^2=-49$ 的解:



定理三：(繁衍結合鏈的遞迴)

已知$(s_j,t_j)\times\langle 1\rangle$為$x^2-ky^2=c$ 的解，若從由小到大的解依序為(U_{j1},V_{j1})，$(U_{j2},V_{j2})\cdots(U_{ji},V_{ji})$ ...其中$(U_{j1},V_{j1})=(s_j,t_j)$

則$\begin{cases}U_{j(i+1)}=x_1\,U_{ji}+ky_1V_{ji}\\ V_{j(i+1)}=y_1\,U_{ji}+x_1V_{ji}\end{cases}$，其中 j,i 為正整數。

定理四：(繁衍鏈的獨立性)

若(s_e,t_e)與(s_m,t_m)為$x^2-ky^2=c$的解且(s_e,t_e)與(s_m,t_m)不能用結合繁衍鏈的遞迴係數互相遞迴，則求證$(s_e,t_e)\times\langle 1\rangle\cap(s_m,t_m)\times\langle 1\rangle=\emptyset$

定理五：(結合繁衍鏈與解的排列一)

已知$(s_1,t_1)\times\langle 1\rangle$，$(s_2,t_2)\times\langle 1\rangle$，⋯，$(s_N,t_N)\times\langle 1\rangle$為$x^2-ky^2=c$的解且為兩兩獨立之結合繁衍鏈。

若$(s_{N+1},t_{N+1})\times\langle 1\rangle$存在於 $(s_1,t_1)\times\langle 1\rangle$，$(s_2,t_2)\times\langle 1\rangle$，⋯，$(s_N,t_N)\times\langle 1\rangle$這些結合繁衍鏈中，

則(s_{N+1},t_{N+1})必為此結合繁衍鏈$(s_1,t_1)\times\langle 1\rangle$的第二個解，即$(s_{N+1},t_{N+1})=(U_{12},V_{12})$。

定理六：(結合繁衍鏈與解的排列二)

已知$(s_1,t_1)\times\langle 1\rangle$，$(s_2,t_2)\times\langle 1\rangle$，⋯，$(s_N,t_N)\times\langle 1\rangle$為$x^2-ky^2=c$的解且為兩兩獨立之結合繁衍鏈。

若$(s_{N+1},t_{N+1})\times\langle 1\rangle$存在於 $(s_1,t_1)\times\langle 1\rangle$，$(s_2,t_2)\times\langle 1\rangle$，⋯，$(s_N,t_N)\times\langle 1\rangle$這些結合繁衍鏈中，

則(s_{N+2},t_{N+2})必為此結合繁衍鏈為$(s_2,t_2)\times\langle 1\rangle$的第二個解，即$(s_{N+2},t_{N+2})=(U_{22},V_{22})$。

依定理五與定理六模式層層類推結果：

(1)當 i=2 時可得

$(s_{N+1},t_{N+1})=(U_{12},V_{12})$、$(s_{N+2},t_{N+2})=(U_{22},V_{22})$、$(s_{N+3},t_{N+3})=(U_{32},V_{32})\cdots$

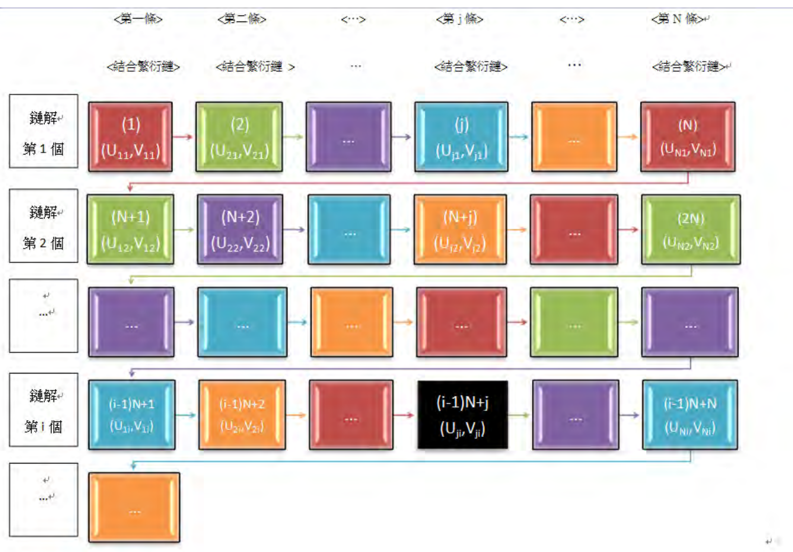
$(s_{N+j},t_{N+j})=(U_{j2},V_{j2})$。

(2)當 i=3 時可得

$(s_{2N+1},t_{2N+1})=(U_{13},V_{13})$、$(s_{2N+2},t_{2N+2})=(U_{23},V_{23})$、$(s_{2N+3},t_{2N+3})=(U_{33},V_{33})\cdots(s_{2N+j},t_{2N+j})=(U_{j3},V_{j3})$。

(3)當 i=4、5、6⋯N 可得一般式為$(s_{(i-1)N+j},t_{(i-1)N+j})=(U_{ji},V_{ji})$，其中 $1\leq i\leq N$。

接著我們以圖示方式來說明上述定理五、六的具體意涵，排列出$x^2-ky^2=c$所有解由小到大為(1)、(2)、(3)、⋯(N)、(N+1)、(N+2) 、⋯、(2N)、(2N+1)、⋯其中(1)與(N+1)、(N)與(2N)為同一條結合繁衍鏈的解，即若$x^2-ky^2=c$有 N 條獨立的結合繁衍鏈時，其原始由小到大排列的解與結合繁衍鏈分類後的解關係如下：



定理七：(相異結合繁衍鏈的個數)

已知(U_{ji},V_{ji})及$(U_{j(i+1)},V_{j(i+1)})$為$(s_j,t_j)\times\langle 1\rangle$的兩個連續解，若$(U_{ji},V_{ji})$為$x^2-ky^2=c$ 的第 m 個解而$(U_{j(i+1)},V_{j(i+1)})$為第 m+N 個解，其中 i,j,m,N≧1，

則$x^2-ky^2=c$的結合繁衍鏈的個數為 N。

表 3-1：$x^2-2y^2=-7^2$的結合繁衍鏈實例說明

$x^2-2y^2=1$	$x^2-2y^2=-7^2$		
<1>	<一> (7,7)x<1>	<二> (17,13)x<1>	<三> (23,17)x<1>
	(7, 7)　(1)	(17, 13)　(2)	(23,17)　(3)
(1) (3,2)	(49, 35)　(4)	(103, 73)　(5)	(137,97)　(6)
⋮	⋮	⋮	⋮

目的二：利用遞迴方程式$x^2-ky^2=1$的解，探討無理數$\sqrt{k}$的近似值。

在國二上的數學課本中有提到十分逼近法，其計算過程相當繁複，這時我們發現了遞迴方程式似乎也能做到同樣逼近的效果，其過程相對簡易也就是利用$x^2-ky^2=1$的遞迴方程式遞迴解所產生的遞減分數數列逼近$\sqrt{k}$，也就是利用有理數列來探討無理數$\sqrt{k}$的近似值，以下是我們的證明。

定理八：

已知不定方程式 $x^2-ky^2=1$ 的正整數解依序為(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots(x_n,y_n)\cdots\cdots$

則$\frac{x_1}{y_1}$、$\frac{x_2}{y_2}$、$\frac{x_3}{y_3}\cdots\cdots\frac{x_n}{y_n}\cdots\cdots$為一遞減數列且當 n 夠大時$\frac{x_n}{y_n}\fallingdotseq\sqrt{k}$，n 為正整數。

當我們找到 $x^2-ky^2=1$ 的第 1 組解(x_1,y_1)後，依據定理一的遞迴關係與定理八就可以很快找出這一連串的遞減數列逼近$\sqrt{k}$，至於要如何求第 1 組解我們可以先用測試法將 $x^2-ky^2=1$ 的 y 值由 1,2,3⋯代入直到 $1+ky^2$ 為完全平方數，就可以找到(x_1,y_1) 。

另外我們查到文獻(初等數論第三版)中對於 $x^2-ky^2=1$ 的第 1 組解可以由$\sqrt{k}$的連分數來求，其手法如下令$\sqrt{k}=(a_0,\overline{a_1a_2\ldots a_\ell})$，$a_0$為$\sqrt{k}$的整數部分，$\overline{a_1a_2\ldots a_\ell}$表示$\sqrt{k}$的循環週期為 ℓ，即

$\sqrt{k}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\cdots\cfrac{\cdots}{a_{\ell-1}+\frac{1}{a_\ell}}}}}$ 當 ℓ 為偶數時，其第一組解為$\frac{x_1}{y_1}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots\frac{1}{a_{\ell-1}}}}$；當 ℓ 為奇數時，其第一組解為$\frac{x_1}{y_1}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots\frac{1}{a_{2\ell-1}}}}$。

以 k=47 為例，文獻中$\sqrt{47}=(6,\overline{1,5,1,12})$，$\ell$=4，則$x^2-47y^2=1$ 的第 1 組解

即$\frac{x_1}{y_1}=6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\frac{1}{1}}}=\frac{48}{7}$，即$(x_1,y_1)=(48,7)$ 。

以 k=41 為例，文獻中$\sqrt{41}=(6,\overline{2,2,12})$，$\ell$=3，則$x^2-41y^2=1$ 的第 1 組解

即$\frac{x_1}{y_1}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}=\frac{2049}{320}$，即$(x_1,y_1)=(2049,320)$ 。

定理九：(誤差估計)

若$x^2-ky^2=1$的解依序由小到大排列成(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots(x_n,y_n)$

則$0<\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{k}<\frac{1}{y_1^n}$，其中 n≧2。

目的三:利用遞迴方程式$x^2-2y^2=-d^2$，探討直角三角形畢氏數的繁衍。

定理十：**(轉換)**

若(U_{ji},V_{ji})且為$x^2-2y^2=-d^2$的正整數解，其中 i、j 皆為正整數，

則可得畢氏數$(a_{ji},b_{ji},c_{ji})=(\frac{U_{ji}-d}{2},\frac{U_{ji}+d}{2},V_{ji})$

定理十一： **(遞迴)**

若(U_{ji},V_{ji})為$x^2-2y^2=-d^2$的正整數解，且由小到大依序為(U_{j1},V_{j1})，

$(U_{j2},V_{j2})\cdots(U_{ji},V_{ji})$...其中 i、j 皆為正整數

則$\begin{cases}U_{j(i+1)}=3U_{ji}+4V_{ji}\\V_{j(i+1)}=2U_{ji}+3V_{ji}\end{cases}$。

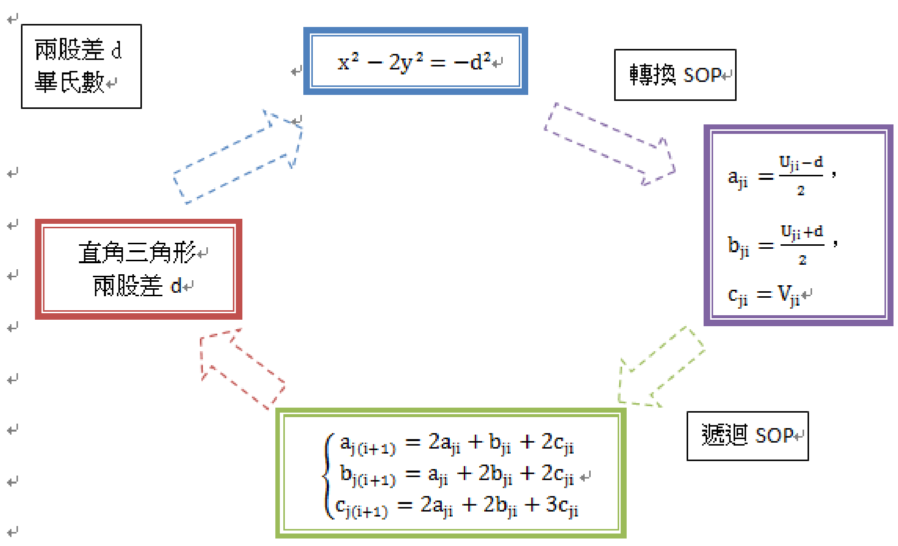
定理十二：**(繁衍鏈的遞迴與畢氏數解的 SOP 解法)**

若$x^2-2y^2=-d^2$的解有 N 條繁衍鏈，$(s_1,t_1)\times<1>$，$(s_2,t_2)\times<1>$，⋯，$(s_N,t_N)\times<1>$，

當(U_{ji},V_{ji})為第$(s_j,t_j)\times<1>$之第 i 個解，其所對應的畢氏數為(a_{ji},b_{ji},c_{ji})，其中 i、j、N 皆為正整數，

則$\begin{cases}a_{j(i+1)}=2a_{ji}+b_{ji}+2c_{ji}\\b_{j(i+1)}=a_{ji}+2b_{ji}+2c_{ji}\\c_{j(i+1)}=2a_{ji}+2b_{ji}+3c_{ji}\end{cases}$。

我們將前面定理以圖示方式來說明如下：



這樣一來，我們就可以算出所有兩股差為 d 為固定值時的畢氏數了，這跟我們一般直角三角形邊長為$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$的畢氏數通式解，兩者最大的不同是我們利用兩股差為 d 作為一種分類方式，因而較為整齊，也會比較有規律性。

接著為了檢驗公式的實用性及完備性，我們針對了兩股差 1 和兩股差 7 的直角三角形進行繁衍的整個 SOP流程。

(1)當 d=1，即兩股差 1 時對應的遞迴方程式是$x^2-2y^2=-1$：顯然有一個解為(1,1)且可肯定為最小正整數解，而$U_{11}=1$，$V_{11}=1$得第一組畢氏數依轉換 SOP 為

$a_{11}=\frac{U_{11}-d}{2}=\frac{1-1}{2}=0,b_{11}=\frac{U_{11}+d}{2}=\frac{1+1}{2}=1,c_{11}=V_{11}=1\Rightarrow(0,1,1)$

不符合幾何圖形的限制(代數有解但是幾何無解)，可再依遞迴 SOP 轉成

$(a_{12}=2a_{11}+b_{11}+2c_{11}=3\ ,b_{12}=a_{11}+2b_{11}+2c_{11}=4\ ,c_{12}=2a_{11}+2b_{11}+3c_{11}=5)$

$\Rightarrow$ (3,4,5)是大家熟悉的兩股差 1 的畢氏數，而下一個兩股差 1 的畢氏數可就不見得大

$a_{11}=\frac{U_{11}-d}{2}=\frac{1-1}{2}=0,b_{11}=\frac{U_{11}+d}{2}=\frac{1+1}{2}=1,c_{11}=V_{11}=1\Rightarrow(0,1,1)$

不符合幾何圖形的限制(代數有解但是幾何無解)，可再依遞迴 SOP 轉成

$(a_{12}=2a_{11}+b_{11}+2c_{11}=3\ ,b_{12}=a_{11}+2b_{11}+2c_{11}=4\ ,c_{12}=2a_{11}+2b_{11}+3c_{11}=5)$

$\Rightarrow$ (3,4,5)是大家熟悉的兩股差 1 的畢氏數，而下一個兩股差 1 的畢氏數可就不見得大

家都知道；可是藉由遞迴 SOP 可以找到下一組兩股差 1 的畢氏數為(20,21,29)依此再繼續下去就一網打盡全部找出來，扣除第一組不符合幾何條件的畢氏數，兩股差 1 的畢氏數前 5 組符合的以下表來表示：

順序	x	y	a	b	c
1.	7	5	3	4	5
2.	41	29	20	21	29
3.	239	169	119	120	169
4.	1393	985	696	697	985
5.	8119	5741	4059	4060	5741

(2)當 d=7，即兩股差 7 時對應的遞迴方程式是$x^2-2y^2=-49$：顯然有一個解為(7,7)可是卻不能確定為第 1 組最小正整數解，我們藉由定理十一逆推(7,7)得(−7,7)顯然不合即(7,7)必為該結合繁衍鏈的第 1 個解，接著我們遞迴(7,7)得其下一個解為(49,35)，我們利用 Excel 或 C 語言程式發現其間還有不能由(7,7)遞迴卻符合$x^2-2y^2=-49$的解為(17,13)、(23,17)，故表示$x^2-2y^2=-49$有 3 條獨立結合繁衍鏈，依兩股差 1 方式可整理成下表的畢氏數且可見這 3 條獨立結合繁衍鏈將所有兩股差 7 的畢氏數一個都不少的找出來了。

順序	x	y	a	b	c
1-1	1	5	−3	4	5
2-1	7	7	0	7	7
3-1	17	13	5	12	13
1-2	23	17	8	15	17
2-2	49	35	21	28	35
3-2	103	73	48	55	73
1-3	137	97	65	72	97
2-3	287	203	140	147	203
3-3	601	425	297	304	425

定理十三: **(相異繁衍鏈的個數)**
已知(d,d)為$x^2-2y^2=-d^2$結合繁衍鏈中的第 Z 個解，而經遞迴後得(7d,5d)為其下一個解且為$x^2-2y^2=-d^2$中的第 N+Z 個解，則$x^2-2y^2=-d^2$繁衍鏈個數為在 y=d 到 y=(5d−1)中滿足不定方程的解個數且共有(N+Z)−Z=N 條繁衍鏈(N、Z 皆為正整數)。

說明：

因為(d,d)為$(d,d)\times<1>$的第 Z 個解，

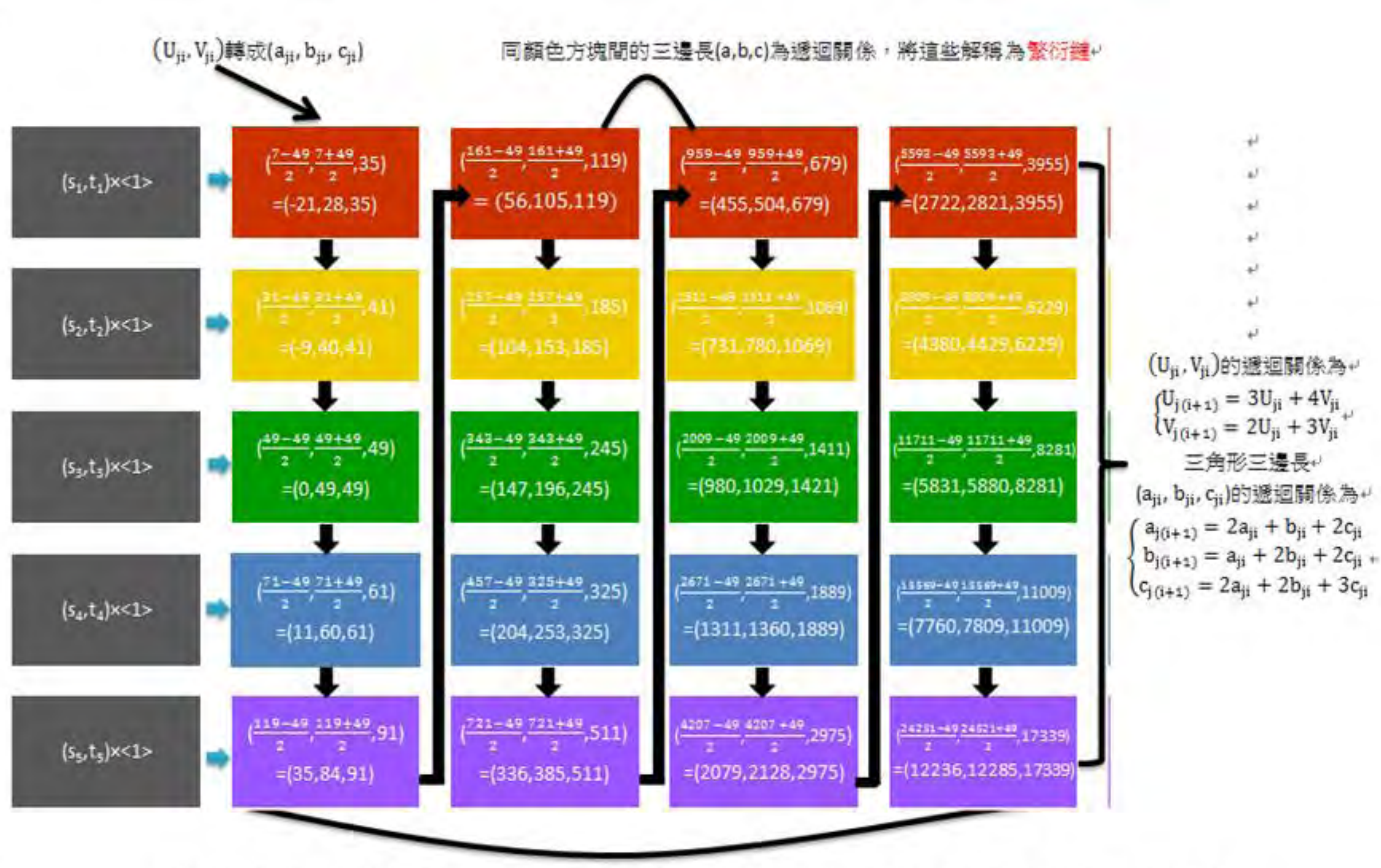
所以依照遞迴的方式可得其下一個解為(7d,5d)，

現在從 y=d, (d+1)⋯ (5d−1)中看看哪一個 y 值代入可符合$x^2-2y^2=-d^2$的解，

若(7d,5d)為$x^2-2y^2=-d^2$的第 N+Z 個解，則可以得到繁衍鏈數為(N+Z)−Z=N。

由定理十三可以找到繁衍鏈的個數，但是(d,d)不一定是最小正整數解，至於如何找出最小正整數解，可依在「數形合一」文獻中有求第一個最小正整數解的範圍，透過$x^2-2y^2=1$的最小正整數解(3,2)，來找出$x^2-2y^2=-d^2$(d 為正整數)的最小正整數解(U_{11},V_{11})的範圍，可得$0\le U_{11}\le d$與$\frac{d}{\sqrt{2}}\le V_{11}\le d$，就可以確保所有繁衍鏈的鏈頭都能找到且一網打盡所有的解。

底下舉出**兩股相差為 49** 的所有畢氏數，其對應的佩爾方程式$x^2-2y^2=-49^2$，則最小正整數解(U_{11},V_{11})的範圍為$0\le U_{11}\le 49$與$\frac{49}{\sqrt{2}}\fallingdotseq 34.648\le V_{11}\le 49$，即$V_{11}=35,36\ldots 49$一一代入$x^2-2y^2=-49^2$可得(7,35)為最小正整數解而透過定理十三得 5 條相異結合繁衍鏈，經SOP 後轉成畢氏數的 5 條繁衍鏈，即可將畢氏數兩股差 49 的所有解一個不漏的都找出來，透過下圖的所有解的分類示意圖來作為目的三的總結，最後完整呈現即使兩股相差 49 一樣可以將符合的畢氏數完備性完美顯現。



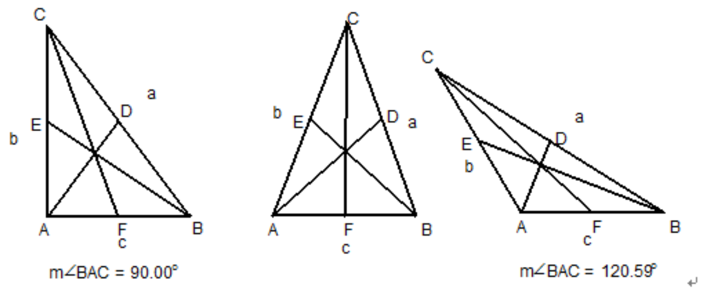
呈現整齊規律的排列關係，因此只要找出第一條繁衍鏈的解為所有解中的第幾組解，就可以知道有多少條繁衍鏈

目的四: 利用遞迴方程式$x^2-10y^2=-d^2$，探討中線垂直三角形三邊長的繁衍。

說明：**中線長與三邊長關係**

如圖(依序為直角、銳角與鈍角三角形)所示

其中$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，而$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$分別為三中線。



則圖中$\overline{AD}=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

$\overline{BE}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$

$\overline{CF}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$

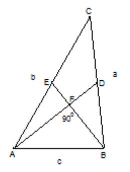
定理十四: **(中線垂直三角形)**(如圖示)

若ΔABC中,$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，則

$a^2+b^2=5c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$的兩中線互相垂直，即

(1)若ΔABC的兩中線互相垂直，則其三邊長必為$a^2+b^2=5c^2$。

(2)若ΔABC的三邊長關係為$a^2+b^2=5c^2$，則此三角形的兩中線互相垂直。



定理十五：**(轉換)**

若(U_{ji},V_{ji})為$x^2-10y^2=-d^2$的正整數解，其中i、j 皆為正整數，

則可得中線垂直三角形邊長$(a_{ji},b_{ji},c_{ji})=(\frac{U_{ji}-d}{2},\frac{U_{ji}+d}{2},V_{ji})$

定理十六：**(遞迴)**

若(U_{ji},V_{ji})為$x^2-10y^2=-d^2$的正整數解，且由小到大依序為(U_{j1},V_{j1})，$(U_{j2},V_{j2})\cdots(U_{ji},V_{ji})$ ...其中 i、j 皆為正整數

則$\begin{cases}U_{j(i+1)}=19U_{ji}+60V_{ji}\\ V_{j(i+1)}=6U_{ji}+19V_{ji}\end{cases}$。

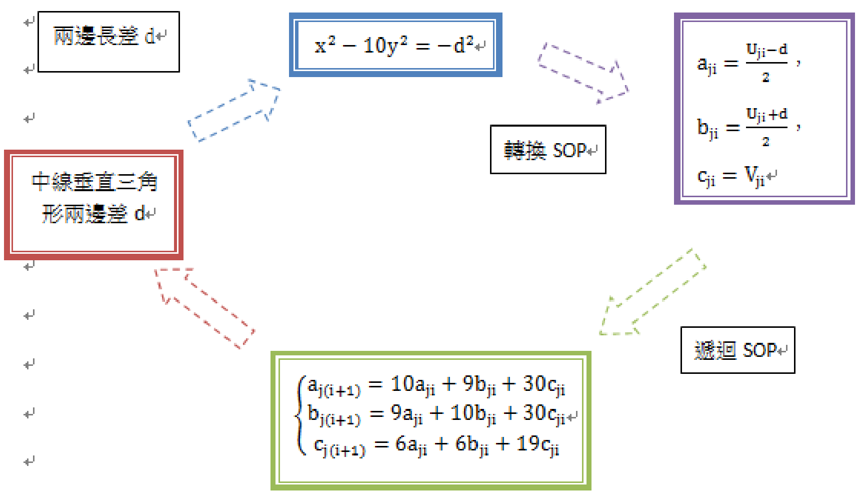
定理十七：**(繁衍鏈的遞迴與中線垂直三角形解的 SOP 解法)**

已知：中線垂直三角形三邊長(a_{ji},b_{ji},c_{ji})，兩邊長相差 d 時。

若$x^2-10y^2=-d^2$的解有 N 條繁衍鏈，$(s_1,t_1)\times$<1>，$(s_2,t_2)\times$<1>，⋯，$(s_N,t_N)\times$<1>，當(U_{ji},V_{ji})為第$(s_j,t_j)\times$<1>之第 i 個解，其所對應的三邊長為(a_{ji},b_{ji},c_{ji})，其中 i、j、N 皆為正整數，

則$\begin{cases}a_{j(i+1)}=10a_{ji}+9b_{ji}+30c_{ji}\\ b_{j(i+1)}=9a_{ji}+10b_{ji}+30c_{ji}\\ c_{j(i+1)}=6a_{ji}+6b_{ji}+19c_{ji}\end{cases}$。

我們將上述的的定理直接以圖示方式來呈現其解法 SOP：

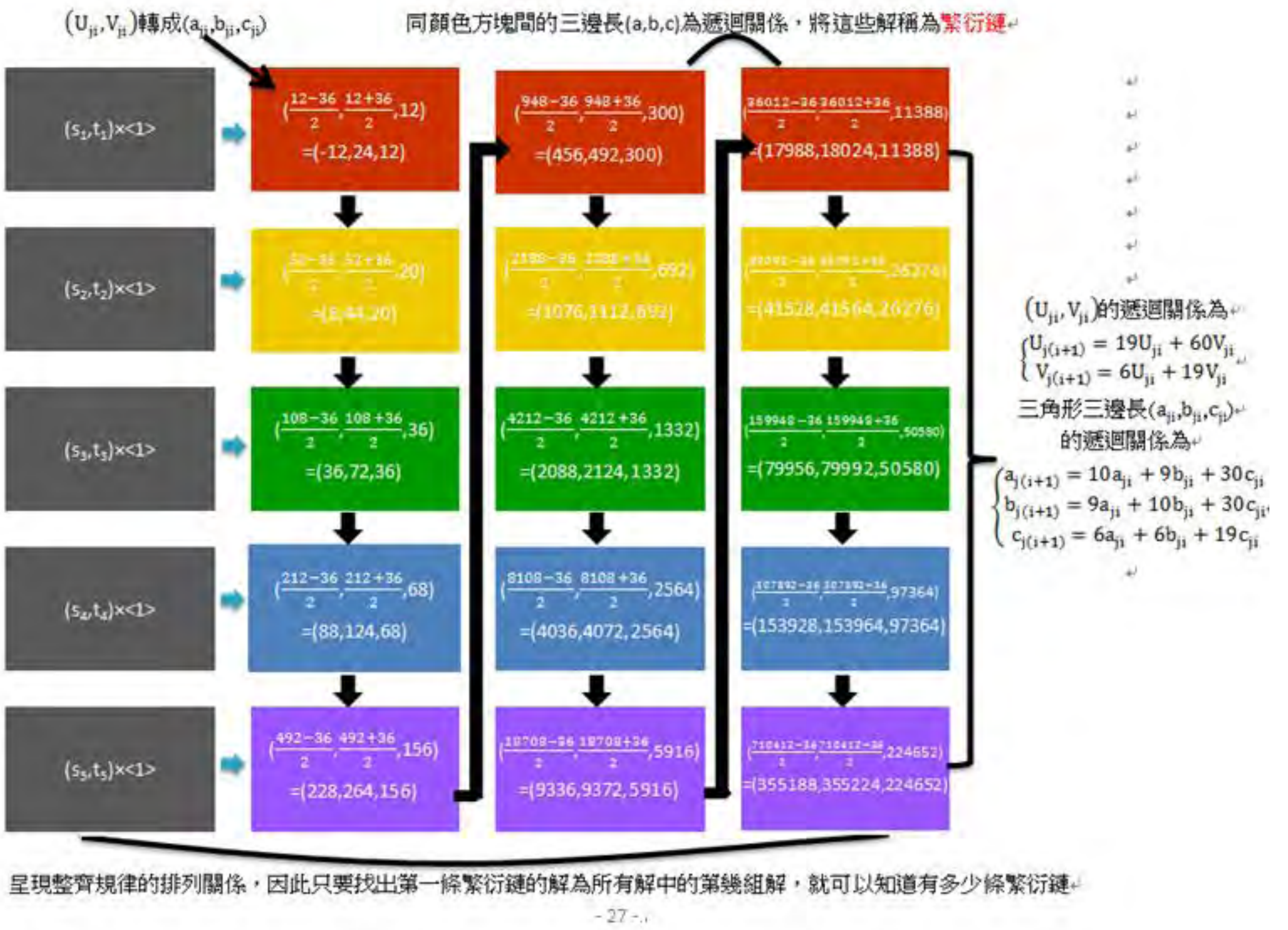


定理十八: **(相異繁衍鏈的個數)**

已知(3d,d)為$x^2-10y^2=-d^2$結合繁衍鏈中的第 Z 個解，而經遞迴後得(117d,37d)為其下一個解且為$x^2-2y^2=-d^2$中的第 N+Z 個解，則$x^2-10y^2=-d^2$繁衍鏈個數為在 y=d 到 y=(37d−1)中滿足不定方程的解個數且共有(N+Z)−Z =N 條繁衍鏈(N、Z 皆為正整數)。

由定理十八可以找到繁衍鏈的個數，但是(3d,d)不一定是第 1 條鏈的鏈頭即不一定是最小正整數解，而且到下一個解的範圍也太大了，於是依在「數形合一」文獻中有求第一個最小正整數解的範圍，透過$x^2-10y^2=1$的最小正整數解(19,6)，來找出$x^2-10y^2=-d^2$ (d 為正整數)的最小正整數解(U_{11},V_{11})的範圍，可得$0\le U_{11}\le 3d$與$\frac{d}{\sqrt{10}}\le V_{11}\le d$，就可以確保所有繁衍鏈的鏈頭都能找到且一網打盡所有的解。

底下舉出**兩邊長相差為 36** 的所有中線垂直三角形，其對應的佩爾方程式$x^2-10y^2=-36^2$，則最小正整數解(U_{11},V_{11})的範圍為$0\le U_{11}\le 108$與$\frac{36}{\sqrt{10}}\doteqdot 11.3842\le V_{11}\le 36$，即$V_{11}=12,13\ldots 36$——代入$x^2-10y^2=-36^2$可得(12,12)為最小正整數解而透過定理十八得 5 條相異結合繁衍鏈，經 SOP 後轉成兩邊長相差 36 的 5 條繁衍鏈，即可將兩邊長相差 36 的中線垂直三角形三邊長所有解一個不漏的都找出來，透過下圖的完成圖來作為目的四的總結，且完整呈現即使兩邊長相差 36 一樣可以將符合的中線垂直三角形三邊長完備性完美顯現出來。



陸、研究結果：略

柒、研究結論：略

捌、參考資料

一、國中數學第三冊(2017 年 8 月)．第二章：平方根與近似值．畢氏定理．康軒出版社三版三刷。

二、國中數學第五冊(2017 年 8 月)．第三章：外心、內心與重心．康軒出版社三版三刷。

三、許毓芳(2013) ．數形合一．台灣國際科展一等獎。

四、黃郁文、吳真、許涵嵋(2008 年 7 月)．正直的好朋友-發現三角形兩中線直交定理．第四十八全國科展第三名。

五、潘承洞、潘承彪．初等數論第三版(2013 年 1 月 1 日) ．北京大學出版社．311．350。