中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030405

用“心”

學校名稱：臺北市立北投國民中學

作者：	指導老師：
國二 蘇敏文 國二 吳浩安	黃國斌

關鍵詞：旁心三角形、連線三角形、相似三角形

摘要

本研究利用幾何繪圖軟體，探索任意三角形建構的旁心連線三角形、旁心三角形、及其向外做的正三角形五心之間的性質，並用三角形全等及相似證明方式進行性質的證明。結果發現：1.旁心三角形之外心相連成的三角形必相似於旁心連線三角形，且為其$\frac{1}{2}$倍縮小圖，且此兩三角形之垂心必重合。2.旁心三角形之外心相連成的三角形之垂心必與原三角形之內心重合。3.任意三角形之旁心連線三角形無限增生將逐漸趨近於正三角形。4.任意三角形以各邊向外做正三角形各取相對應之三邊中點所連成之三角形必為正三角形。

壹、研究動機

七上學期末，在學長姐分享的獨立研究報告時，閱讀了一篇有關「三角形五心」相關的研究，同時小學老師曾經介紹過有關「三角形五心」的性質，那時就覺得非常有趣，一直想了解「三角形五心」的內容。於是，想要藉此機會，對三角形的五心做更進一步的研究，了解五心之間的關係與實質內涵。

貳、研究目的

一、找尋在原三角形下建構的三個旁心三角形中，於此三個旁心三角形中分別取其五心，並將其連成新三角形，並觀察此新三角形的五心及面積與原三角形的五心及面積的關係。

二、找尋三角形的旁心連線三角形，再取其旁心連線三角形，觀察新增的三角形及原三角形之關係。

三、任意三角形向外做三個相似三角形，找尋各種相連為相似三角形之性質。

四、三角形向外做三個正三角形後，找尋各種相連為正三角形之性質。

參、研究設備與器材

電腦、geogebra 繪圖軟體、人腦、紙筆、參考資料

肆、文獻探討

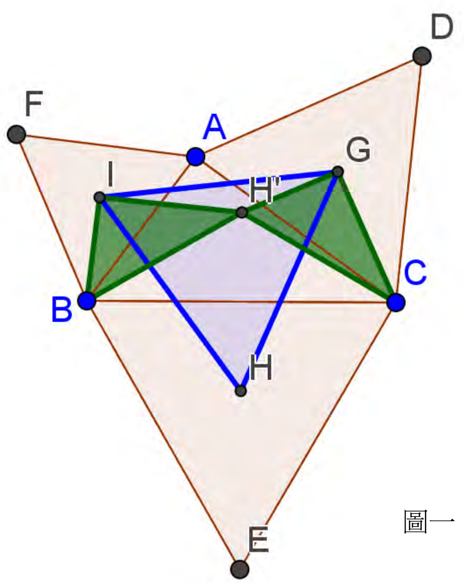
以任意三角形各邊為邊分別向外側做正三角形，則它們的三個重心連線必構成一個正三角形。」，我們稱該正三角形稱為拿破崙三角形。我們的證明如下 ：

已知 ： ΔABC 為一任意三角形，分別以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 當邊長向外做正三角形，得 ΔABF、ΔBCE、ΔACD；分別做 ΔABF、ΔBCE、ΔACD 的重心 I、H、G （ 圖一 ）

1. 欲證 $\overline{GH} = \overline{HI}$

(1) 做點 H 對於$\overline{BC}$的對稱點 H'

(2) 連接 $\Delta BIH'$、$\Delta GCH'$



圖一

2. 先證 $\Delta BIH' \cong \Delta GCH'$

(1) $\because \angle IBH' = 30^{O} + \angle ABH' = \angle ABC$

且 $\frac{\overline{AB}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{H'B}}$

$\therefore \Delta BIH' \approx \Delta ABC$

故 $\angle IBH' = \angle ABC$、$\angle IH'B = \angle ACB$

(2) 同理可證 $\Delta GCH' \sim \Delta ABC$

故$\angle GH'C = \angle ABC$、$\angle GCH' = \angle ACB$

由(1)、(2)得知$\angle IBH' = \angle GH'C$、$\angle IH'B = \angle GCH'$

(3) 由 $\overline{BH} = \overline{HC}$ 得知 $\overline{BH'} = \overline{H'C}$

由(1)、(2)、(3)得知 $\Delta BIH' \cong \Delta GCH'$ (ASA)

3. 再證 $\Delta BIH \cong \Delta HGH'$（ 圖二 ）

(1) 已知 $\overline{BI} = \overline{H'G}$、$\overline{HB} = \overline{HH'}$

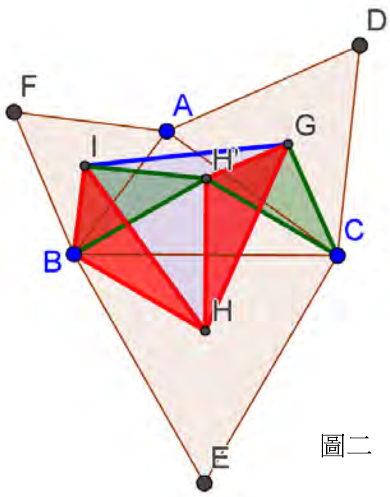
$\angle HBI = \angle HBH' + 60^{O} = \angle HH'C + 60^{O} = \angle HH'G$

$\therefore \Delta BIH \cong \Delta HGH'$(SAS)

故 $\overline{IH} = \overline{GH}$

(2) 同理可證 $\overline{IH} = \overline{GH} = \overline{IG}$

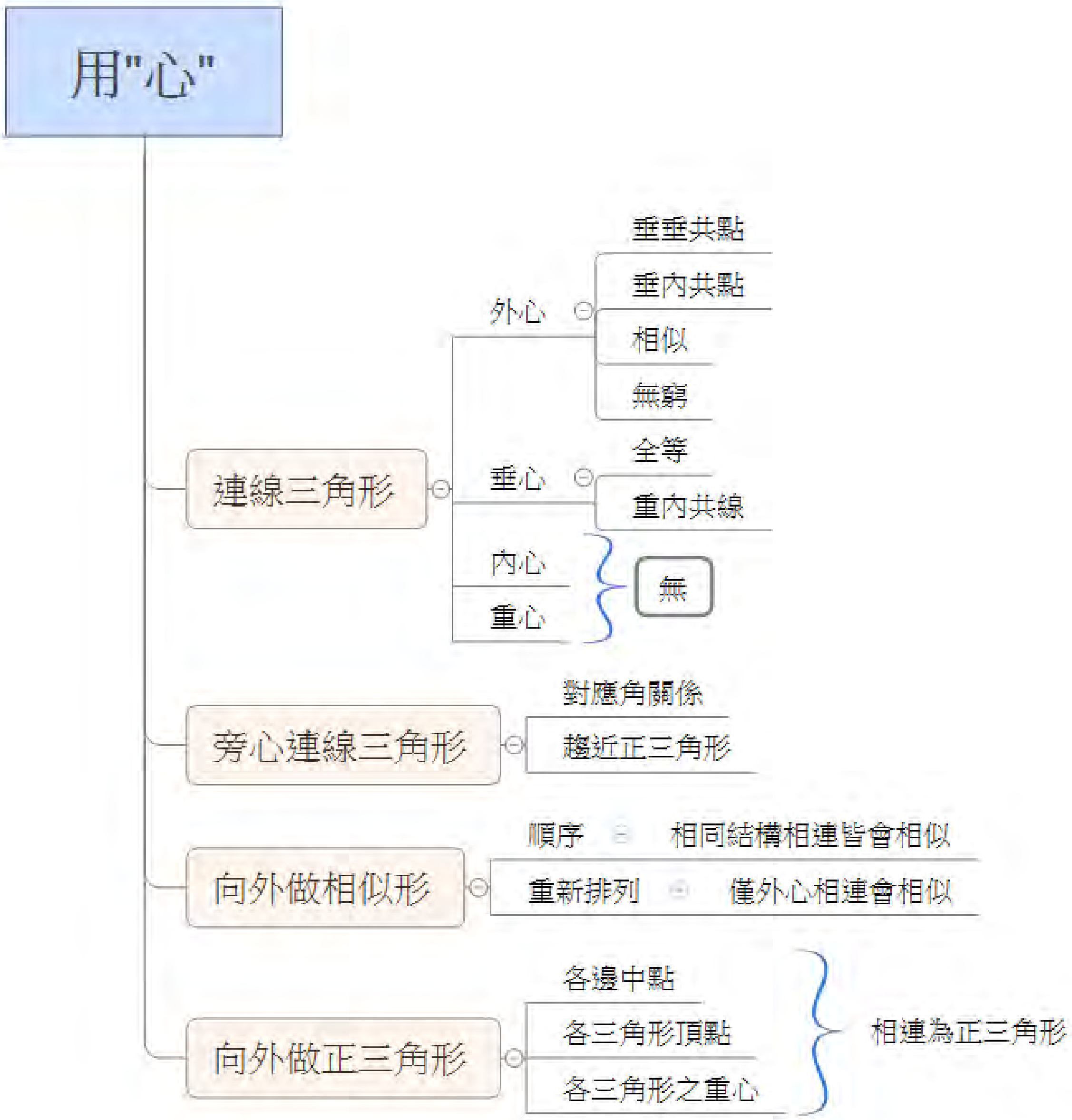
$\therefore \Delta GHI$ 為正三角形故得證



圖二

伍、研究過程與結果

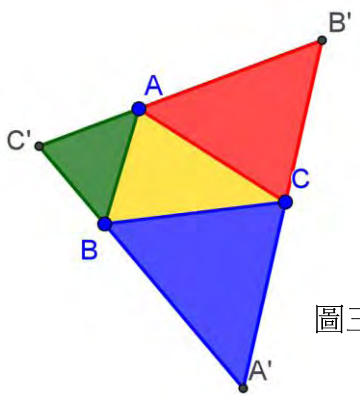
一、研究主題方向



二、定義

(一) $S_{\Delta ABC}$： ΔABC 所圍面積我們表示成 $S_{\Delta ABC}$；同理 ΔDEF 所圍面積我們表示成 $S_{\Delta DEF}$。

(二) 旁心三角形：若 ΔABC 的旁心為 A'、B'及C'。在 $\Delta ABC'$ 中，點 C' 的對應的邊為 $\overline{AB}$ (點 C' 為 $\angle C$ 的內角平分線及 $\angle A$、$\angle B$ 的外角平分線交點，對應邊即為 $\angle C$ 的對應邊 $\overline{AB} = c$)， 同理，點 A' 的對應的邊為 $\overline{BC}$，點 B' 的對應的邊為 $\overline{AC}$，所以我們稱 $\Delta ABC'$、$\Delta BCA'$、$\Delta ACB'$ 為”三角形 ΔABC 的三個旁心三角形”，本文定義為：$\mathfrak{E}_{C-C'}$、$\mathfrak{E}_{A-A'}$、$\mathfrak{E}_{B-B'}$ （ 圖三 ）



圖三

(三) 鏡射三角形：

1. $\Delta ACD_{\overline{AD}}$：在任意三角形$\Delta ABC$的其中一邊向外做正三角形, 例如 : 以 $\overline{AC}$ 為邊做正三角形 ΔACD。再做以 ΔACD 的 $\overline{AD}$ 為邊長的正三角形, 我們稱此三角形為 $\Delta ACD_{\overline{AD}}$。並且會得到“C”點以 $\overline{AD}$ 為對稱軸的對稱點“E”。 (如圖四)
2. $\Delta ACD_{\overline{CD}}$：同上，以 $\overline{CD}$ 為邊長的正三角形, 我們則稱此三角形為$\Delta ACD_{\overline{CD}}$。並且會得到“ A”點以 $\overline{CD}$ 為對稱軸的對稱點“F” 。
3. $\Delta ACD_{\overline{AC}}$：同上，以 $\overline{AC}$ 為邊長的正三角形, 我們則稱此三角形為$\Delta ACD_{\overline{AC}}$。並且會得到“D”點以 $\overline{AC}$ 為對稱軸的對稱點“ G ” 。

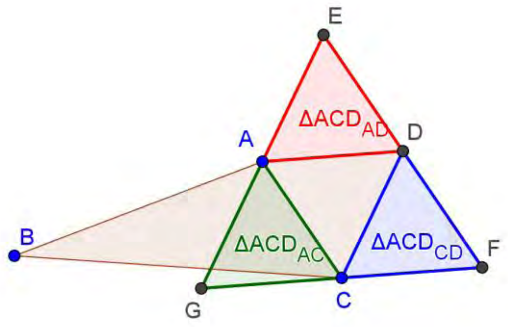


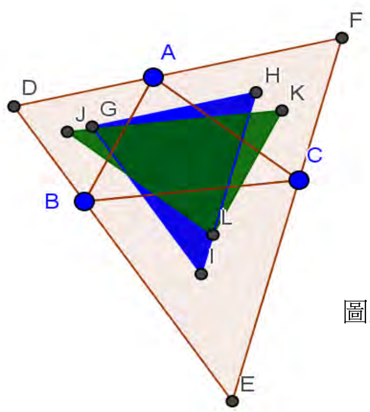
圖 四

(四) 連線三角形：

1. 旁心連線三角形 ： 三角形中的三個旁心所連成的三角形。(如圖五 ΔDEF)
2. 外心連線三角形 ： 指三個旁心三角形的外心連線而成的三角形。

   (如圖五 ΔGHI)
3. 垂心連線三角形：指三個旁心三角形的垂心連線而成的三角形。

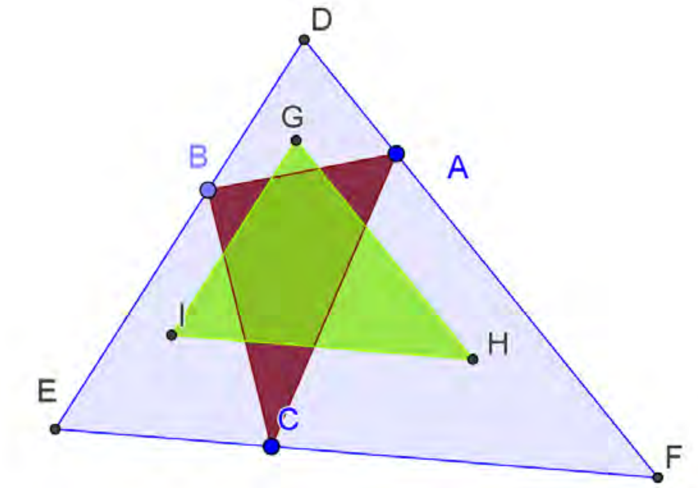
   (如圖五 ΔJKL)
4. 內心連線三角形：指三個旁心三角形的內心連線而成的三角形。
5. 重心連線三角形：指三個旁心三角形的重心連線而成的三角形。



圖五

三、研究歷程與得到的結論

(一) ΔABC 的旁心為 D、E、F，做旁心連線三角形 ΔDEF，再分別取旁心三角形$\mathfrak{E}_{C-D}$、$\mathfrak{E}_{A-E}$、$\mathfrak{E}_{B-F}$ 的外心 G、H、I，連成外心連線三角形 ΔGHI，可得下面性質（圖六）



圖六

1. 性質 1-1：ΔDEF 的垂心 K 與 ΔGHI 的垂心 M 重合 （圖七）

[證明]:

(1) $\because$ ΔABC 中任意一角的內角平分線和外角平分線必定互相垂直

$\therefore \angle DAK = \angle KBD = 90^{0}$

$\Rightarrow \angle BDA + \angle AKB = 180^{0}$

(2) 已知 ΔABD 外接圓圓心為 G

$\angle BDA + \angle AKB = 180^{0}$

$\therefore$A、B、D、K 四點共圓

(3) $\because$ $\overline{DK}$為 ΔABD 外接圓的直徑

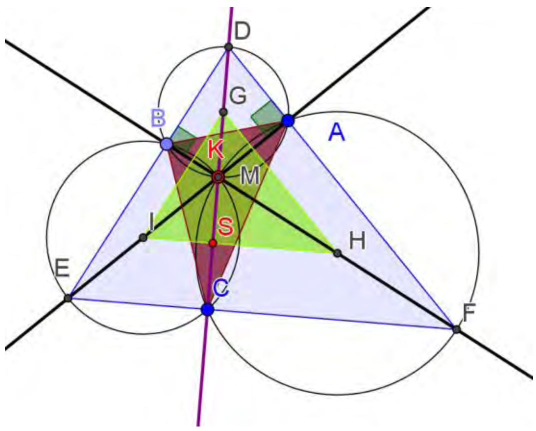
$\therefore \overline{KD} : \overline{KG} = 2 : 1$

同理可證

$\overline{KH} : \overline{KF} = 2 : 1 = \overline{KI} : \overline{KE}$

$\because \overline{KH} : \overline{KF} = \overline{KI} : \overline{KE}$

$\Rightarrow \overline{IH} \parallel \overline{EF}$



圖七

(4) $\because \overline{IS}:\overline{EC}=\overline{HS}:\overline{CF}$

$\therefore \overline{IS}:\overline{HS}=\overline{EC}:\overline{CF}$

(5) $\because \overline{CD}\perp\overline{EF}$

$\therefore \overline{CD}\perp\overline{IH}\Longrightarrow\overline{SG}\perp\overline{IH}$

$\therefore \Delta DEF$ 中的垂線與 ΔGHI 的垂線重疊

故得結論 ΔDEF 的垂心 K 與 ΔGHI 的垂心 M 重合。

2. 性質 1-2 ：$\Delta DEF\sim\Delta GHI$，$S_{\Delta DEF}=4S_{\Delta GHI}$ （ 圖八 ）

[證明] :

(1) $\because \overline{EA}\perp\overline{GH}$、$\overline{EA}\perp\overline{DF}$

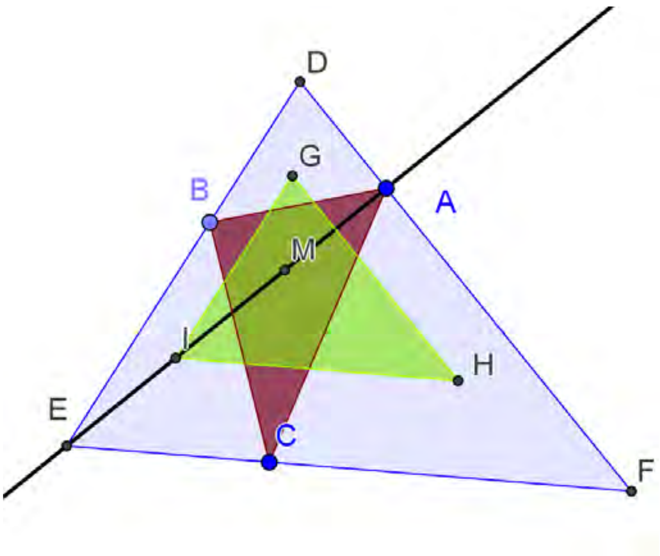
$\therefore \overline{GH}\parallel\overline{DF}$

(2) 同理可證 $\overline{GI}\parallel\overline{DE}$、$\overline{IH}\parallel\overline{EF}$

$\therefore \Delta DEF\sim\Delta GHI$

(3) 由性質1-1 得知 $\Delta MGH\sim\Delta MDF$ 相似，$\overline{MG}:\overline{MD}=2:1$

$\therefore S_{\Delta DEF}=4S_{\Delta GHI}$ 故得證



圖八

3. 性質 1-3 ：ΔGHI 的垂心 M 與 ΔABC 的內心 L 重合(圖九)

[證明]:

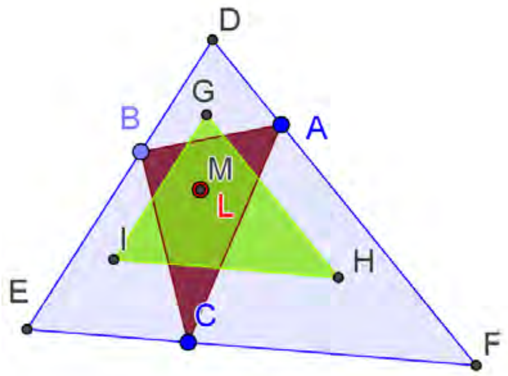
(1) ∵ ΔABC 中任意一角的內角平分線和其外角平分線必定互相垂直

∴ ΔABC 任意角的內角平分線為必定為 ΔDEF 相對應邊的高

⇒ ΔDEF 的垂心必定與 ΔABC 的內心重合

(2) 由性質 1-1 之結論可知，ΔDEF 的垂心與 ΔGHI 的垂心重合

⇒ ΔGHI 的垂心必定與 ΔABC 的內心重合



圖九

4. 性質 1-4 : ΔGHI 的外心 N 與 ΔABC 的外心 J 重合。將 ΔGIH 重複做一樣的事，外心一樣重合，且 A、B、C、G、H、I、U、V、W 九點共圓

(見圖十、十一)

[證明]:

(1) ∵由旁心性質得知在 ΔBEC中 : $\angle BEC = 90^{O} - \frac{1}{2}\angle A$

又點 I 是 ΔBCE 的外心，由外心的角度性質可得 $\angle$BIC=2$\angle$BEC

∴ $\angle BIC = 180^{o} - \angle A$

$\Longrightarrow \angle BIC + \angle BAC = 180^{O}$

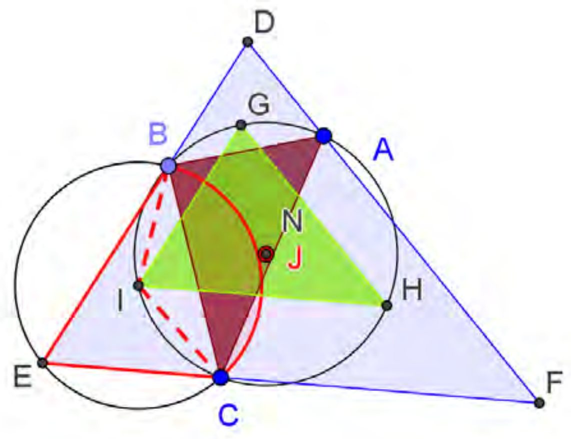
由四邊形對角互補性質可得 A、B、C、I 四點共圓。

(2) 同理可證 G、H 與 A、B、C 三點共圓

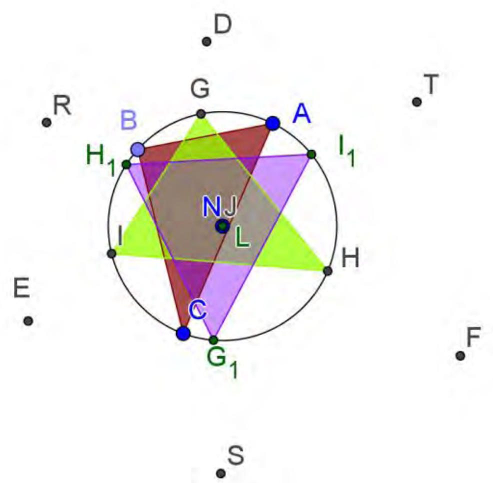
∴ A、B、C、G、H、I 六點共圓 (見圖十)

(3) 同理可證 A、B、C、G、H、I、U、V、W 九點共圓 (見圖十一)

故得證



圖十



圖十一

(二) ΔABC 的旁心為 D、E、F，做旁心連線三角形 ΔDEF，再分別取旁心三角形$\mathfrak{E}_{B-F}$、$\mathfrak{E}_{C-D}$、$\mathfrak{E}_{A-E}$的垂心 G、H、I，連成垂心連線三角形 ΔGHI，可得下面性質

1. 性質 2-1：$\Delta ABC \cong \Delta GHI$(見圖十二)

[證明] :

(1) 做 ΔABC 內心 M

(2) $\because \overleftrightarrow{AG} \perp \overline{EF}$、$\overleftrightarrow{BI} \perp \overline{EF}$、$\overleftrightarrow{DC}$ ($\angle BCA$角平分線) $\perp \overline{EF}$

$\therefore \overleftrightarrow{AG} \parallel \overleftrightarrow{BI} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

同理可證 $\overleftrightarrow{BH} \parallel \overleftrightarrow{CG} \parallel \overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{CI} \parallel \overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{BF}$

$\Rightarrow \angle IBH = \angle AGC$、$\angle BHA = \angle GCI$、$\angle HAG = \angle CIB$

(3) $\because \overleftrightarrow{AG} \parallel \overleftrightarrow{BI} \parallel \overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{BH} \parallel \overleftrightarrow{CG} \parallel \overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{CI} \parallel \overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{BF}$

$\therefore$四邊形 AGCM、BMCI 為平行四邊形

$\Rightarrow \overline{AG} = \overline{MC} = \overline{BI}$

同理可證 $\overline{BH} = \overline{CG}$、$\overline{AH} = \overline{CI}$

(4) $\because \overline{AG} = \overline{BI}$、$\angle AGC = \angle IBH$、$\overline{CG} = \overline{BH}$

$\therefore \Delta AGC \cong \Delta IBH$ (SAS)

$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{IH}$

同理可證 $\overline{AB} = \overline{IG}$、$\overline{BC} = \overline{GH}$

(5) $\because \overline{AC} = \overline{IH}$、$\overline{AB} = \overline{IG}$、$\overline{BC} = \overline{GH}$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta GHI$ (SSS)　　故得證

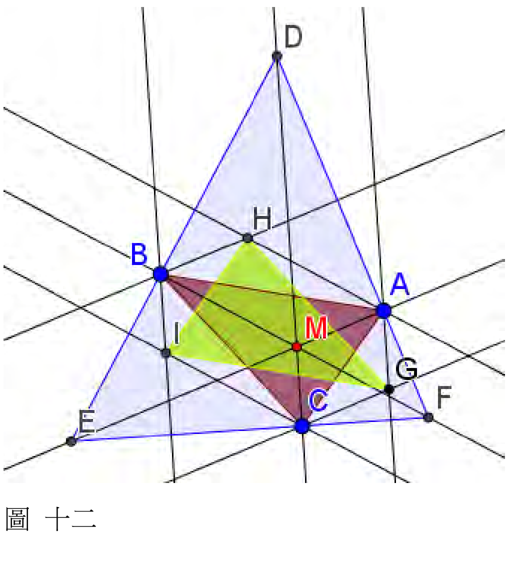


圖 十二

2. 性質 2-2 ：取 ΔGHI 的重心 Q 與內心 N 與 ΔABC 的重心 K、內心 M 四點共線 (見圖十三)

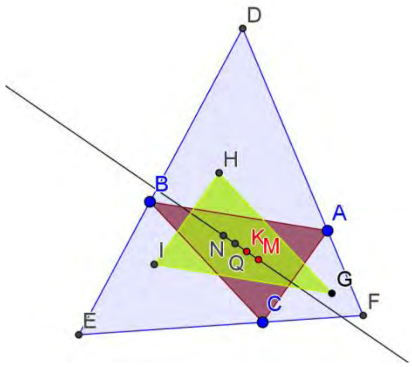


圖 十三

※取旁心三角形之內心或重心連成內心連線三角形或重心連線三角形皆未得到性質，因此未將其列出。

(三) ΔABC 旁心連線三角形 ΔDEF，再取 ΔDEF 旁心 (A_1、B_1、C_1)，並將其連成旁心連線三角形 $\Delta A_1B_1C_1$，可得下列性質 :(圖十四)

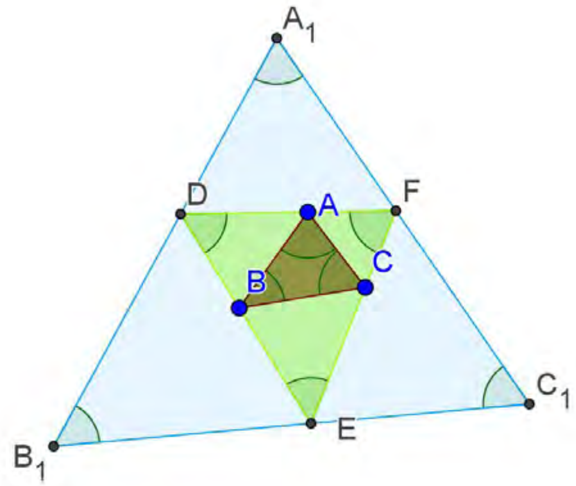


圖 十四

1. 性質 3-1 : ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 其對應角的關係式為 $\angle A_1=\frac{\angle A+180°}{4}$ 如此反覆新增旁心連線三角形 $\Delta A_nB_nC_n$ 以及角度關係式 $\angle A_n=\frac{\angle A_{n-1}+180°}{4}$，並可推論最終將趨近於正三角形。(圖十四、十五)

我們將上述性質略做說明如下 :

在 ΔDEF 中 (圖十四)

$\angle D=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$、$\angle E=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$、$\angle F=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$

在 $\Delta A_1B_1C_1$ 中

$\angle A_1=\frac{1}{2}(\angle D+\angle F)=\frac{1}{4}\angle A+\frac{1}{4}\angle B+\frac{1}{4}\angle A+\frac{1}{4}\angle C=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{4}\angle B+\frac{1}{4}\angle C$

$\angle B_1=\frac{1}{2}(\angle D+\angle E)=\frac{1}{4}\angle A+\frac{1}{4}\angle B+\frac{1}{4}\angle B+\frac{1}{4}\angle C=\frac{1}{4}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{4}\angle C$

$\angle C_1=\frac{1}{2}(\angle E+\angle F)=\frac{1}{4}\angle A+\frac{1}{4}\angle C+\frac{1}{4}\angle B+\frac{1}{4}\angle C=\frac{1}{4}\angle A+\frac{1}{4}\angle B+\frac{1}{2}\angle C$

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180^{\circ}$

$\therefore \angle A_1=\dfrac{\angle A+180°}{4}$、$\angle B_1=\dfrac{\angle B+180°}{4}$、$\angle C_1=\dfrac{\angle C+180°}{4}$

同理

$\angle A_2=\dfrac{\angle A_1+180°}{4}$

利用遞迴證明 $\angle A_n \to 60^o$

$$\angle A_1 = \frac{\angle A \ + 180^\circ}{4}$$

$$\angle A_2 = \frac{\angle A_1 \ + 180^\circ}{4} = \frac{\frac{\angle A \ + 180^\circ}{4} + 180^\circ}{4} = \frac{\frac{\angle A}{4} + \frac{180^\circ}{4} + 180^\circ}{4}$$

$$= \frac{\angle A}{4^2} + \frac{180^\circ}{4} + \frac{180^\circ}{4^2}$$

$$\angle A_3 = \frac{\angle A}{4^3} + \frac{180^\circ}{4} + \frac{180^\circ}{4^2} + \frac{180^\circ}{4^3}$$

……

$$\angle A_n = \frac{\angle A}{4^n} + \ 180^\circ\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right) = \frac{\angle A}{4^n} + \ 180^\circ \times \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\angle A}{4^n} + \ 60^\circ \times (1 - \frac{1}{4^n})$$

$\because$ 當 n→ ∞

可得到 $\frac{\angle A}{4^n} \to 0$ 且 $\frac{1}{4^n} \to 0$

$\therefore \angle A_n \to 60^o$

同理 $\angle B_n \to 60^o$ ， $\angle C_n \to 60^o$

故可得 $\Delta A_n B_n C_n$ 趨近於正三角形

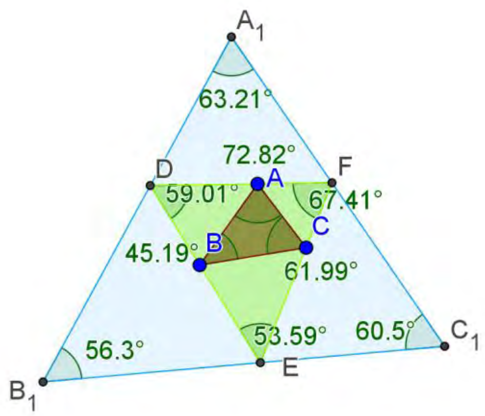


圖 十五

小結：由性質 1-2、1-4 及 3-1 可知，ΔABC 的外心連線三角形們 $\Delta G_n H_n I_n$ 與 ΔABC 共圓。

且 $\Delta G_n H_n I_n$ 將逐漸趨近於正三角形。

(四) ΔABC 向外做三個相似三角形 ΔABE、ΔACD、ΔBCF，角度均為 α、β、γ 其中 $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$、$\beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$、$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$（圖十六）。

1. 性質 4-1：其外心 O、N、M 相連成 ΔMNO，發現 $\Delta MNO \sim \Delta ABE \sim \Delta ACD \sim \Delta BCF$（圖十七）。且做 ΔABE、ΔACD、ΔBCF 的重心 H、I、G (圖十八)，內心 R、Q、P (圖十九)，垂心 U、T、S (圖二十)，相連成 ΔGHI、ΔPQR、ΔSTU，亦可以發現 $\Delta MNO \sim \Delta GHI \sim \Delta PQR \sim \Delta STU$ 。

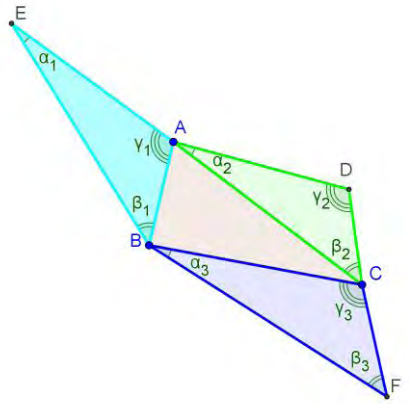


圖 十六

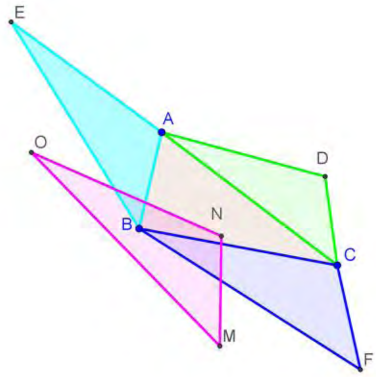


圖 十七

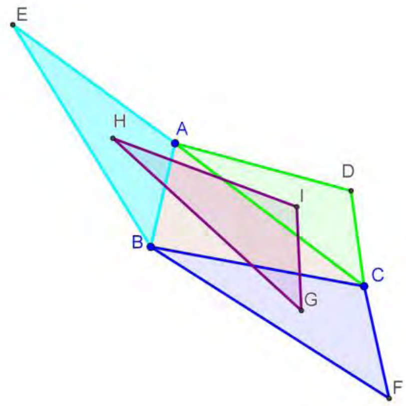


圖 十八

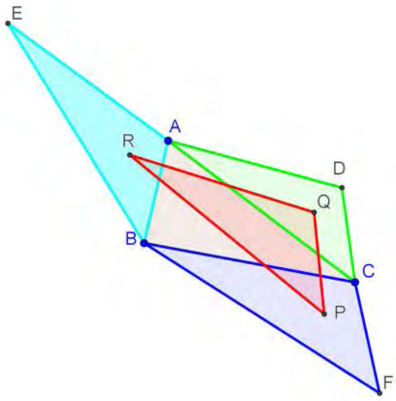


圖 十九

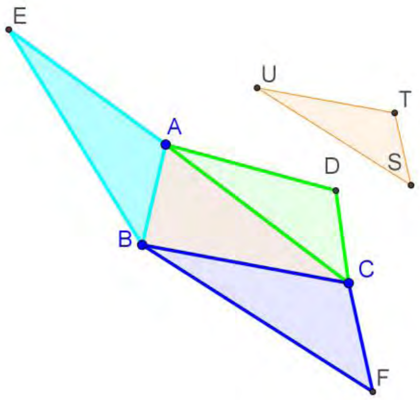


圖 二十

欲證明性質 4-1，我們首先先取 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1 使 $\overline{AA_1}：\overline{AE}=\overline{DB_1}：\overline{AD}=\overline{CC_1}：\overline{BC}=\overline{AD_1}：\overline{AB}=\overline{CA_1}：\overline{AC}$ =1：n，再將其連成 $\Delta A_1B_1C_1$，則可得 $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ADC \sim \Delta EAC \sim \Delta BCF$（ 圖甲 ）

[證明]：

欲證：$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ADC \sim \Delta EAC \sim \Delta BCF$

先證：$\Delta B_1E_1C_1 \sim \Delta C_1D_1A_1$

(1) $\because \overline{B_1E_1}=\frac{n-1}{n}\overline{DC}$、$\overline{C_1D_1}=\frac{n-1}{n}\overline{CA}$、$\overline{E_1C_1}=\frac{\overline{AB}}{n}$、$\overline{D_1A_1}=\frac{\overline{BE}}{n}$

且$\overline{DC}：\overline{CA}=\overline{AB}：\overline{BE}$

$\therefore \overline{B_1E_1}：\overline{C_1D_1}=\overline{E_1C_1}：\overline{D_1A_1}$

同理$\overline{B_1E_1}：\overline{B_1A}=\overline{E_1C_1}：\overline{AA_1}$

(2) $\because \angle B_1E_1C_1=\angle B_1E_1A+\angle AE_1C_1=\angle DCA+(180^O-\angle CE_1C_1)$

$\angle C_1D_1A_1=\angle A_1D_1A+\angle AD_1C_1=\angle DBE+(180^O-\angle C_1D_1B)$

$=\angle DCA+(180^O-\angle C_1D_1B)$

且$\angle CE_1C_1=\angle C_1D_1B$

$\therefore \angle B_1E_1C_1=\angle C_1D_1A_1$

(3) $\because \overline{B_1E_1}：\overline{C_1D_1}=\overline{E_1C_1}：\overline{D_1A_1}$、$\angle B_1E_1C_1=\angle C_1D_1A_1$

$\therefore \Delta B_1E_1C_1 \sim \Delta C_1D_1A_1$ (SAS)

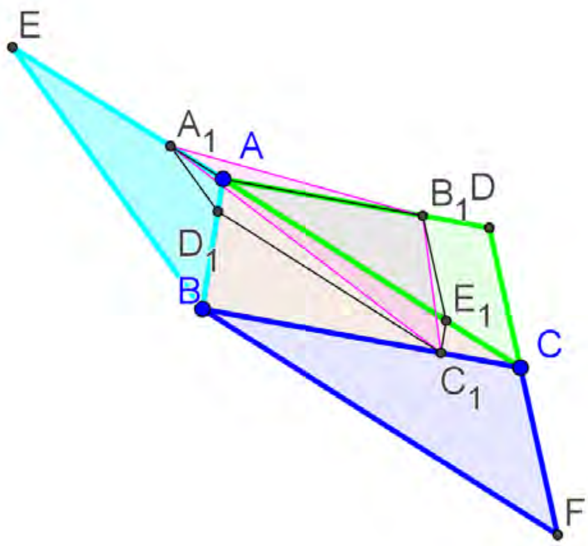


圖 甲

再證 $\Delta \mathrm{B}_1 E_1 \mathrm{C}_1 \sim \Delta B_1 A A_1$ （ 圖乙 ）

(1) $\because \angle \mathrm{B}_1 E_1 \mathrm{C}_1 = \angle \mathrm{B}_1 \mathrm{E}_1 A + \angle \mathrm{A} E_1 \mathrm{C}_1 = \angle \mathrm{DCA} + (180^O - \angle \mathrm{C} E_1 \mathrm{C}_1)$

$\angle B_1 A A_1 = 360^O - \angle CAB - \angle \mathrm{B} AE - \angle DAC$

$= 180^O - \angle \mathrm{B} AE - \angle DAC + 180^O - \angle \mathrm{C} AB$

$= \angle \mathrm{DCA} + (180^O - \angle \mathrm{C} AB)$

且$\angle \mathrm{C} E_1 \mathrm{C}_1 = \angle \mathrm{C} AB$

$\therefore \angle \mathrm{B}_1 E_1 \mathrm{C}_1 = \angle B_1 A A_1$

(2) $\because \overline{\mathrm{B}_1 E_1} : \overline{\mathrm{C}_1 D_1} = \overline{E_1 C_1} : \overline{A A_1}$、$\angle \mathrm{B}_1 E_1 \mathrm{C}_1 = \angle B_1 A A_1$

$\therefore \Delta \mathrm{B}_1 E_1 \mathrm{C}_1 \sim \Delta B_1 A A_1$ (SAS)

最後

(1) $\because \overline{\mathrm{B}_1 E_1} : \overline{\mathrm{C}_1 D_1} : \overline{\mathrm{B}_1 A} = \overline{\mathrm{B}_1 C_1} : \overline{\mathrm{A}_1 C_1} : \overline{\mathrm{A}_1 B_1}$

又$\overline{\mathrm{B}_1 E_1} = \frac{n-1}{n} \overline{\mathrm{DC}}$，$\overline{\mathrm{C}_1 D_1} = \frac{n-1}{n} \overline{\mathrm{CA}}$，$\overline{\mathrm{B}_1 A} = \frac{n-1}{n} \overline{\mathrm{AD}}$

$\therefore \overline{\mathrm{DC}} : \overline{\mathrm{CA}} : \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{B}_1 C_1} : \overline{\mathrm{A}_1 C_1} : \overline{\mathrm{A}_1 B_1}$

故$\Delta \mathrm{ADC} \sim \Delta \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1 \mathrm{C}_1$

$\Rightarrow \Delta \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1 \mathrm{C}_1 \sim \Delta \mathrm{ADC} \sim \Delta \mathrm{EAC} \sim \Delta \mathrm{BCF}$　故得證

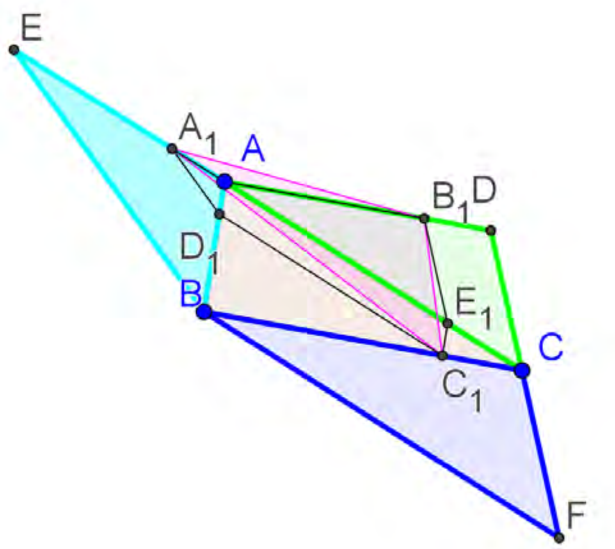


圖 乙

接下來，我們將 A_1、B_1、C_1 分別以 A、D、C 為圓心旋轉任意角度得 F_1、G_1、H_1，連成 $\Delta F_1G_1H_1$，則 $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta F_1G_1H_1$（圖丙），故將旋轉角度、線段比例做適當調整，就可以將 F_1、G_1、H_1 移動至 ΔABE、ΔACD、ΔBCF 的五心，因此即可證明性質 4-1。

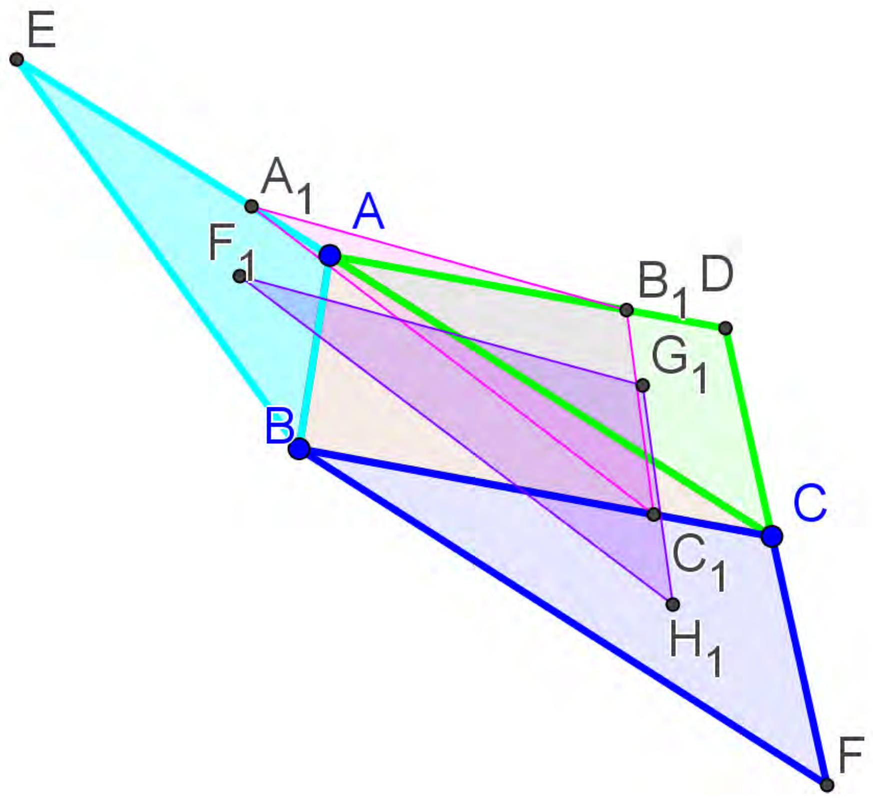


圖 丙

2. 性質 4-2：若將三角形角度重新排列（ 圖二十一 ~ 圖二十三 ），發現只剩 $\Delta MNO \sim \Delta ABE$、其餘 ΔGHI、ΔPQR、ΔSTU 皆不與 ΔABE 相似

（ 因為 GGB 軟體會在形成角度時，順便給予自訂命名的角度，所以我們做了以下對應的角度的表格 ）

夾角	$\delta \parallel \beta$	$\varepsilon \parallel \gamma$	$\Phi \parallel \alpha$	$\varphi \parallel \beta$	$\theta \parallel \gamma$	$\lambda \parallel \alpha$	**圖丁** **圖丁與原本對應的角度**
改變對應順序後的角度	β	γ	α	γ	α	β	圖二十一
	β	γ	α	γ	β	α	圖二十二
	β	γ	γ	α	α	β	圖二十三

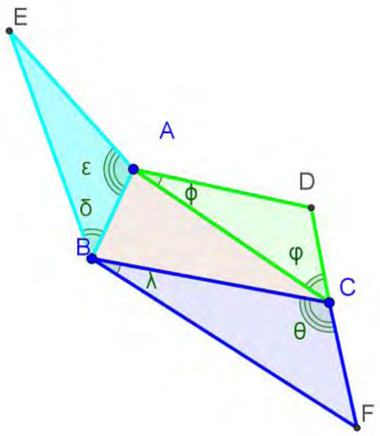
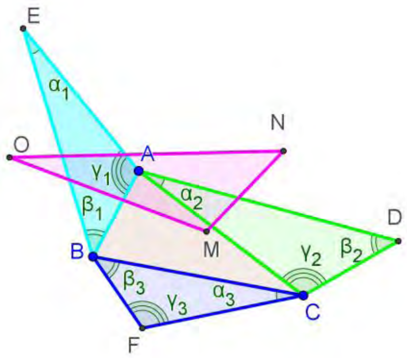


圖 丁



圖二十一

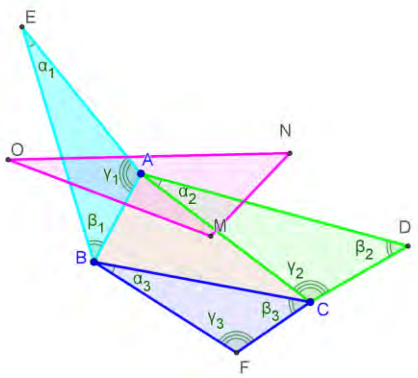


圖 二十二

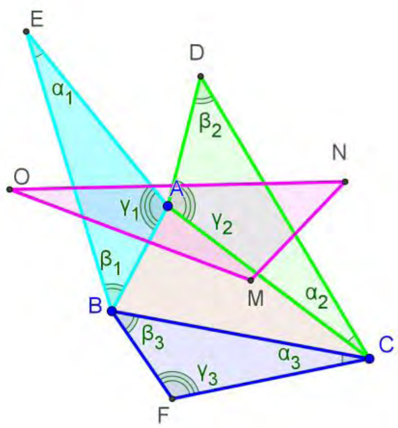


圖 二十三

(五) 三角形向外做三個正三角形後，找尋各點相連為正三角形之性質：

1. 性質 5-1：在 ΔABC 中，以各邊向外做三個正三角形 ΔABD、ΔACE、ΔBCF，並分別在 $\overline{BC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 上取其中點 J、K、L。則 ΔJKL 為一個正三角形。ΔMNO、ΔPQR 亦為正三角形（圖二十四、二十五）

[證明]:

欲證 ΔJKL 為一個正三角形，則只需證 $\overline{JK} = \overline{KL} = \overline{JL}$ ，其證明如下

(1) 連接 $\overline{KM}$、$\overline{JM}$、$\overline{JP}$、$\overline{LP}$、$\overline{AK}$、$\overline{AL}$

(2) ∵ K、M、L、P 是各邊中點

$\therefore \Delta AKM$、ΔALP 為正三角形

(3) 又 $\because \Delta AKM$、ΔALP 為正三角形、四邊形 APJM 為平行四邊形

$\therefore \overline{AK} = \overline{KM} = \overline{AM} = \overline{JP}$、$\overline{AL} = \overline{LP} = \overline{AP} = \overline{MJ}$

(4) $\because \angle LAK = 240^{O} - \angle BAC$

$\angle LPJ = 360^{O} - 120^{O} - \angle JPC = 240^{O} - \angle JPC$

$\angle JMK = 360^{O} - 120^{O} - \angle BMJ = 240^{O} - \angle BMJ$

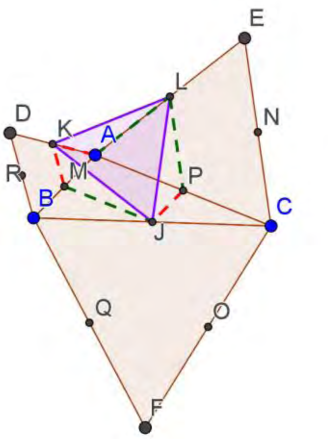
由中點性質可知 $\angle BAC = \angle JPC = \angle BMJ$

$\therefore \angle LAK = \angle LPJ = \angle JMK$

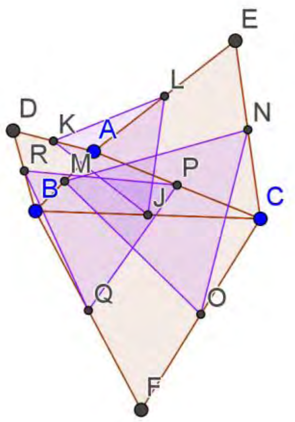
(5) 由(3)、(4)得知 $\Delta AKL \cong \Delta JLP \cong \Delta JKM$ (SAS)

$\because \Delta AKL \cong \Delta JLP \cong \Delta JKM$

$\therefore \overline{JK} = \overline{KL} = \overline{JL}$ 故得證



圖二十四



圖二十五

2. 性質 5-2：以 ΔABC 各邊為邊分別向外做正三角形 ΔABD、ΔBCF、ΔCAE，並各取其重心（G、H、I）。又 J、K、L、M、N、O、P、Q、R 為線段 $\overline{BC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{AB}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{AC}$、$\overline{BF}$、$\overline{BD}$ 的中點

(1) ΔJKL、ΔMNO、ΔPQR 的重心 S、T、U 所形成的 ΔSTU 為正三角形（圖二十六）

(2) S、T、U 分別為拿破崙三角形 ΔGHI 三邊的中點，ΔSTU 和 ΔGHI 的重心重合（圖二十七）

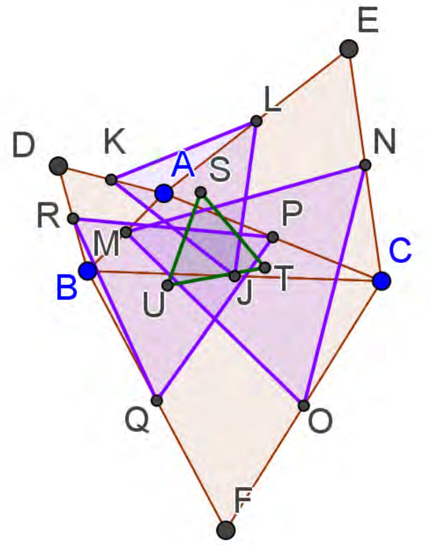


圖 二十六

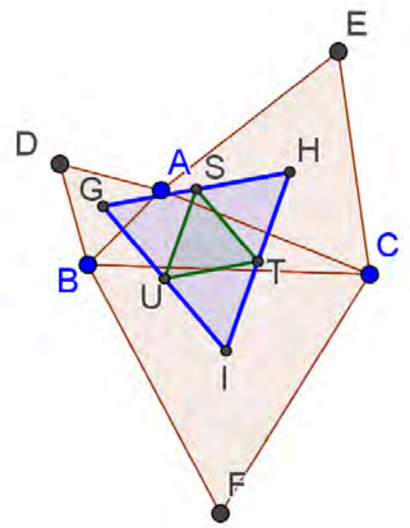


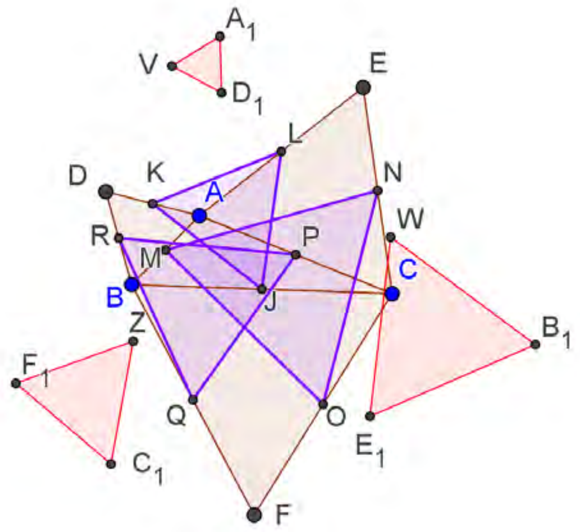
圖 二十七

3. 性質 5-3：取 ΔJKL、ΔMNO、ΔPQR 的三組旁心 (V、W、Z、A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1)，可得下列幾個性質：

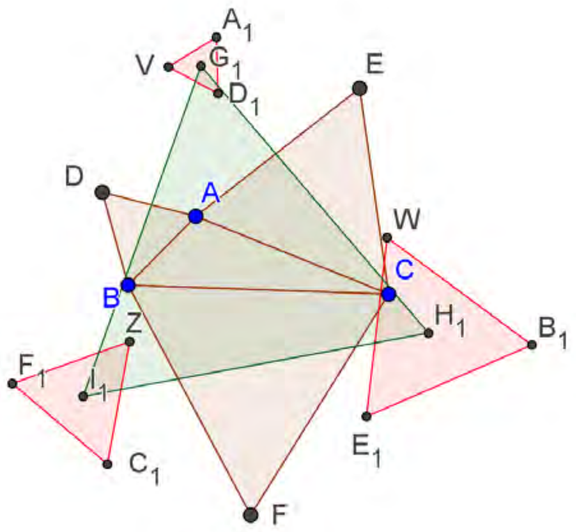
(1) ΔVA_1D_1、ΔWB_1E_1、ΔZC_1F_1 皆為正三角形（圖二十八）

(2) 取 ΔVA_1D_1、ΔWB_1E_1、ΔZC_1F_1的重心 G_1、H_1、I_1，則 $\Delta G_1H_1I_1$ 為正三角形(圖二十九)

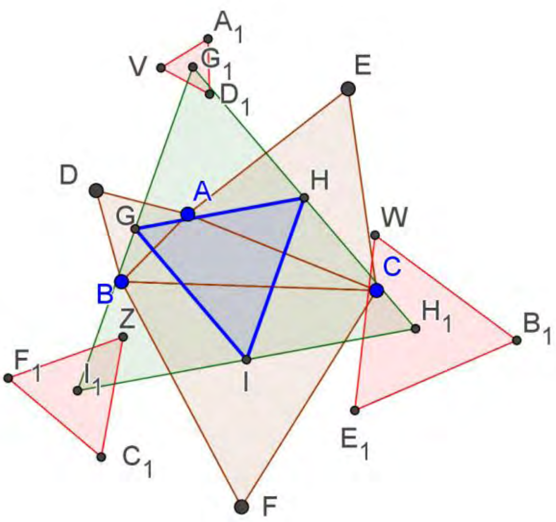
(3) 且 G_1、H_1、I_1 為拿破崙三角形 ΔGHI 的三個旁心（圖三十）



圖二十八



圖二十九



圖三十

4. 性質 5-4：取 ΔABD、ΔBCF、ΔCAE 三個正三角形的三組旁心（J、K、L、O、P、Q、R、S、T)，當我們做出 $\Delta BDA_{\overline{AD}}$、$\Delta FCB_{\overline{BC}}$ 及$\Delta EAC_{\overline{AE}}$ 時，得 J、O、R 三點 ，則此 ΔJOR 必為正三角形。ΔKPS、ΔLQT 亦為正三角形

(圖三十一、圖三十二)

[證明]：

(1) ∵ ΔJOR 的三點 J、O、R 分別由 $\Delta BDA_{\overline{AD}}$、$\Delta FCB_{\overline{BC}}$ 及 $\Delta EAC_{\overline{AE}}$ 所組成，因此根據定義得知

∴ $\overline{EC}=\overline{AC}$、$\overline{BC}=\overline{OC}$

(2) ∵ $\overline{EC}=\overline{AC}$、$\overline{BC}=\overline{OC}$

且 $\angle ACB=60^{O}-\angle OCA$，$\angle ECO=60^{O}-\angle OCA$

$\Longrightarrow \angle ACB=\angle ECO$

∴ $\Delta ABC\cong\Delta CEO$ (SAS)

故 $\overline{EO}=\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{AJ}$

(3) ∵ $\angle BAC=\angle OEC$

且 $\angle RAJ=360^{O}-240^{O}-\angle BAC$

$=120^{O}-\angle BAC$

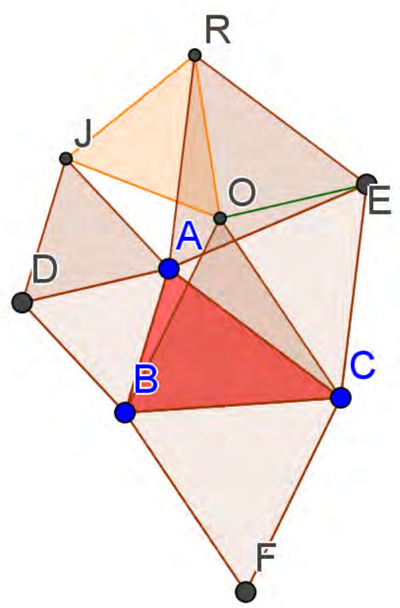
$\angle REO=120^{O}-\angle OEC$

∴ $\angle RAJ=\angle REO$

(4) ∵ $\angle RAJ=\angle REO$、$\overline{EO}=\overline{AJ}$、$\overline{ER}=\overline{AR}$

∴ $\Delta AJR\cong\Delta EOR$ (SAS)

$\Longrightarrow \overline{JR}=\overline{OR}$



圖三十一

(5) 證明 $\angle JRO=60^{O}$

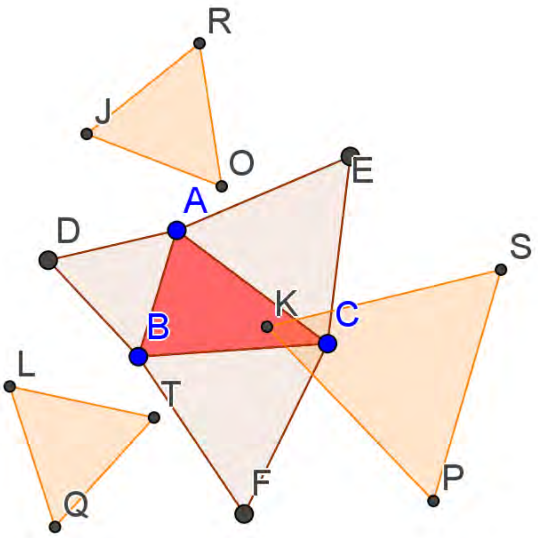
∵ $\angle ORE=60^{O}-\angle ARO=\angle JRA$

∴ $\angle JRO=\angle ARO+\angle JRA=\angle ARD+\angle ORE=60^{O}$

(6) ∵ $\angle JRO=60^{O}$、$\overline{JR}=\overline{OR}$

∴ ΔJOR 為正三角形

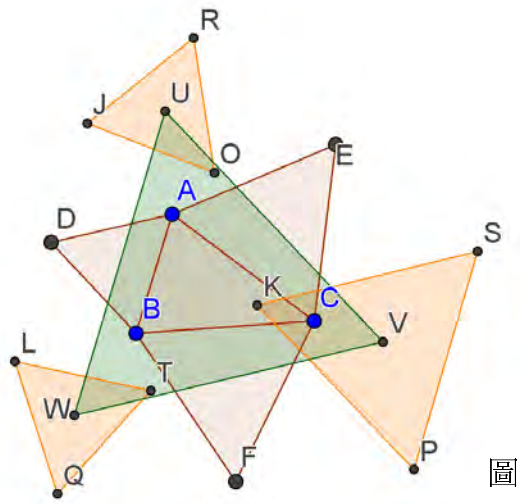
(7) 同理可證　ΔKPS、ΔLQT 亦為正三角形　　故得證



圖三十二

5. 性質 5-5：以三角形 ΔABC 各邊為邊分別向外側做正三角形 ΔABD、ΔBCF、ΔCAE，分別取其重心 G、H、I，做拿破崙三角形 ΔGHI，取 ΔABD、ΔBCF、ΔCAE 三個正三角形的三組旁心分別為 (J、K、L、O、P、Q、R、S、T)，則可得到如下結論：

(1) 取 ΔJOR、ΔKPS、ΔLQT 的重心 U、V、W，並連成 ΔUVW，則 ΔUVW 為正三角形（圖三十三）

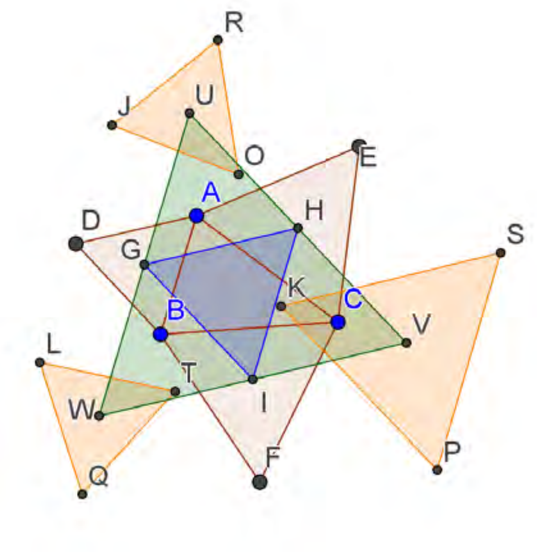


圖三十三

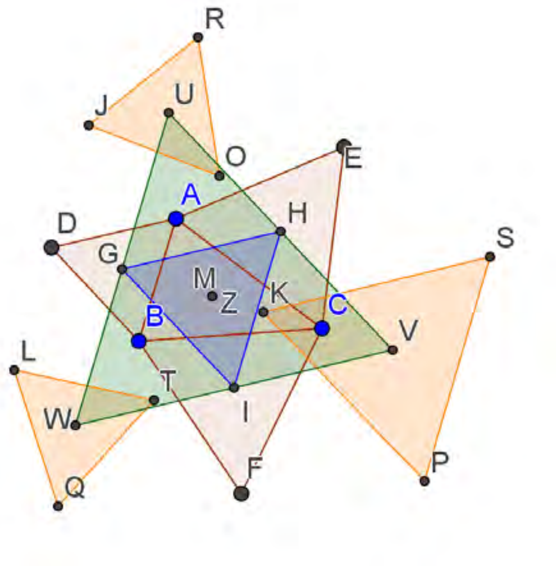
(2) U、V、W 三點皆為 ΔGHI 的旁心(圖三十四)

(3) ΔUVW 的重心 Z 與 ΔABC 的重心 M 重合 (圖三十五)

(4) 取 ΔJOR、ΔKPS、ΔLQT 的旁心 (A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1、G_1、H_1、I_1) ，B_1 與 D_1、C_1 與 G_1、F_1 與 H_1 分別重合，且 $\Delta A_1D_1G_1$、$\Delta B_1E_1H_1$、$\Delta C_1F_1I_1$ 皆為正三角形 (圖三十六)



圖三十四



圖三十五

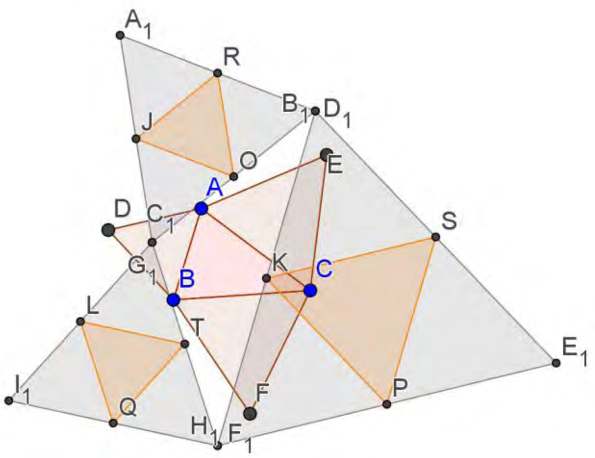


圖 三十六

6. 性質 5-6：延續性質 5-5，取 ΔABD、ΔBCF、ΔCAE 之旁心三角形，得 ΔJAD、ΔKBA、ΔLDB、ΔTCA、ΔRAE、ΔSEC、ΔOBC、ΔPCF、ΔQFB，取其重心 U、V、W、Z、A_1、B_1、C_1、D_1、E_1（圖三十七）

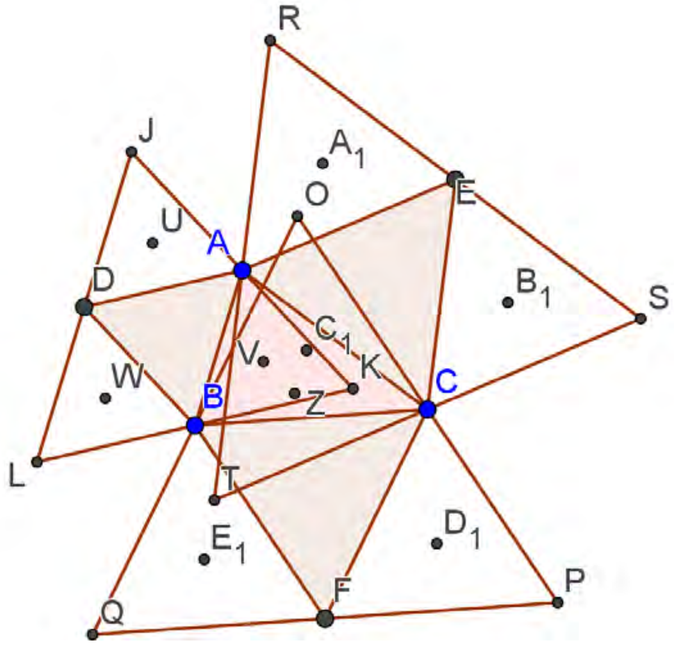
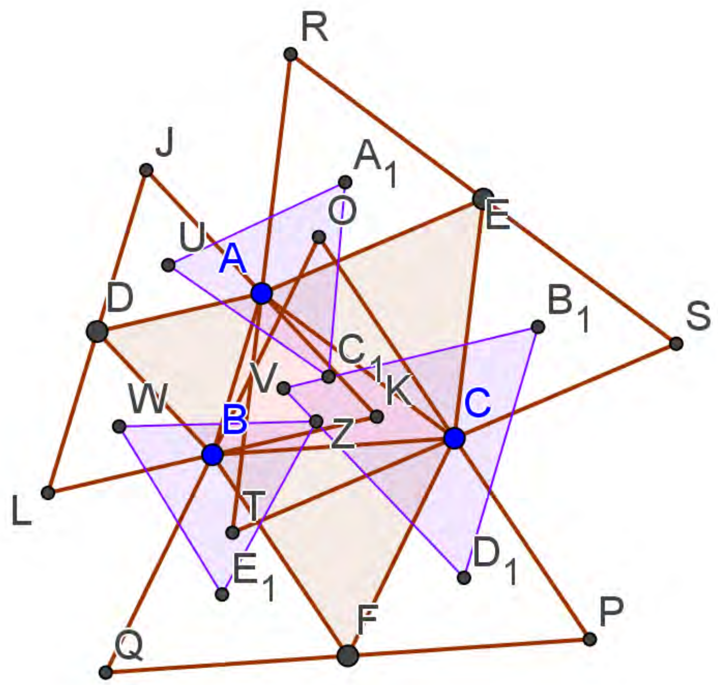


圖 三十七

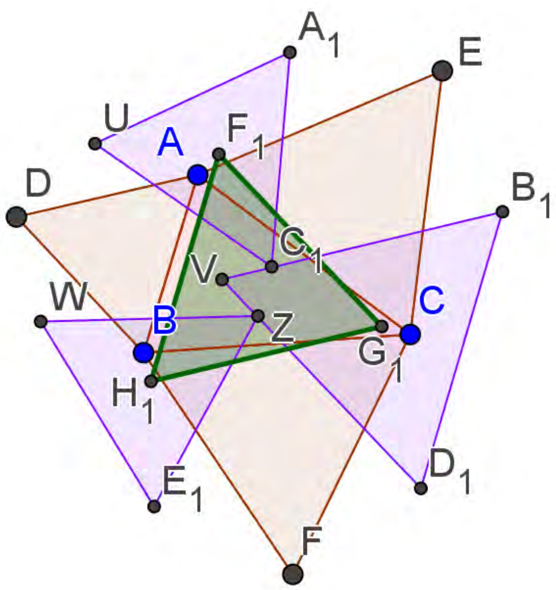
(1) ΔUZC_1、ΔVA_1D_1、ΔWB_1E_1 皆為正三角形（圖三十八）



圖三十八

(2) 取 ΔUZC_1、ΔVA_1D_1、ΔWB_1E_1 的重心F_1、G_1、H_1，$\Delta F_1G_1H_1$ 為正三角形

(圖三十九)



圖三十九

(3) $\Delta F_1G_1H_1 \cong \Delta GHI$，且 $\Delta F_1G_1H_1$ 為 ΔGHI 以重心為中心旋轉 60° 之三角

(圖四十)

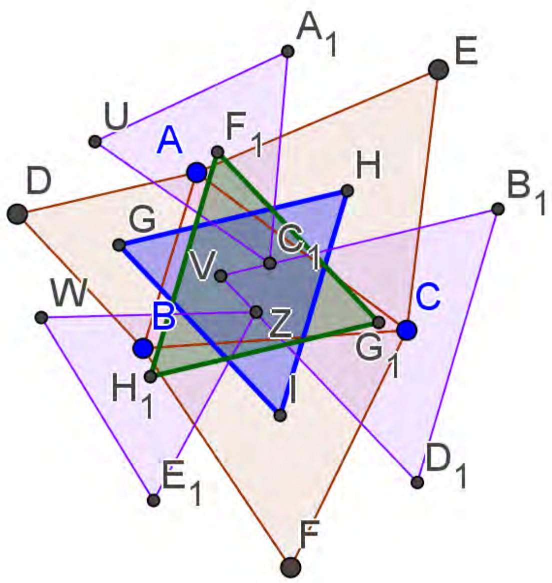


圖 四十

陸、結論與討論

一、找尋在原三角形下建構的三個旁心三角形中，於此三個旁心三角形中分別取其五心，並將其連成新三角形，並觀察此新三角形的五心及面積與原三角形的五心及面積的關係。

1. 連線三角形 ΔGHI 與原三角形 ΔABC 或旁心連線三角形 ΔDEF 的關係：

情況	結論
外心連線三角形	ΔDEF 的垂心與 ΔGHI 的垂心重合
	$\Delta DEF \sim \Delta GHI$，$S_{\Delta DEF} = 4S_{\Delta GHI}$
	ΔGHI 的垂心與 ΔABC 的內心重合
	ΔGHI 的外心與 ΔABC 的外心重合
垂心連線三角形	$\Delta GHI \cong \Delta ABC$
	ΔGHI 的重心、內心與 ΔABC 的重心、內心共線
內心連線三角形	無
重心連線三角形	無

二、找尋三角形的旁心連線三角形，再取其旁心連線三角形，觀察新增的三角形及原三角形之關係。

情況	結論
ΔABC 的旁心連線三角形 ΔDEF，再取 ΔDEF 的旁心連線三角形 $\Delta A_1B_1C_1$	角度的關係：ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 其對應角的關係式為 $\angle A_1 = \frac{\angle A+180°}{4}$
	如此反覆新增三角形的旁心連線三角形 $\Delta A_nB_nC_n$，最終當 $n \to \infty$ 時，$\Delta A_nB_nC_n$ 將趨近於正三角形。

三、三角形向外做三個相似三角形，找尋各種不同心之連線三角形與外做三角形相似的情形。我們得到以下結論 ：

<table>
<tr><th>情況</th><th>結論</th></tr>
<tr><td rowspan="2">依一定次序放置三個外做相似形</td><td>外心、重心、內心、垂心相連而成的連線Δ皆與向外做的 Δ 相似</td></tr>
<tr><td>形成方式相同的點相連而成的連線Δ皆與向外做的 Δ 相似</td></tr>
<tr><td>未依一定次序編排後</td><td>僅有外心連成的連線 Δ 與向外做的 Δ 相似</td></tr>
</table>

- 並在此主題之下，我們得知在相同結構下(在相似形中取出相同位置時，例如 ： 五心，亦或是對應邊的中點)，所連成新的三角形必定與外做的相似三角形相似。因此在主題四，我們利用了正三角形做證明。

四、三角形向外做三個正三角形後，找尋各種相連為正三角形之性質。

<table>
<tr><th colspan="3">情況</th><th>結論</th></tr>
<tr><td rowspan="12">任意三角形向外做正三角形</td><td colspan="2" rowspan="5">各邊中點</td><td>相連為正Δ</td></tr>
<tr><td>三個中點相連的正Δ的重心相連為正Δ</td></tr>
<tr><td>三個中點相連的正Δ 之重心為拿破崙Δ的各邊中點</td></tr>
<tr><td>三個中點相連的正Δ的旁心取三點相連為正Δ</td></tr>
<tr><td>中點相連的正Δ的旁心的三個相連正Δ的重心相連為正Δ</td></tr>
<tr><td rowspan="7">取向外做正三角形的旋轉三角形</td><td rowspan="4">取其相鄰三頂點</td><td>相連為正Δ</td></tr>
<tr><td>三個頂點相連的正Δ的重心相連為正Δ</td></tr>
<tr><td>三個頂點相連的正Δ之重心為拿破崙Δ的三個旁心</td></tr>
<tr><td>頂點相連的正Δ的旁心重合</td></tr>
<tr><td rowspan="3">取其重心</td><td>相連為正Δ</td></tr>
<tr><td>三個重心相連的正Δ的重心相連為正Δ</td></tr>
<tr><td>三個重心相連的正Δ的重心相連正Δ為拿破崙Δ 以重心為中心旋轉 60° 之三角形</td></tr>
</table>

柒、參考資料

一、　國中數學第四、五冊（翰林版)

二、　歐拉線相關證 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%90%E6%8B%89%E7%B7%9A

三、　拿破崙三角形相關證明 http://lyingheart6174.pixnet.net/blog/post/5121520-E6%8B%BF%E7%A0%B4%E5%B4%99%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2

四、　拿破崙定理-維基百科 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8B%BF%E7%A0%B4%E4%BE%96%E5%AE%9A%E7%90%86

【評語】030405

考慮由三角形的三個旁心所構成的三角形被原三角形切割出的三個小三角形（旁心三角形）的外心、垂心連線所成新三角形的一些性質。針對此新三角形與原三角形的關係作了分析。對於由三角形三邊往外構造出的三個相似三角形對應邊上比例點連線所成的三角形的一些性質，也作了討論。這應該是從拿破崙三角形這個概念所引發的而出的一個問題。作者們針對旁心三角形的外心連線、垂心連線所得出的新三角形的一些特性作了分析，給出了一些有趣的結果（如：外心連線三角形的垂心是原三角形的內心，垂心連線三角形與原三角形相似等等）。結果非常多，可以看得出作者們確實投注了許多的心力在這個問題上，值得嘉許。比較美中不足的是，或許受到篇幅的限制，有一些結果只有結論而沒有論證，而有一些關鍵的論述又說的太過於簡略了。作者們確實給出了許多有意思的結論，如果能在作品說明書中把這些結果說得更清楚會更好。

作品海報

壹 研究動機

七上學期末，在學長姐分享的獨立研究報告時，閱讀了一篇有關「三角形五心」相關的研究，在此之前小學老師也曾經介紹過有關「三角形五心」的性質，那時就覺得很有趣，一直想了解「三角形五心」的內容。於是，想要藉此機會對三角形的五心做更進一步的研究，了解五心之間的關係與實質內涵。

貳 研究目的

- 在原三角形的三個旁心三角形中，對每一個旁心三角形分別取其五心，將其連成新三角形，並觀察此新三角形的五心及面積與原三角形的五心及面積的關係，並加以證明。
- 找尋三角形的旁心連線三角形，再做其旁心，觀察新增的三角形及原三角形之關係，並加以證明。
- 任意三角形向外做三個相似三角形，找尋各種相連為相似三角形之性質。
- 三角形向外做三個正三角形後，找尋各種相連為正三角形之性質，並加以證明。

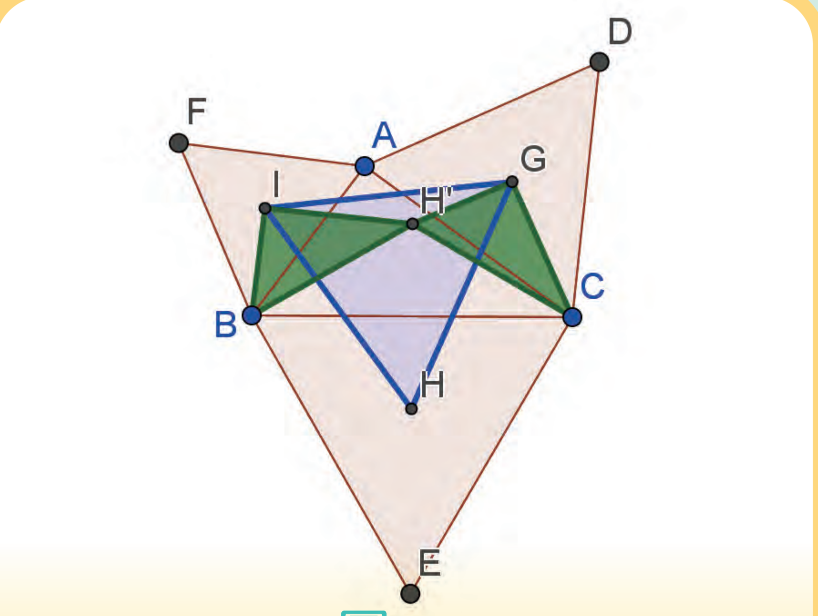
參 研究設備與器材

電腦、geogebra 繪圖軟體、人腦、紙筆、參考資料。

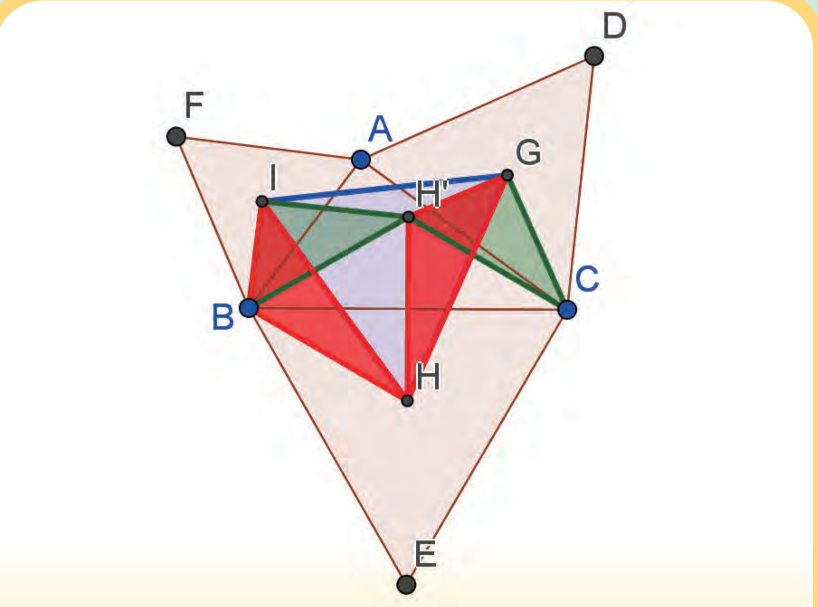
肆 研究過程與方法

一.文獻探討

拿破崙三角形

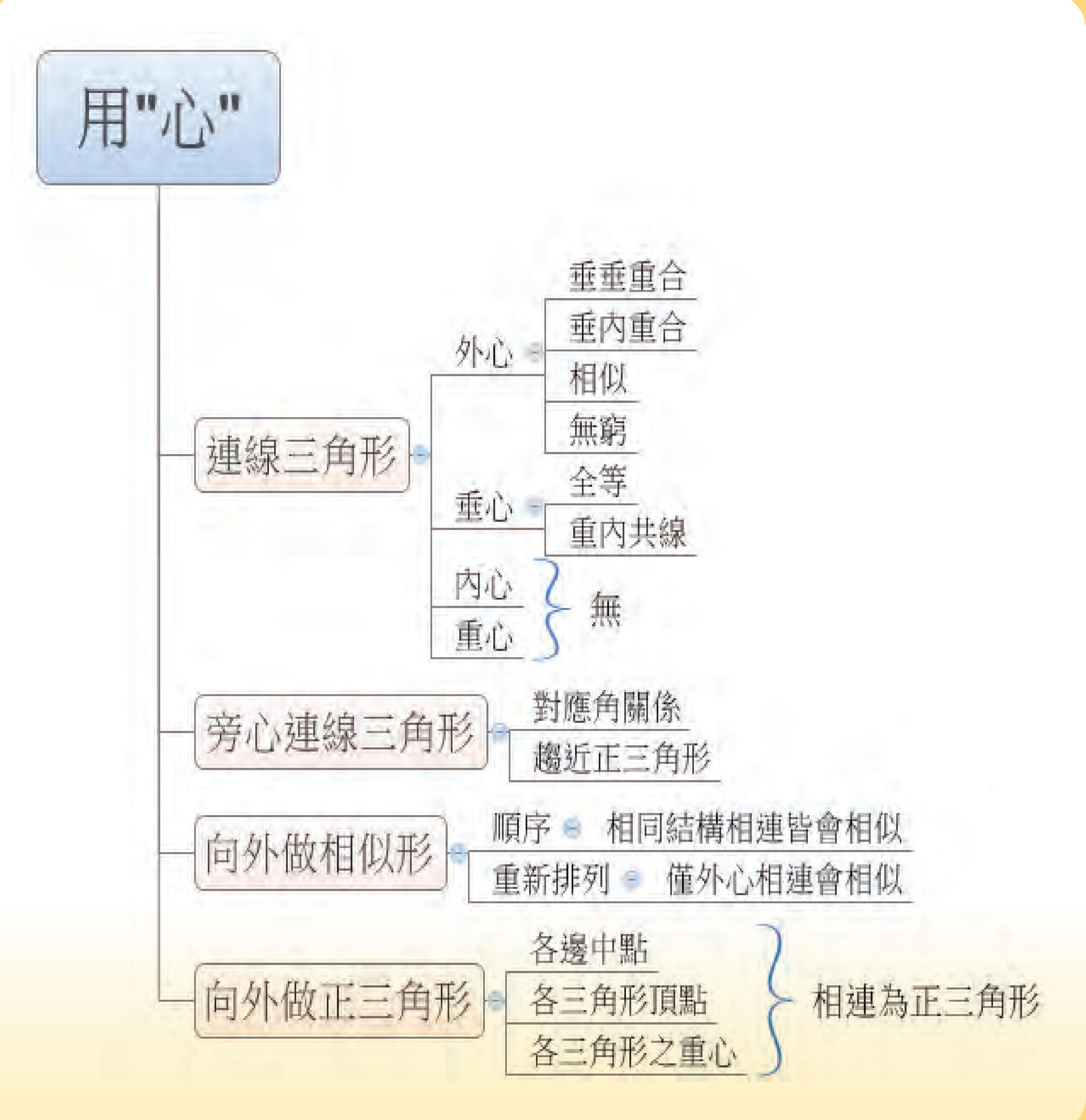


圖一



圖二

二.研究架構圖



三.定義

(一) $S_{\triangle ABC}$ ：$\triangle ABC$ 所圍面積以 $S_{\triangle ABC}$ 表示；同理 $\triangle EFG$ 所圍面積以 $S_{\triangle EFG}$ 表示。

(二)旁心三角形：若 $\triangle ABC$ 的旁心為 C'、A' 及 B'。在 $\triangle ABC'$ 中，點 C' 的對應的邊為 $\overline{AB}$ (點 C' 為 $\angle C$ 的內角平分線及 $\angle A$、$\angle B$ 的外角平分線交點，對應邊即為 $\angle C$ 的對應邊 $\overline{AB}=c$)，同理，點 A' 的對應的邊為 $\overline{BC}$ ，點 B' 的對應的邊為 $\overline{AC}$，所以我們稱 $\triangle ABC'$、$\triangle BCA'$、$\triangle ACB'$ 為“三角形 $\triangle ABC$ 的三個旁心三角形”，本文以 $\mathfrak{C}_{C-C'}$、$\mathfrak{C}_{A-A'}$、$\mathfrak{C}_{B-B'}$ 表示(如圖三)

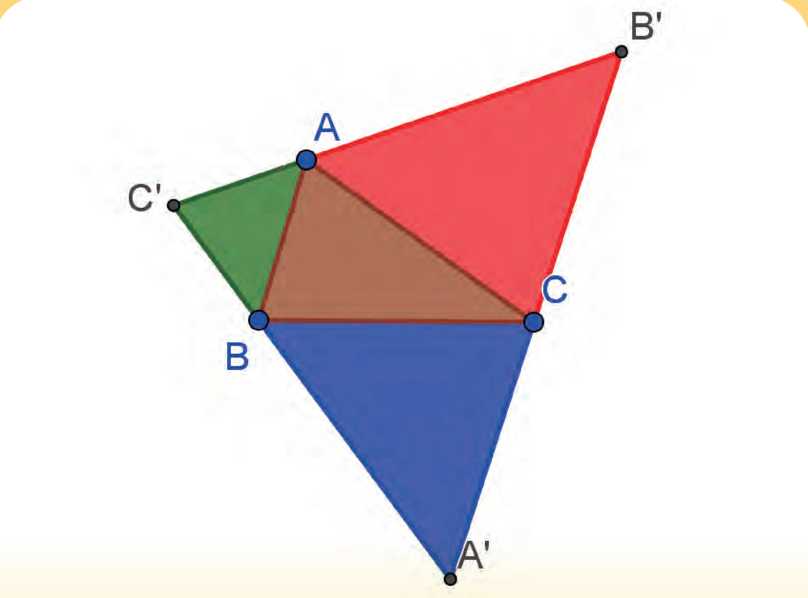
(三) $\triangle ACD_{\overline{AD}}$：在任意三角形 $\triangle ABC$ 的其中一邊向外做正三角形，例如：以 $\overline{AC}$ 為邊做正三角形 $\triangle ACD$ 。再做以 $\triangle ACD$ 的 $\overline{AD}$ 為邊長的正三角形，此三角形以 $\triangle ACD_{\overline{AD}}$ 表示。並且會得到“C”點以 $\overline{AD}$ 為對稱軸的對稱點“E”。(如圖四)

$\triangle ACD_{\overline{CD}}$：同上，以 $\overline{CD}$ 為邊長的正三角形，此三角形以 $\triangle ACD_{\overline{CD}}$ 表示。並且會得到“A”點以 $\overline{CD}$ 為對稱軸的對稱點“F”

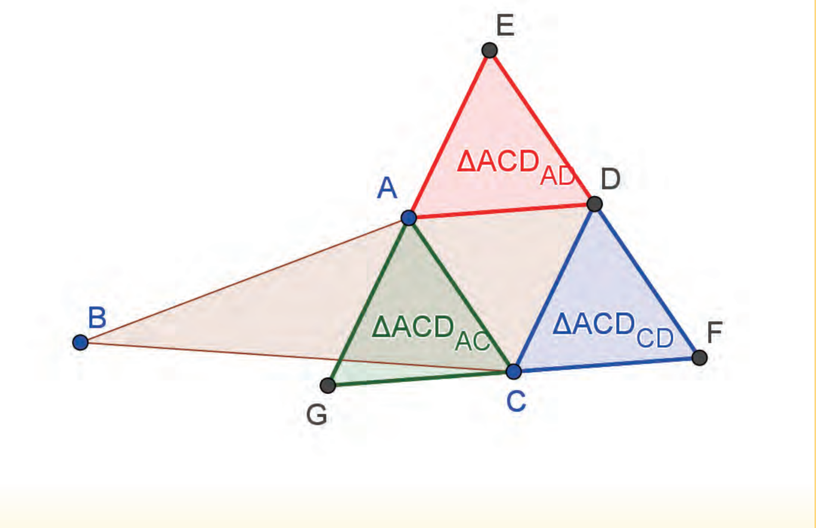
$\triangle ACD_{\overline{AC}}$：同上，以 $\overline{AC}$ 為邊長的正三角形，此三角形以 $\triangle ACD_{\overline{AC}}$ 表示。並且會得到“D”點以 $\overline{AC}$ 為對稱軸的對稱點“G”

(四)連線三角形：

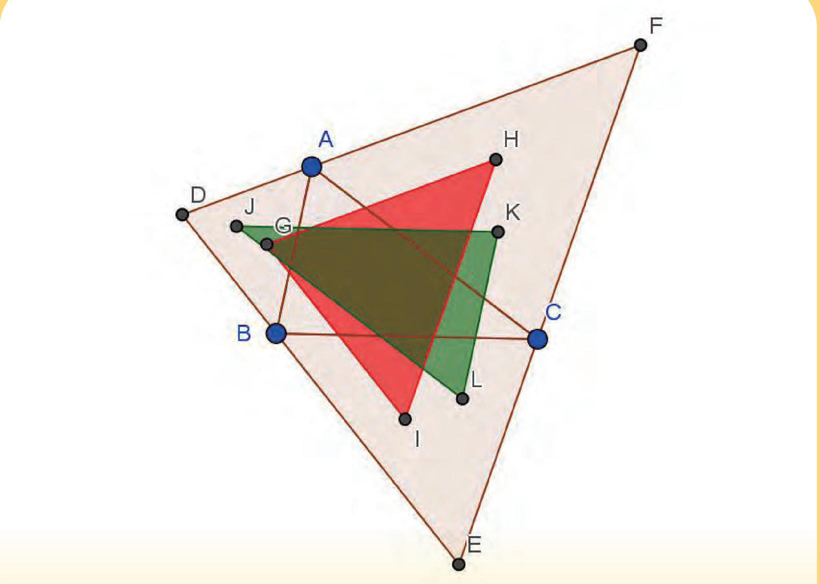
1. 旁心連線三角形：三角形中的三個旁心所連成的三角形。(如圖五 $\triangle DEF$)
2. 外心連線三角形：指三個旁心三角形的外心連線而成的三角形。(如圖五 $\triangle GHI$)
3. 垂心連線三角形：指三個旁心三角形的垂心連線而成的三角形。(如圖五 $\triangle JKL$)
4. 內心連線三角形：指三個旁心三角形的內心連線而成的三角形。
5. 重心連線三角形：指三個旁心三角形的重心連線而成的三角形。



圖三



圖四



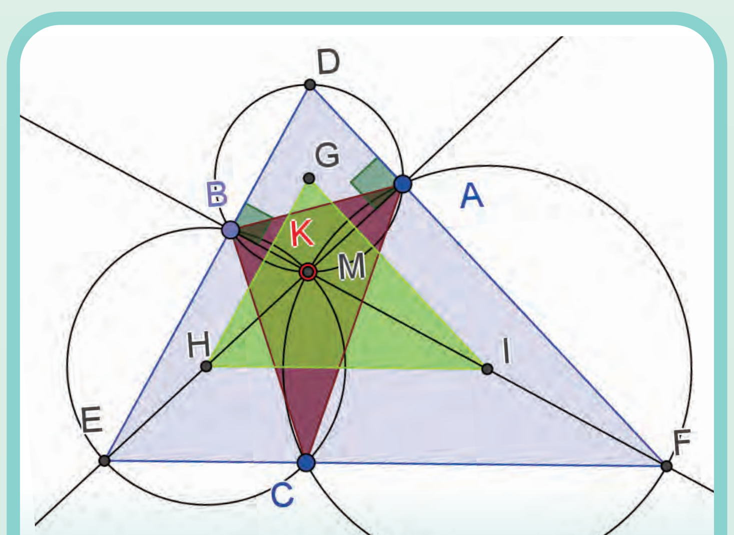
圖五

伍 研究歷程與得到的結論

主題一：連線三角形

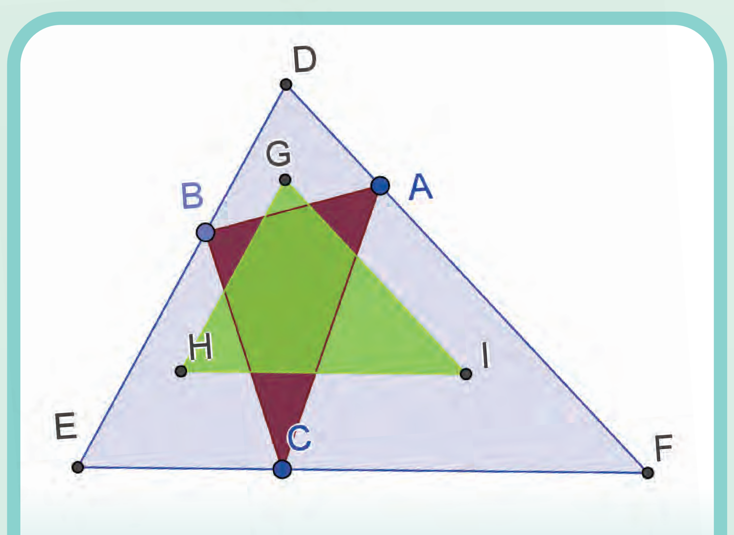
1.△ABC 的旁心為 D、E、F，做旁心連線三角形△DEF，再分別取旁心三角形 $\mathfrak{E}_{C-D}$ 、$\mathfrak{E}_{A-E}$ 、$\mathfrak{E}_{B-F}$ 的外心 G、H、I，連成外心連線三角形△GHI，可得下面性質：

性質 1-1：△GHI的垂心M與△DEF的垂心K重合



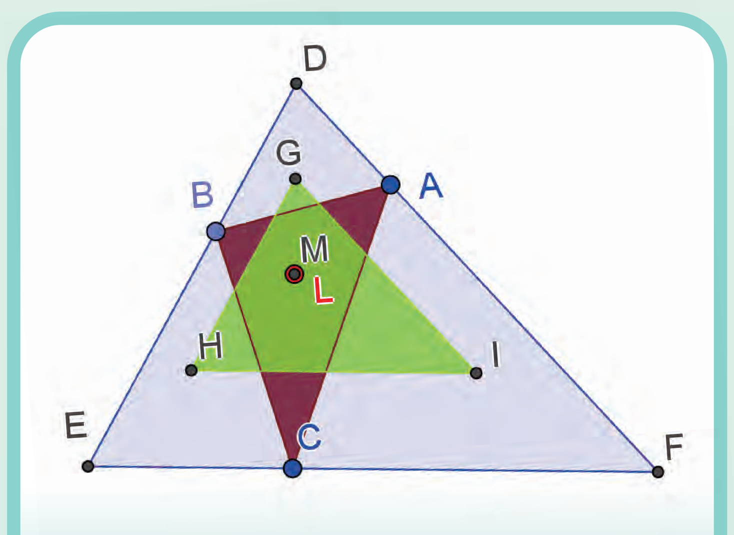
圖六

性質1-2 ：△GHI ~△DEF，$4S_{\triangle GHI}=S_{\triangle DEF}$



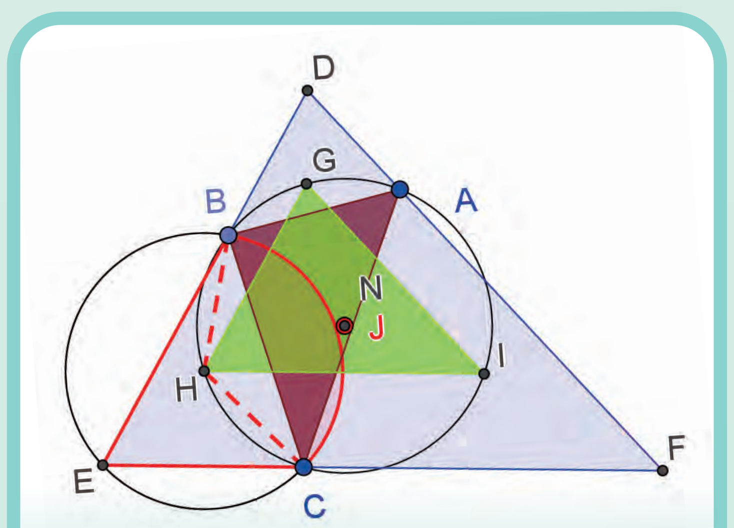
圖七

性質1-3：△GHI的垂心M與△ABC的內心L重合

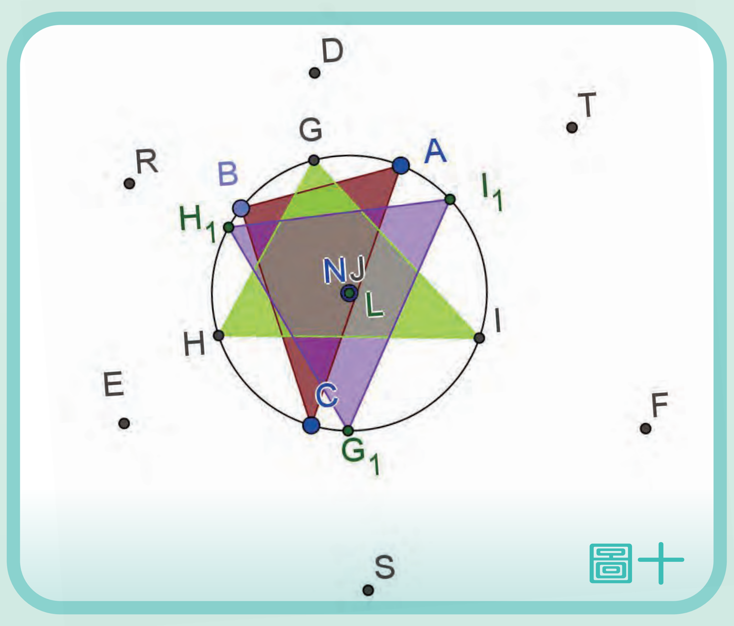


圖八

性質1-4 ：△GHI 的外心 N 與△ABC 的外心 J 重合。再取△GHI的外心連線三角形$\triangle G_1H_1I_1$，外心一樣重合，且 A、B、C、G、H 、I、G_1、H_1、I_1九點共圓



圖九

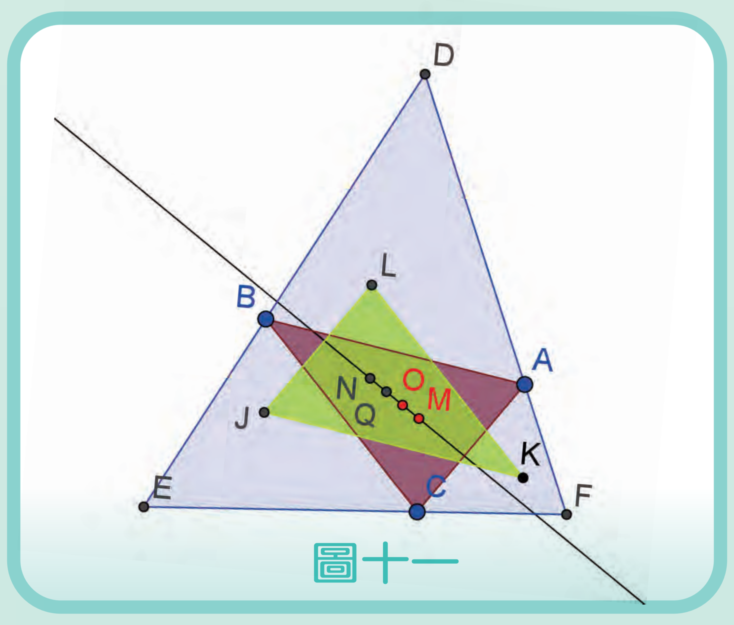


圖十

2.△ABC的旁心為 D、E、F，做旁心連線三角形△DEF，再分別取旁心三角形 $\mathfrak{E}_{A-E}$ 、$\mathfrak{E}_{B-F}$ 、$\mathfrak{E}_{C-D}$ 的垂心 J、K、L，連成垂心連線三角形△JKL，可得下面性質：

性質 2-1 ：△JKL ≅△ABC

性質 2-2 ：分別取△JKL的重心Q與內心N與△ABC的重心O、內心M四點共線



圖十一

主題二：旁心連線三角形

1. ΔABC旁心連線三角形ΔDEF 再取ΔDEF旁心(A_1、B_1、C_1)，並將其連成旁心連線三角形 $\Delta A_1B_1C_1$ ，可得下列性質：

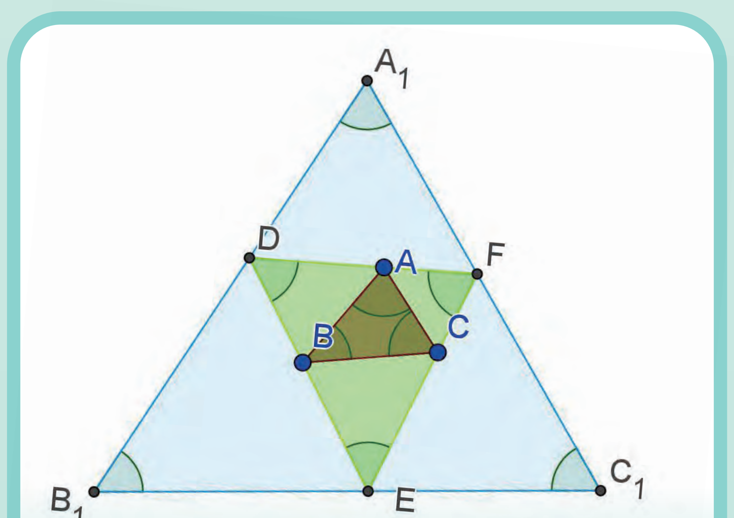
性質1-1：ΔABC與$\Delta A_1B_1C_1$其對應角的關係式 $\angle A_1=\frac{\angle A+180^\circ}{4}$

如此反覆新增旁心連線三角形的旁心連線三角形

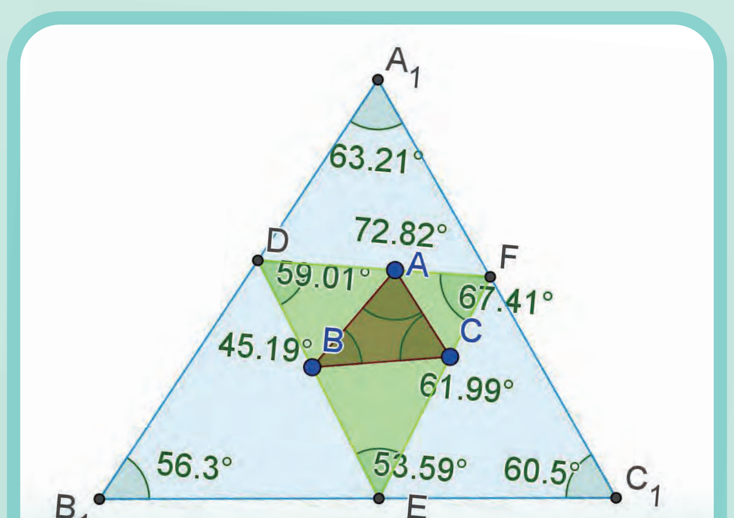
$\Delta A_nB_nC_n$ 以及角度關係式 $\angle A_n=\frac{\angle A_{n-1}+180^\circ}{4}$

並可推論最終將趨近於正三角形。

小結：由上述幾項結論可知ΔABC的外心連線三角形們$\Delta G_nH_nI_n$與ΔABC共圓。且$\Delta G_nH_nI_n$逐漸趨近於正三角形。



圖十二



圖十三

主題三：向外做相似三角形

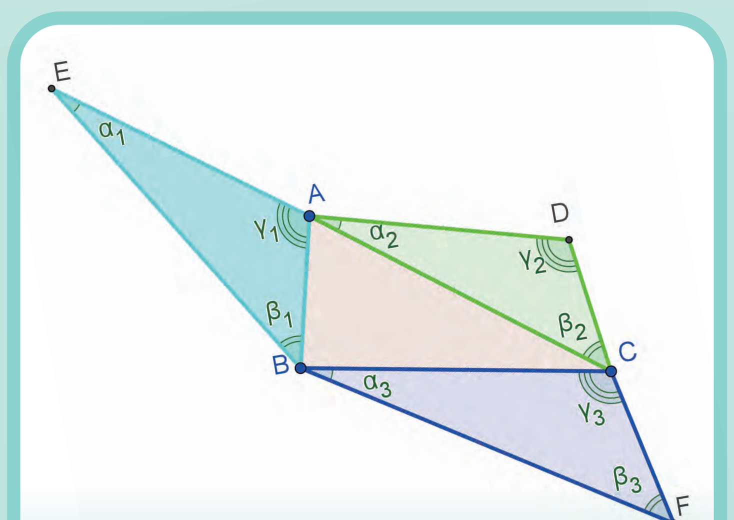
1.ΔABC向外做三個相似三角形ΔABE、ΔACD、ΔBCF，角度均為 α、β、γ 其中$\alpha=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$、$\beta=\beta_1=\beta_2=\beta_3$、$\gamma=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3$

性質1-1：取ΔABE、ΔACD 、ΔBCF 外心 G、H、I 相連成 ΔGHI，發現ΔGHI ~ΔADC ~ΔEAB ~ΔBCF。

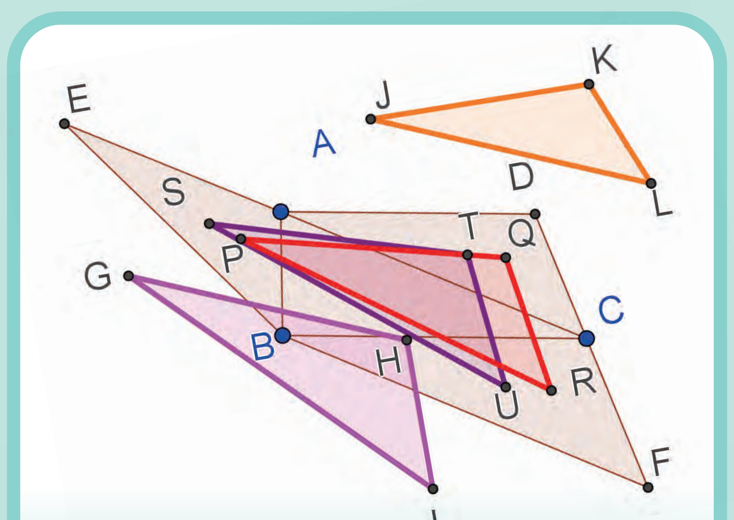
且取ΔABE、ΔACD 、ΔBCF的重心S、T、U，內心P、Q、R，垂心J、K、L，相連成ΔSTU、ΔPQR、ΔJKL，亦可以發現ΔGHI~ΔSTU ~ΔPQR ~ΔJKL。

取 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1使 $\overline{AA_1}:\overline{AE}=\overline{DB_1}:\overline{AD}=\overline{CC_1}:\overline{BC}=\overline{AD_1}:\overline{AB}=\overline{CE_1}:\overline{AC}=1:n$，再將其連成$\Delta A_1B_1C_1$，則可得$\Delta A_1B_1C_1$~ΔADC ~ ΔEAB ~ΔBCF。

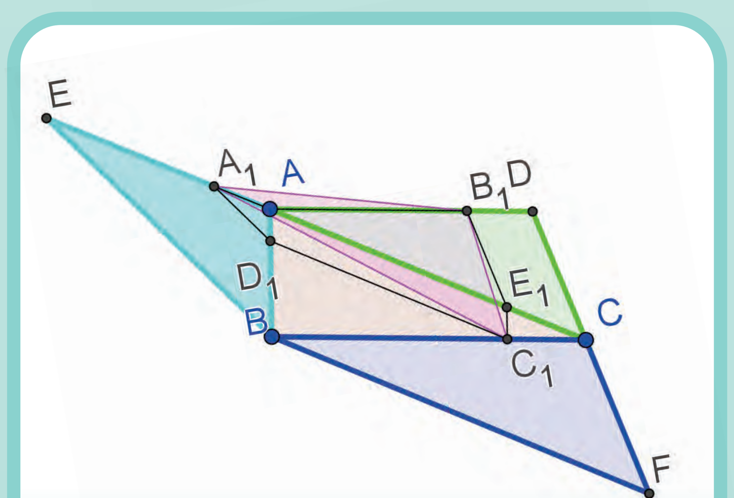
接下來，我們將 A_1、B_1、C_1 分別以 A、D、C 為圓心旋轉任意角度得 F_1、G_1、H_1，連成$\Delta F_1G_1H_1$，則 $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta F_1G_1H_1$



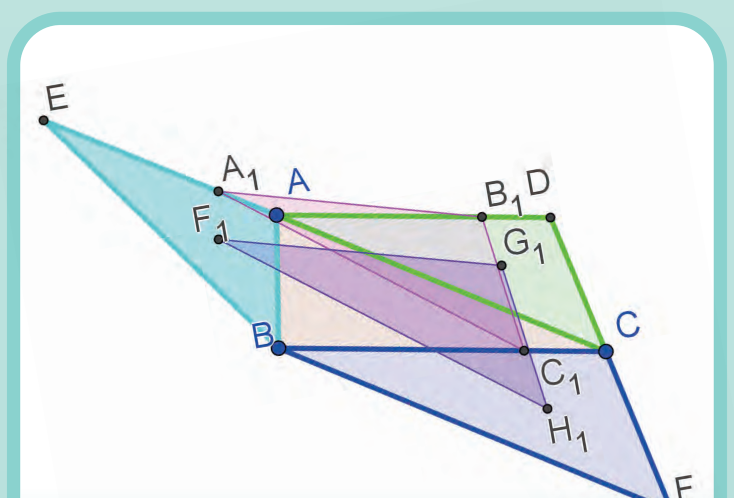
圖十四



圖十五

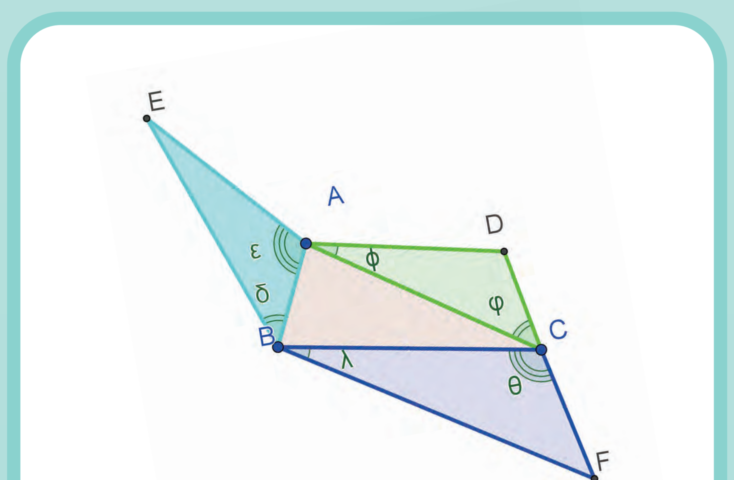


圖十六

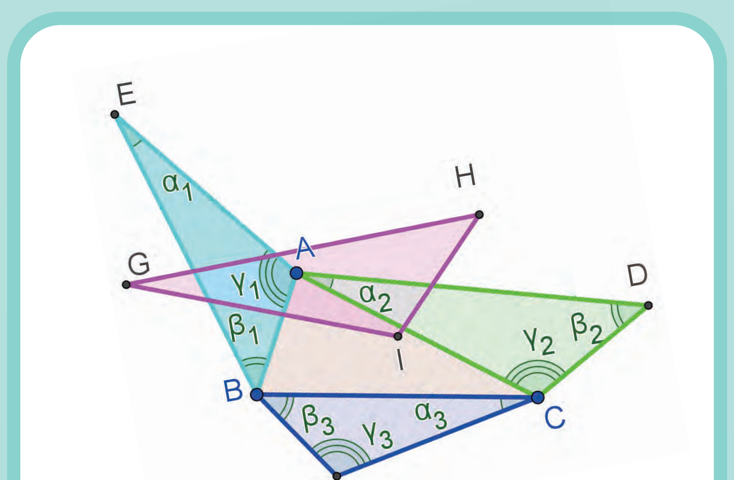


圖十七

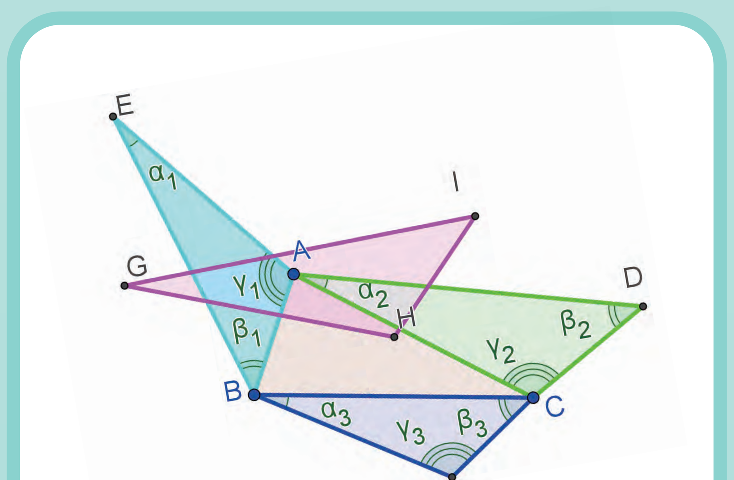
性質1-2：若將三角形角度重新排列 ，發現只剩 ΔGHI ~ ΔEAB、其餘ΔSTU、ΔPQR 、ΔJKL皆不與ΔEAB相似



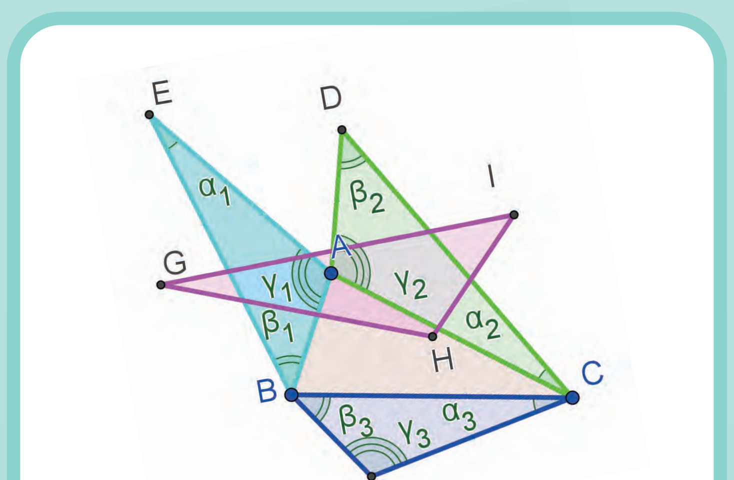
圖十八



圖十九



圖二十



圖二十一

主題四：向外做正三角形

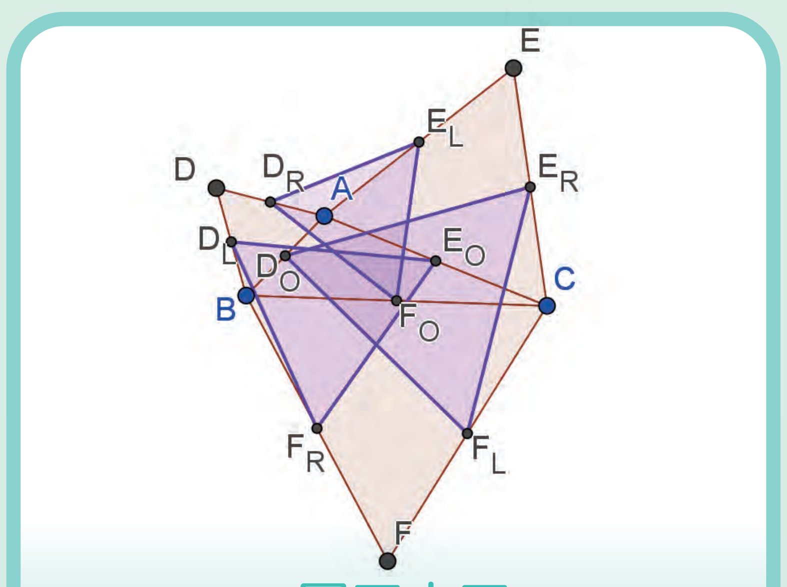
1. 將三角形向外做三個正三角形後，找尋各點相連為正三角形之組合及其規律 ：

性質1-1：ΔABC以各邊向外做三個正三角形ΔABD、ΔACE、ΔBCF，取其各邊中點，分別是 D_R、D_L、D_0、E_R、E_L、E_0、F_R、F_L、F_0

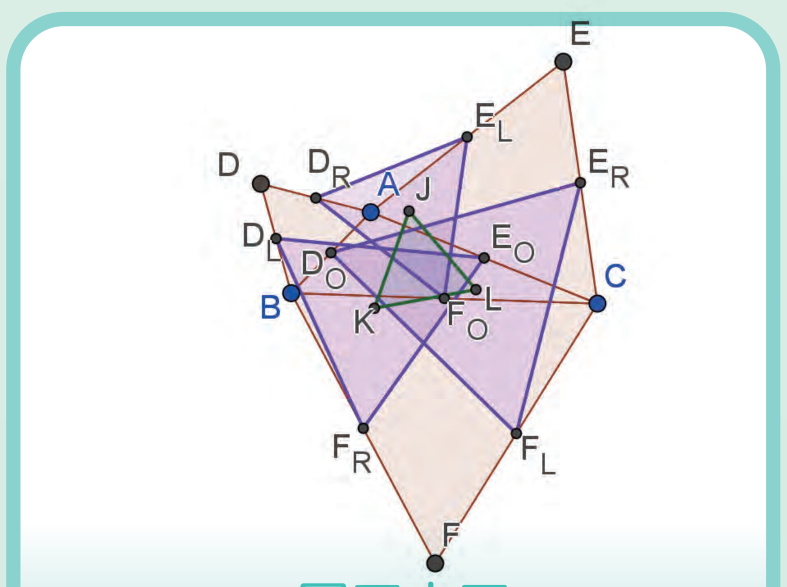
a. $\Delta D_RE_LF_0$、$\Delta D_0E_RF_L$、$\Delta D_LE_0F_R$ 皆為正三角形

b. $\Delta D_RE_LF_0$、$\Delta D_0E_RF_L$、$\Delta D_LE_0F_R$ 的重心J、K、L所形成的ΔJKL為正三角形

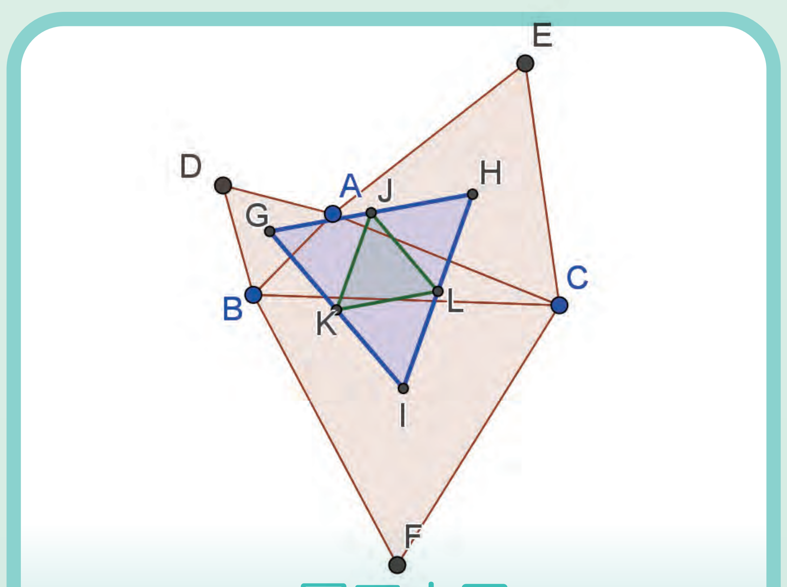
c. J、K、L分別為拿破崙三角形ΔGHI三邊的中點，ΔJKL和ΔGHI的重心重合



圖二十二



圖二十三



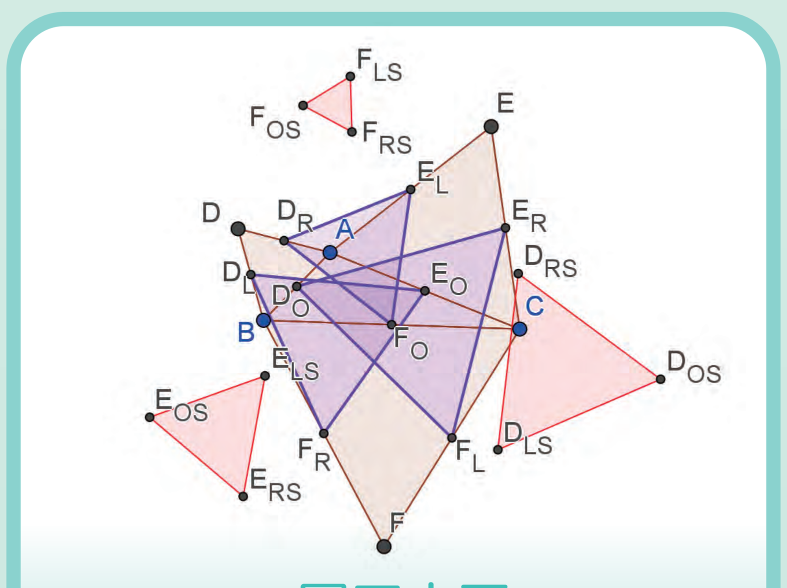
圖二十四

性質1-2：取 $\Delta D_RE_LF_0$、$\Delta D_0E_RF_L$、$\Delta D_LE_0F_R$ 的三組旁心（D_{RS}、D_{LS}、D_{OS}、E_{RS}、E_{LS}、E_{OS}、F_{RS}、F_{LS}、F_{OS}）

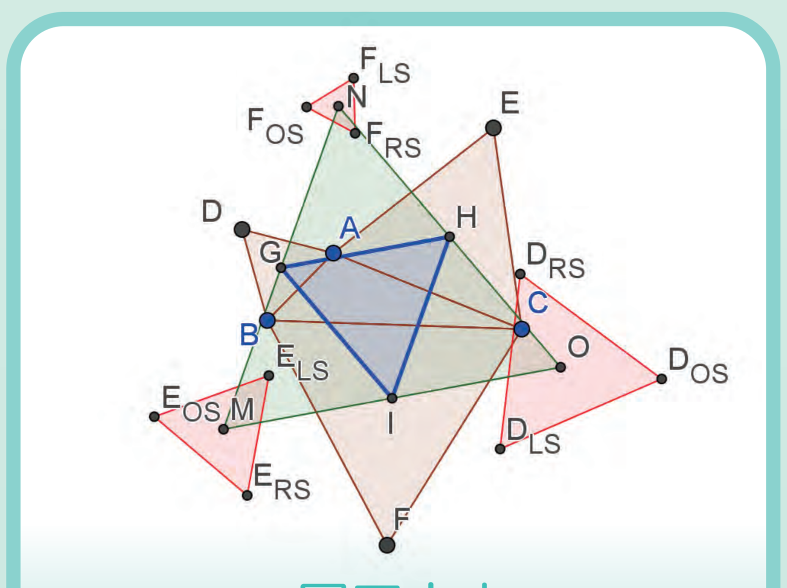
a. $\Delta D_{RS}D_{LS}D_{OS}$、$\Delta E_{RS}E_{LS}E_{OS}$、$\Delta F_{RS}F_{LS}F_{OS}$ 皆為正三角形

b. 取 $\Delta D_{RS}D_{LS}D_{OS}$、$\Delta E_{RS}E_{LS}E_{OS}$、$\Delta F_{RS}F_{LS}F_{OS}$ 的重心O、M、N，則ΔOMN為正三角形

O、M、N為外拿破崙三角形ΔGHI的三個旁心



圖二十五



圖二十六

性質1-3：取ΔABD、ΔBCF、ΔCAF三個正三角形的三組旁心（D_R、D_L、D_S、E_R、E_L、E_S、F_R、F_L、F_S）

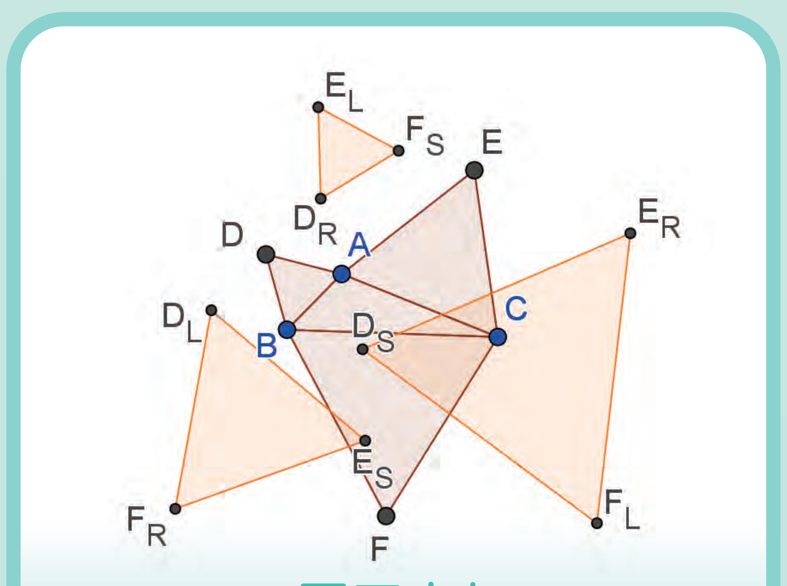
a. $\Delta D_RE_LF_S$、$\Delta D_SE_RF_L$、$\Delta D_LE_SF_R$ 皆為正三角形

b. 取 $\Delta D_RE_LF_S$、$\Delta D_SE_RF_L$、$\Delta D_LE_SF_R$ 的重心J、K、L，並連成ΔJKL，則此三角形為正三角形

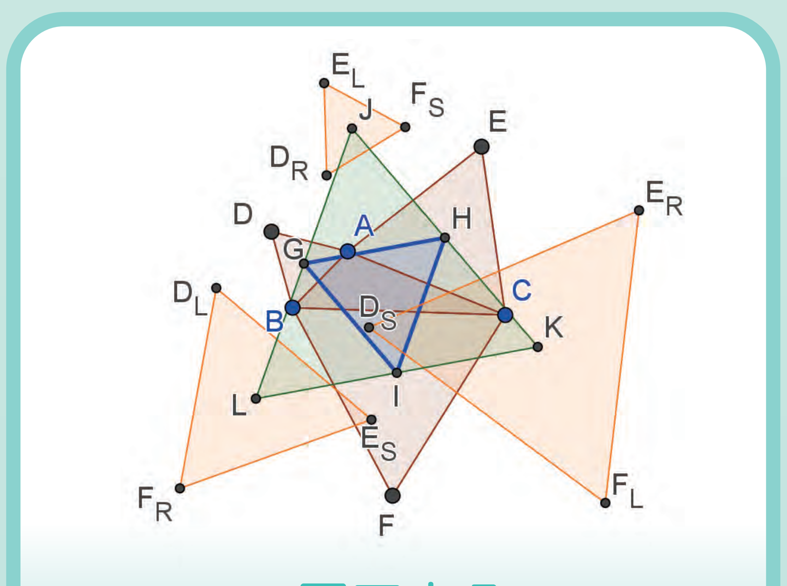
c. J、K、L三點皆為ΔGHI的旁心

d. 取 $\Delta D_RE_LF_S$、$\Delta D_SE_RF_L$、$\Delta D_LE_SF_R$ 的旁心，發現 D_{LS} 與 E_{RS}、F_{LS} 與 D_{RS}，E_{LS} 與 F_{RS} 分別重合，

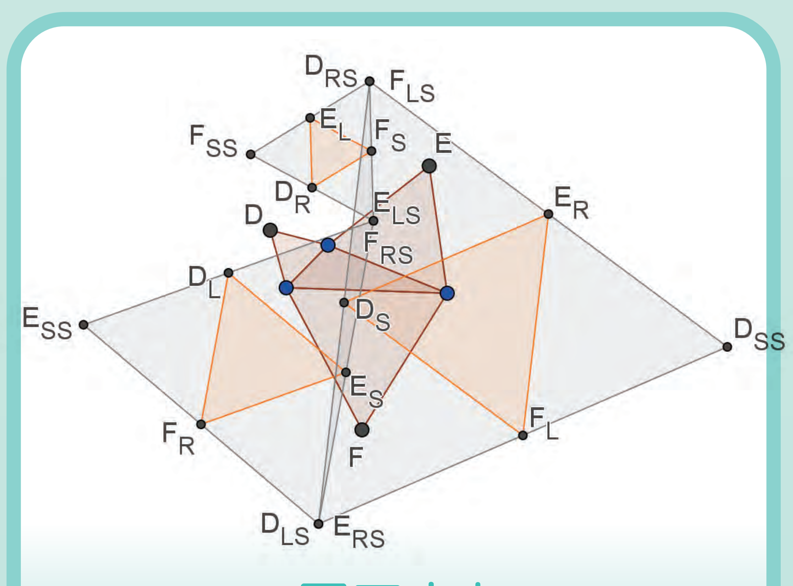
且 $\Delta D_{RS}E_{LS}F_{SS}$、$\Delta D_{SS}E_{RS}F_{LS}$、$\Delta D_{LS}E_{SS}F_{RS}$ 皆為正三角形



圖二十七



圖二十八



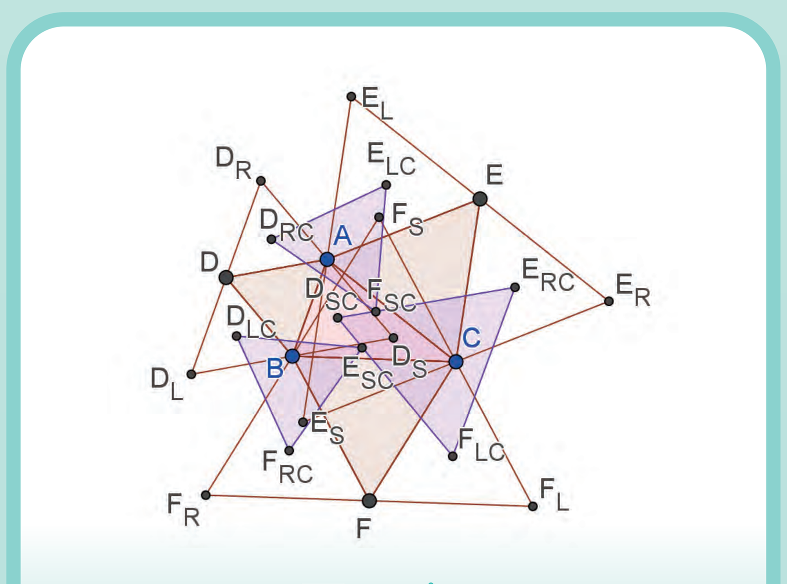
圖二十九

性質1-4：延續1-3，取ΔABD、ΔBCF、ΔCAE之旁心三角形，得 ΔD_LDB、ΔD_RAD、ΔD_SBA、ΔE_LAE、ΔE_REC、ΔE_SCA、ΔF_LCF、ΔF_RFC、ΔF_SBC，取其重心 D_{RC}、D_{LC}、D_{SC}、E_{RC}、E_{LC}、E_{SC}、F_{RC}、F_{LC}、F_{SC}

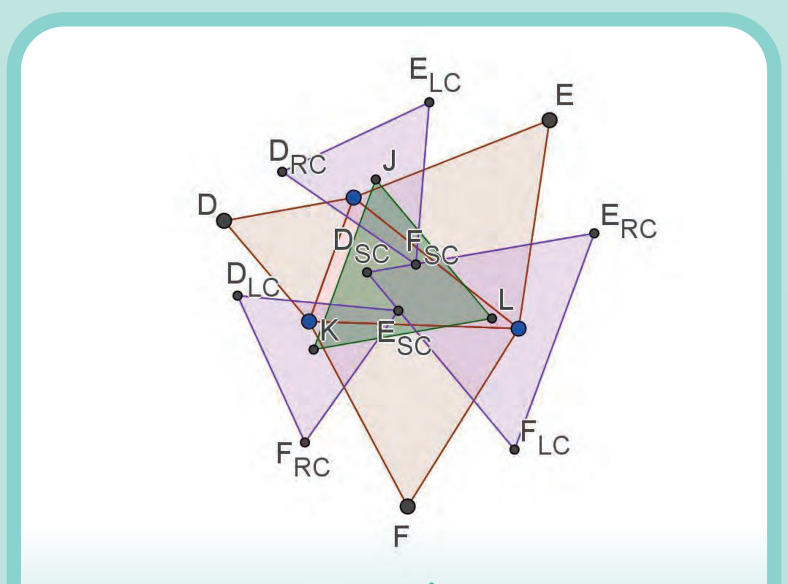
a. $\Delta D_{RC}E_{LC}F_{SC}$、$\Delta D_{SC}E_{RC}F_{LC}$、$\Delta D_{LC}E_{SC}F_{RC}$ 皆為正三角形

b. 取 $\Delta D_{RC}E_{LC}F_{SC}$、$\Delta D_{SC}E_{RC}F_{LC}$、$\Delta D_{LC}E_{SC}F_{RC}$ 的重心J、L、K，ΔJLK為正三角形

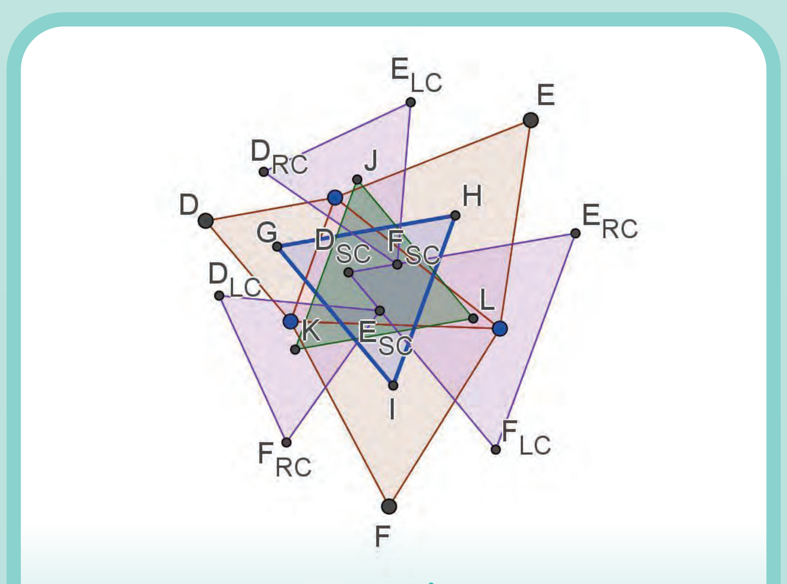
c. ΔJLK≅ΔGHI，且 $\Delta F_1G_1H_1$ 為ΔGHI以重心為中心旋轉60°之三角形



圖三十



圖三十一



圖三十二

陸 未來展望

一.繼續探討本研究中，相同結構之三角形中並未發現之性質。

二.嘗試將此研究發現的性質，擴展至n維空間，或其他非歐幾里得空間(例如球面非歐幾里得平面)。

三.嘗試將此研究發現應用於其他領域。

柒 參考資料

一.國中數學第四、五冊(翰林版)

二.歐拉線相關證明https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%90%E6%8B%89%E7%B7%9A

三.拿破崙三角形相關證明http://lyingheart6174.pixnet.net/blog/post/5121520-E6%8B%BF%E7%A0%B4%E5%B4%99%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2

四.拿破崙定理-維基百科https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8B%BF%E7%A0%B4%E4%BE%96%E5%AE%9A%E7%90%86