中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030404

獵兔傳奇

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃芷宣	陳亮君
國二 林柏佑	李奕瑩
國二 曾千易	

關鍵詞：平面坐標、畢氏定理

摘要

由一道追逐問題開始，藉由控制追蹤器使獵人與兔子距離最遠，得到一、二、三與四個獵人追一隻兔子時，兔子與獵人的距離關係遞迴式。修改遊戲規則：(1)讓兔子僅在部分回合隱形；(2)定義「謹慎」和「明智」兩種情況來探討增加獵人數對追兔子的影響。研究發現：(1)兔子在現身的任一回合，其與獵人移動前後距離不變。若兔子至少隱形一回合，獵人就無法與兔子所在處重合。在 10^9 回合中，兔子若隱形 4999 回合以下，則可達成原題要求。(2)當兔子是「明智」的，獵人就永遠追不到兔子；但若兔子是「謹慎」的，就能用二或四個獵人達成原題要求。此外在三或四個獵人追兔子時，讓兔子部分回合現身，在追過頭之前獵人與兔子的距離會遞減，有追過頭的回合兩者距離則遞增。

壹、 研究動機

我們在 2017 年的數奧(IMO)題目中，發現一道題，引起了我們的興趣。原題如下：

> 一位獵人和一隻隱形的兔子在歐氏平面上玩一場遊戲。
> 兔子的起點 A_0 和獵人的起點 B_0 為同一點。在遊戲的 $n-1$ 回合後，兔子所在的位置為 A_{n-1}，獵人所在的位置為 B_{n-1}。在遊戲的第 n 回合，以下三件事情會依序發生。
> （1）兔子會在不可被看到的情況下移動到一個點 A_n，使得 A_{n-1} 與 A_n 之間的距離恰為 1。
> （2）一個追蹤裝置會回報一個點 P_n 給獵人。對獵人而言，裝置只保證 P_n 與 A_n 之間的距離至多為 1。
> （3）獵人會在可被看到的情況下移動到一個點 B_n，使得 B_{n-1} 與 B_n 之間的距離恰為 1。
> 試問是否無論兔子如何移動，且無論裝置回報的點為何，獵人總是可以適當的選取她的移動，使得她可以保證在經過 10^9 個回合後，她和兔子之間的距離至多為 100？

在題目中兔子能隱形，獵人卻會被看見的不對等條件下，獵人只能依賴追蹤器追捕兔子，我們十分好奇這個追蹤器好不好用、夠不夠用？而原題進行十億回合的追捕行動內，能否達成人、兔距離至多為 100 的保證，足以想見這項獵兔行動的難度，因此我們有了增加獵人人數及兔子只能部分回合隱形，是否有助於獵兔行動的發想，這樣追捕行動的回合數與人兔距離又有何種變化關係呢？於是在老師的協助下，好奇的我們開始著手研究這道題目，展開我們的獵兔行動。

貳、研究目的

一、探討獵人在運氣最差的情況下，與兔子的距離關係，並得出原題目的解。

二、分別探討獵人數目為 2、3 和 4 個時，與 1 隻兔子的距離關係。

三、找出追蹤器是否有對獵人有利的最佳位置。

四、以 2 位獵人追捕 1 隻兔子為原則修改此題目。

五、探討兔子只在部分回合隱形與獵人的距離關係。

參、研究設備及器材

一、數學分析工具

(一)基本：紙、筆、電腦

(二)軟體：GeoGebra 動態數學軟體，如圖 3-1。

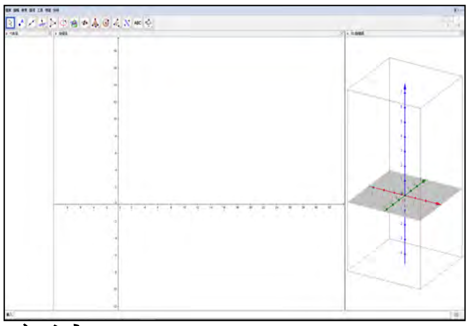
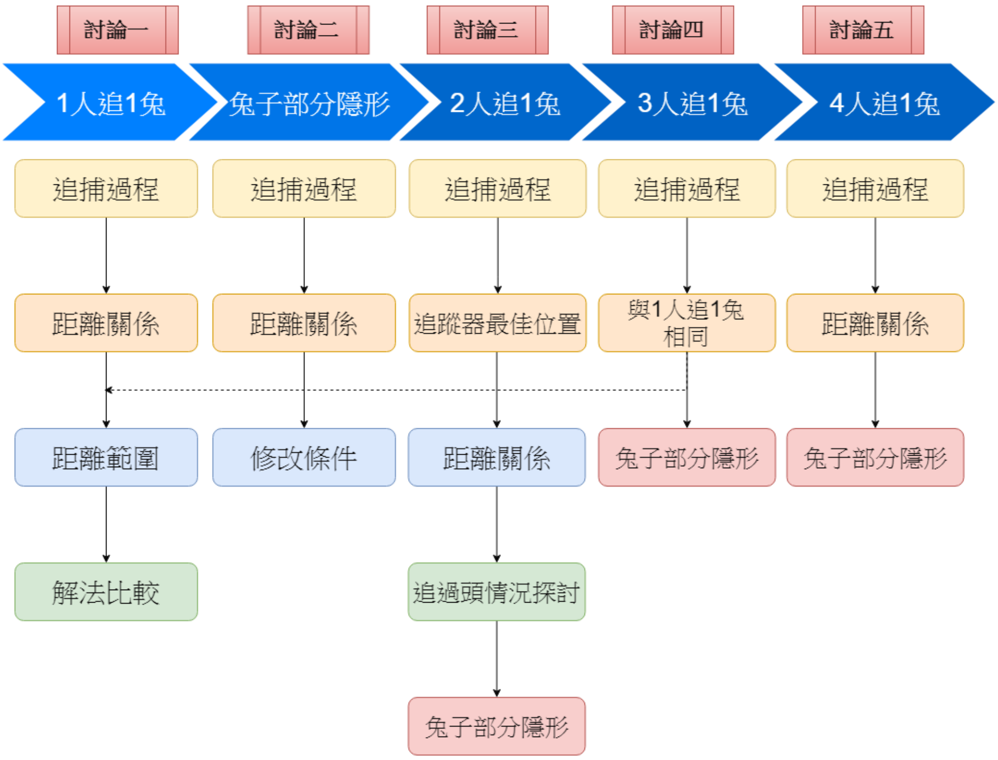


圖 3-1

肆、研究過程或方法

一、研究流程圖：



二、自訂名詞解釋：

(一) 運氣最差 ： 追蹤器回報的點會使獵人離兔子最遠的狀況。

(二) 包抄：當有 2 個獵人以 x 軸為對稱追趕兔子時，使得兔子只能往 x 軸跑的狀況。

(三) 追過頭：指當追蹤器給出一個點後，獵人和追蹤器所報的點距離小於 1，導致獵人有可能會超過所標示的點，稱為追過頭。

圖 4-1 是在說明當追蹤器回報的點和獵人的距離關係時，獵人追過頭和沒追過頭的示意圖。

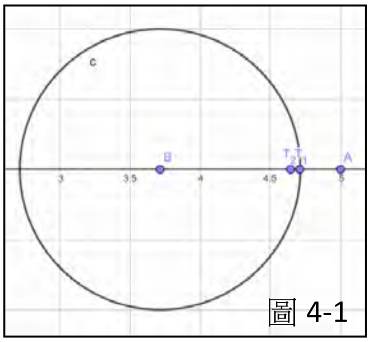


圖 4-1

A=兔子，T_1、T_2=追蹤器所回報的點，B=獵人

圓 c 為以 B 為圓心畫出的單位圓

(1)追過頭：追蹤器所回報的點為 T_2 或更靠近 B 點

(2)沒追過頭：追蹤器所回報的點為 T_1 或更靠近 A 點

(四)謹慎：指兔子即使在兩個獵人幾乎重合的情況下，也執意將兩個獵人視為不同的點，以包抄方式脫逃。

(五)明智：指兔子在兩個獵人幾乎重合的情況下，將兩個獵人視為同一點，以運氣最差的方式脫逃。

三、自訂圖示方式解釋：

本研究圖示代號以 A 為兔子，B、C、D、E 分別為第 1、2、3、4 個獵人，T 為追蹤器，X 為兔子和獵人的距離。

四、原題目分析與討論：

討論一　1 個獵人追捕 1 隻兔子：

(一)　我們為兔子想出最好的策略，即是追蹤器回報的點會使獵人離兔子最遠的狀況下。我們將它稱為獵人「運氣最差」的情況，步驟如下：

1. 第一回合開始，兔子向隨機方向移動 1 單位，如圖 4-2。
2. 追蹤器回報原點給獵人。
3. 獵人往兔子的反方向移動 1 單位，第一回合結束。
4. 第 n 回合開始，兔子往獵人的反方向移動 1 單位。
5. 畫出以兔子為圓心，1 單位長為半徑的圓，如圖 4-3。

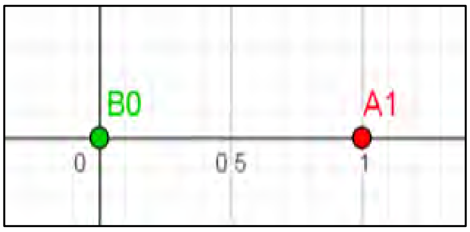


圖 4-2

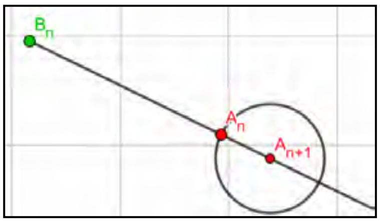


圖 4-3

6. 畫出一直線通過獵人，並與步驟 5 的圓相切，此切點為追蹤器在第二回合回報給獵人的位置，如圖 4-4。
7. 獵人往追蹤器方向移動 1 單位，第二回合結束，如圖 4-5。

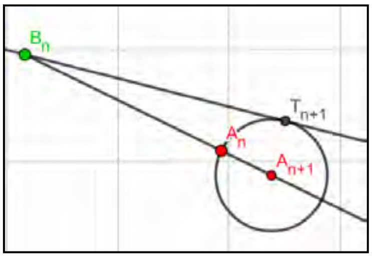


圖 4-4

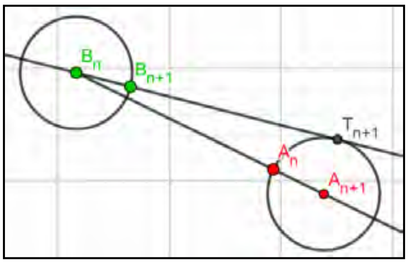


圖 4-5

8. 重複步驟 4~7(雖切點有二種選擇，但追蹤器回報的位置方向不會影響結果)。然而 10^9 是一個頗龐大的數字，不可能利用 GGB 得出結果，因此我們決定找出兔子與獵人的距離關係公式。

(二)距離公式探討：

1 個獵人追捕 1 隻兔子時，兔子與獵人第 n 回合與第 n+1 回合的距離關係：

$x_{n+1}=\sqrt{{x_n}^2+2x_n+2-2\sqrt{{x_n}^2+2x_n}}$，距離將會逐漸遞增。

推導如下：

x_n=第 n 回合兔子和獵人的距離，A 為兔子，B 為獵人，T 為追蹤器

其中$\overline{B_{n+1}C}\perp\overline{B_nC}$，$\overline{A_{n+1}T_{n+1}}\perp\overline{B_nT_{n+1}}$

設 $\overline{B_nA_n}=x_n$

$\Rightarrow\overline{B_nT_{n+1}}=\sqrt{(x_n+1)^2-1^2}=\sqrt{{x_n}^2+2x_n}$

$\because\angle B_{n+1}B_nC$共用$,\angle B_nCB_{n+1}=\angle B_n=90°$

$\therefore\triangle B_nCB_{n+1}\sim\triangle B_nT_{n+1}A_{n+1}(AA)$

$\Rightarrow\overline{B_nB_{n+1}}:\overline{B_nC}:\overline{B_{n+1}C}$

$=\overline{B_nA_{n+1}}:\overline{B_nT_{n+1}}:\overline{A_{n+1}T_{n+1}}$

$=(x_n+1):\sqrt{{x_n}^2+2x_n}:1$

$\because\overline{B_nB_{n+1}}=1,$

$\therefore\overline{B_nC}=\dfrac{\sqrt{{x_n}^2+2x_n}}{x_n+1},\overline{B_{n+1}C}=\dfrac{1}{x_n+1}$

則 $\overline{CA_{n+1}}=\overline{B_nA_{n+1}}-\overline{B_nC}=x_n+1-\frac{\sqrt{{x_n}^2+2x_n}}{x_n+1}$

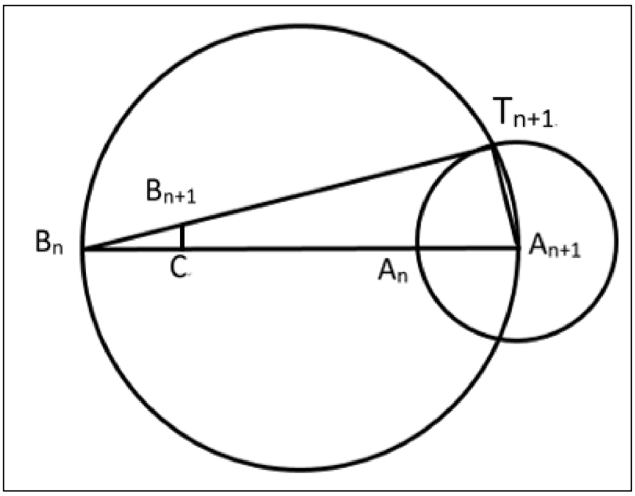


圖 4-6

$\overline{B_{n+1}A_{n+1}}=\sqrt{\overline{B_{n+1}C}^2+\overline{CA_{n+1}}^2}$

$$=\sqrt{\frac{1}{(x_n+1)^2}+(x_n+1)^2+\frac{{x_n}^2+2x_n}{(x_n+1)^2}-2\times\frac{\sqrt{{x_n}^2+2x_n}}{x_n+1}\times(x_n+1)}$$

$= \sqrt{{x_n}^2 + 2x_n + 2 - 2\sqrt{{x_n}^2 + 2x_n}}$

$x_{n+1} = \sqrt{{x_n}^2 + 2x_n + 2 - 2\sqrt{{x_n}^2 + 2x_n}} = \sqrt{{x_n}^2 + 2(x_n + 1 - \sqrt{{x_n}^2 + 2x_n})}$

${x_{n+1}}^2 = {x_n}^2 + 2(x_n + 1 - \sqrt{{x_n}^2 + 2x_n})$

$\because {x_n}^2 + 2x_n + 1 > {x_n}^2 + 2x_n (x_n \in \mathcal{R} > 0)$，$\therefore x_n + 1 > \sqrt{{x_n}^2 + 2x_n}$

$\Rightarrow {x_{n+1}}^2 - {x_n}^2 = 2\left(x_n + 1 - \sqrt{{x_n}^2 + 2x_n}\right) > 0$，$\Rightarrow (x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n) > 0$

又$\because x_{n+1} + x_n > 0$，$\therefore x_{n+1} - x_n > 0$，$x_{n+1} > x_n$

(三) 應用公式得出第 10^9 回合獵人與兔子的距離範圍

推論過程:

第 10^9 回合獵人與兔子的距離範圍: $2 < x_{10^9} < 44721.359723564736976$

$\because x_{n+1} = \sqrt{{x_n}^2 + 2x_n + 2 - 2\sqrt{{x_n}^2 + 2x_n}}$

${x_2}^2 = {x_1}^2 + 2x_1 + 2 - 2\sqrt{{x_1}^2 + 2x_1}$

${x_3}^2 = {x_2}^2 + 2x_2 + 2 - 2\sqrt{{x_2}^2 + 2x_2}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\vdots \qquad \vdots$

${x_{10^9}}^2 = {x_{10^9-1}}^2 + 2x_{10^9-1} + 2 - 2\sqrt{{x_{10^9-1}}^2 + 2x_{10^9-1}}$

$\therefore {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots + {x_{10^9}}^2$

$= {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{10^9-1}}^2 + 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10^9-1}) + 2 \cdot (10^9 - 1)$

$-2(\sqrt{{x_1}^2 + 2x_1} + \sqrt{{x_2}^2 + 2x_2} + \cdots + \sqrt{{x_{10^9-1}}^2 + 2x_{10^9-1}})$

$\Rightarrow {x_{10^9}}^2 = {x_1}^2 + 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10^9-1}) - 2(\sqrt{{x_1}^2 + 2x_1} + \sqrt{{x_2}^2 + 2x_2} + \cdots$

$+ \sqrt{{x_{10^9-1}}^2 + 2x_{10^9-1}}) + 2 \cdot 10^9 - 2$

$\because x_1 = 2$

$\therefore = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10^9-1}) - 2\left(\sqrt{{x_1}^2 + 2x_1} + \cdots + \sqrt{{x_{10^9-1}}^2 + 2x_{10^9-1}}\right) + 2 \cdot 10^9 + 2$

$\because x^2 + 2x + 1 > x^2 + 2x (x \in \mathcal{R} > 0)$

$x + 1 > \sqrt{x^2 + 2x}$，$x - \sqrt{x^2 + 2x} > -1$

$x_1 - \sqrt{{x_1}^2 + 2x_1} > -1$

$x_2 - \sqrt{{x_2}^2 + 2x_2} > -1$

$\vdots \qquad \vdots$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$x_{10^9-1}-\sqrt{{x_{10^9-1}}^2+2x_{10^9-1}}>-1$

$\therefore (x_1+x_2+\cdots+x_{10^9-1})-\left(\sqrt{{x_1}^2+2x_1}+\cdots+\sqrt{{x_{10^9-1}}^2+2x_{10^9-1}}\right)>-10^9+1$

${x_{10^9}}^2>2\times(-10^9+1)+2\cdot 10^9+2=4\Rightarrow {x_{10^9}}^2>4$

又$\because x^2<x^2+2x(x\in\mathcal{R}>0)$

$x<\sqrt{x^2+2x}$，$x-\sqrt{x^2+2x}<0$

$x_1-\sqrt{{x_1}^2+2x_1}<0$

$x_2-\sqrt{{x_2}^2+2x_2}<0$

$\vdots \qquad \vdots$

$\vdots \qquad \vdots$

$x_{10^9-1}-\sqrt{{x_{10^9-1}}^2+2x_{10^9-1}}<0$

$\therefore (x_1+x_2+\cdots+x_{10^9-1})-\left(\sqrt{{x_1}^2+2x_1}+\sqrt{{x_2}^2+2x_2}+\cdots+\sqrt{{x_{10^9-1}}^2+2x_{10^9-1}}\right)<0$

$\Rightarrow {x_{10^9}}^2<2\times 0+2\times 10^9+2$

綜合上述，$4<{x_{10^9}}^2<2000000002$

$2<x_{10^9}<44721.359723564736976$

由此可知，第 10^9 回合獵人與兔子的距離有可能會小於 100，也可能遠超過 100，因此無法保證能滿足題意。

(四)其他的解法：

我們在網路上查詢到對這個題目的解法資料如下:

在某個回合結束後，設兔子和獵人的距離為 d(d≥1)，那麼，不論獵人如何移動，兔子在[2d]+1 回合後，可能和獵人的距離至少是 $\sqrt{d^2+\frac{1}{2}}$

推導如下：

如下圖 4-7，假設此時兔子和獵人分別在點 R 和 H 上且$\overline{RH}$=d，令 k=[2d]+1，取關於直線 HR 對稱的兩點 A，B，使得三角形 RAB 是等腰三角形，$\overline{RA}$=$\overline{RB}$=k，AB=2，並且$\overline{HR}$的延長線交線段$\overline{AB}$於 M，易知 M 是線段 AB 的中點，$\overline{RM}$= $\sqrt{k^2-1}$

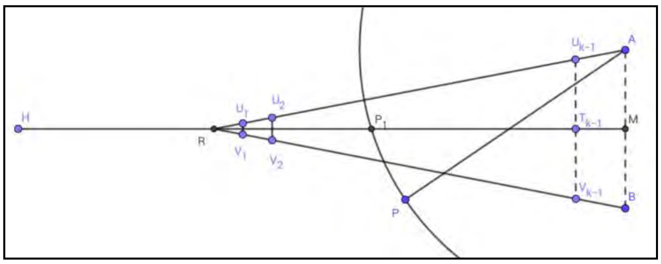


圖 4-7

設 U_1，U_2，…，U_{k-1};V_1，V_2，…，V_{k-1};T_1，T_2，…，T_{k-1} 分別是線段 RA，RB，RM 的 k 等分點，鑑於$\overline{RA}=\overline{RB}=k$，在接下來的 k 個回合，兔子可以從 R 出發，沿著$\overline{RA}$依次路過 U_1，U_2，…，U_{k-1} 到達 A 或者沿著 RB 依次路過;V_1，V_2，…，V_{k-1} 到達 B.當兔子停留 U_i 或者 V_i 之時，定位設備向獵人回報點是 T_i，因為 $U_iT_i=V_iT_i\le 1$ 說明把 T_i 作為回報點是允許的，i=1，2，…，k -1。

兔子到達 A 或者 B 之時，定位設備向獵人回報點是 M，此時，獵人行動來到點 P，然而，獵人不能保證自己與兔子在直線$\overline{HM}$的同一側，如果獵人與兔子在直線$\overline{HM}$的兩側，比如兔子在 A，而獵人在直線$\overline{HM}$的下方(包括獵人在直線$\overline{HM}$上)，那麼，注意到 $d<\frac{k}{2}$

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 \ge \overline{P_1A}^2 &= 1+[\sqrt{k^2-1}-(k-d)]^2\\ &= d^2+2(k-d)(k-\sqrt{k^2-1})\\ &= d^2+\frac{2(k-d)}{k+\sqrt{k^2-1}}\\ &> d^2+\frac{2\left(k-\frac{k}{2}\right)}{k+k}\\ &= d^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

在 $d\le 100$ 時，兔子至多只要$[2d]+1\le 201$ 回合，就有可能使得和獵人的距離的平方增加至少$\frac{1}{2}$，於是，兔子在 $201\times 2\times 100^2<10^9$ 回合之後，可能使得和獵人的距離達到 100。

(五)小結: 其方式與我們的解法不同，但是結論是一致的：

獵人不能保證經過 10^9 回合後，他和兔子的距離至多是 100。

另外我們又有了想法：獵人追不到兔子，有部分是因為兔子行蹤的不確定造成的，如果讓兔子部分回合現身，是否可以讓獵人更有利？因此我們探討了兔子部分回合隱形，部分回合出現的情況。

討論二 兔子部分回合隱形，部分回合出現的情況

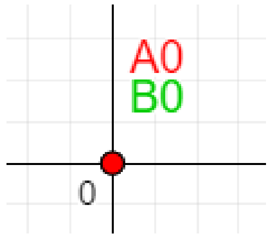
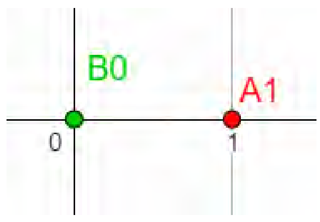
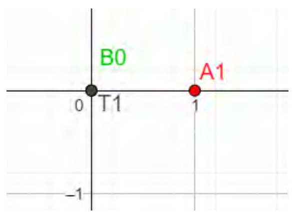
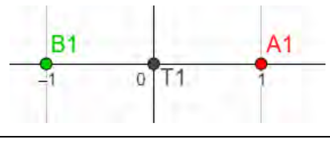
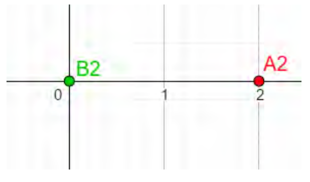
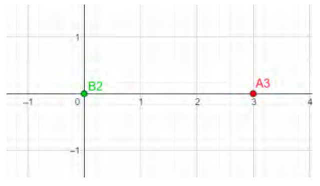
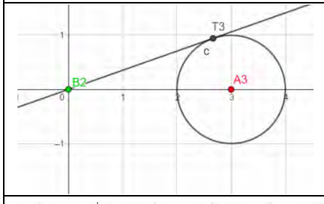
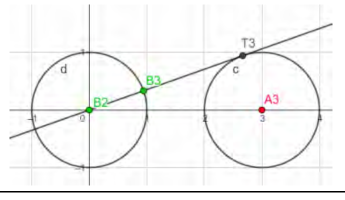
一開始，我們討論兔子一回合隱形，一回合出現的情況。這時可以分為兩種情況:

(1) 奇數回合隱形，偶數回合出現

(2) 奇數回合出現，偶數回合隱形

但後者在第一回合結束時獵人跟兔子仍舊重合，其餘與另一種情況相同，只是相差了一個回合。因此我們決定只討論奇數回合隱形，偶數回合出現的情形。另外兔子出現時我們將設定成追蹤器不起作用。

(一) 在 GGB 上模擬運氣最差的情況

一開始		一開始兔子和獵人都在原點
第一回合		(1)第一回合開始，兔子往任意方向移動 1 單位
		(2)追蹤器標定在原點
		(3)獵人往反方向移動 1 單位，第一回合結束
第二回合		(4)第二回合開始，兔子往相同方向移動 1 單位
		(5)此時獵人看得到兔子，所以獵人往兔子方向移動 1 單位，第二回合結束
第三回合		(6)第三回合開始，兔子往相同方向移動 1 單位
		(7)在獵人運氣最差的情況下，追蹤器會回報切點給獵人
		(8)獵人往追蹤器方向移動 1 單位，第三回合結束。

其餘回合以此類推。

1~10 回合距離整理(如圖 4-8)：

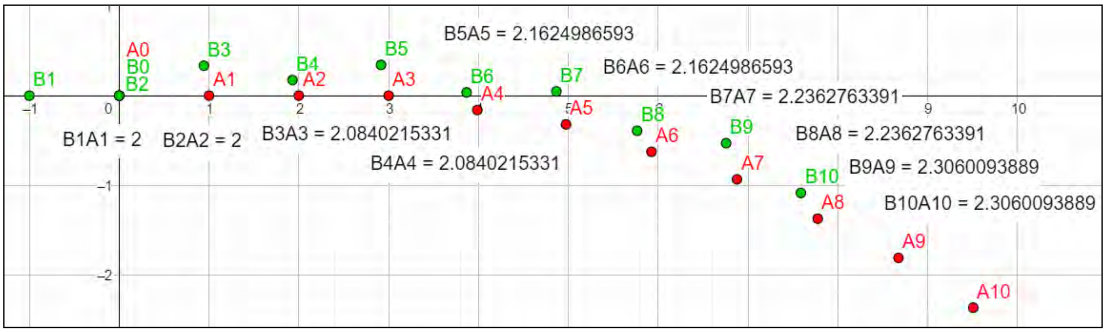


圖 4-8

代入一個獵人追捕一隻兔子的公式計算，發現此時第 n 與第 n+2 回合的距離關係與原先兔子完全隱形時，第 n 回合與 n+1 回合的距離關係相同。

(一) 兔子出現時的距離關係公式探討

1.兔子出現的任一回合，獵人和兔子移動前和移動後距離不變。 2.一個獵人追捕一隻兔子時，只要兔子至少隱形一回合，獵人就無法與兔子重合。

推導過程:

圖 4-9

設獵人和兔子在第 n 回合結束後，分別位於A_n和B_n的位置，此時$\overline{A_nB_n} = x_n$。

之後第 n+1 回合開始，兔子首先往獵人反方向移動 1 單位到達A_{n+1}的位置，之後因為獵人看得到兔子，因此獵人將會往同方向移動一單位。

易知$x_{n+1} = \overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \overline{A_nB_n} - 1 + 1 = x_n$。

又因為在獵人運氣最差的情況下，一個獵人追捕一隻兔子時距離將會逐漸遞增，因此我們可以得知：當只有一個獵人時，無論兔子出現多少回合，只要其中至少一回合兔子是在隱形的狀態下，在該回合後獵人與兔子的距離將不小於 2，之後的回合距離可能不改變或是逐漸遞增。所以只有一個獵人時，只要兔子至少隱形一回合，獵人就不會和兔子重合。

但原題目的要求只需在經過 10^9 回合後，和兔子之間的距離至多為 100，因此我們決定修改條件，讓兔子部分回合隱形，部分回合出現時能達成要求。

(二) 修改條件以達成題意

在 10^9 回合中，若兔子隱形的回合數不超過 4999，則可以達成原題要求。

推導過程:

設隱形 k 回合可達成題意($k \in N$)

於討論一中，我們曾經推導出$x_{10^9}{}^2 < 2\times 0 + 2\times 10^9 + 2$，又因兔子出現時該回合距離不變，同理可列式如下:

$x_k{}^2 < 2\times 0 + 2\times k + 2 \leq 100^2$

$\Rightarrow 2k + 2 \leq 10000$

$\Rightarrow 2k \leq 9998$

$\Rightarrow k \leq 4999$

$\therefore k_{max} = 4999 (\because k \in N)$

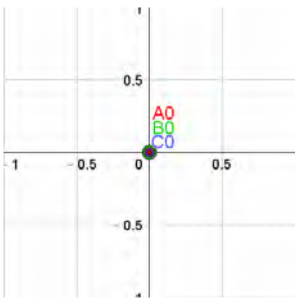
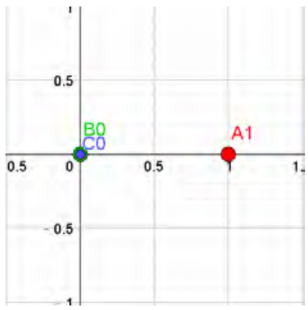
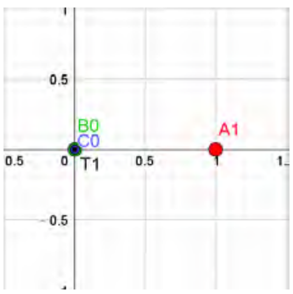
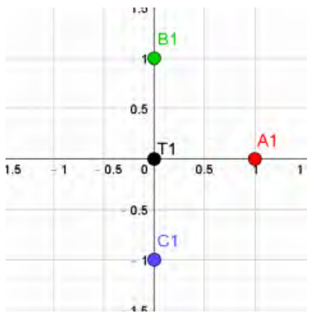
因此可知在 10^9 回合中，兔子若隱形的回合數不超過 4999，則可以達成原題要求。

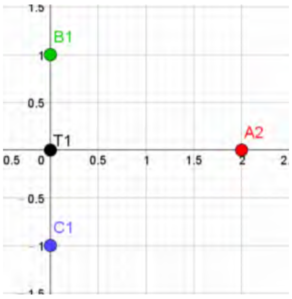
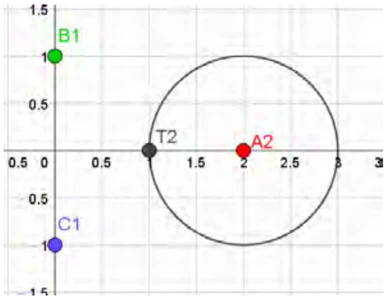
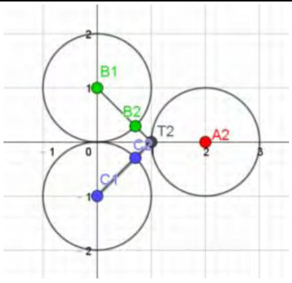
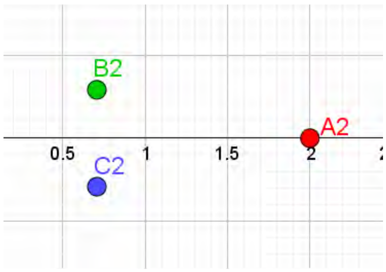
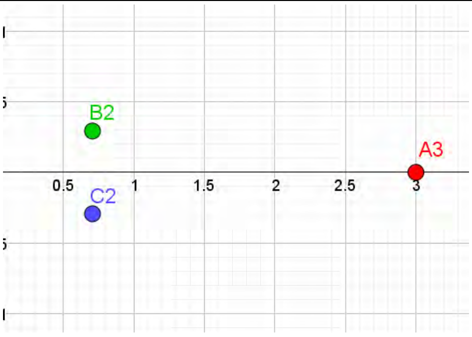
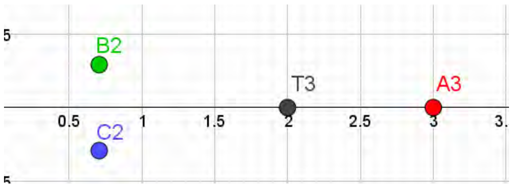
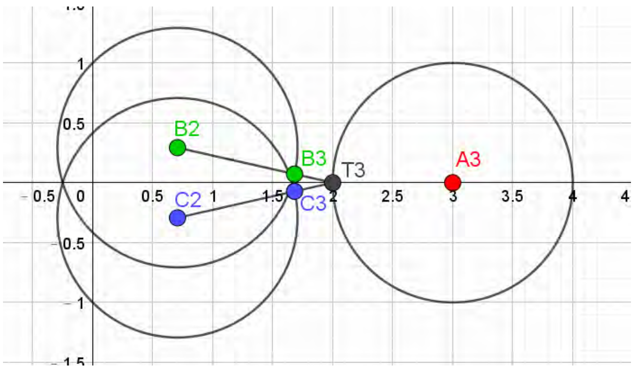
這時我們又想到：如果一個獵人抓不到兔子，那麼增加獵人數目是否有所助益？同時我們也查詢到網路上相關資料，發現有人宣稱：不論有多少獵人，都不能保證他和兔子的距離保持在一定值內，但並沒有提出相關證明。因此我們開始探討增加獵人數目對獵兔行動的各種情況。

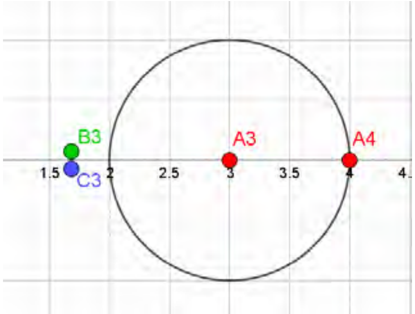
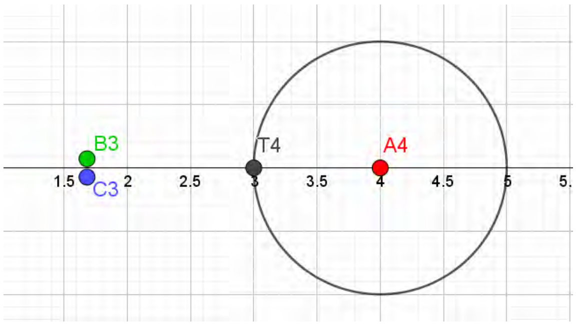
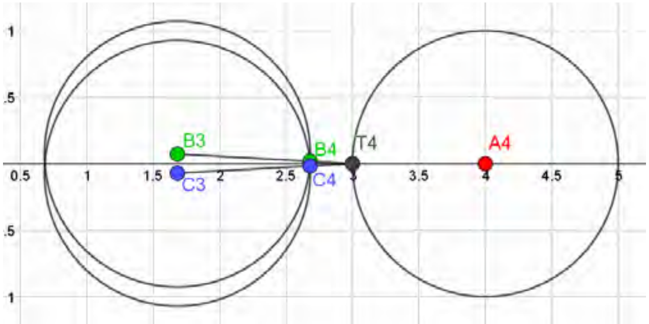
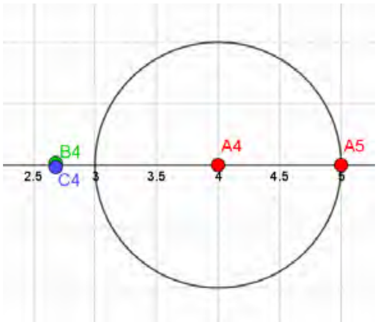
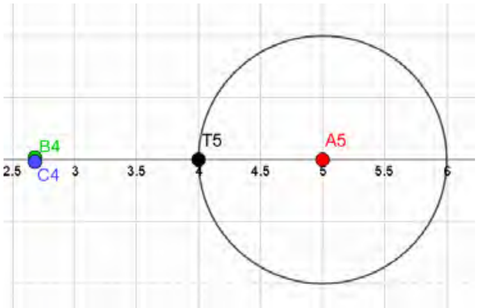
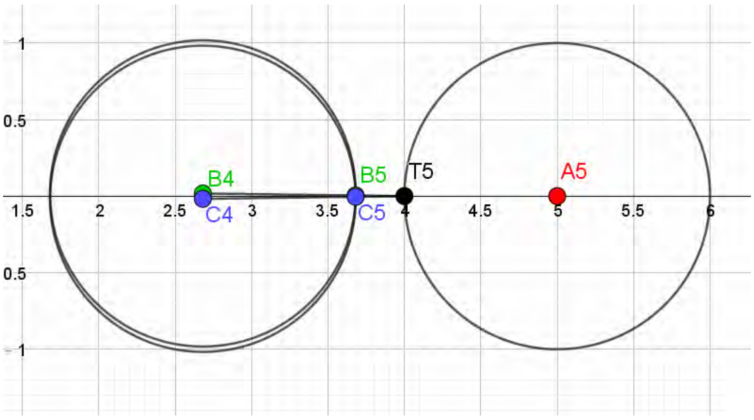
討論三　增加獵人數目的情況

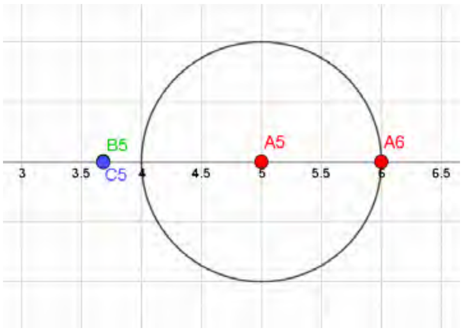
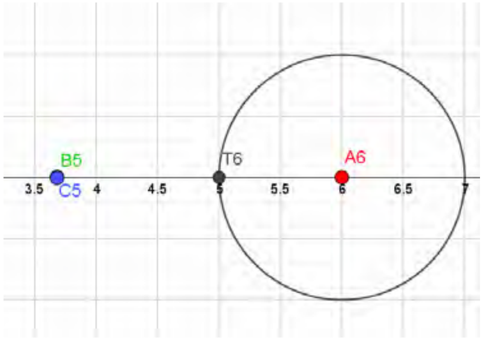
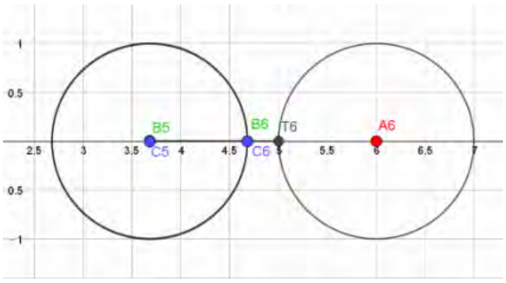
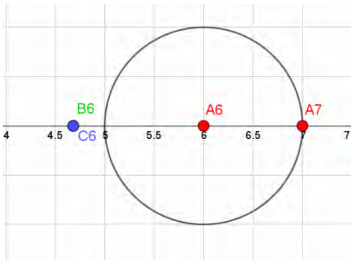
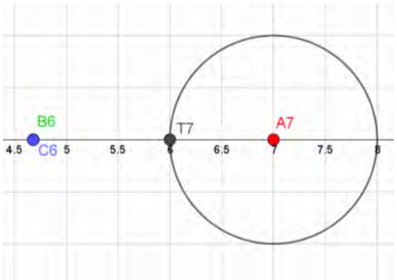
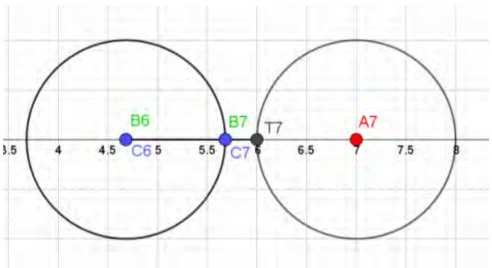
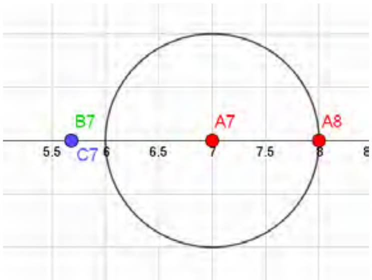
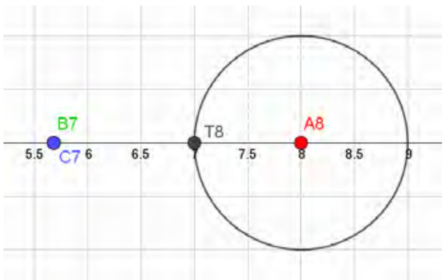
(一)2 個獵人追捕 1 隻兔子

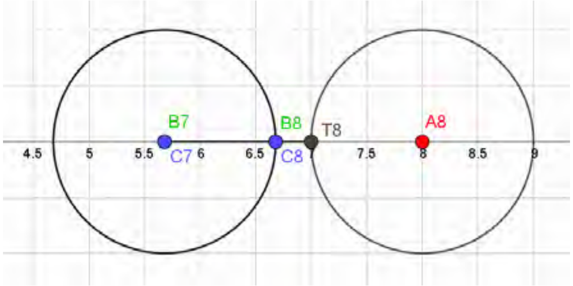
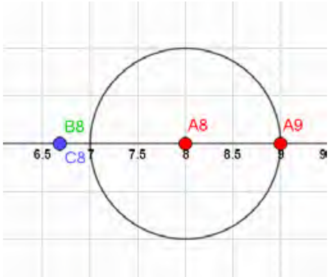
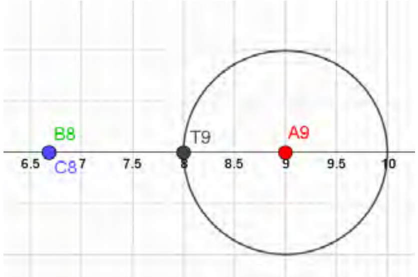
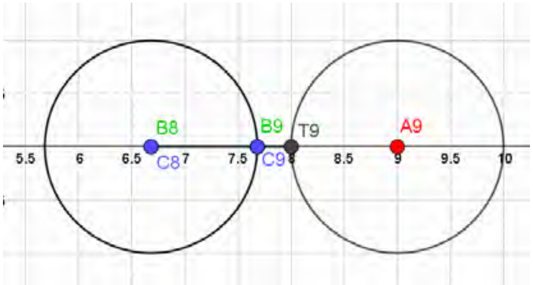
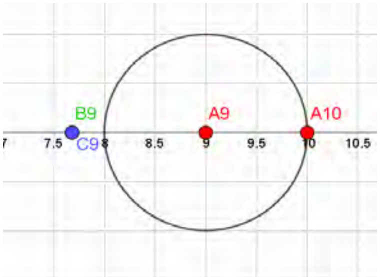
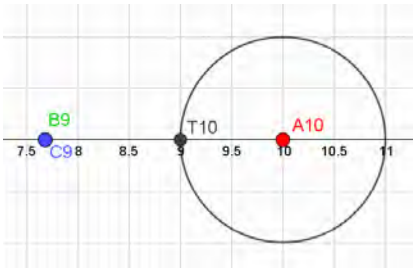
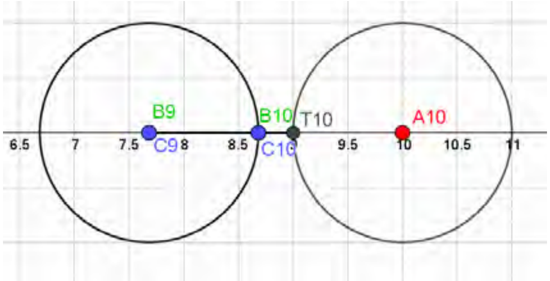
以下在 GGB 上模擬說明運氣最差的情況(A 為兔子，B、C 為獵人，T 為追蹤器)

<table>
<tr><td rowspan="4">第一回合</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(1)兔子和 2 個獵人都位於原點</td><td>(2)兔子移動 1 單位</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(3)追蹤器向 2 個獵人回報原點</td><td>(4) 2 個獵人反向移動 1 單位</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">第
二
回
合</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(5)兔子往 2 個獵人位置連線的垂直方向移動 1 單位到 A2 點</td><td>(6)追蹤器向 2 個獵人回報 T2 點</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(7) 2 個獵人向追蹤器方向移動 1 單位，第二回合結束</td><td>(8)第二回合結束後 2 個獵人與兔子的位置</td></tr>
<tr><td rowspan="4">第
三
回
合</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(9) 兔子往 2 個獵人位置連線的垂直方向移動 1 單位到 A3 點</td><td>(10) 追蹤器向 2 個獵人回報 T3 點</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">(11) 2 個獵人向追蹤器方向移動 1 單位，第三回合結束</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">第
四
回
合</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(12) 兔子往 2 個獵人位置連線的垂直方向移動 1 單位到 A4 點</td><td>(13)追蹤器向 2 個獵人回報 T4 點</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">(14) 2 個獵人向追蹤器方向移動 1 單位，第四回合結束</td></tr>
<tr><td rowspan="4">第
五
回
合</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(15) 兔子往 2 個獵人位置連線的垂直方向移動 1 單位到 A5 點</td><td>(16)追蹤器向 2 個獵人回報 T5 點</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">(17) 2 個獵人向追蹤器方向移動 1 單位，第五回合結束</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">第
六
回
合</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(18)兔子往 2 個獵人位置連線的垂直方向移動 1 單位到 A6 點</td><td>(19)追蹤器向 2 個獵人回報 T6 點</td></tr>
<tr><td></td><td>(20) 2 個獵人向追蹤器方向移動 1 單位，第六回合結束</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第
七
回
合</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(21) 兔子往 2 個獵人位置連線的垂直方向移動 1 單位到 A7 點</td><td>(22)追蹤器向 2 個獵人回報 T7 點</td></tr>
<tr><td></td><td>(23) 2 個獵人向追蹤器方向移動 1 單位，第七回合結束</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第
八
回
合</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(24)兔子往 2 個獵人位置連線的垂直方向移動 1 單位到 A8 點</td><td>(25)追蹤器向 2 個獵人回報 T8 點</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>第八回合</td><td>
</td><td>(26)2 個獵人向追蹤器方向移動 1 單位，第八回合結束</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第九回合</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(27) 兔子往 2 個獵人位置連線的垂直方向移動 1 單位到 A9 點</td><td>(28)追蹤器向 2 個獵人回報 T9 點</td></tr>
<tr><td>
</td><td>(29)2 個獵人向追蹤器方向移動 1 單位，第九回合結束</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第十回合</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(30) 兔子往 2 個獵人位置連線的垂直方向移動 1 單位到 A10 點</td><td>(31)追蹤器向 2 個獵人回報 T10 點</td></tr>
<tr><td>
</td><td>(32) 2 個獵人向追蹤器方向移動 1 單位，第十回合結束</td></tr>
</table>

接下來的回合以此類推。

(二) 追蹤器的最佳位置探討

在第二回合時，我們對於追蹤器的最佳位置有了爭論，因此我們決定利用 GGB 軟體求證。

結果: 以兔子為圓心，半徑為 1 畫圓，此圓交 x 軸於點 D、E，其中 D 點離獵人較近。
T2 在 D 點時對兔子最有利。(如圖 4-10)

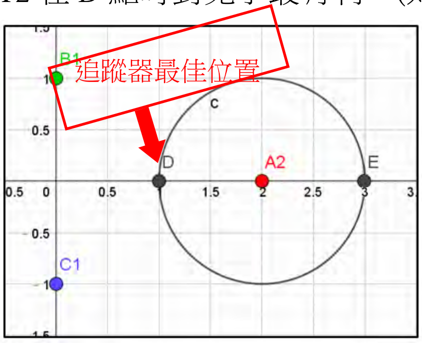


圖 4-10

說明：

以兔子為圓心，半徑為 1 畫圓，若追蹤器偏向任一個獵人，則該獵人會較靠近兔子，該情況對兔子不利。因此對兔子最有利的追蹤器位置可能為 D 點或 E 點的位置。(如圖 4-10)

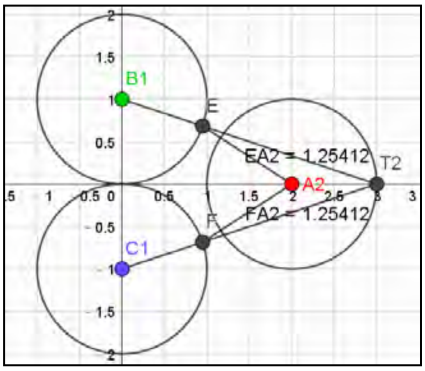


圖 4-11

① T2 在 D 點的位置

由圖 4-11 可知，此時 2 個獵人和兔子的距離約為 1.32565

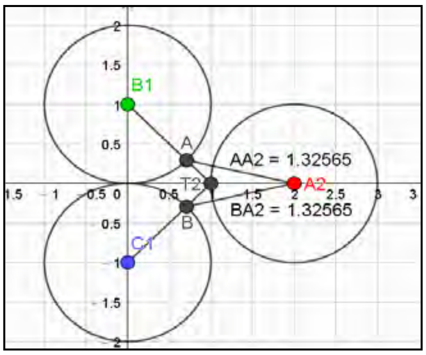


圖 4-12

② T2 在 E 點的位置

由圖 4-12 可知，此時 2 個獵人和兔子的距離約為 1.25412

$\because 1.32565 > 1.25412$

故 T2 在 D 點時對兔子最有利。

整理第 1~12 回合獵人與兔子的距離(如圖 4-13、4-14)並繪製趨勢圖(如圖 4-15)：

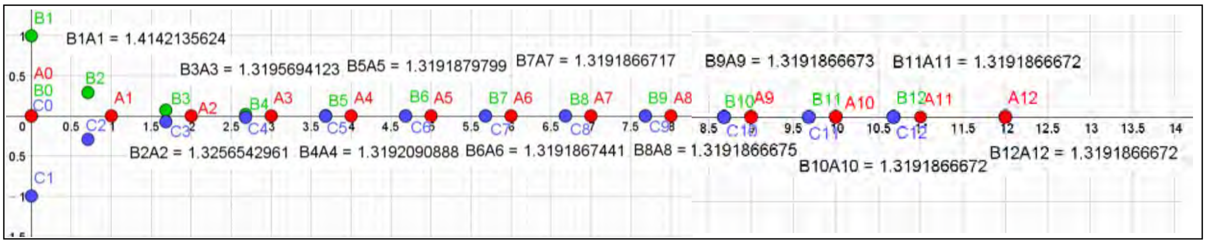


圖 4-13

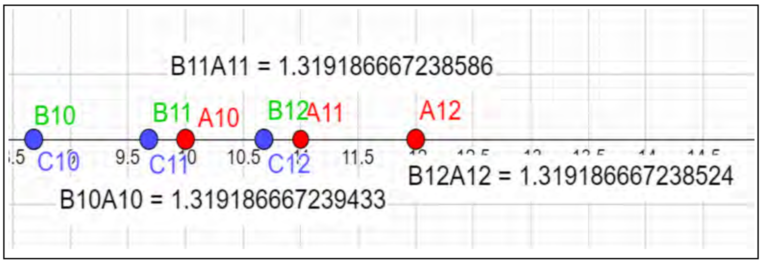


圖 4-14

由圖 4-13 可知，獵人與兔子的距離逐漸變小(第 10、11、12 回合的距離在 15 位小數時有些微差距，如圖 4-14)，在第 12 回合時為 1.3191866672

(因兩個獵人分別是對方關於 x 軸的對稱點，故兩個獵人與兔子間的距離相同)

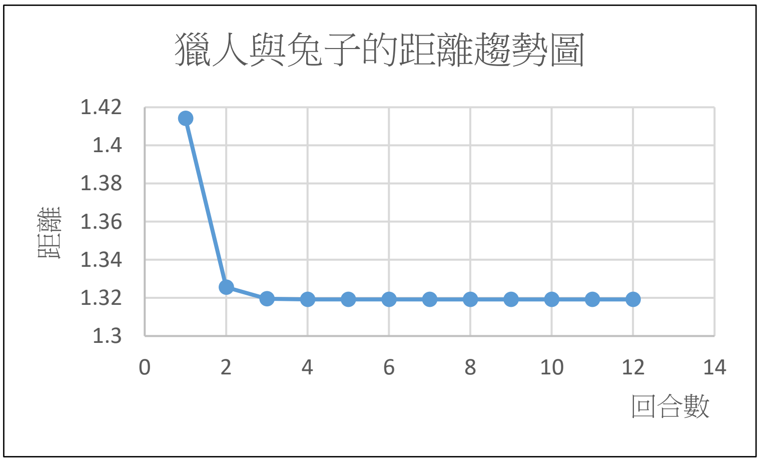


圖 4-15

觀察可發現獵人與兔子的距離已經開始趨於穩定，因此我們開始尋找是否有其距離公式。

2 個獵人時，獵人和兔子的距離$x_n = \sqrt{{x_{n-1}}^2 - 2x_{n-1} - \frac{2b_{n-1}}{x_{n-1}} + 2b_{n-1} + 2}$

(三) 距離關係公式探討

推導如下:

令$x = \sqrt{a^2 + b^2}$

a=兔子和獵人距離的垂直分量

b=兔子和獵人距離的水平分量

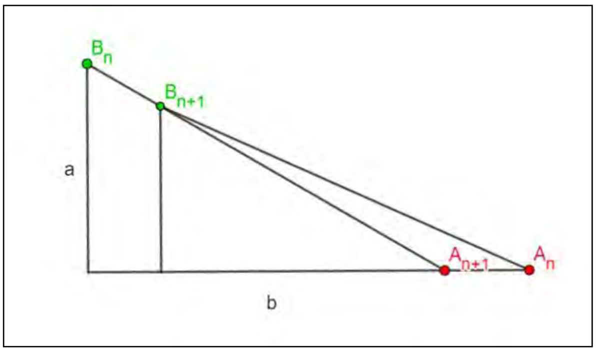


圖 4-16

B 為獵人，A 為兔子，T 為追蹤器

$$x^2 = \left(a - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + 1\right)^2$$

$$= a^2 - \frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a^2}{a^2+b^2} + b^2 + \frac{b^2}{a^2+b^2} + 1 - \frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2b$$

$$= a^2 + b^2 - \frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} - \frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2b + 1$$

$$= a^2 + b^2 - \frac{2a^2+2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} - \frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2b + 1$$

$$= x^2 - \frac{2x^2}{x} + 1 - \frac{2b}{x} + 2b + 1$$

$$= x^2 - 2x - \frac{2b}{x} + 2b + 2$$

當獵人與兔子進行「包抄」時

$$\Rightarrow \text{距離} x_n = \sqrt{{x_{n-1}}^2 - 2x_{n-1} - \frac{2b_{n-1}}{x_{n-1}} + 2b_{n-1} + 2}$$

x_{n-1} = 上回合的距離

n = 回合數

b_{n-1} = 上回合的水平距離

(此公式可以在兩個獵人的狀態下用上回合的距離、回合數和上回合距離的水平分量推知下一回合的距離)

在還沒追過頭的情況下，$x_{n-1} > x_n$，因此距離會逐漸遞減

推導:

$$x_n = \sqrt{{x_{n-1}}^2 - 2x_{n-1} - \frac{2b_{n-1}}{x_{n-1}} + 2b_{n-1} + 2}$$

$$= \sqrt{{x_{n-1}}^2 - 2x_{n-1} + 2 + 2b_{n-1} - \frac{2b_{n-1}}{x_{n-1}}}$$

$$= \sqrt{{x_{n-1}}^2 - 2(x_{n-1} - 1) + \frac{2b_{n-1}}{x_{n-1}}(x_{n-1} - 1)}$$

$$= \sqrt{{x_{n-1}}^2 - 2(x_{n-1} - 1) + \frac{2b_{n-1}}{x_{n-1}}(x_{n-1} - 1)} = \sqrt{{x_{n-1}}^2 + \frac{2}{x_{n-1}} \cdot (b_{n-1} - x_{n-1})(x_{n-1} - 1)}$$

$\because \dfrac{2}{x_{n-1}} > 0$，$b_{n-1} - x_{n-1} < 0$(直角三角形斜邊 > 任一股)

且$x_{n-1} - 1 > 0$(在還沒追過頭的情況下)

$\therefore \dfrac{2}{x_{n-1}} \cdot (b_{n-1} - x_{n-1})(x_{n-1} - 1) < 0$

$\Rightarrow x_n = \sqrt{{x_{n-1}}^2 + k}(k \in R > 0)$

${x_n}^2 = {x_{n-1}}^2 + k$

${x_n}^2 - {x_{n-1}}^2 = k$

$(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = k$

$\because x_n + x_{n-1} > 0$ 且 $k > 0$

$\therefore x_n - x_{n-1} < 0$

$\Rightarrow x_{n-1} > x_n \Rightarrow$ 在還沒追過頭的情況下，距離將會逐漸遞減

然而因為距離會逐漸遞減，因此之後的距離在某一回合之後可能小於 1，造成獵人移動的距離超過他和追蹤器的距離，也就是追過頭的情況。於是我們開始著手這個情況的探討。

(四) 追過頭之後的情況探討

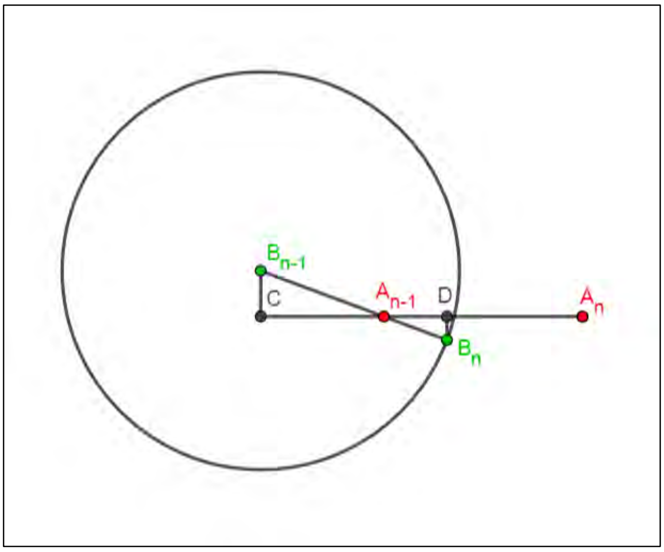


圖 4-17

1. 追過頭之後的策略探討

以 1 為圓心，$\overline{B_{n-1}B_n}$為半徑畫圓，則B_n必在此圓上，且他會選擇離$A_{n-1}(T_n)$最近的位置。延長$\overline{B_{n-1}A_{n-1}}$交圓$B_{n-1}$於$B_n$，$B_n$即為獵人第 n 回合的位置。(如圖 4-17)

2. 追過頭之後的距離關係

$x = \sqrt{a^2 + b^2}$

a=兔子和獵人距離的垂直分量

b=兔子和獵人距離的水平分量

$在\triangle B_nCA_n 和\triangle B_{n+1}DA_n 中，$

$\because \angle B_nA_nC = \angle B_{n+1}A_nD\left(對頂角\right)$，$\angle B_nCA_n = \angle B_{n+1}DA_n = 90°$

$\therefore \triangle B_nCA_n \sim \triangle B_{n+1}DA_n(AA)$

$$\Rightarrow \overline{A_nD} = b \times \frac{\overline{A_nB_{n+1}}}{\overline{B_nA_n}} = b \times \frac{1-x}{x} \text{ ，} \overline{B_{n+1}D} = a \times \frac{\overline{A_nB_{n+1}}}{\overline{B_nA_n}} = a \times \frac{1-x}{x}$$

$又\overline{A_nA_{n+1}} = 1$，$\therefore \overline{DA_{n+1}} = 1 - b \times \frac{1-x}{x}$

$$\overline{B_{n+1}A_{n+1}} = \sqrt{\overline{DA_{n+1}}^2 + \overline{B_{n+1}D}^2} = \sqrt{\left(1 - b \cdot \frac{1-x}{x}\right)^2 + \left(a \cdot \frac{1-x}{x}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2b \cdot \frac{1-x}{x} + b^2 \cdot \frac{1-2x+x^2}{x^2} + a^2 \cdot \frac{1-2x+x^2}{x^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2b}{x} + 2b + (a^2+b^2) \cdot \frac{1-2x+x^2}{x^2}} = \sqrt{1 - \frac{2b}{x} + 2b + x^2 \cdot \frac{1-2x+x^2}{x^2}}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2x + 2b - \frac{2b}{x} + 2} = \sqrt{x^2 + \frac{2}{x}(x-b)(1-x)}$$

$而\ \frac{2}{x} > 0$，$x > b\left(斜邊大於任一股\right)$，$1 > x\left(已追過頭\right)$

$$\therefore \overline{B_{n+1}A_{n+1}}^2 = x^2 + \frac{2}{x}(x-b)(1-x)$$

$$\overline{B_{n+1}A_{n+1}}^2 - \overline{B_nA_n}^2 = \frac{2}{x}(x-b)(1-x) > 0$$

$又\overline{B_{n+1}A_{n+1}} + \overline{B_nA_n} > 0$

$\therefore \overline{B_{n+1}A_{n+1}} - \overline{B_nA_n} > 0$，$\overline{B_{n+1}A_{n+1}} > \overline{B_nA_n}$

因在追過頭之前距離遞減；而追過頭之後距離遞增，因此距離會先減少到小於 1，再增加到大於 1，又減少到小於 1，如此循環下去。也就是說，若兔子是謹慎的，獵人與兔子的距離始終在 1 附近，所以能達成題目要求。

然而這樣的追法，使得第五回合兩個獵人幾乎重合，於是我們將兩個獵人視為同一個獵人，發現之後的模式會與一個獵人追捕一隻兔子相同，就是我們稱之為「明智」的做法。

從討論一中可以得知，距離將會逐漸遞增，又因${x_{10^9}}^2 < 2 \times 0 + 2 \times 10^9 + 2$

可列式: ${x_{10^9-5}}^2 < 2 \times 0 + 2 \times (10^9 - 5) + 2 = 1999999992$

0<x_{10^9-5} <44721.35946055307473874916623938 2，此時第 10^9 回合獵人與兔子的距離有可能會小於 100，也可能遠超過 100，因此無法保證能達成原題要求。

(五)兔子部分回合隱形，部分回合出現的情況

與討論二相同，我們先討論兔子一回合隱形，一回合出現的情況。

a=兔子和獵人距離的垂直分量

b=兔子和獵人距離的水平分量

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} + 1 = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$(畢氏定理)

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} - 1$

$\overline{A_nB_n} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\overline{A_nB_n} - \overline{A_{n+1}B_{n+1}}$

$= \sqrt{a^2 + b^2} - \left[\sqrt{a^2 + (b+1)^2} - 1\right]$

$= \sqrt{a^2 + b^2} + 1 - \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$

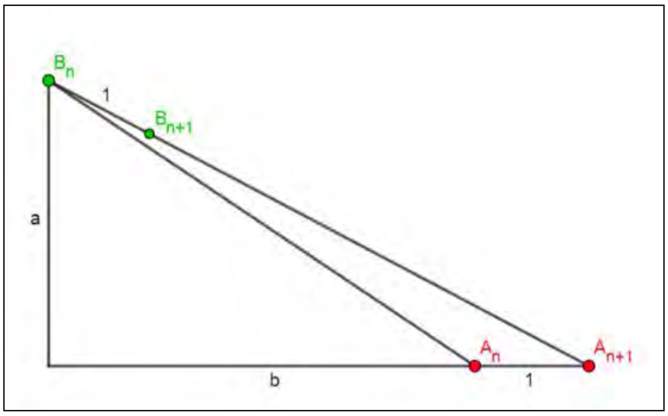


圖 4-18

$\left(\sqrt{a^2 + b^2} + 1\right)^2 - \left[\sqrt{a^2 + (b+1)^2}\right]^2$

$= a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} + 1 - a^2 - b^2 - 2b - 1$

$= 2\sqrt{a^2 + b^2} - 2b$

$= 2\left(\sqrt{a^2 + b^2} - b\right) > 0$

$\because \sqrt{a^2 + b^2} + 1 + \sqrt{a^2 + (b+1)^2} > 0$

$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} + 1 - \sqrt{a^2 + (b+1)^2} > 0$

$\Rightarrow \overline{A_nB_n} - \overline{A_{n+1}B_{n+1}} > 0$

$\Rightarrow \overline{A_nB_n} > \overline{A_{n+1}B_{n+1}}$

∴兩個獵人追一隻兔子時，在兔子出現的回合，距離會遞減；而在兔子隱形的任一回合，只要在追過頭之前，距離也會遞減。因此追過頭之前，在一回合隱形、一回合出現的情況下，距離會逐漸遞減。同理，此時在部分回合隱形，部分回合出現的情況下，距離會逐漸遞減。

整理第 1~10 回合獵人與兔子的距離(如圖 4-19)並繪製趨勢圖(如圖 4-20)：

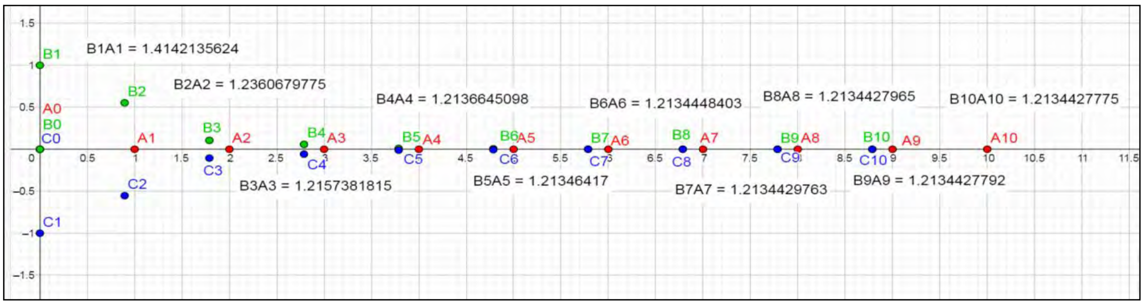


圖 4-19

兩個獵人追捕一隻兔子時，距離以十分緩慢的速率遞減，1~10 回合中無追過頭情況發生。

如圖 4-20，距離將會逐漸遞減

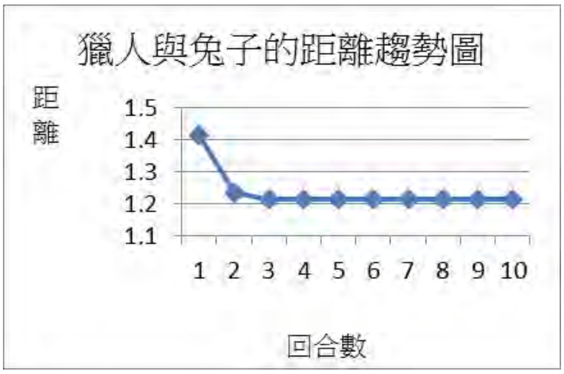
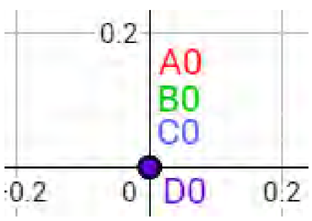
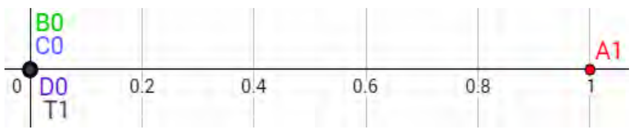
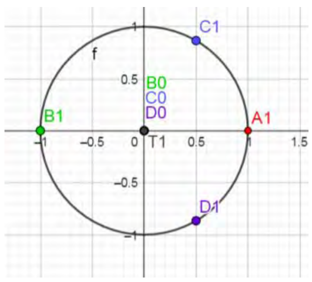


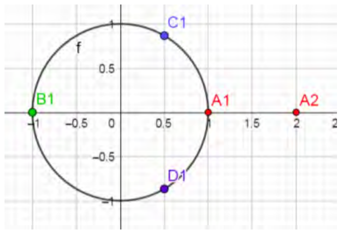
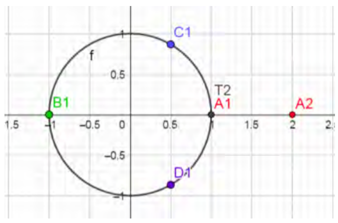
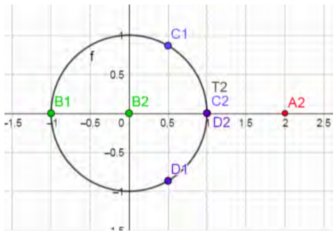
圖 4-20

此外，我們又想到：若兩個獵人對於兔子有一定的掌握能力，那麼如果多一個獵人是否能夠捕獲兔子？於是我們開始探討三個獵人追捕一隻兔子的情況。

討論四 三個獵人追捕一隻兔子

(一) 在 GGB 上模擬運氣最差的情況

第一回合		(1)剛開始所有的獵人和兔子都在原點
		(2) 接著兔子移動了一步，追蹤器標定在原點
		(3)獵人以正三角形的形狀散開，但是以獵人運氣最差且兔子最聰明的情況下，正三角形的底會剛好和兔子移動的方向垂直

第		(4)兔子又向 X+方向移動了一步
二		(5)追蹤器標訂在 T2 點
回合		(6)原本在 C1、D1 兩點的獵人也移動到 T2 點。

此時在 A 點的兔子與在 B 點的獵人距離為 2，與在 C、D 點的獵人距離為 1，因此後方的獵人始終離兔子較遠，之後遊戲會以一個獵人追捕一隻兔子的模式繼續進行。

(二)兔子部分回合隱形，部分回合出現的情況

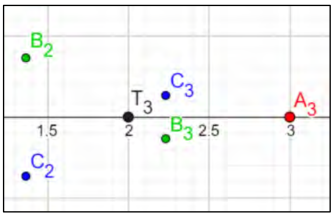


圖 4-21

←如圖 4-21，在第三回合時即出現追過頭情形。

↓如圖 4-22，沒有追過頭的回合(2、4、6、8、9、10)，距離減少；有追過頭的回合(1、3、5、7)，距離增加。

整理第 1~10 回合獵人與兔子的距離(如圖 4-22)並繪製趨勢圖(如圖 4-23)：

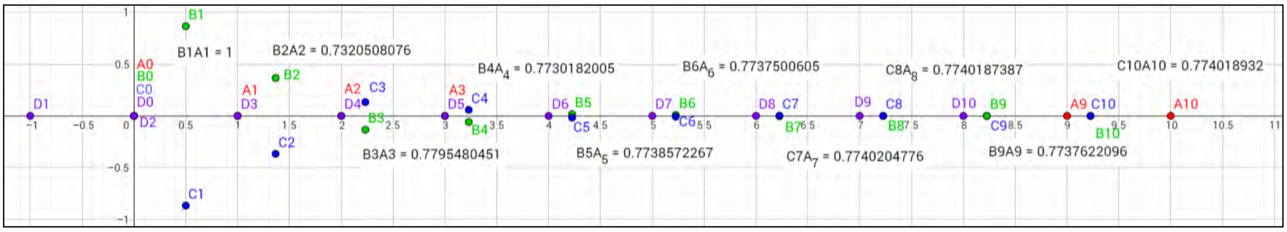


圖 4-22

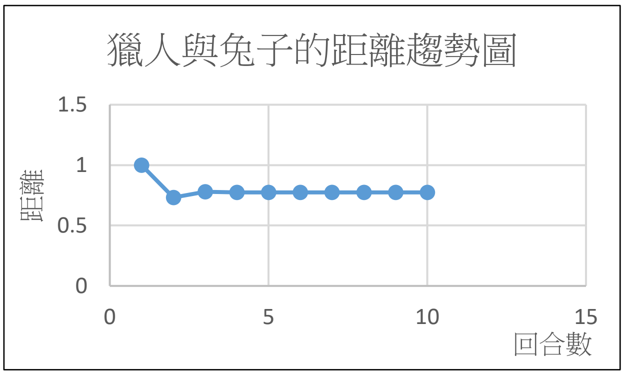
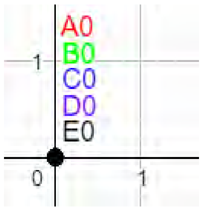
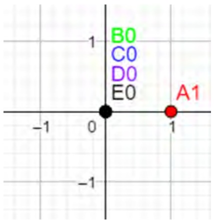
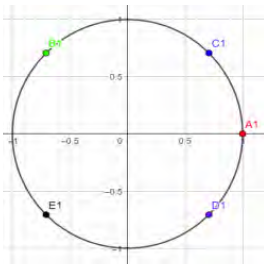
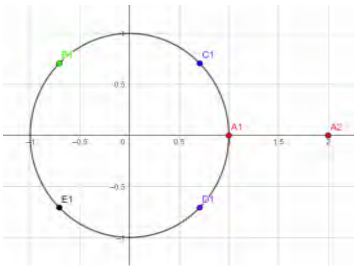
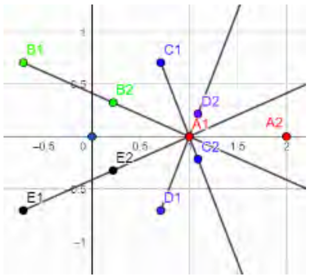
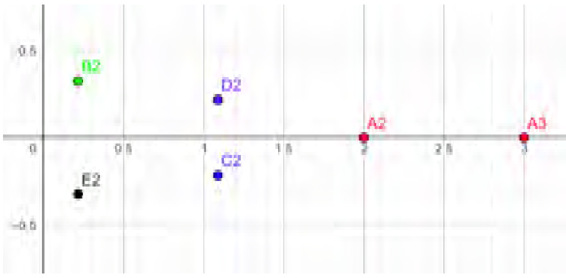
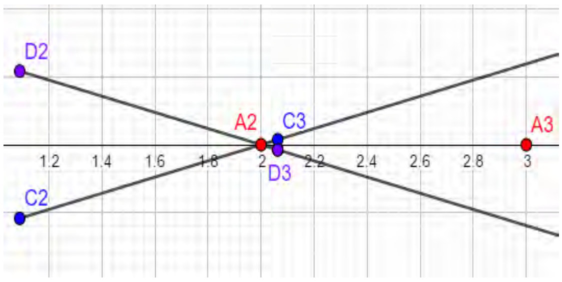


圖 4-23

討論五 四個獵人追捕一隻兔子

(一) 在 GGB 上模擬運氣最差的情況

<table>
<tr><td rowspan="4">第一回合</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(1)剛開始所有的獵人和兔子都在原點</td><td>(2)接著兔子移動了一步，追蹤器標定在原點</td></tr>
<tr><td></td><td>(3)獵人以正方形的形狀散開，但是以獵人運氣最差且兔子最聰明的情況下，正方形的其中一個邊會剛好和兔子移動的方向垂直。</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="2">第二回合</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(4)兔子又向 X+方向移動了一步，追蹤器標訂在 A1 點。</td><td>(5)所有獵人往 A1 移動一步(C2、D2 追過頭)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第三回合</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(6)兔子又向 X+方向移動了一步，追蹤器標訂在 A2 點</td><td>(7)所有獵人往 A2 移動一步(C3、D3 追過頭)</td></tr>
</table>

其餘依此類推。

在模擬的過程中，我們發現位於後方的兩個獵人始終與兔子有著一段距離，因此我們決定只考慮位於前方的兩個獵人和兔子的關係。

整理第 1~10 回合獵人與兔子的距離(如圖 4-24)並繪製趨勢圖(如圖 4-25)：

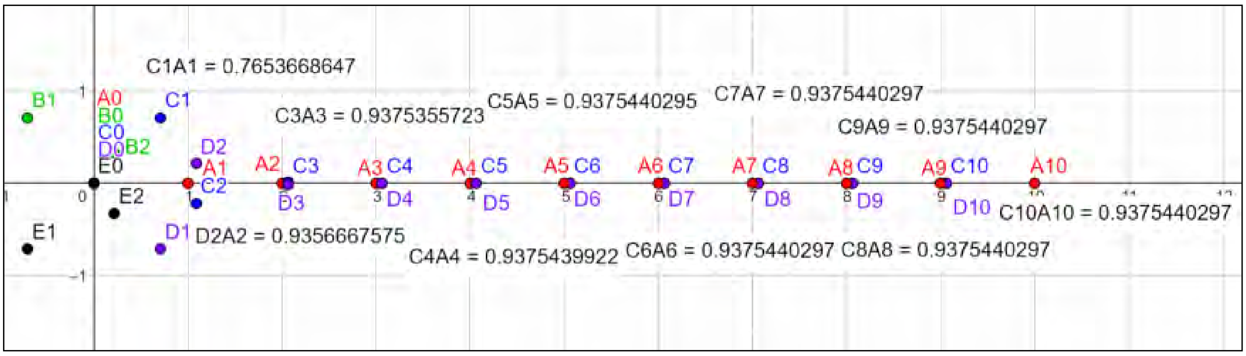


圖 4-24

由圖 4-24 可知，1~10 回合皆發生追過頭情況，距離皆小於一

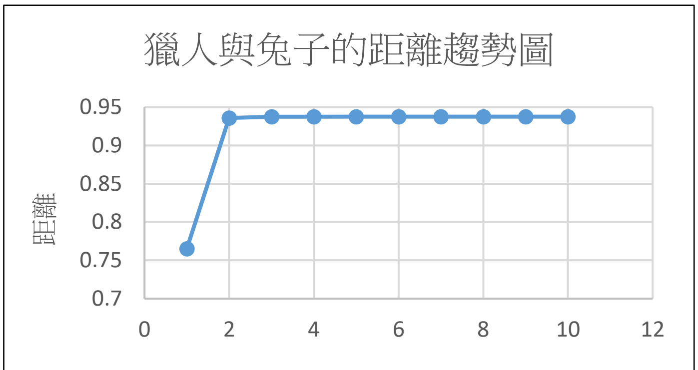


圖 4-25

由圖 4-25 可知，距離逐漸遞增，但差距並不大(因位於前方的兩個獵人分別是對方關於 x 軸的對稱點，故兩個獵人與兔子間的距離相同)

(二) 距離公式探討

4 個獵人時，兔子和獵人(指位於前方的兩個獵人)的距離公式:

$$\Rightarrow x_n = \sqrt{{x_{n-1}}^2 - 2x_{n-1} + 2 + 2a - \frac{2a}{x_{n-1}}}$$

(此公式可以在四個獵人的狀態下用上回合的距離、回合數和上回合距離的垂直和水平分量推知下一回合的距離)

當$x_{n-1} < 1$時，距離將會逐漸遞增。

推導如下:

令$x_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$

x_n = 第 n 回合兔子和獵人的距離

a_n=第 n 回合兔子和獵人距離的垂直分量

b_n=第 n 回合兔子和獵人距離的水平分量

B 為獵人，A 為兔子，T 為追蹤器，n = 回合數

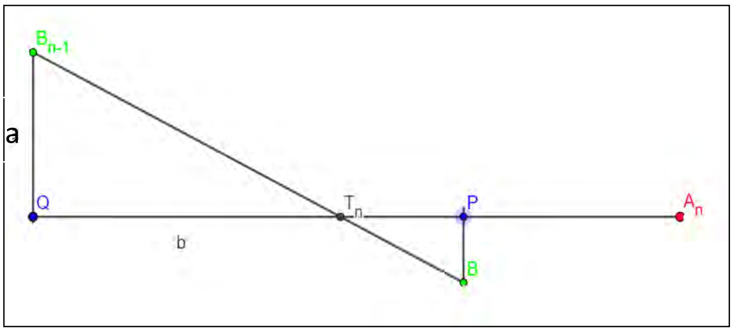


圖 4-26

$$\overline{PT_n}=\left(1-\sqrt{a^2+b^2}\right)\times\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-a$$

$$\overline{PA_n}=1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+a=a_n$$

$$\overline{PB_n}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-b=b_n$$

$$\overline{B_nA_n}=\sqrt{\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+a\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-b\right)^2}$$

$$=\sqrt{x^2-2x+2+2a-\frac{2a}{x}}$$

$$\Rightarrow x_n=\sqrt{{x_{n-1}}^2-2x_{n-1}+2+2a_{n-1}-\frac{2a_{n-1}}{x_{n-1}}}$$

$$\Rightarrow x_n=\sqrt{{x_{n-1}}^2-2(x_{n-1}-1)+\frac{2a_{n-1}}{x_{n-1}}(x_{n-1}-1)}$$

$$\Rightarrow x_n=\sqrt{{x_{n-1}}^2+(x_{n-1}-1)\cdot(\frac{2a_{n-1}}{x_{n-1}}-2)}$$

$$\Rightarrow x_n=\sqrt{{x_{n-1}}^2+\frac{2}{x_{n-1}}\cdot(x_{n-1}-1)\cdot(a_{n-1}-x_{n-1})}$$

又$x_{n-1}<1$，$\therefore\frac{2}{x_{n-1}}>0$，$x_{n-1}-1<0$，$a_{n-1}-x_{n-1}<0$(直角三角形斜邊 > 任一股)

$\therefore x_n=\sqrt{{x_{n-1}}^2+k}(k\in R>0)$

${x_n}^2={x_{n-1}}^2+k$

${x_n}^2-{x_{n-1}}^2=k$

$(x_n+x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=k$

$\because x_n+x_{n-1}>0$ 且 $k>0$

$\therefore x_n-x_{n-1}>0\Rightarrow x_n>x_{n-1}\Rightarrow$ 當$x_{n-1}<1$時，距離將會逐漸遞增

但當距離遞增到某一回合後，距離將會大於 1，此時與兩個獵人追捕一隻兔子時，追過頭之前的情況相同，由前面推導出的公式可以知道距離會逐漸遞減。

這時可以得知：四個獵人與兩個獵人情形類似，只是前者距離先遞增再遞減；後者距離先遞減再遞增。但結果是一致的：兩者的距離都一直在 1 附近，皆能達成題目要求。這樣的追法，第四回合時前方獵人便幾乎重合，於是我們也採取所謂「明智」的做法。而從討論一中可以得知距離會逐漸遞增，又因${x_{10^9}}^2 < 2 \times 0 + 2 \times 10^9 + 2$，同理可列式：

$${x_{10^9-4}}^2 < 2 \times 0 + 2 \times (10^9 - 4) + 2 = 1999999994$$

$$0 < x_{10^9-4} < 44721.35948291385455287825291313 8$$

此時第 10^9 回合獵人與兔子的距離有可能會小於 100，也可能遠超過 100，因此無法保證能達成原題要求。

(三) 兔子一回合隱形，一回合出現的情況

與全部隱形時相同，我們只考慮位於前方的兩個獵人和兔子的關係。

(1)在 GGB 上模擬運氣最差的情況。如圖 4-27，在第三回合時即出現追過頭情形。

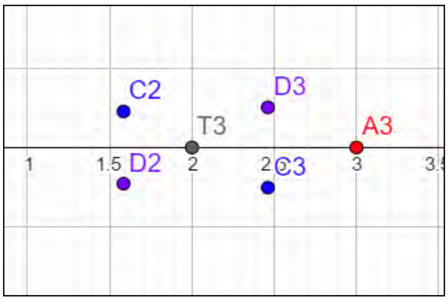


圖 4-27

整理第 1~10 回合獵人與兔子的距離(如圖 4-28)並繪製趨勢圖(如圖 4-29)：

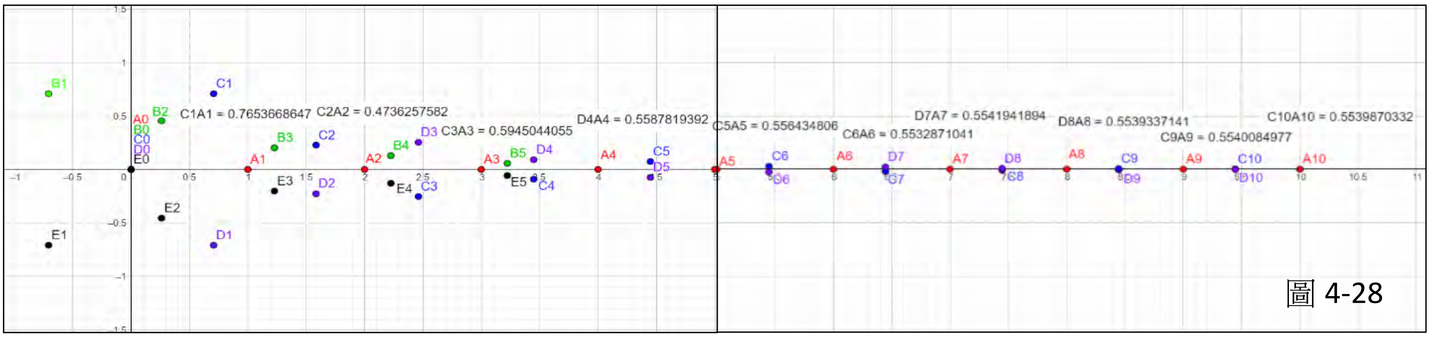


圖 4-28

如圖 4-28，與三個獵人時相同，未追過頭的回合(2、4、5、6、8、10)，距離減少；追過頭的回合(3、7、9)，距離增加。

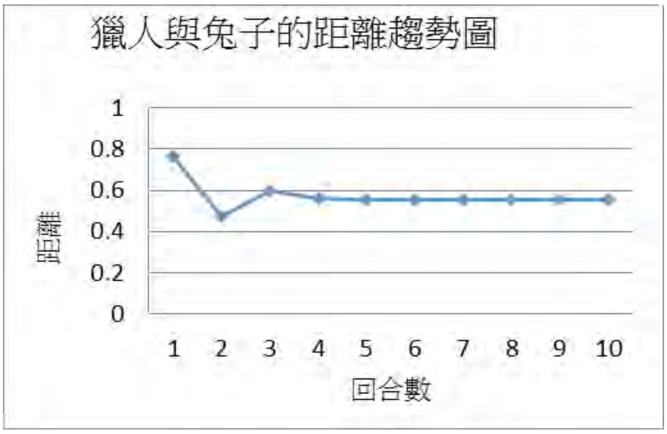


圖 4-29

我們發現三個獵人和四個獵人的結果是一樣的，我們十分好奇，因此試圖尋找距離公式，使其在三個獵人和四個獵人時皆適用，並證實我們的猜測。

(2)距離關係探討

在全部隱形時的公式裡，我們已經推導出隱形時未追過頭和追過頭的距離關係，也於兩個獵人時討論過出現(兔子不隱形)時未追過頭的情形，因此這裡只探討出現且追過頭的情況。

兔子出現(兔子不隱形)的回合，不可能有追過頭情況發生。

推導過程:

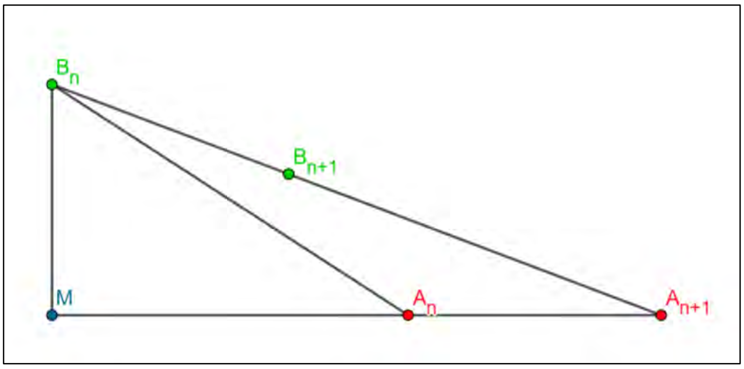


圖 4-30

若$\overline{\mathrm{B_nM}} \perp \overline{\mathrm{MA_n}}$，則在$\overline{\mathrm{MA_n}}$上任取一點 C，$\angle \mathrm{B}_n CM$必為銳角。因此$\angle \mathrm{B}_n \mathrm{A_n} M$為銳角，$\angle \mathrm{B}_n \mathrm{A_n A_{n+1}}$為鈍角。故$\overline{\mathrm{B_n A_{n+1}}} > \overline{A_n \mathrm{A_{n+1}}} = 1 = \overline{\mathrm{B_n B_{n+1}}}$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{B_n A_{n+1}}} > \overline{\mathrm{B_n B_{n+1}}}$，獵人未追過頭

這與我們在 GGB 上模擬的結果相符：

1~10 回合內，發生追過頭的皆是奇數回合，都是兔子隱形的時候。

伍、研究結果與討論

一、 一個獵人追捕一隻兔子時，兔子與獵人第 n 回合與第 n+1 回合的距離關係 ：

$$x_{n+1} = \sqrt{{x_n}^2 + 2x_n + 2 - 2\sqrt{{x_n}^2 + 2x_n}}$$

二、利用上述距離關係證明，在一個獵人追捕一隻兔子的情況下，不能保證達成原題目中經過 10^9 回合後，她和兔子之間的距離至多為 100 的要求。

三、在修改原題條件，讓兔子只有部分回合隱形的情況下，發現兔子出現(不隱形)的任一回合，獵人和兔子移動前和移動後距離不變。而且一個獵人追捕一隻兔子時，只要兔子至少隱形一回合，獵人就沒辦法追到兔子(與兔子重合)。

四、在 10^9 回合中，兔子若隱形的回合數不超過 4999，則可以達成原題要求。

五、找出當兩個獵人追捕一隻兔子時，追蹤器的最佳位置及使用策略。分別以獵人移動的距離是否超過他和追蹤器的距離，所區分出「未追過頭」和「追過頭」的兩種情況討論。

六、當兩個獵人追捕一隻兔子時，兔子與獵人第 n 回合與第 n-1 回合的距離關係:

$$x_n = \sqrt{{x_{n-1}}^2 - 2x_{n-1} - \frac{2b_{n-1}}{x_{n-1}} + 2b_{n-1} + 2}$$

(b_{n-1}為第 n-1 回合兔子和獵人距離的水平分量)。

七、當兩個獵人追捕一隻兔子時，分別以兔子看待兩個幾乎重合獵人的方式，所區分出的「謹慎」和「明智」兩種情況討論。推導出若兔子是謹慎的(將兩個獵人視為兩個相異點)，獵人與兔子的距離將始終在 1 附近，所以能達成題目要求。此研究結果不同於網路上(參考資料三)宣稱即使有 m 個獵人，都不能保證經過多少回合後，他和兔子的距離保持在一定值內的說法。但如果兔子是明智的(將兩個獵人視為同一點)，距離將會逐漸遞增，因此無法保證達成原題要求。

八、當兩個獵人追捕一隻兔子時，若兔子是謹慎的，可以將題目改為「在追過頭之前，經過 10^9 個回合後和兔子間的距離至多為 1.32」，使題目要求得以達成。

九、在兩個獵人追捕一隻兔子時，在追過頭之前部分回合不隱形的情況下，距離會逐漸遞減。

十、當三個獵人追捕一隻兔子時，兔子和獵人的追捕模式與一個獵人追捕一隻兔子時相同。

十一、當四個獵人追捕一隻兔子時，與兩個獵人時相同，分別就「謹慎」和「明智」兩種情況

討論。推導出若兔子是謹慎的，兔子與獵人(指位於前方的兩個獵人)第 n 回合與第 n-1 回合的距離關係：

$$x_n = \sqrt{{x_{n-1}}^2 + \frac{2}{x_{n-1}} \cdot (x_{n-1} - 1) \cdot (a_{n-1} - x_{n-1})}$$

(a_{n-1}為第 n-1 回合兔子和獵人距離的垂直分量)　。

而在追過頭的情況下，$x_{n-1} < 1$，因此距離將會逐漸遞增；未追過頭時距離遞減。獵人與兔子的距離將始終在 1 附近，所以能達成題目要求。但若兔子是明智的，與兩個獵人時相同，距離會逐漸遞增，因此無法保證達成原題要求。

十二、當三或四個獵人追捕一隻兔子，且兔子一回合隱形、一回合出現時，沒有追過頭的回合，距離減少；有追過頭的回合，距離增加。

陸、參考資料及其他

1. 58th International Mathematical Olympiad problems. (2017),from

   https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=2017

2. 嚴文蘭(2017 年 7 月 25 日) •第 58 屆國際數學奧林匹克試題與解答•取自

   http://www.sohu.com/a/159768180_518695

3. Zyymat (2017 年 7 月 26 日) • IMO 2017 solutions II•取自

   http://www.zyymat.com/imo-2017-solutions-ii.html

【評語】030404

考慮獵人追逐兔子，在兔子隱形，獵人只靠追蹤器指引，而獵人與兔子前進速度一致的前提下，獵人能否順利接近兔子的問題。針對一個獵人的情況給出了說明。對於兩個、三個、四個獵人共同追捕的情形也作了討論。這是由 IMO 的一個問題延伸而出的有趣而且有一定難度的問題。作者們不僅針對原始問題給出了說明，針對多個獵人共同追捕的情形也作了討論。看的出來作者們投注了許多心力在這個問題上，值得嘉許。比較美中不足的是，作者們沒有注意到最佳的追捕方式可能不見得是朝著追蹤器所在的位置筆直前進這種最單純的方式(如果分析連續兩步追蹤器所在的位置，應該會得出更多兔子所在位置的訊息)。也因此，以此為依據的論述應該只能說成是：我們有一個特定追捕策略，在此追捕策略下，會如何如何…。作者們在作品中提及了網路上給出的另一個說明方式，如果仔細的分析這個說法，應該會發現這個看似複雜的解釋方式其目的就是為了要避免採用特定策略(可能未必是最佳策略)可能會產生的邏輯上的問題。作者們確實得出了一些有趣的結論，但沒注意到論述過程中可能存在的瑕疵，以致有些偏離原始問題，有點可惜了。

作品海報

研究動機

我們在 2017 年的數奧(IMO)題目中，發現一道題，引起了我們的興趣。原題如下：

> 一位獵人和一隻隱形的兔子在歐氏平面上玩一場遊戲。
> 兔子的起點 A_0 和獵人的起點 B_0 為同一點。在遊戲的 $n-1$ 回合後，兔子所在的位置為 A_{n-1}，獵人所在的位置為 B_{n-1}。
> 在遊戲的第 n 回合，以下三件事情會依序發生。
> （1）兔子會在不可被看到的情況下移動到一個點 A_n，使得 A_{n-1} 與 A_n 之間的距離恰為 1。
> （2）一個追蹤裝置會回報一個點 P_n 給獵人。對獵人而言，裝置只保證 P_n 與 A_n 之間的距離至多為 1。
> （3）獵人會在可被看到的情況下移動到一個點 B_n，使得 B_{n-1} 與 B_n 之間的距離恰為 1。
> 試問是否無論兔子如何移動，且無論裝置回報的點為何，獵人總是可以適當的選取她的移動，使得她可以保證在經過 10^9 個回合後，她和兔子之間的距離至多為 100？

在題目中兔子能隱形， 獵人卻會被看見的不對等條件下，獵人只能依賴追蹤器追捕兔子，我們十分好奇這個追蹤器好不好用、夠不夠用？而原題進行十億回合的追捕行動內，能否達成人、兔距離至多為 100 的保證，足以想見這項獵兔行動的難度，因此我們有了增加獵人人數，是否有助於獵兔行動的發想， 這樣追捕行動的回合數與人兔距離又有何種變化關係呢？於是在老師的協助下，好奇的我們開始著手研究這道題目，展開我們的獵兔行動。

研究目的

一、探討獵人在運氣最差的情況下，與兔子的距離關係，並得出原題目的解。

二、分別探討獵人數目為 2、3 和 4 個時，與 1 隻兔子的距離關係。

三、找出追蹤器是否有對兔子有利的最佳位置。

四、以 2 位獵人追捕 1 隻兔子為原則修改此題目。

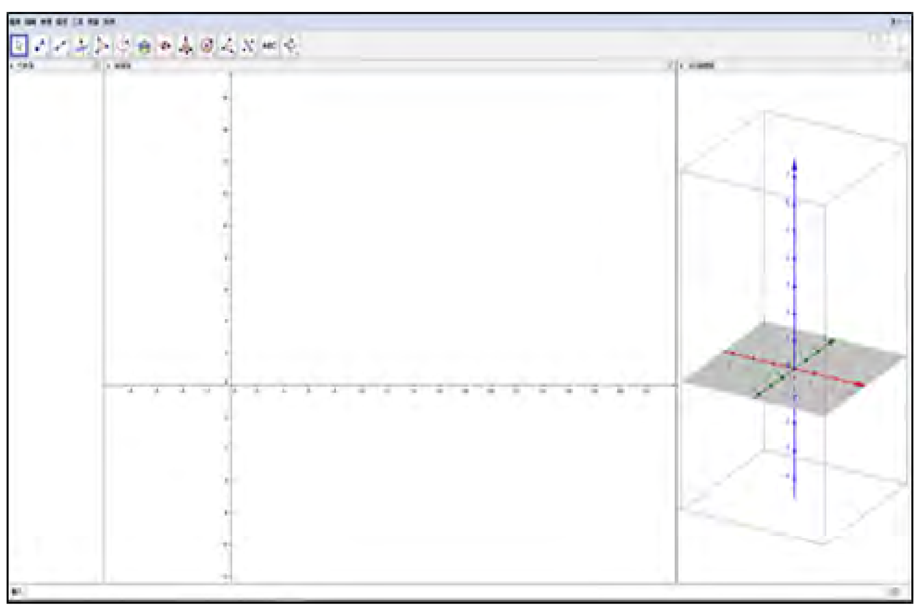
五、探討兔子只在部分回合隱形與獵人的距離關係。

研究設備與器材

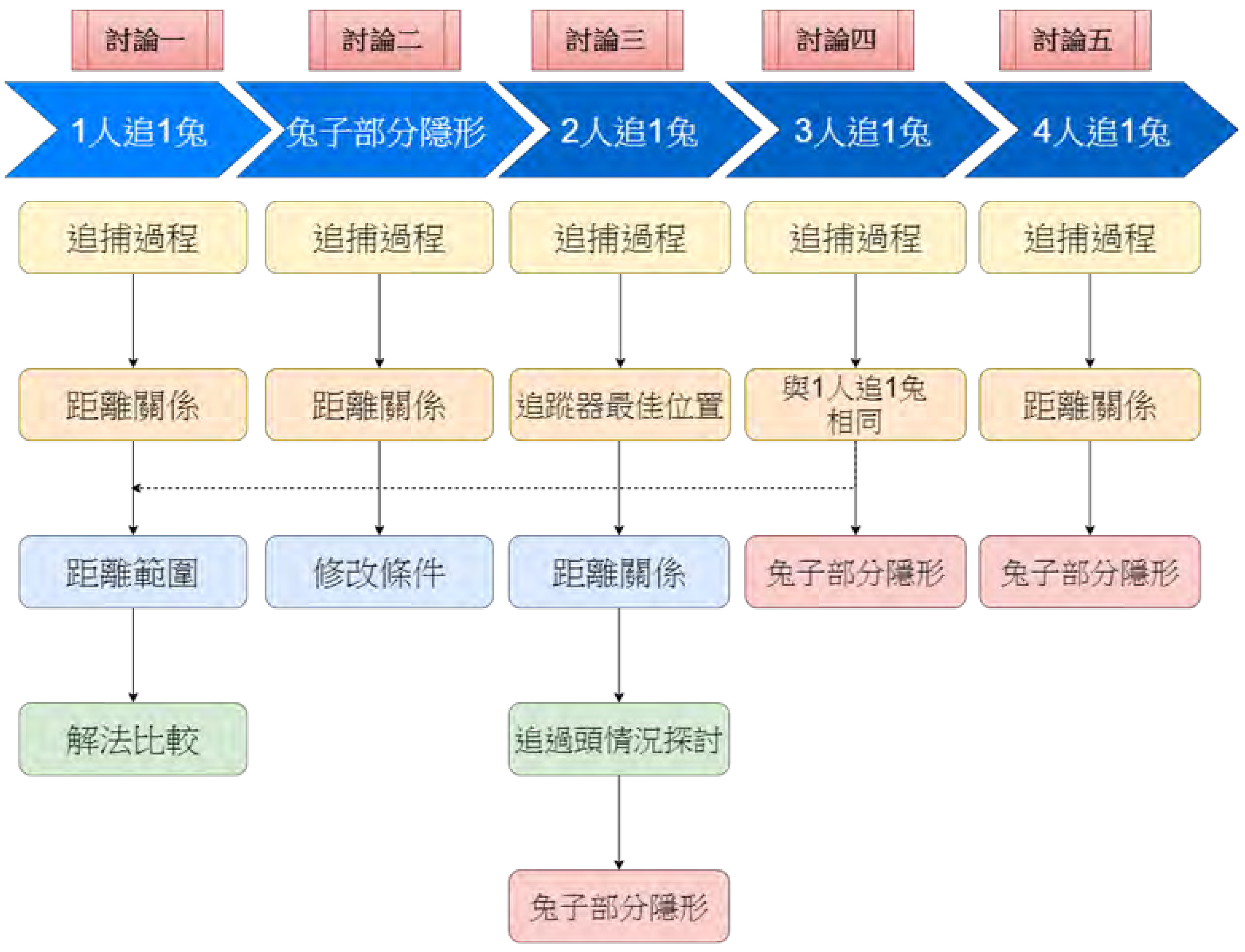
數學分析工具

(一)基本：紙、筆、電腦

(二)軟體： GeoGebra 動態數學軟體



研究架構圖



研究過程與方法

一、自訂名詞解釋：

(一) **運氣最差**：追蹤器回報的點會使獵人離兔子最遠的狀況。

(二) **包抄**：當有 2 個獵人以 x 軸為對稱追趕兔子時，

使得兔子只能往 x 軸跑的狀況，即稱為包抄。

(三) **追過頭**：指當追蹤器給出一個點後，獵人和追蹤器所回報的點

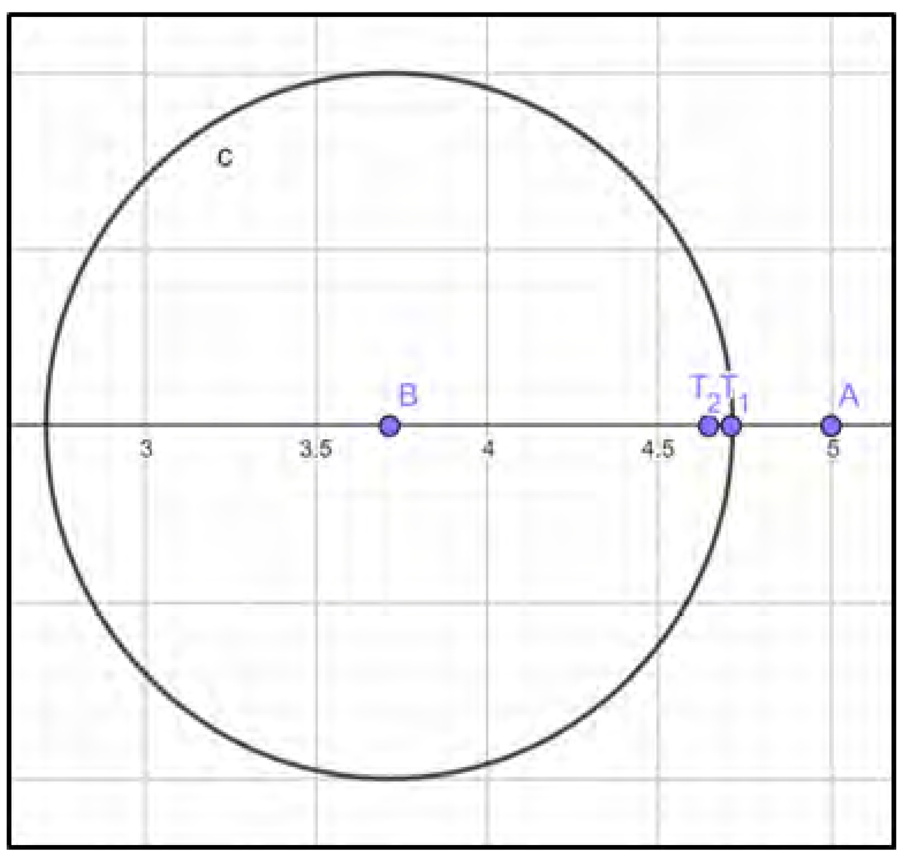
距離小於 1，導致獵人有可能會超過所標示的點，稱為追過頭。

(四) **謹慎**：指兔子即使在兩個獵人幾乎重合的情況下，

也執意將兩個獵人視為不同的點，以包抄方式脫逃。

(五) **明智**：指兔子在兩個獵人幾乎重合的情況下，

將兩個獵人視為同一點，以運氣最差的方式脫逃。



示意圖：當追蹤器回報的點和獵人的距離小於 1 時，
獵人追過頭和沒追過頭的狀況。

二、自訂圖示方式解釋：

本研究以 A 為兔子，B、C、D、E 分別為第 1、2、3、4 個獵人，T 為追蹤器，X 為兔子和獵人的距離。

三、原題目分析與討論：

一個獵人追捕一隻兔子

(一) **兔子的最佳策略**，即是追蹤器回報的點會使獵人離兔子最遠的狀況下。

我們將它稱為獵人「運氣最差」的情況，步驟如下：

1. 第一回合開始，兔子向隨機方向移動 1 單位，如圖 4-2。
2. 追蹤器回報原點給獵人。
3. 獵人往兔子的反方向移動 1 單位，第一回合結束。
4. 第二回合開始，兔子往獵人的反方向移動 1 單位。
5. 畫出以兔子為圓心，1 單位長為半徑的圓，如圖 4-3。
6. 畫出一直線通過獵人，並與步驟 5 的圓相切，此切點為追蹤器在第二回合回報給獵人的位置，如圖 4-4。
7. 獵人往追蹤器方向移動 1 單位，第二回合結束，如圖 4-5。
8. 重複步驟 4~7(雖切點有二種選擇，但追蹤器回報的位置方向不會影響結果)。

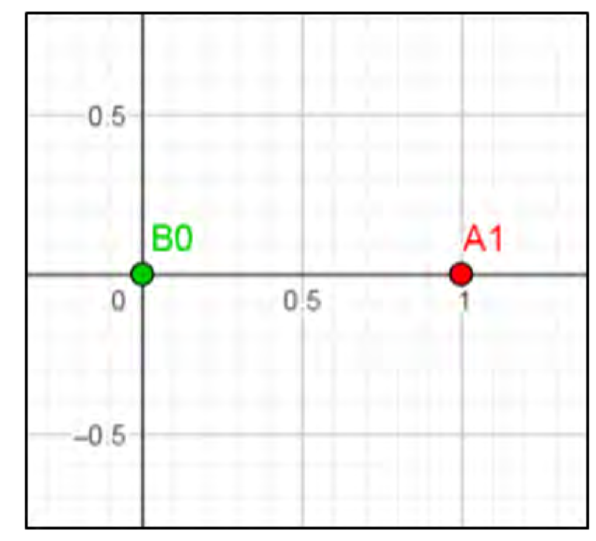


圖 4-2

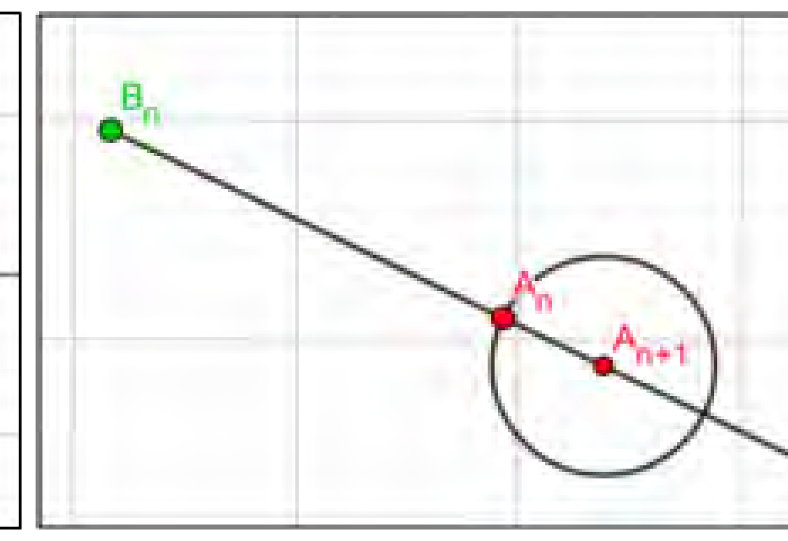


圖 4-3

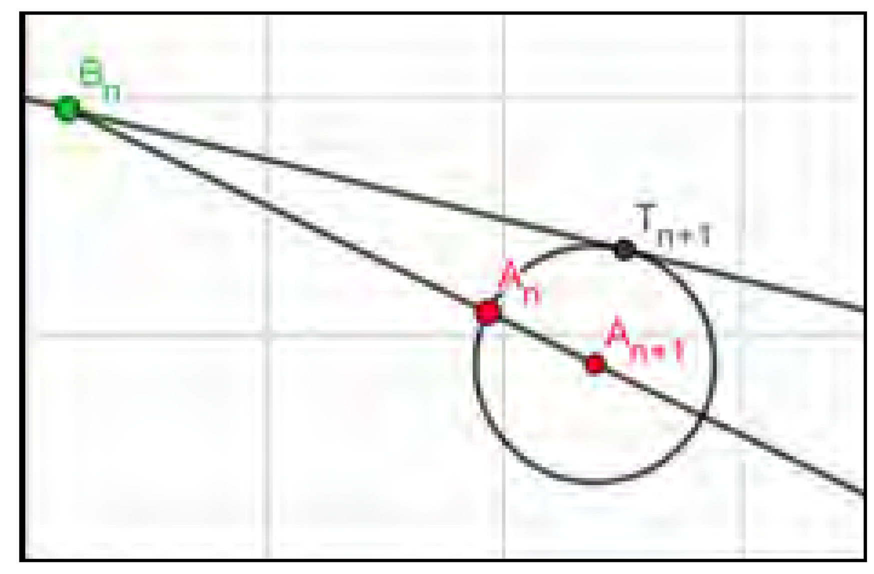


圖 4-4

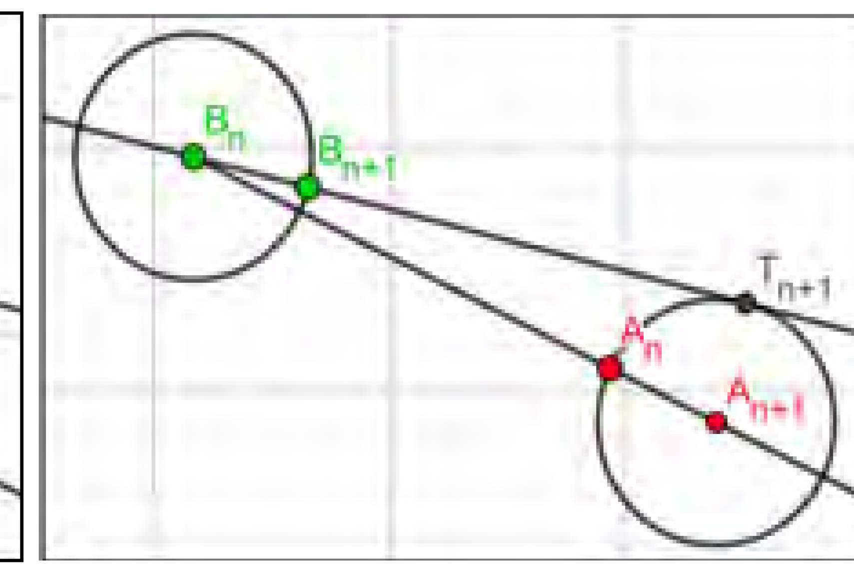


圖 4-5

(二) **距離公式探討**

1個獵人追捕1隻兔子時，兔子與獵人第n回合與第n+1回合的距離關係：

$$x_{n+1} = \sqrt{{x_n}^2 + 2x_n + 2 - 2\sqrt{{x_n}^2 + 2x_n}}$$

我們得出第 10^9 回合獵人與兔子的距離超過 100，因此無法滿足題意。

(三) **應用公式得出獵人與兔子的距離範圍一般式並套用至第 10^9 回合**

第 n 回合獵人與兔子的距離範圍一般式:

$$\sqrt{2\left(\sqrt{n} - \ln\left(1 + \sqrt{n}\right)\right) + 4} < x_{n+1} < \sqrt{\frac{n}{2} + 4}$$

第 10^9 回合獵人與兔子的距離範圍

$$251.4534347402 < x_{10^9} < 22360.6798532603$$

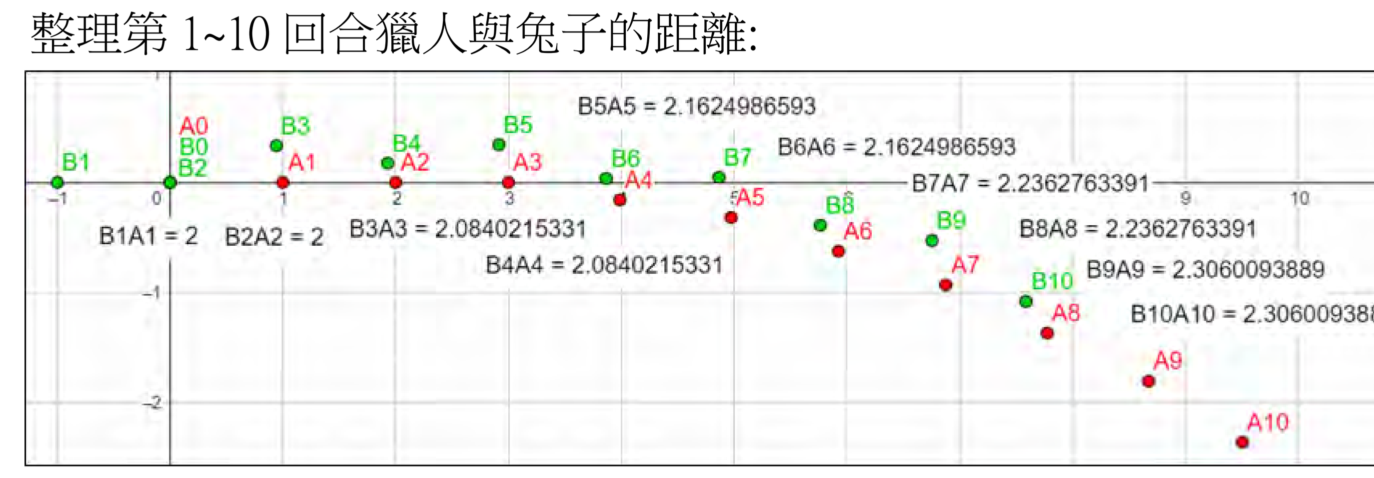
(四)**兔子部分回合隱形，部分回合出現的情況**

我們決定先討論奇數回合隱形，偶數回合出現的情形。

另外兔子出現時我們將追蹤器設定成不起作用。

代入一個獵人追捕一隻兔子的公式計算，發現此時第n與第n+2回合的距離關係與原先兔子完全隱形時，第n回合與n+1回合的距離關係相同。

整理第 1~10 回合獵人與兔子的距離:



(五)**兔子出現時的距離關係公式探討**

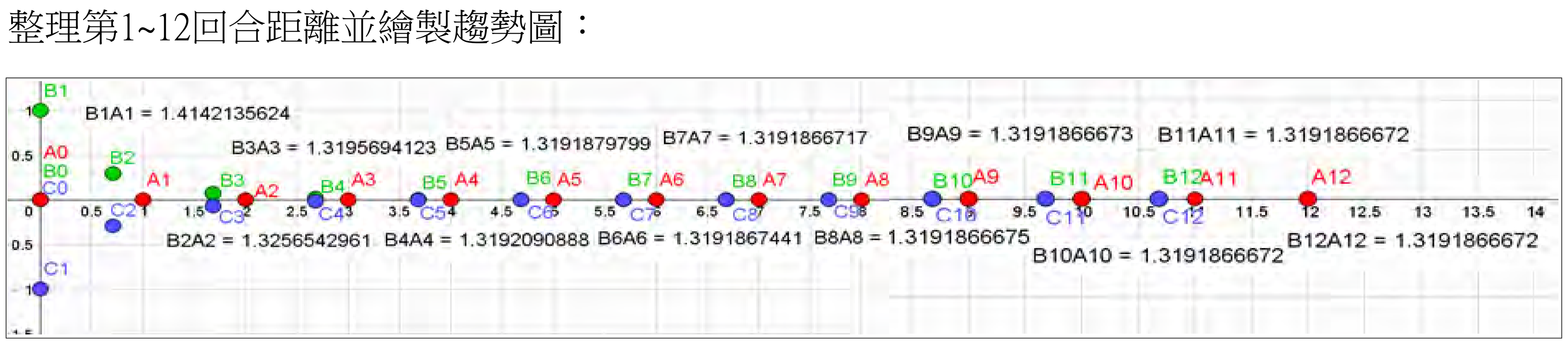
1. 兔子出現的任一回合，獵人和兔子移動前和移動後距離不變。
2. 一個獵人追捕一隻兔子時，只要兔子至少隱形一回合，獵人就無法與兔子重合。

(六)**修改條件以達成題意**

在 10^9 回合中，若兔子隱形的回合數不超過 19992，則可以達成原題要求。

二個獵人追捕一隻兔子

整理第1~12回合距離並繪製趨勢圖：



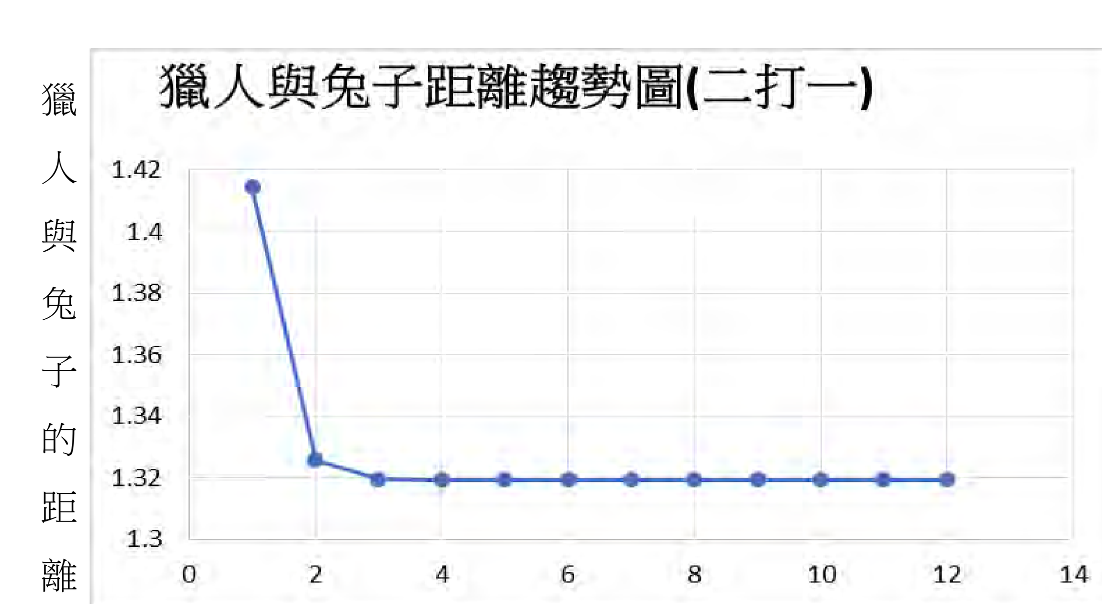


圖4-15

(一)**距離關係公式探討**

2 個獵人追捕 1 隻兔子時，兔子與獵人第 n 回合與第 n-1 回合的距離關係：

$$x_n = \sqrt{{x_{n-1}}^2 - 2x_{n-1} - \frac{2b_{n-1}}{x_{n-1}} + 2b_{n-1} + 2}$$

b_{n-1} 為第 n-1 回合兔子和獵人距離的水平分量

在還沒追過頭的情況下，距離會逐漸遞減；追過頭之後距離遞增 。

因在追過頭之前距離遞減；而追過頭之後距離遞增，因此距離會先減少到小於1，再增加到大於1，又減少到小於1，如此循環下去。也就是說，若兔子是謹慎的，獵人與兔子的距離始終在1附近，故能達成題目要求。

而這樣的追法，使得第五回合兩個獵人幾乎重合 於是我們將兩個獵人視為同一個獵人，發現之後的模式會與一個獵人追捕一隻兔子相同，就是我們稱此為「明智」的做法。

從前面的討論可以推知:

$$251.4534344259 < x_{10^9-5} < 22360.6797973586$$

，此時第10^9回合獵人與兔子的距離超過100，因此無法滿足題意。

(二)**兔子部分回合隱形，部分回合出現的情況**

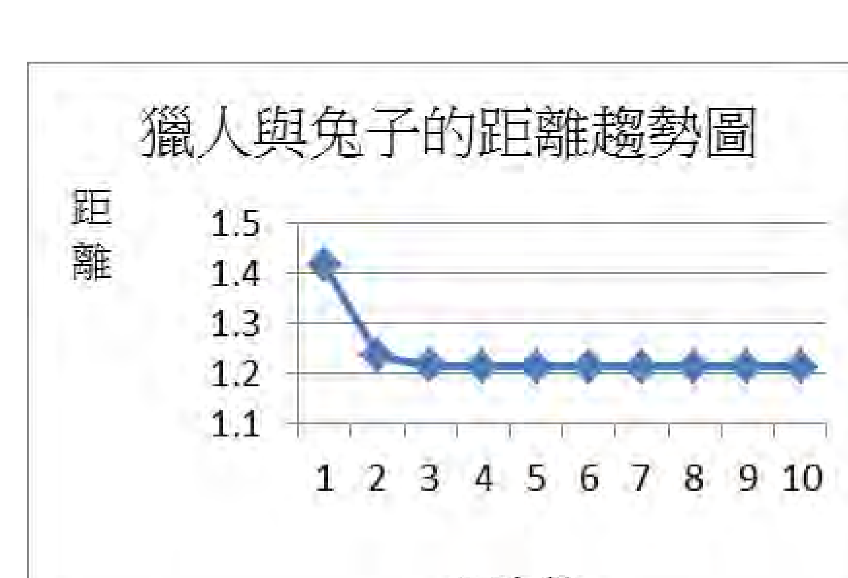
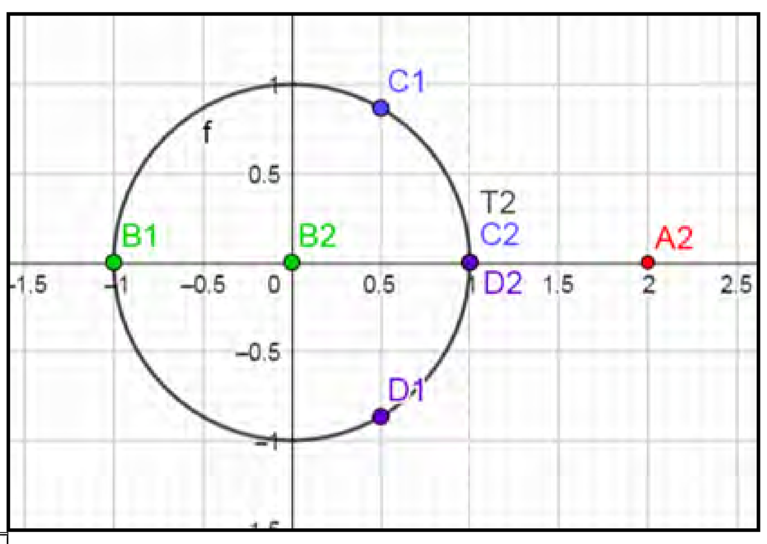


圖 4-20

追過頭之前，在部分回合隱形、部分回合出現的情況下，距離會逐漸遞減。

三個獵人追捕一隻兔子

(一) 在GGB上模擬運氣最差的情況



P.22第二回合圖6

第二回合時，在A點的兔子與在B點的獵人距離為2，與在C、D點的獵人距離為1，因此後方的獵人始終離兔子較遠，之後遊戲會以一個獵人追捕一隻兔子的模式繼續進行。

(二)兔子一回合隱形，一回合出現的情況

沒有追過頭的回合，距離減少；有追過頭的回合，距離增加。

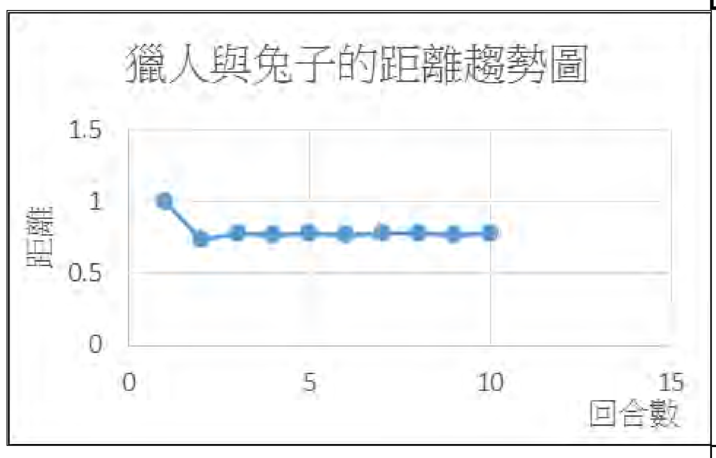


圖4-23

四個獵人追捕一隻兔子

(一) 距離公式探討:

4 個獵人追捕 1 隻兔子時，兔子與獵人第 n 回合與第 n-1 回合的距離關係：

$x_n = \sqrt{x_{n-1}^2 + \frac{2}{x_{n-1}} \cdot (x_{n-1} - 1) \cdot (a_{n-1} - x_{n-1})}$ ，當 $x_{n-1} < 1$時，距離將會逐漸遞增。

a_{n-1} 為第 n-1 回合兔子和獵人距離的垂直分量

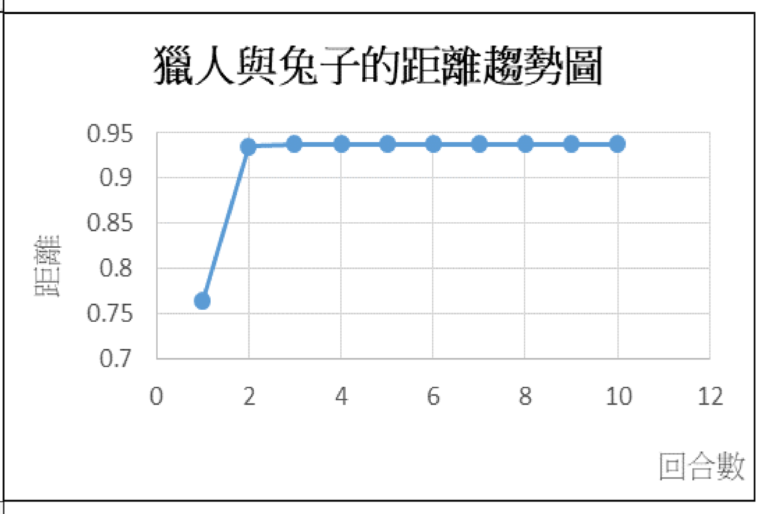


圖4-25

(二) 兔子一回合隱形，一回合出現的情況：

(1) 與三個獵人時相同，未追過頭的回合，距離減少；

追過頭的回合，距離增加。

(2) 距離關係探討:

兔子出現(即未隱形)的回合，不可能有追過頭情況發生。

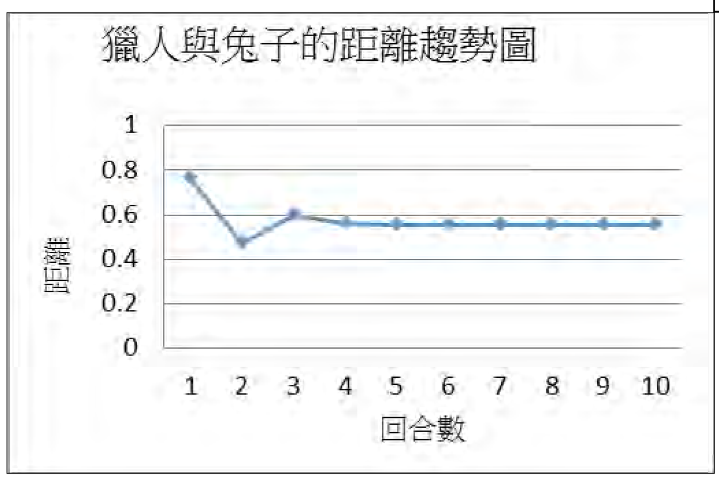


圖4-29

由圖4-25 ，距離逐漸遞增，但差距並不大 (因位於前方的兩個獵人分別是對方關於x軸的對稱點， 故距離相同)

然而這樣的追法，與兩個獵人時相同，使得第六回合兩個獵人幾乎重合，於是我們也探討明智的做法。從前面的討論可以推知: $251.4534344887 < x_{10^9-4} < 22360.6798085389$

，此時第10^9回合獵人與兔子的距離超過100，故無法滿足題意。

研究結果與討論

一、 一個獵人追捕一隻兔子時，兔子與獵人第 n 回合與第 n+1 回合的距離關係：$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 2x_n + 2 - 2\sqrt{x_n^2 + 2x_n}}$

二、 利用上述距離關係，在一個獵人追捕一隻兔子的情況下，找出距離範圍一般式 $\sqrt{2\left(\sqrt{n} - ln\left(1 + \sqrt{n}\right)\right) + 4} < x_{n+1} < \sqrt{\frac{n}{2} + 4}$

三、在修改原題條件，讓兔子只有部分回合隱形的情況下，發現兔子出現(不隱形)的任一回合，獵人和兔子移動前和移動後距離不變。

而且一個獵人追捕一隻兔子時，只要兔子至少隱形一回合，獵人就沒辦法與兔子重合。

四、在 10^9 回合中，兔子若隱形的回合數不超過 19992，則可以達成原題要求。

五、找出當兩個獵人追捕一隻兔子時，追蹤器的最佳位置及使用策略。分別以獵人移動的距離是否超過他和追蹤器的距離，所區分出「未追過頭」和「追過頭」的兩種情況討論。

六、當兩個獵人追捕一隻兔子時，兔子與獵人第 n 回合與第 n-1 回合的距離關係:

$x_n = \sqrt{x_{n-1}^2 - 2x_{n-1} - \frac{2b_{n-1}}{x_{n-1}} + 2b_{n-1} + 2}$(b_{n-1} 為第 n-1 回合兔子和獵人距離的水平分量)。

七、當兩個獵人追捕一隻兔子時，分別以兔子看待兩個幾乎重合獵人的方式，所區分出的「謹慎」和「明智」兩種情況討論。

推導出若兔子是謹慎的(將兩個獵人視為兩個相異點)，獵人與兔子的距離將始終在 1 附近，所以能達成題目要求。

此研究結果不同於網路上(參考資料三)宣稱即使有 m 個獵人，都不能保證經過多少回合後，他和兔子的距離保持在一定值內的說法。

但如果兔子是明智的(將兩個獵人視為同一點)，距離將會逐漸遞增，因此無法保證達成原題要求。

八、當兩個獵人追捕一隻兔子時，若兔子是謹慎的，可以將題目改為「在追過頭之前，經過 10^9 個回合後和兔子間的距離至多為 1.32」，使題目要求得以達成。

九、在兩個獵人追捕一隻兔子時，在追過頭之前部分回合不隱形的情況下，距離會逐漸遞減。

十、當三個獵人追捕一隻兔子時，兔子和獵人的追捕模式與一個獵人追捕一隻兔子時相同。

十一、當四個獵人追捕一隻兔子時，與兩個獵人時相同，分別就「謹慎」和「明智」兩種情況討論。

推導出若兔子是謹慎的，兔子與獵人(指位於前方的兩個獵人)第 n 回合與第 n -1 回合的距離關係：

$x_n = \sqrt{x_{n-1}^2 + \frac{2}{x_{n-1}} \cdot (x_{n-1} - 1) \cdot (a_{n-1} - x_{n-1})}$($a_{n-1}$ 為第 n-1 回合兔子和獵人距離的垂直分量) 。

而在追過頭的情況下，$X_{n-1}<1$ ，因此距離將會逐漸遞增；未追過頭時距離遞減。

獵人與兔子的距離將始終在 1 附近，故能達成題目要求。但若兔子是明智的，與兩個獵人時相同，距離會逐漸遞增，因此無法保證達成原題要求。

十二、當三或四個獵人追捕一隻兔子，且兔子一回合隱形、一回合出現時，沒有追過頭的回合，距離減少；有追過頭的回合，距離增加。