中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030402

翻的有理

學校名稱：嘉義縣立新港國民中學

作者：	指導老師：
國三 楊其潔	蔡坤延

關鍵詞：等差數列、規律

摘要

本文透過翻書籤問題，觀察改變黑色面朝上書籤數 1 張及 2 張(含改變中間間隔白色面朝上書籤數各種類型)時，探討書籤總張數及達成翻開所需步數之間的關係，發現到初步判別方法及彼此間呈現等差數列的規律情形。

壹、研究動機

升上國三，在努力準備會考時，老師每週都會丟那麼一道數學題來幫助我們活化腦袋一下，順便有獎徵答一番，其中有一個題目：「在一個圓的周圍放 8 張書籤，每張書籤一面為白色，另一面為黑色。所謂的「一步」是指「選取 1 張黑色面朝上的書籤，並將這張書籤及與它相鄰的 2 張書籤同時翻轉過來」。如果開始時，只有 1 張書籤黑色面朝上，則至少經過若干步後，所有書籤都變為白色面朝上？」，動手試著試著，感覺蠻有趣的，似乎能利用國二學習過的數列單元來探究其箇中規律，便投入了該問題的研究和探討。

貳、研究目的

在固定黑色面朝上的書籤張數及改變書籤總張數 m 的情況下，探求以一開始翻任 1 張黑色面朝上的書籤，經過 n 步達到所有書籤都變為白色面朝上的步數：

一、當固定只有一張黑色面朝上的書籤時，改變書籤總張數 m 觀察探討所有書籤都變為白色面朝上的所需步數 n。

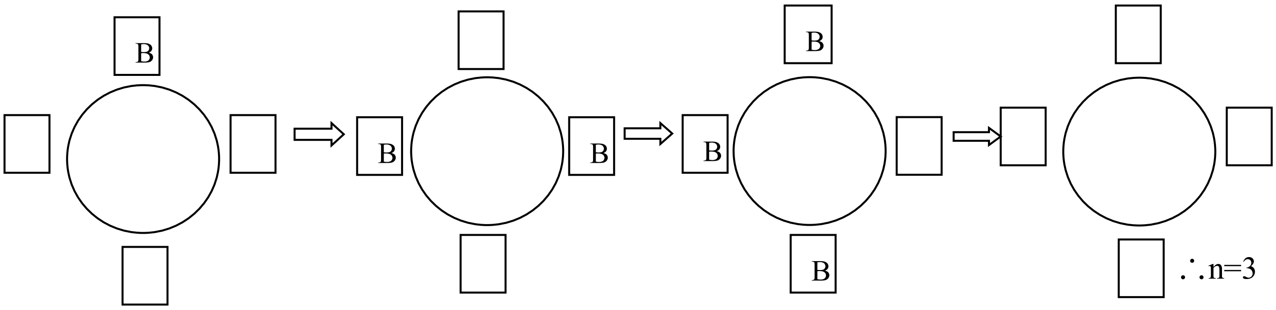
二、當固定只有二張黑色面朝上的書籤時，改變書籤總張數 m 觀察探討所有書籤都變為白色面朝上的所需步數 n。

參、研究過程

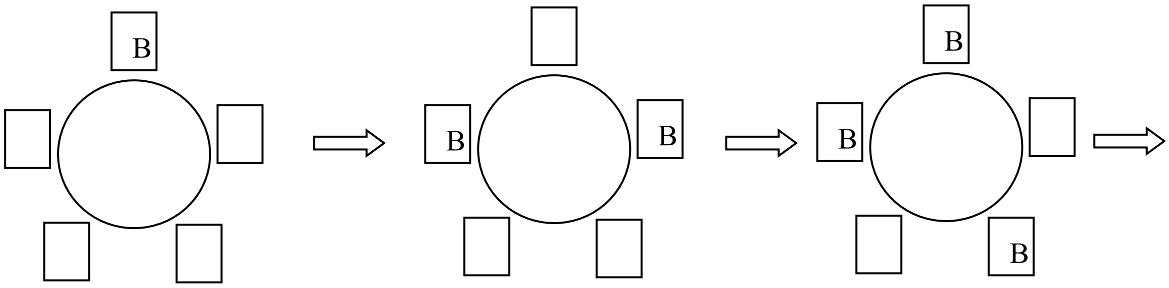
一、當固定只有一張黑色面朝上的書籤時，改變書籤總張數 m(m≧3)，以實際操作觀察探討所需步數 n，且若無法翻成功，則定義其步數 n=0：

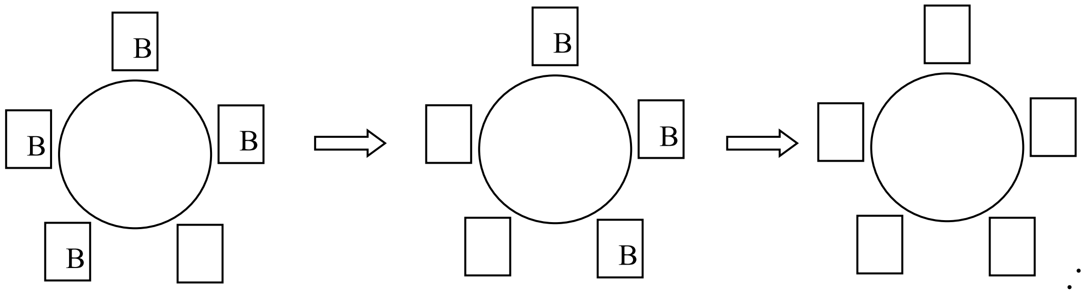
（一）列出 m=4~12 的情形(m=3 時，明顯無法翻成功)，且將黑色面朝上書籤標示為 $\boxed{\text{B}}$：

1、m=4



2、m=5

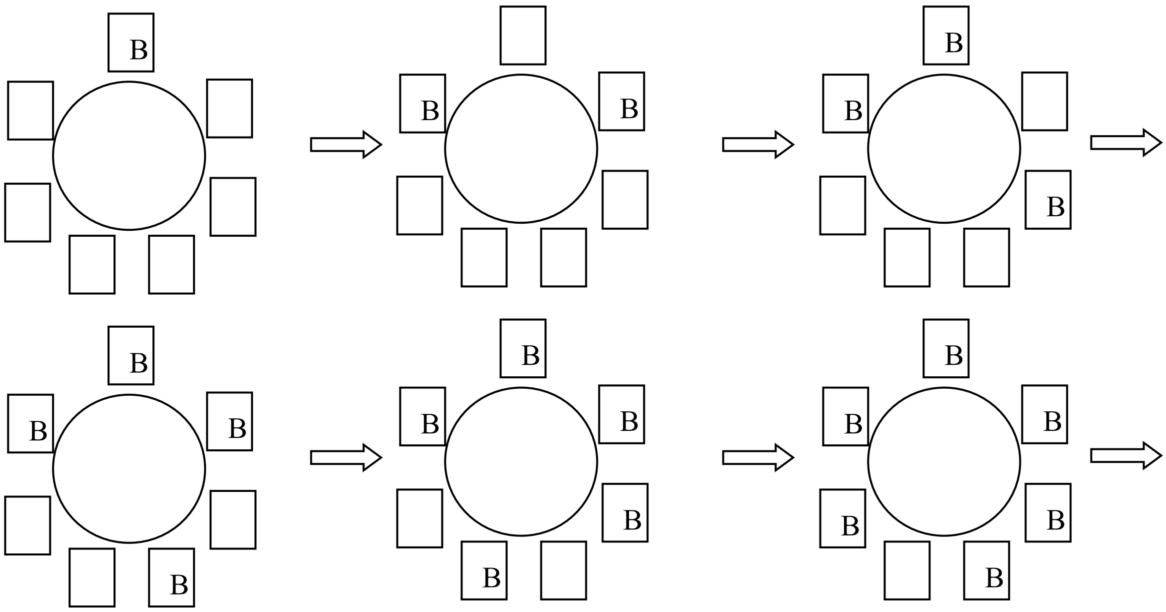


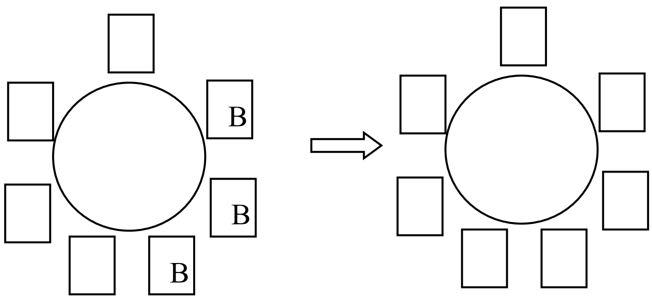


∴n=5

3、m=6 時無法翻成功 ∴n=0

4、m=7

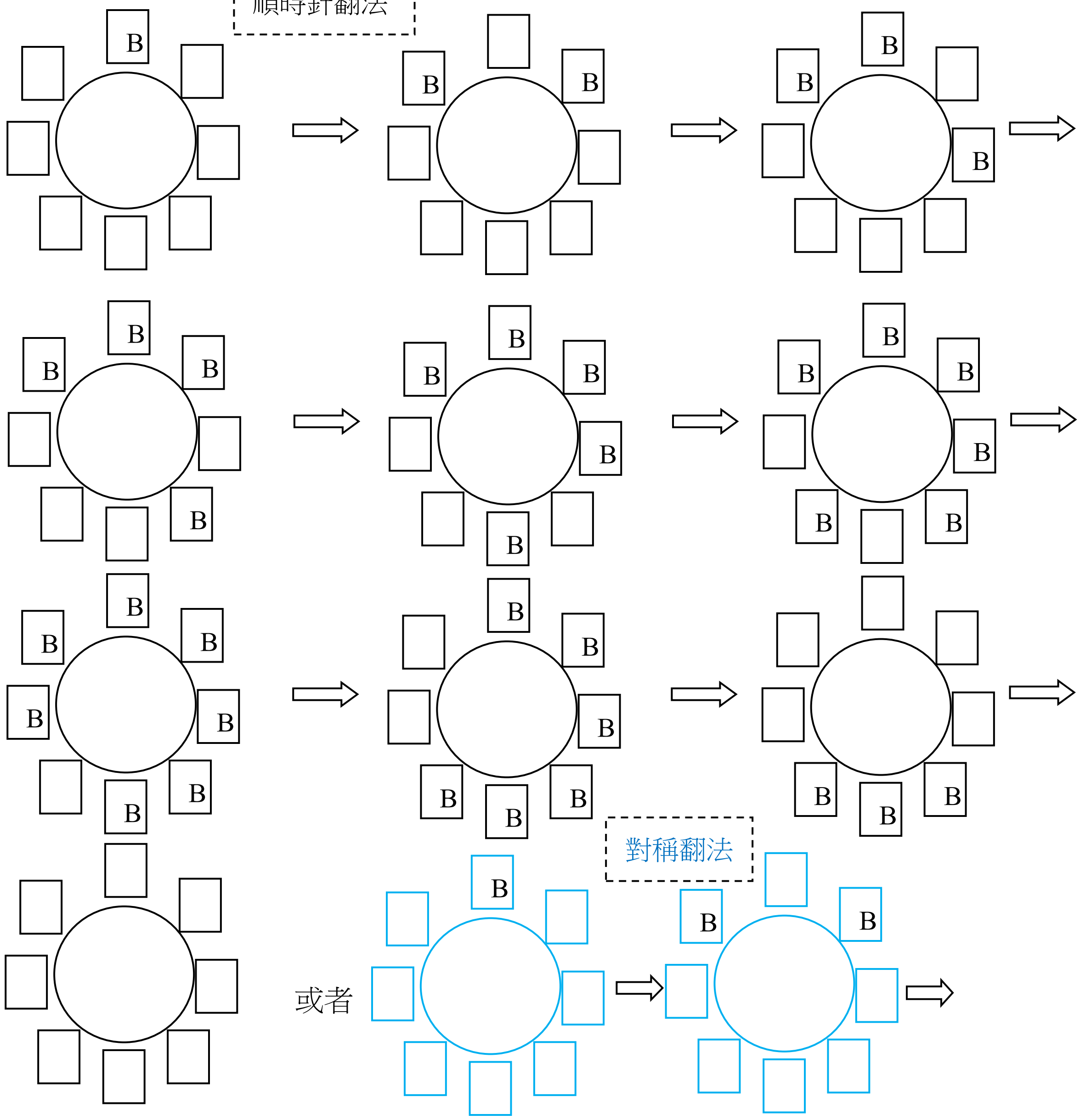




∴n=7

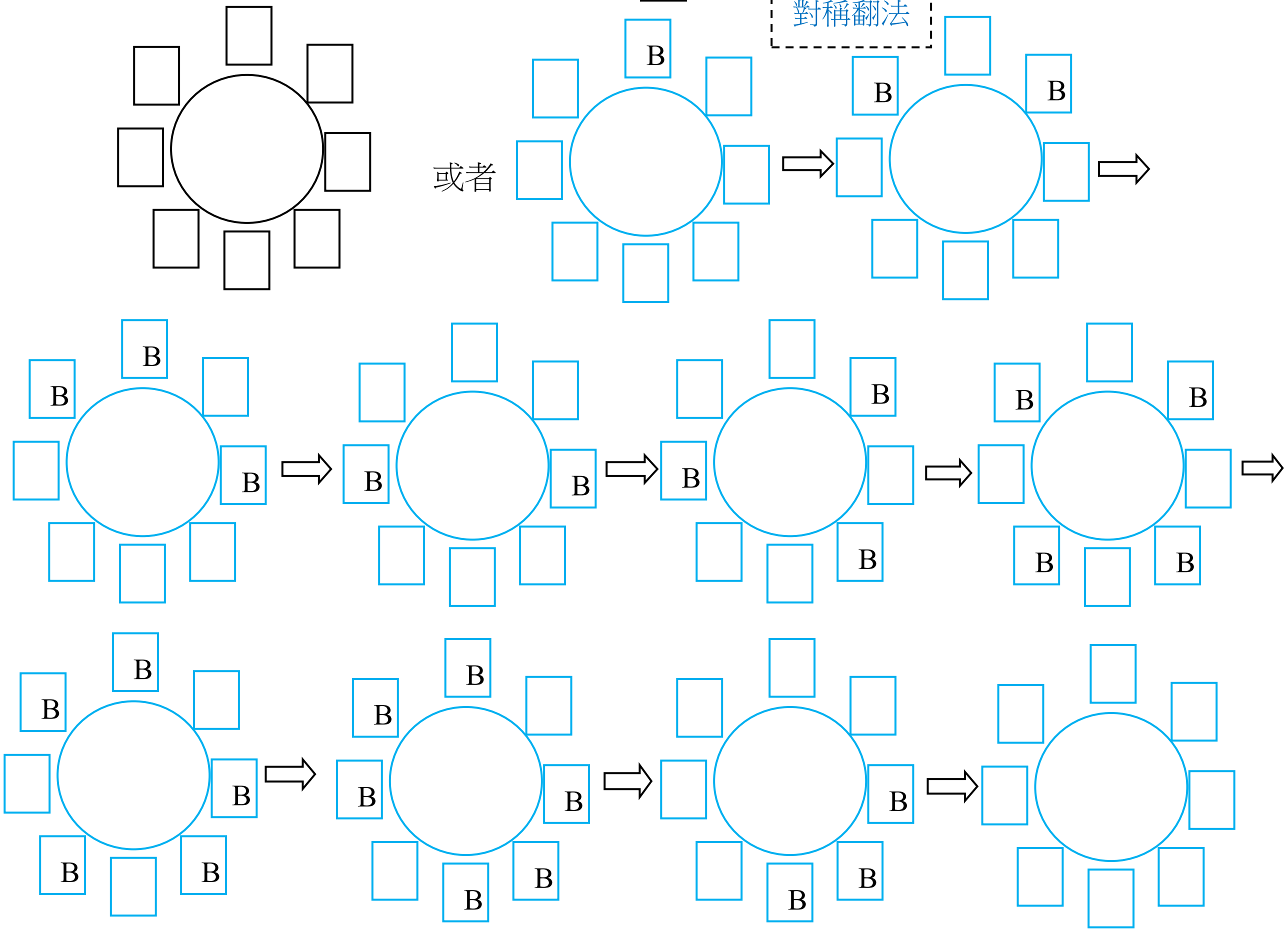
5、m=8

順時針翻法



或者

對稱翻法

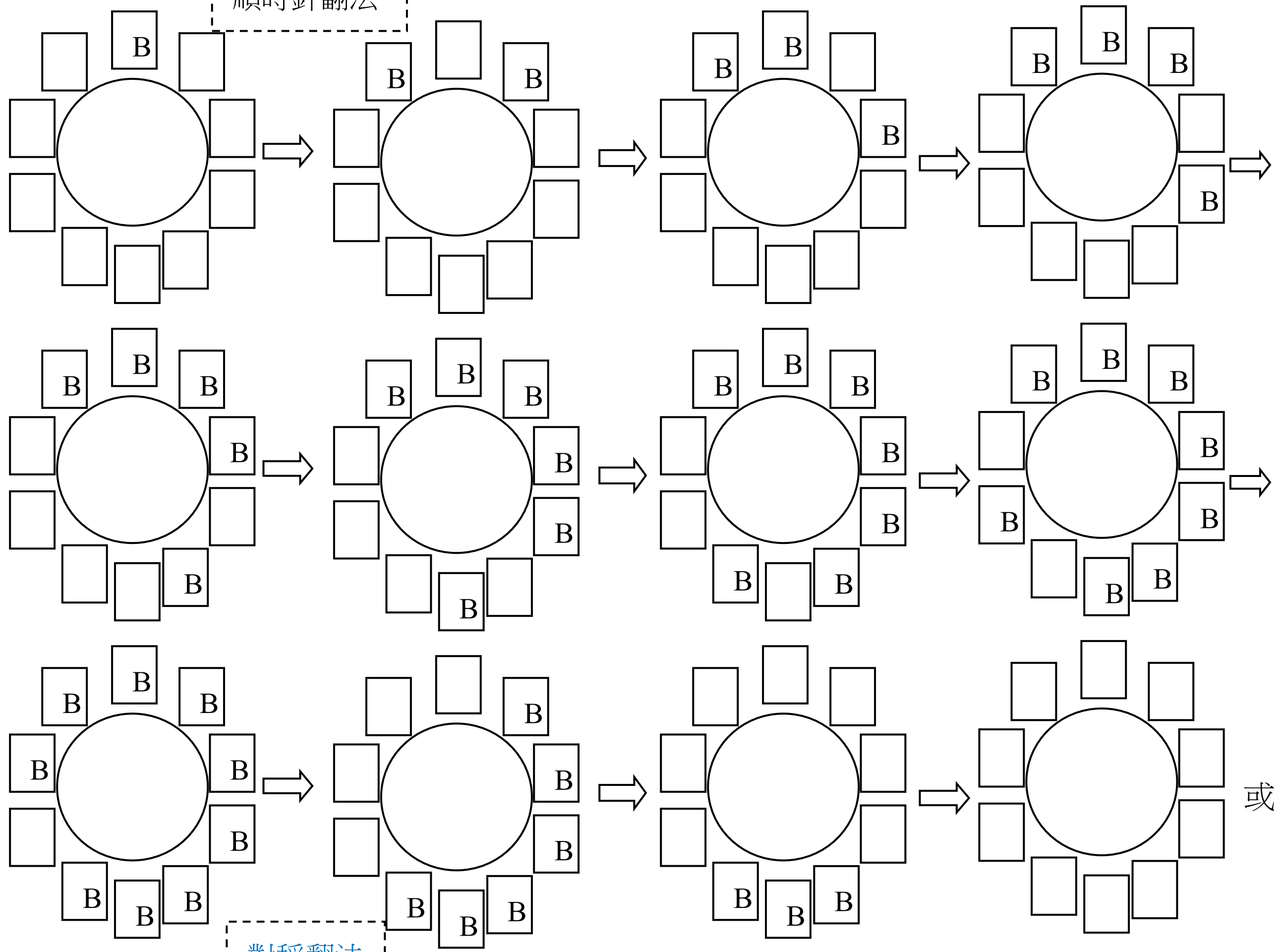


∴n=9

6、m=9 時無法翻成功 ∴n=0

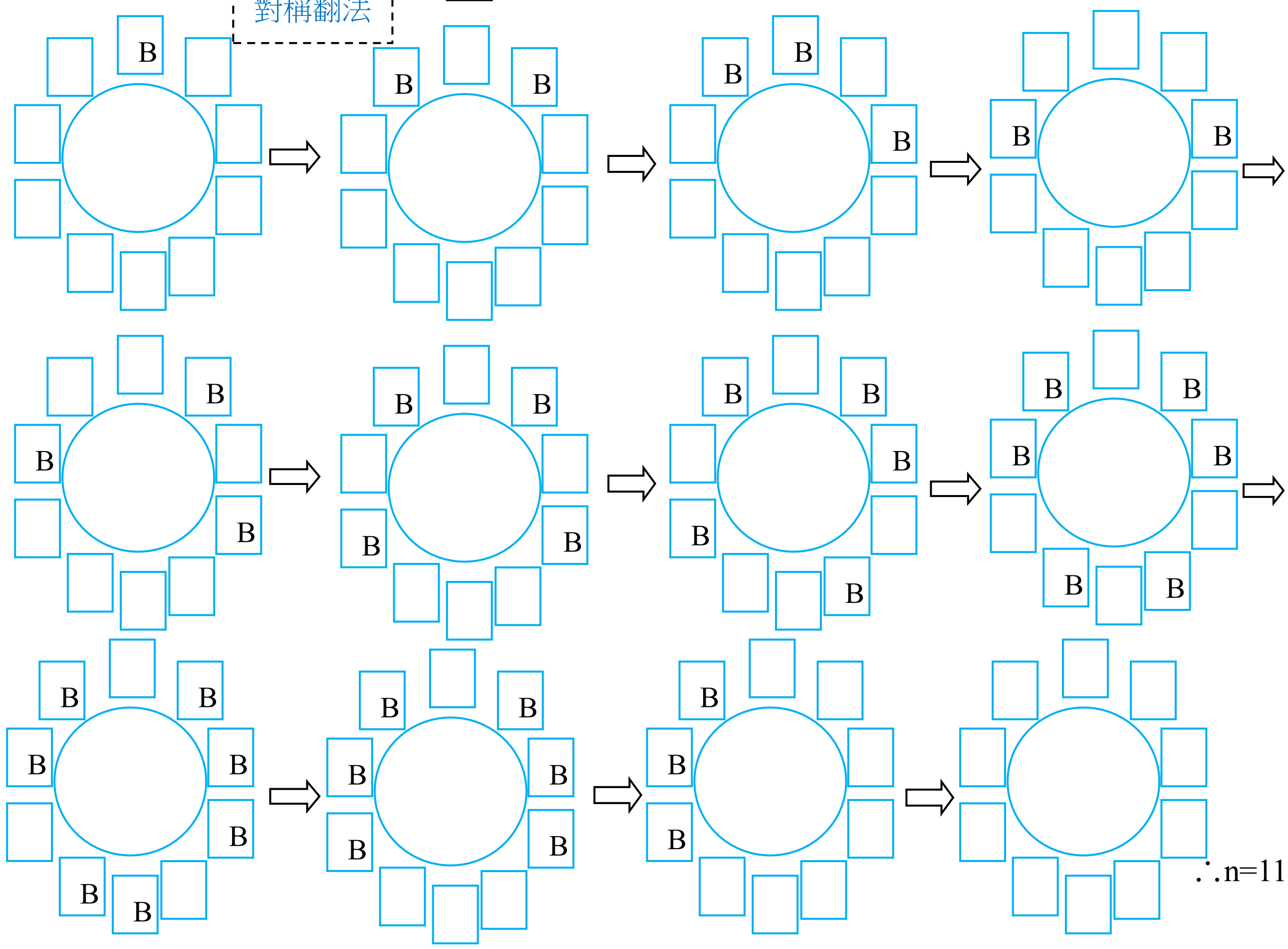
7、m=10

順時針翻法



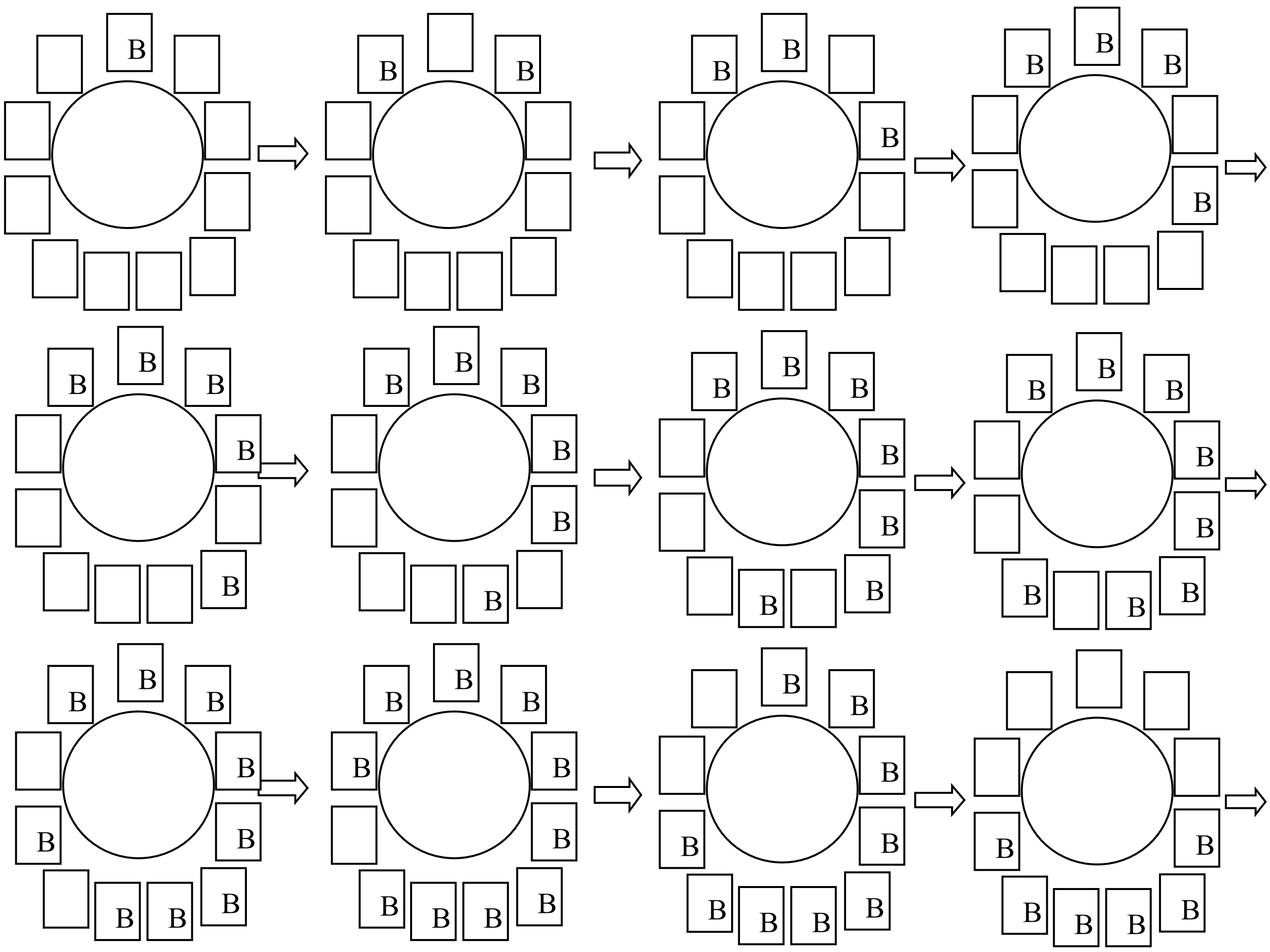
或

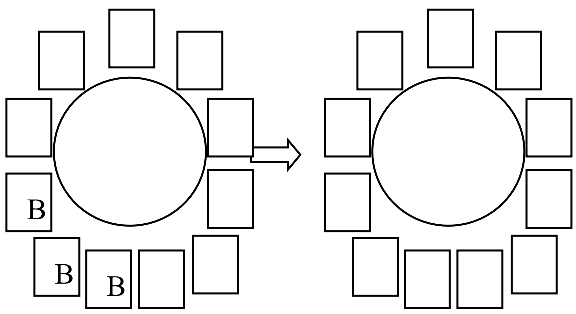
對稱翻法



∴n=11

8、m=11





∴n=13

9、m=12 時無法翻成功 ∴n=0

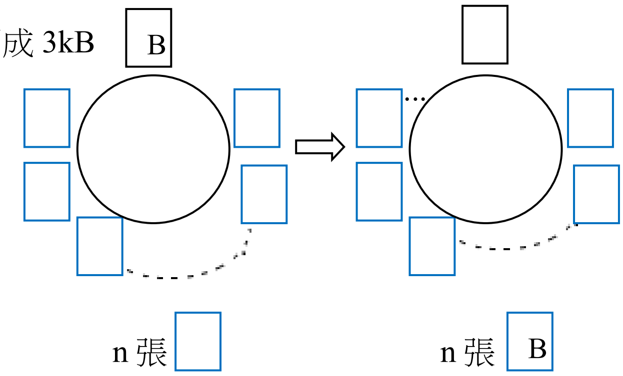
再列出表格觀察各達成步數所形成的數列 a_m(m≧3)：

書籤總張數 m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數列 a_m	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
達成步數 n	0	3	5	0	7	9	0	11	13	0	15	17	0
規律探討	(1) 「定理一」:若以 3 的餘數進行分類，則當 m=3k(k 為正整數)時，a_m= 0；當 m=3k+1 時，a_m= 4k-1；當 m=3k+2 時，a_m= 4k+1。 證明： ①當 m=3k(k 為正整數)時 a_m= 0：將於研究結果四補充說明及猜測推論。 ②當 m=3k+1 時 a_m= 4k-1：												

規律探討	

發現若採順時針翻法，經 n-1 步會翻成 nB→

∴m=3k+1 經 3k-1 步可以翻成 3kB
為 3 的倍數可以翻成功；
此時達成步數為
3k-1+ k= 4k-1。

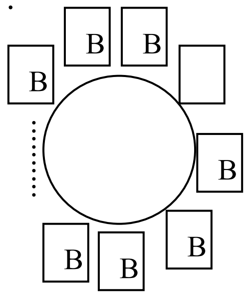


③當 m=3k+2 時 a_m= 4k+1：
承②順時針翻法經 3k+2-2=3k 步可以翻成(3k+1)B，
此時再翻會變成(3k+1)B-2B+1B=3kB，為 3 的倍數∴可以翻成功；
且達成步數為 3k+1+ k= 4k+1。

(2) 由 5、m=8 及 7、m=10 得知翻法並非唯一，而在只有一張黑色面朝上書籤的情況下，左右對稱，在此採取順時針方向翻法。

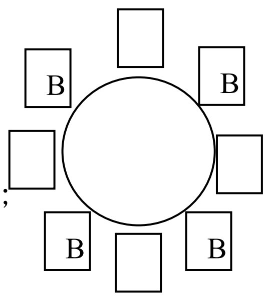
(3) 觀察猜測可以翻成功的類型：

①當 m=2k+1 奇數型時，形如



可以翻成功，但如先前例子 m=3、9 時亦無法成功。

②當 m=2k 偶數型時，形如黑白交錯

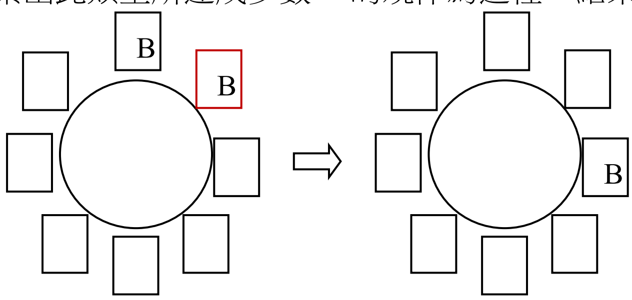


可以翻成功，但如先前例子 m=6、12 時亦無法成功；
而且 m=8 時可以翻成此類型，
m=10 時卻不能翻成此類型。

二、當固定只有二張黑色面朝上的書籤時，改變書籤總張數 m(m≧3)，以實際操作觀察探討所需步數 n，且若無法翻成功，同樣定義其步數 n=0：

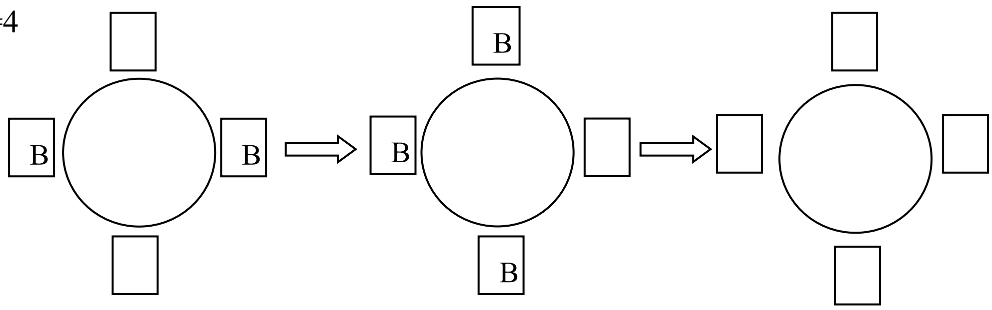
在此我們將分別討論二張黑色面朝上書籤與中間間隔白色面朝上書籤張數的各種情形(在此列出四種，其餘列入附件)，並一樣列表來觀察所需步數 n：

（一）2B 相鄰(二張黑色面朝上書籤中間間隔 0 張白色面朝上書籤)的情形：

書籤總張數 m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數列 a_m	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
達成步數 n	0	4	6	0	8	10	0	12	14	0	16	18	0
規律探討	(1)「定理二」:若以 3 的餘數進行分類，則當 m=3k(k 為正整數)時，a_m= 0；當 m=3k+1 時，a_m= 4k；當 m=3k+2 時，a_m= 4k+2。 證明： 當 m=3k(k 為正整數)時 a_m= 0：同樣於研究結果四說明。 當 m=3k+1 時 a_m= 4k 及當 m=3k+2 時 a_m= 4k+2： 由一開始翻開任一張黑色面朝上的書籤即成研究過程一 1 $\boxed{B}$的狀態，不難觀察出此類型所達成步數 n 的規律為過程一結果再加上 1 步。 												

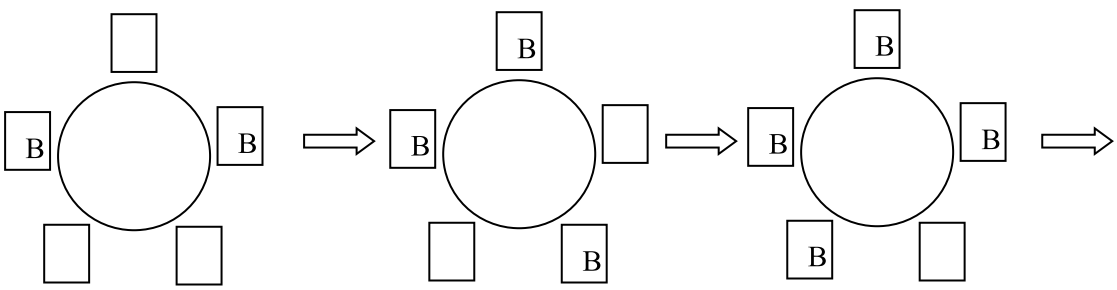
（二）2B 空一格(二張黑色面朝上書籤中間間隔 1 張白色面朝上書籤)的情形：

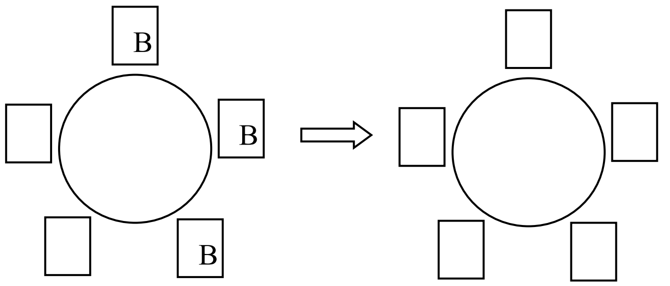
1、m=4



∴n=2

2、m=5

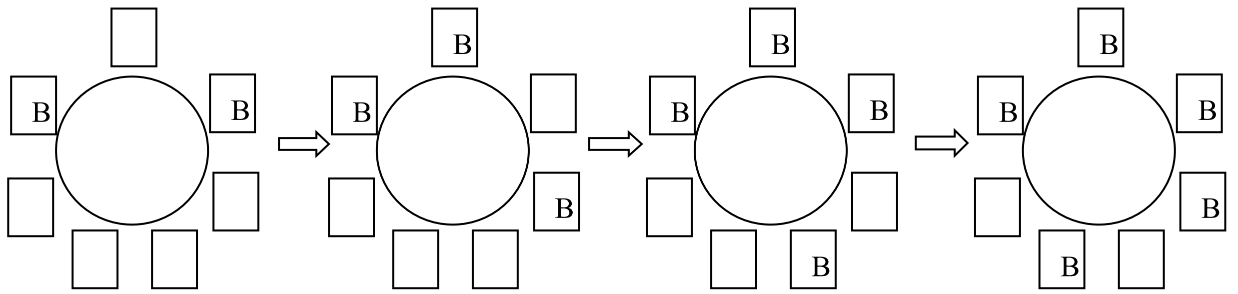


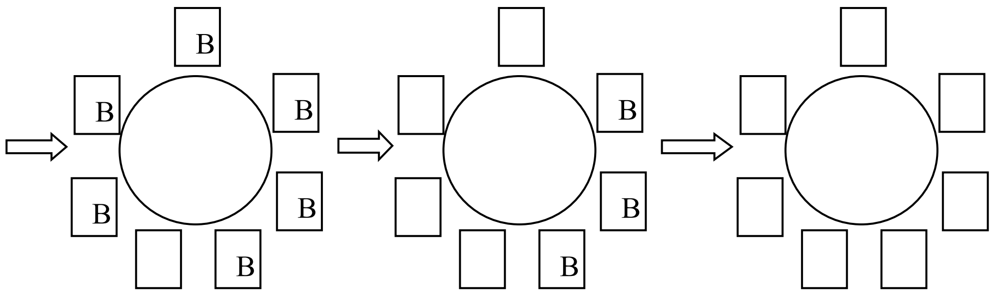


∴n=4

3、m=6 時無法翻成功 ∴n=0

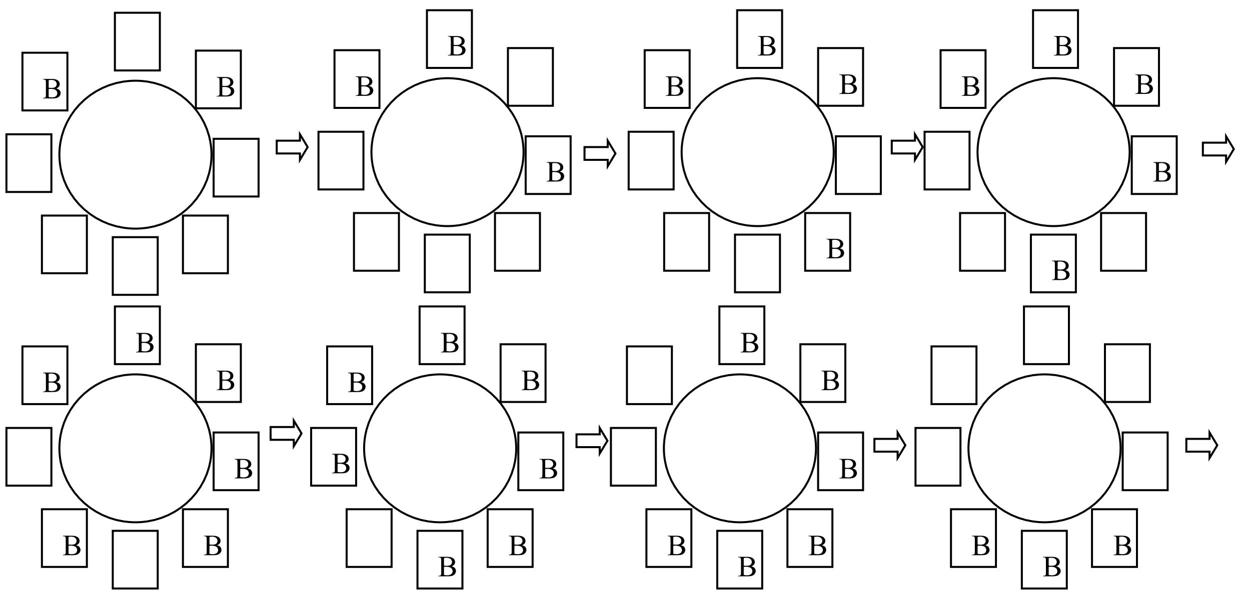
4、m=7

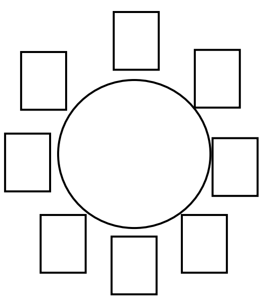




∴n=6

5、m=8

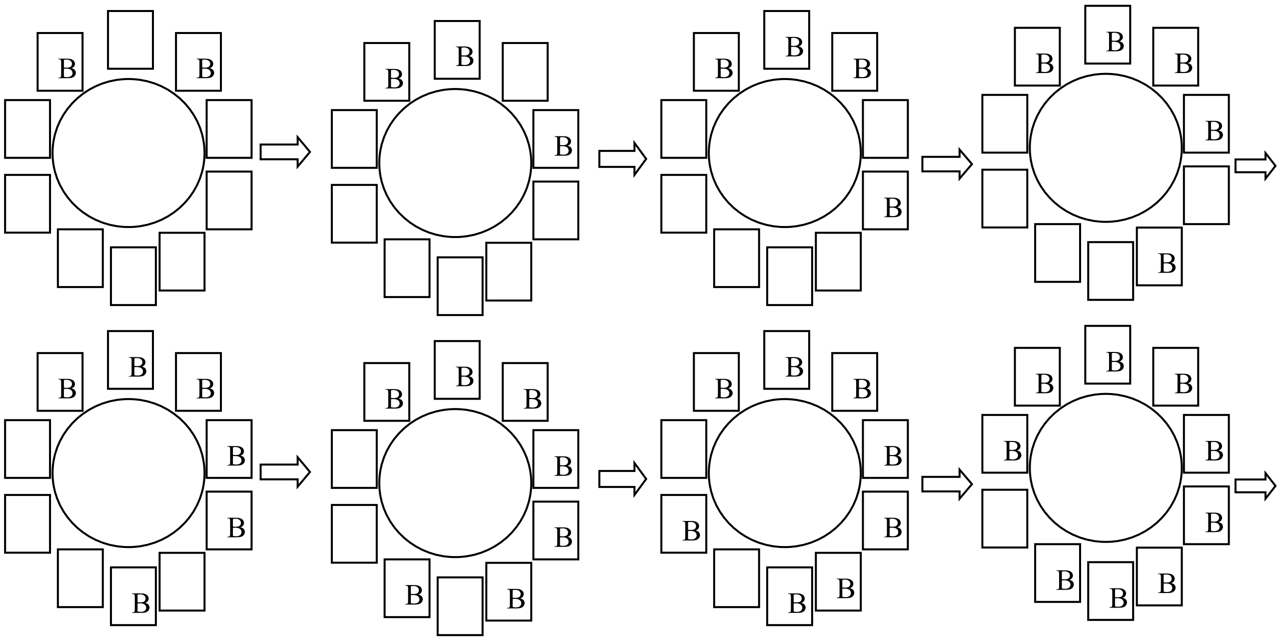


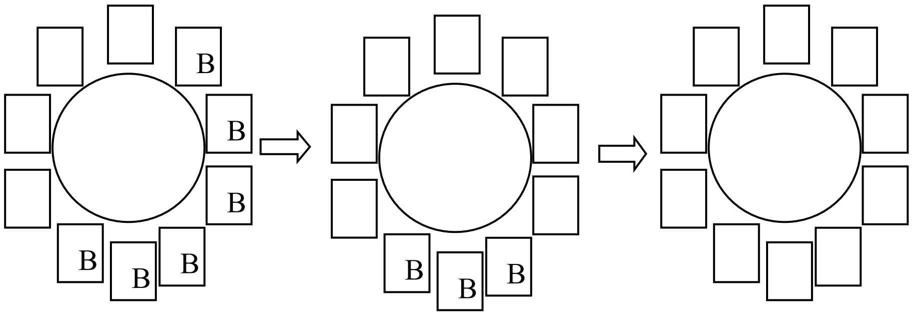


∴n=8

6、m=9 時無法翻成功 ∴n=0

7、m=10

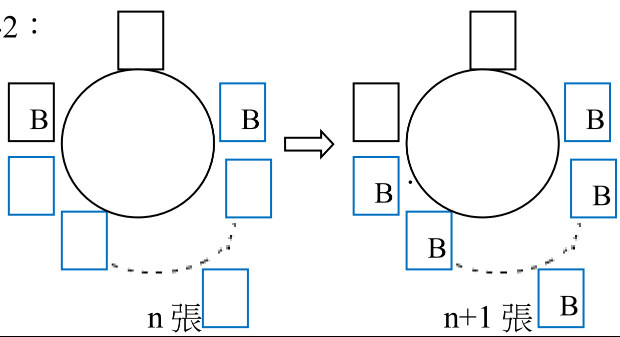




∴n=10

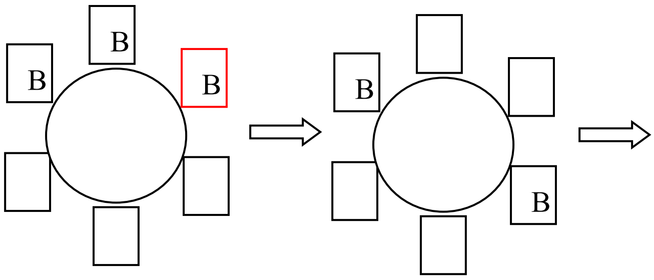
……………………………………………

再列出表格觀察各達成步數所形成的數列 a_m(m≧3)：

書籤總張數 m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數列 a_m	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
達成步數 n	0	2	4	0	6	8	0	10	12	0	14	16	0
規律探討	(1) 「定理三」:若以 3 的餘數進行分類，則當 m=3k(k 為正整數)時，a_m= 0；當 m=3k+1 時，a_m= 4k-2；當 m=3k+2 時，a_m= 4k。 證明： ①當 m=3k(k 為正整數)時 a_m= 0：同樣於研究結果四說明。 ②當 m=3k+1 時，a_m= 4k-2： 若採**順時針**翻法→經(n+1)步會翻成(n+1)B，而由(n+1)B 亦可初步判斷該類型是否可以翻成功。 													

規律探討	∴在 m=3k+1 時經 3k-1 步可以翻成(3k-1)B，但只要經 3k-2 步即可翻成 3kB，即可翻成功；此時所需步數為 3k-2+k=4k-2。 例如： m=10 時，順時針可以翻成 8B(需 8 步)，但在此 7 步就可以翻成 9B。 ③當 m=3k+2 時 a_m= 4k： 承②**順時針**翻法經 3k 步可以翻成 3kB 即可翻成功，且達成步數為 3k+k=4k。 (2) m=3 時與 2B 相鄰 m=3 時類型一樣。

由前述發現 1B、2B 相鄰及 2B 空一格時，當書籤總張數成 m=3k(k 為正整數)皆無法翻成功，不免想問那怎樣的狀態可以翻成功呢？逆推觀察 m=6：

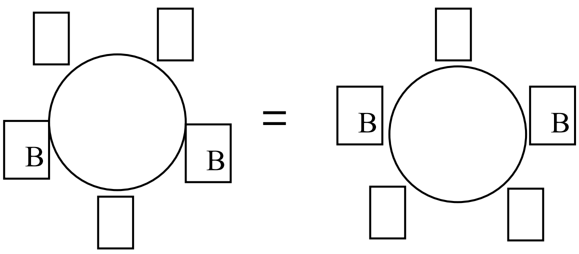


遂開啟了下面探究 2B 空二格的旅程……..

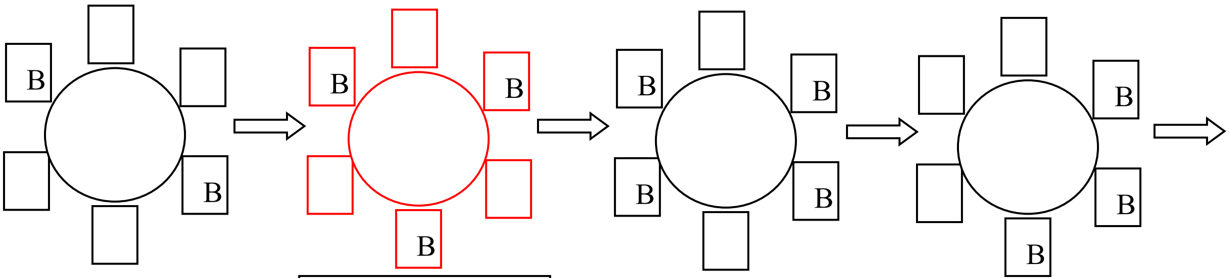
（三）2B 空二格(二張黑色面朝上書籤中間間隔 2 張白色面朝上書籤)的情形(m≧4)：

1、m=4 時與 2B 相鄰狀況相同 ∴n=4

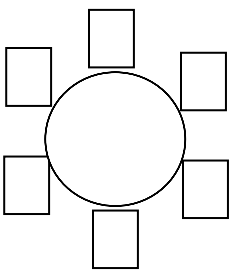
2、m=5 時與 2B 空一格狀況相同 ∴n=4



3、m=6

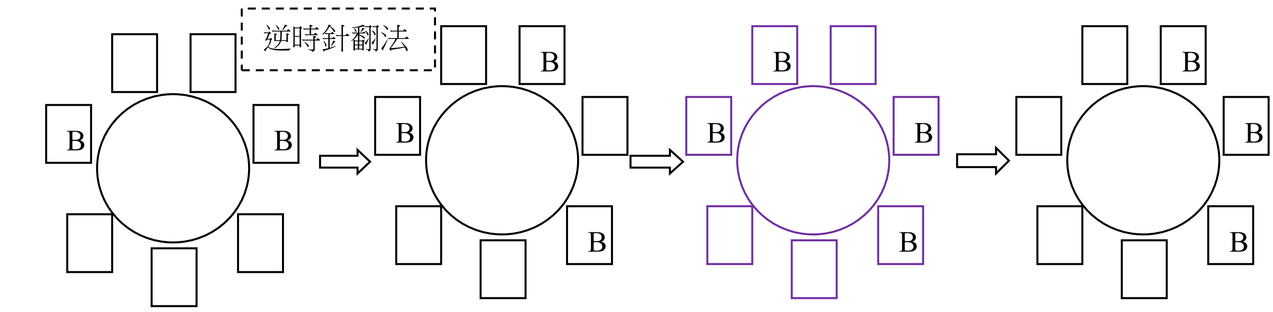


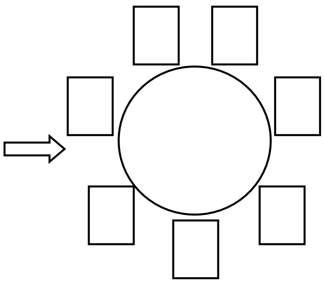
前面所說
偶數可翻成功型



∴n=4

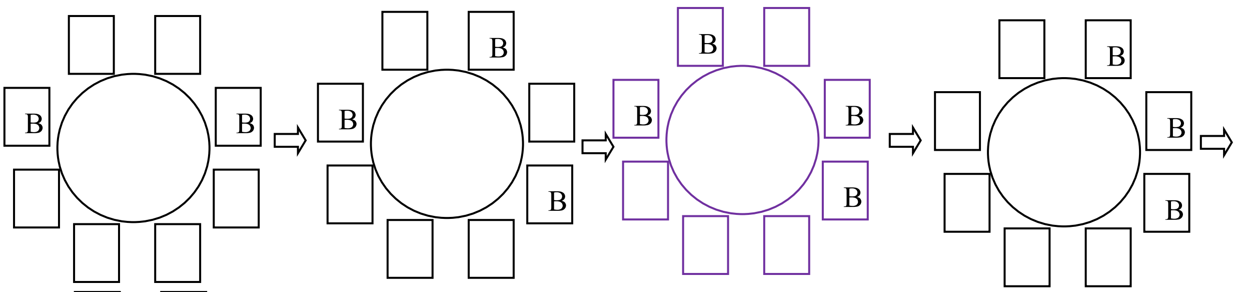
4、m=7 與 2B 空三格狀況相同

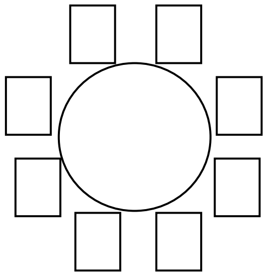




∴n=4

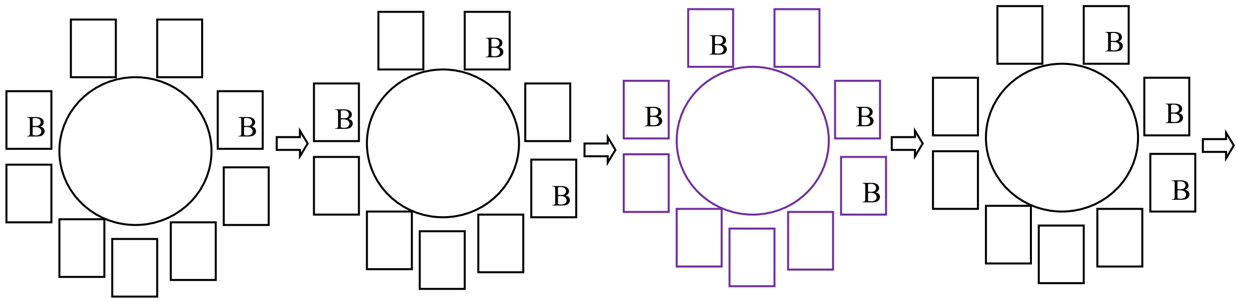
5、m=8 與 2B 空四格狀況相同

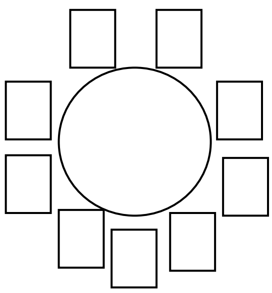




∴n=4

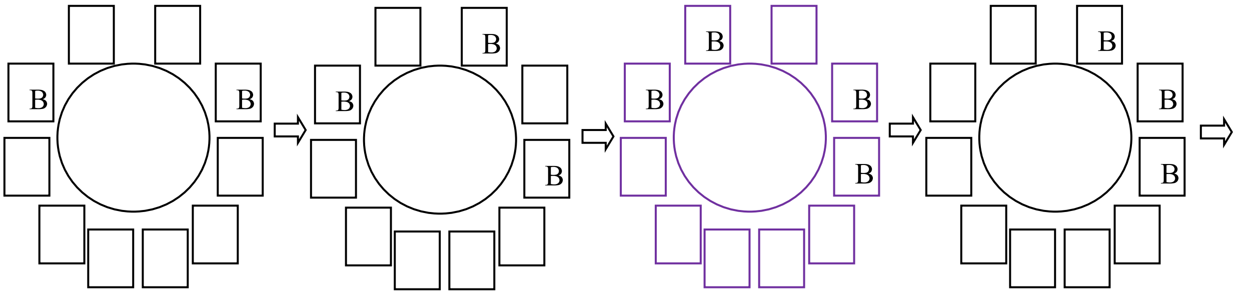
6、m=9 與 2B 空五格狀況相同

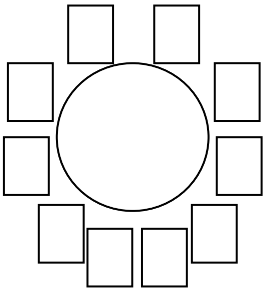




∴n=4

7、m=10 與 2B 空六格狀況相同

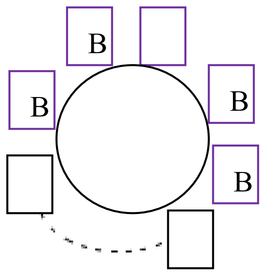


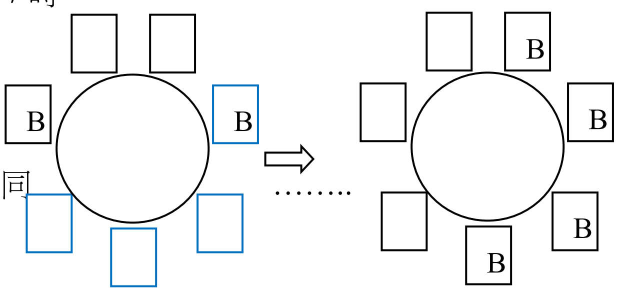


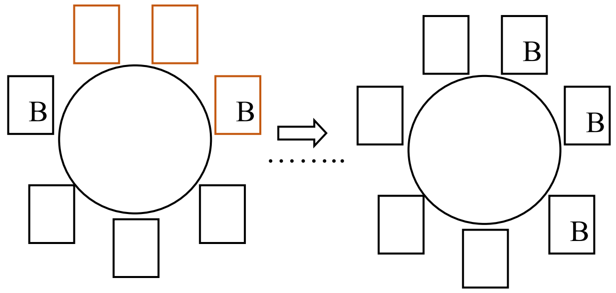
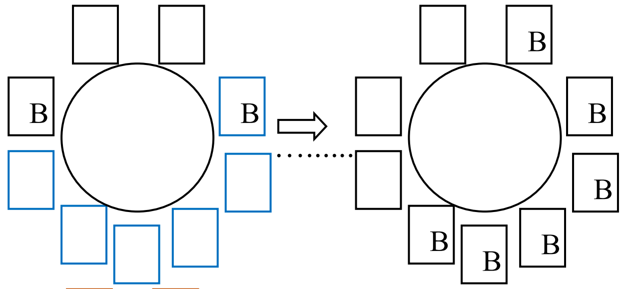
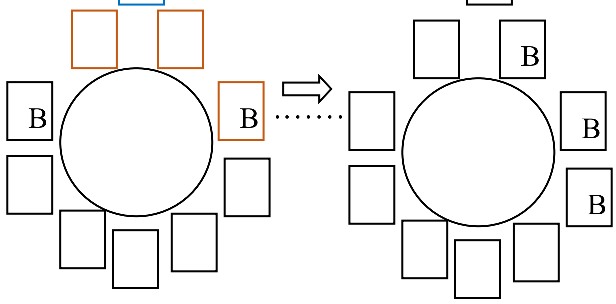
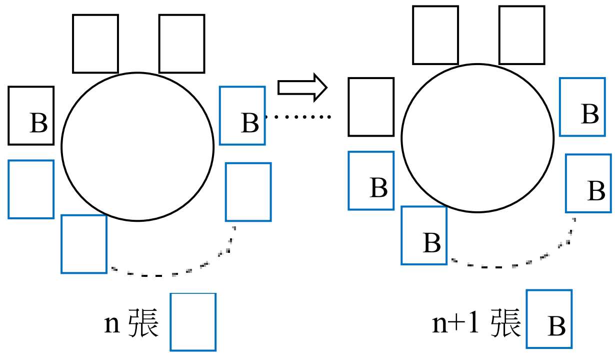
∴n=4

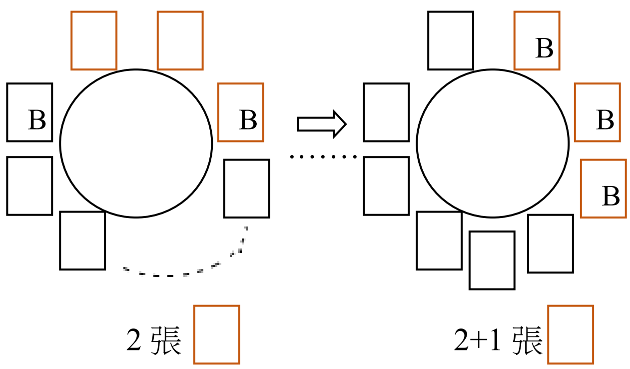
……………………………………………

再列出表格觀察各達成步數所形成的數列 a_m(m≧4)：

<table>
<tr><td>書籤總張數 m</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>數列 a_m</td><td>a_4</td><td>a_5</td><td>a_6</td><td>a_7</td><td>a_8</td><td>a_9</td><td>a_{10}</td><td>a_{11}</td><td>a_{12}</td><td>a_{13}</td><td>a_{14}</td><td>a_{15}</td></tr>
<tr><td>達成步數 n</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>規律探討</td><td colspan="12">(1) 過程中會發現可翻成功型：


(2) 「定理四」：當 m 為≧4 的整數時，a_m= 4 (達成步數皆相同)。
證明：
一般而言，如先前研究過程，其操作翻法大多是各種類型依順時針方向而翻動，而觀察 4、m=7 時：
若順時針翻法會翻成 4B
此時再翻即與 1B(m=7)相同
∴n=7+4+1=12

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>規律探討</td>
<td>
若逆時針翻法會翻成 3B
∴n=4

再觀察 6、m=9 時：
若順時針翻法會翻成 6B
此時 n=8

若逆時針翻法會翻成 3B
∴n=4

初步可得順時針翻法→
會翻成(n+1)B，
而由(n+1)B 亦可初步
判斷該類型是否可以
翻成功。


若逆時針翻法→
會翻成 3B
∴n=4


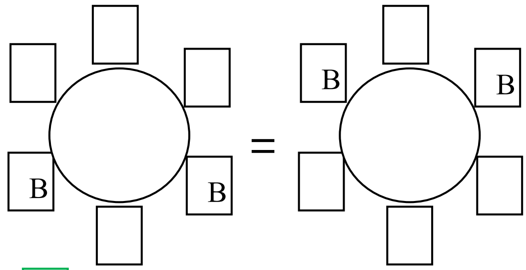
</td>
</tr>
</table>

（四）2B 空三格(二張黑色面朝上書籤中間間隔 3 張白色面朝上書籤)的情形(m≧5)：

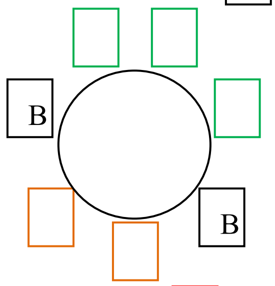
1、m=5 時與 2B 相鄰狀況相同 ∴n=6

2、m=6 時與 2B 空一格狀況相同無法翻成功

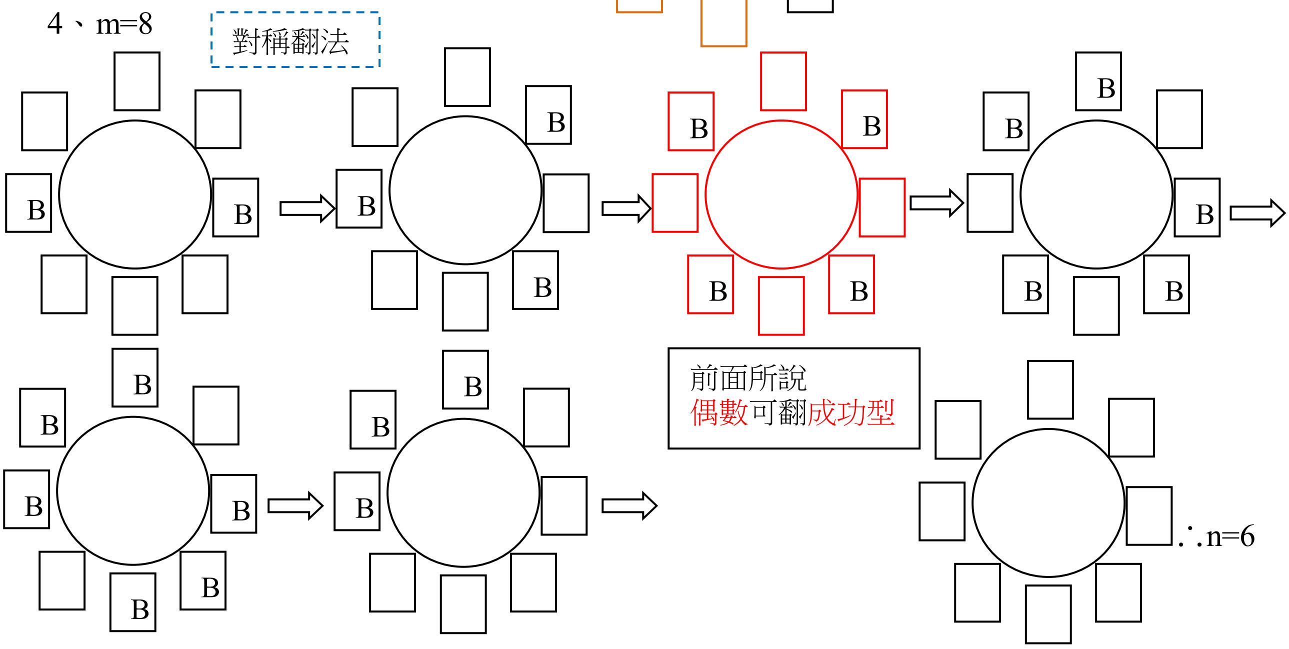
∴n=0



3、m=7 與 2B 空二格狀況相同 ∴n=4



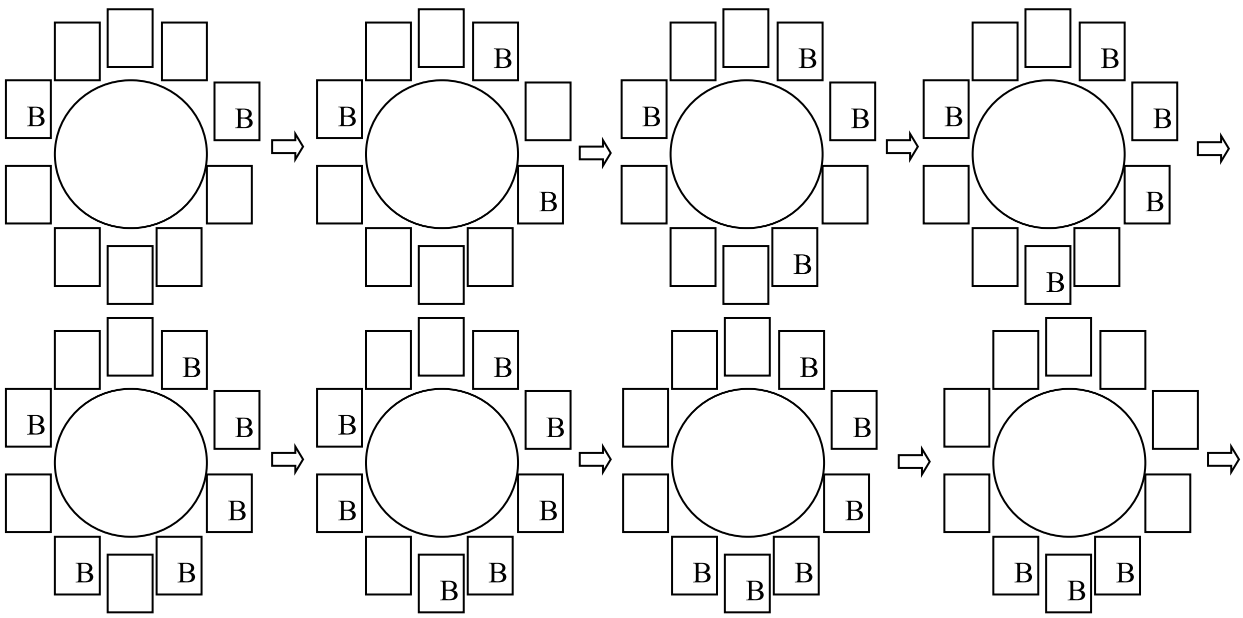
4、m=8

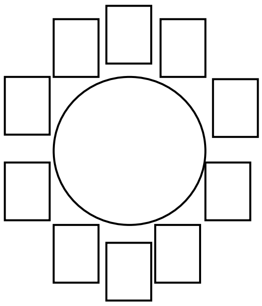


∴n=6

5、m=9 時與 2B 空四格狀況相同，∵無法翻成功 ∴n=0

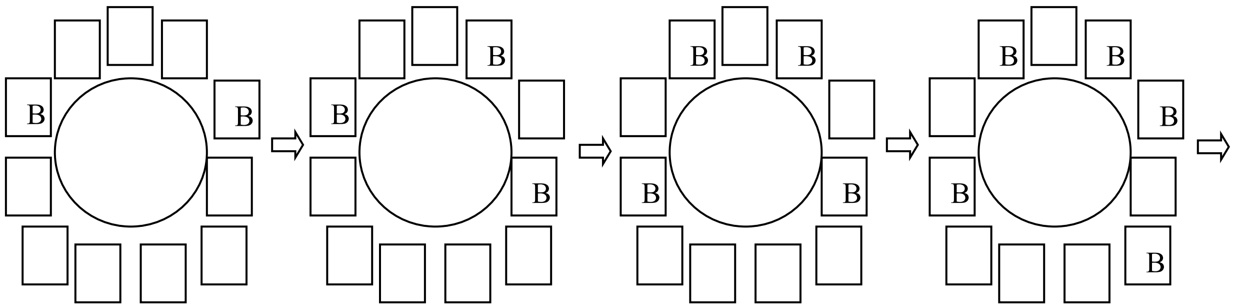
6、m=10 時與 2B 空五格狀況相同

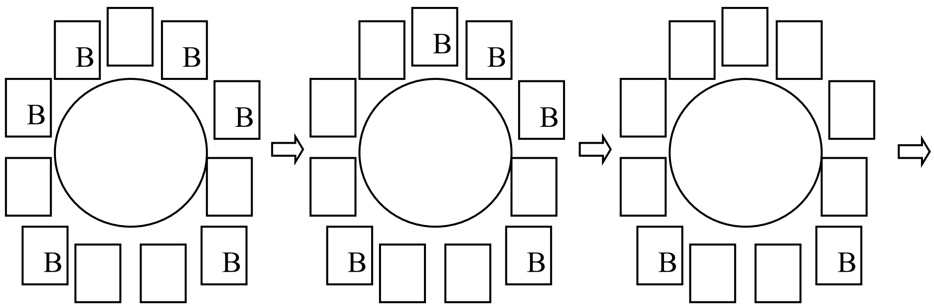




∴n=8

7、m=11 時與 2B 空六格狀況相同

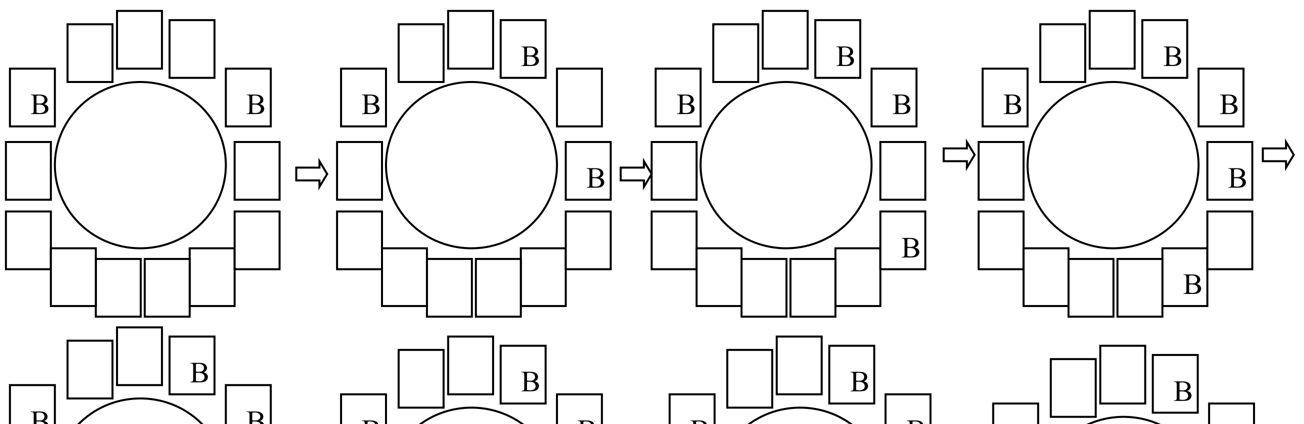


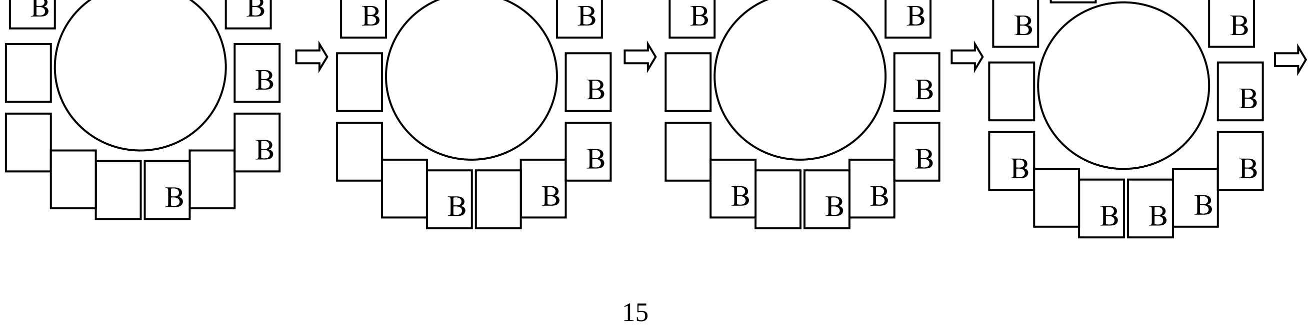


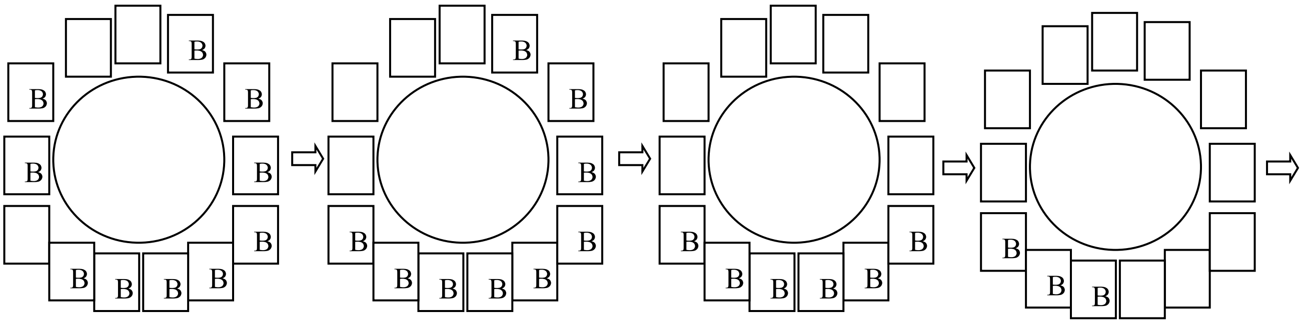
此時與 2B 空二格狀況相同 ∴n=6+4=10

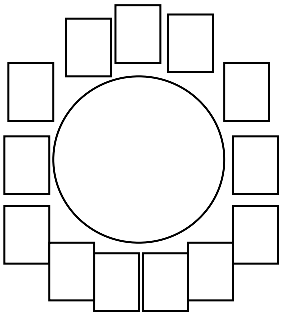
8、m=12 時與 2B 空七格狀況相同，∵無法翻成功 ∴n=0

9、m=13 時與 2B 空八格狀況相同



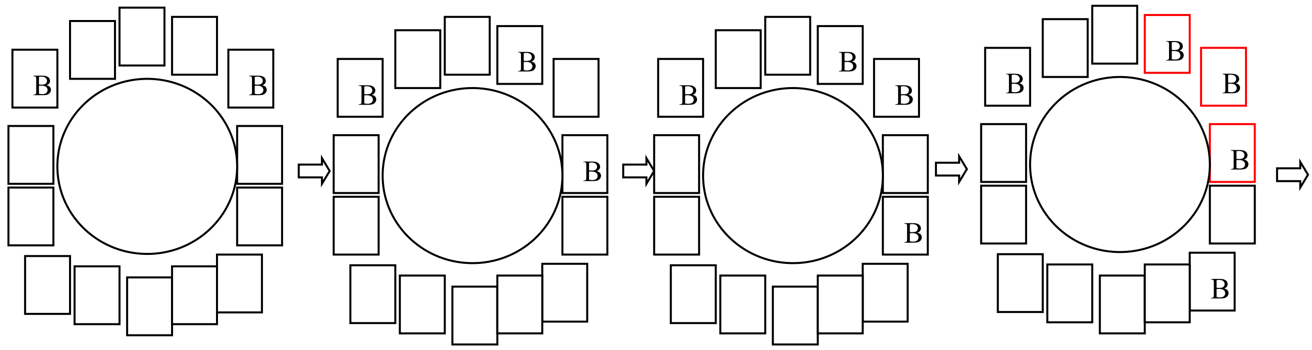




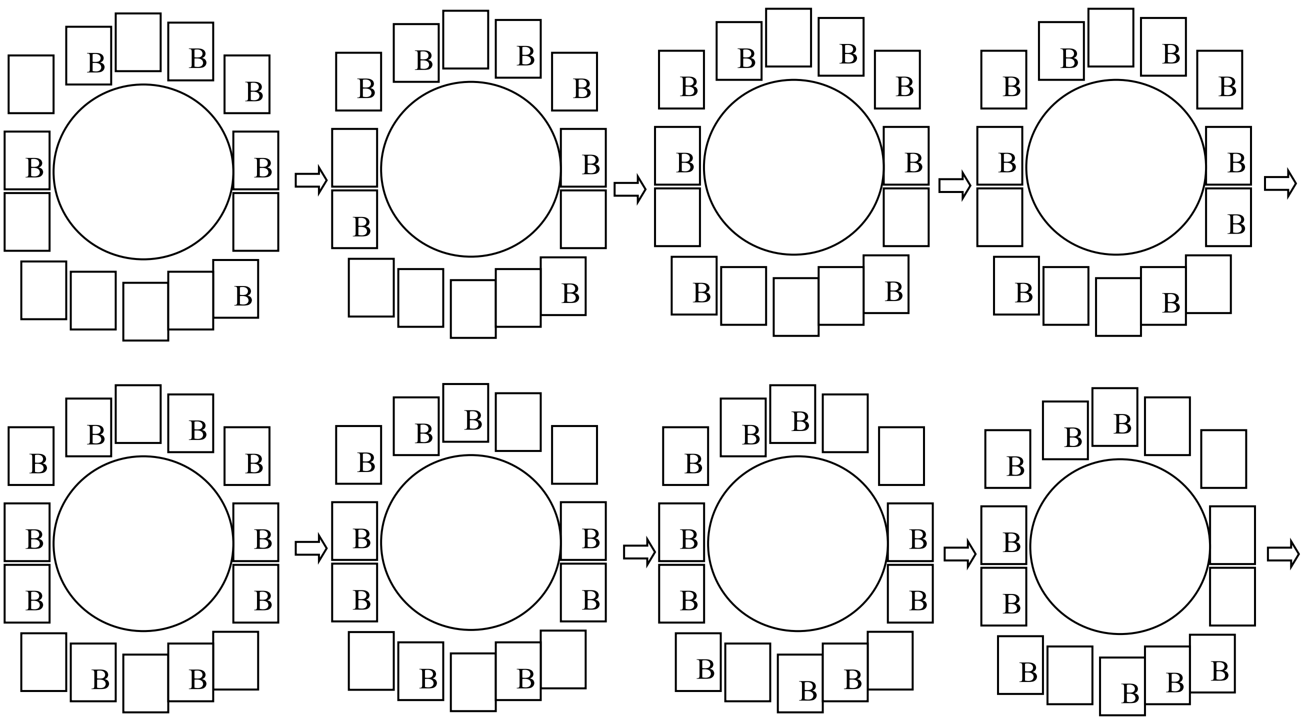


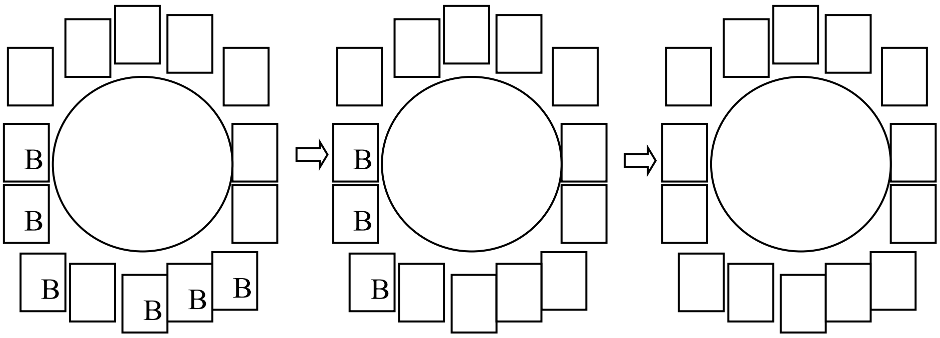
∴.n=12

10、m=14 時與 2B 空九格狀況相同



若右上 3B 翻完後，可變成 2B 空六格對稱





∴.n=14

再列出表格觀察各達成步數所形成的數列 a_m(m≧5)：

書籤總張數 m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數列 a_m	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
達成步數 n	×	×	6	0	4	6	0	8	10	0	12	14	0

規律探討

(1)「定理五」:

若以 3 的餘數進行分類，則當 m=3k(k≧2 為正整數)時，a_m= 0；

當 m=3k+1(k≧2)時，a_m= 4k-4；當 m=5 時，a_m= 6；

當 m=3k+2(k≧2)時，a_m= 4k-2。

證明：

①當 m=3k(k≧2 為正整數)時 a_m= 0：同樣於研究結果四說明。

②當 m=3k+1(k≧2)時 a_m= 4k-4：

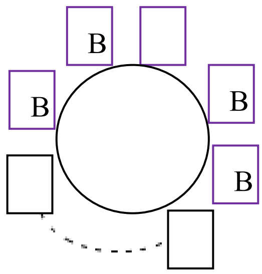
如前面**順時針**翻法經 3k+1-4=3k-3 步可以翻成 3(k-1)B 為 3 的倍數 ∴.可以翻成功且達成步數為 3k-3+ k-1=4k-4。

③當 m=3k+2(k≧2)時 a_m= 4k-2：

在 m=8 時如前面**對稱**翻法經 6 步可以翻成功；

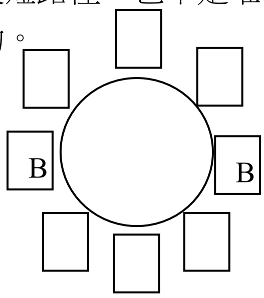
在 m=11 時如前面**對稱**翻法翻成 2B 空二格經 10 步可以翻成功；

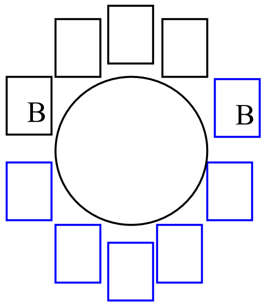
在 m=14 時如前面**對稱**翻法翻成可翻成功型經 14 步可以翻成功；



但可惜尚未找到對稱翻法的判斷及可解策略，目前僅能透過實際操作去進行推測。

(2) 在 m=8 時，如前面**順時針**或**逆時針**翻法，皆會翻成 4B，此時再翻會成為 1B(m=8) ∴.n=5+9=14，但實際需要步數 n=6，可見**順時針**或**逆時針**翻法並不是最短路徑，也不是唯一的翻法，但可以初步判斷該類型是否可以翻成功。



規律探討	；在 m=10 時，如前面**順時針**翻法，判斷可翻成 6B，故可以翻成功。  ；又 m=11 時，若**順時針**翻法會翻成 7B，此時達成步數 n=22， 若**逆時針**翻法會翻成 4B，此時達成步數 n=18， 但依 7、m=11 時的**對稱**翻法，可達成步數 n=10 更少。

肆、研究結果

一、觀察 1B 至 2B 空三格的情形：

書籤類型 發現	1B	2B 相鄰	2B 空一格	2B 空二格	2B 空三格
書籤總張數 m 條件限制	m≧3	m≧3	m≧3	m≧4	m≧5
翻開所需達成步數 a_m 有等差數列的規律：	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數且 k≧2)a_m
m=3k	0	0	0	4	0
m=3k+1	4k-1	4k	4k-2	4	4k-4
m=3k+2	4k+1	4k+2	4k	4	4k-2 但是當 m=5 時，$a_m = 6$
其他	1.翻法並非唯一，且在 2B 空一、二、三格時皆能由**順時針**或**逆時針**翻法初步判斷該類型是否可以翻成功及得到依該翻法所需達成的步數，但同樣不是唯一的翻法及未必是達成其所需的最短路徑。 2.在研究的過程中可以觀察到一些可翻成功的模式類型，如 1B 及 2B 空二格的過程。 3.因環狀排列及書籤張數關係，會發現某些類型有重複出現過的情形：如在 2B 空三格中，當 m=5 時與 2B 相鄰狀況相同；m=6 時與 2B 空一格狀況相同；m=7 時與 2B 空二格狀況相同。基本上隨著書籤總張數及中間間隔白色面朝上書籤數遞增的情形下，這樣重複先前出現的狀況會漸趨更多。				

二、固定 2B 探討隨書籤張數增加時，其規律變化情形：

(一)2B 中間間隔白色朝上書籤數為 3t(3 的倍數)的情形				
書籤類型 / 發現	2B 相鄰	2B 空三格	2B 空六格	2B 空九格
書籤總張數 m 條件限制	m≧3	m≧5	m≧8	m≧11
翻開所需達成步數 a_m 有等差數列的規律：	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數 且 k≧2)a_m	(k 為正整數 且 k≧3)a_m	(k 為正整數 且 k≧4)a_m
m=3k	0	0	0	0
m=3k+1	4k	4k-4	4k-8	4k-12
m=3k+2	4k+2	4k-2 而 k=1 時，$a_m = 6$	4k-2 而 k=2 時，$a_m = 10$	4k-2 而 k=3 時，$a_m = 14$

(二)2B 中間間隔白色朝上書籤數為 3t+1(被 3 除餘 1)的情形				
書籤類型 / 發現	2B 空一格	2B 空四格	2B 空七格	2B 空十格
書籤總張數 m 條件限制	m≧3	m≧6	m≧9	m≧12
翻開所需達成步數 a_m 有等差數列的規律：	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數 且 k≧2)a_m	(k 為正整數 且 k≧3)a_m	(k 為正整數 且 k≧4)a_m
m=3k	0	0	0	0
m=3k+1	4k-2	4k-2	4k-2	4k-2
m=3k+2	4k	4k-4	4k-8	4k-12

三、固定書籤張數探討 2B 各類型間有何規律變化情形：

(三)2B 中間間隔白色朝上書籤數為 3t+2(被 3 除餘 2)的情形				
書籤類型 / 發現	2B 空二格	2B 空五格	2B 空八格	2B 空十一格
書籤總張數 m 條件限制	m≧4	m≧7	m≧10	m≧13
翻開所需達成步數 a_m 有等差數列的規律：	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數 且 k≧2)a_m	(k 為正整數 且 k≧3)a_m	(k 為正整數 且 k≧4)a_m
m=3k	4(k≧2)	8(k≧4) 而 k=3 時，$a_m = 4$	12(k≧6) 而 k=4 時，$a_m = 4$；k=5 時，$a_m = 8$	16(k≧8) 而 k=5 時，$a_m = 4$；k=6 時，$a_m = 8$；k=7 時，$a_m =12$
m=3k+1	4	8	12	16
m=3k+2	4	8	12	16

(以下 $2B_n$ 代表 2B 中間間隔 n 張白色書籤)

書籤張數 m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2B 達成步數 n	0	4	6	0	8	10	0	12	14	0	16	18	0
$2B_1$ 達成步數 n	0	2	4	0	6	8	0	10	12	0	14	16	0
$2B_2$ 達成步數 n	×	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$2B_3$ 達成步數 n	×	×	6	0	4	6	0	8	10	0	12	14	0
$2B_4$ 達成步數 n	×	×	×	0	6	4	0	10	8	0	14	12	0
$2B_5$ 達成步數 n	×	×	×	×	8	8	4	8	8	8	8	8	8
$2B_6$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	10	0	4	10	0	8	14	0
$2B_7$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	0	10	4	0	14	8	0
$2B_8$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	12	12	4	12	12	8
$2B_9$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	×	14	0	4	14	0
$2B_{10}$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0	14	4	0
$2B_{11}$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	16	16	4
$2B_{12}$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	18	0
$2B_{13}$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0

=>

(1)當固定書籤總張數時，2B 各類型的達成步數 n 形成一對稱數列，這是因為環狀排列時，隨著書籤張數增加，重複情形亦伴隨出現的情形。

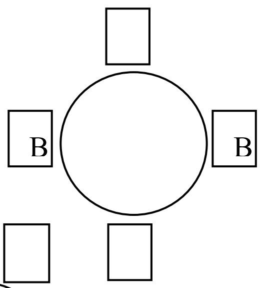
例如：m=7 時，對稱數列為 864468

8	6	4	4	6	8
2B 相鄰	2B 空 1 格	2B 空 2 格	2B 空 3 格	2B 空 4 格	2B 空 5 格

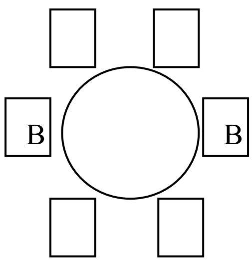
(2)當書籤張數為奇數時，其對稱數列為偶數項；

書籤張數為偶數時，其對稱數列為奇數項，且正中間灰色區塊項為上下間隔白色書籤數恰好相同時(2B 對稱類型)。

例如： m=4 時，$2B_1$ 之 $\boxed{2}$→



m=6 時，$2B_2$ 之 $\boxed{4}$→



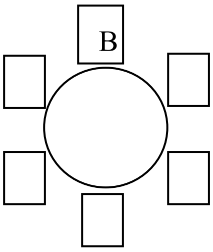
四、探討前述書籤張數為 3 的倍數時無法翻成功的理由：

進一步思考如何證明當上述 1B、2B 各類型(除了 2B 中間間隔白色朝上書籤數為 3t+2 的情形) 書籤張數為 3 的倍數時，無法翻成功的原因：在此我們考量「不限制每次只可翻黑色朝上書籤」(即白色朝上書籤亦可翻的可逆翻法)+「窮舉法」(分類所有可能書籤情形)分別說明書籤張數為 6 及 9 張的情形，心想若在此狀況下仍然無法翻成功，猜測所有 3 的倍數皆不行→

(一) m=6 時：

1.0B 顯而易見。

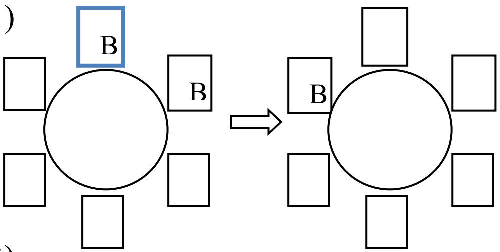
2.1B 如附件無法翻成功。



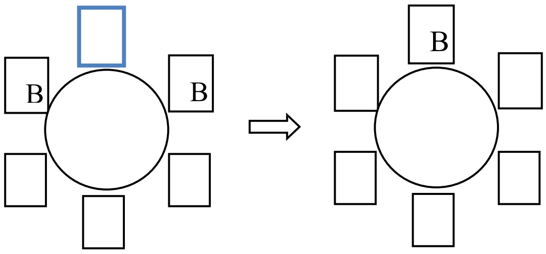
3.2B 共三種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

4W=(1) 4+0 =(2) 3+1 =(3) 2+2

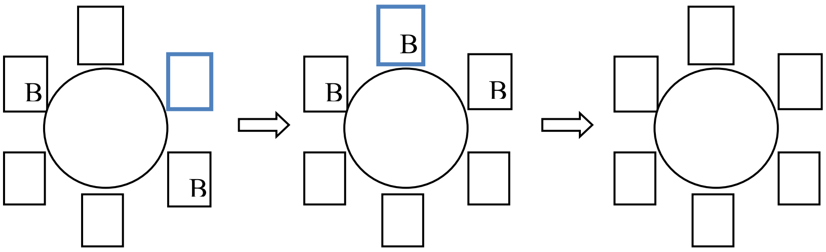
(1)



(2)



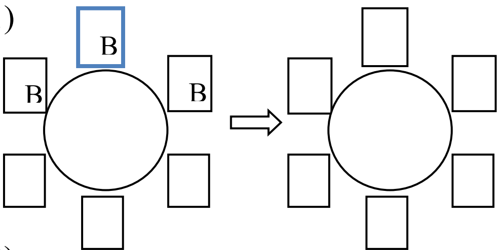
(3)



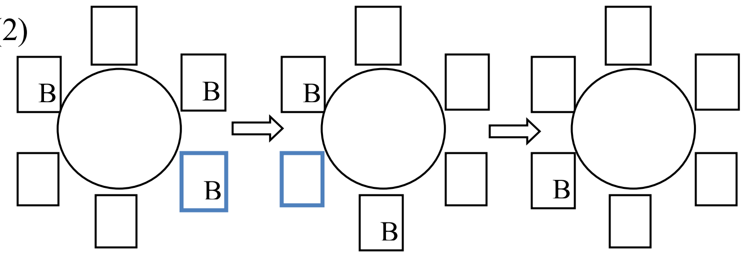
4.3B 共三種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

3W=(1) 3+0 =(2) 2+1 =(3) 1+1+1

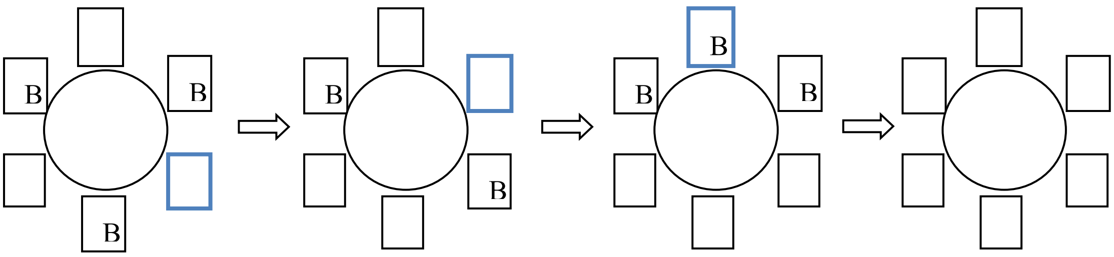
(1)



(2)



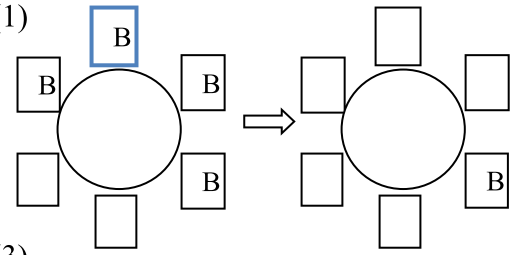
(3)



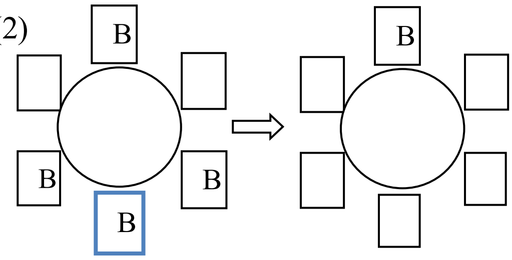
5.4B 共三種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

2W=(1) 2+0 =(2) 1+1 =(3) 1+1

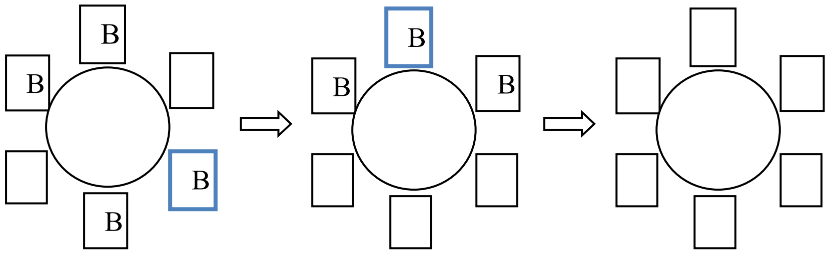
(1)



(2)



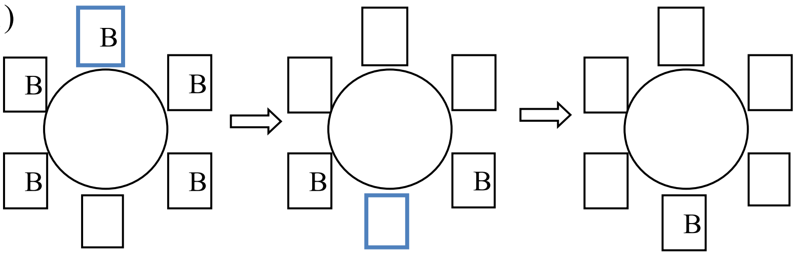
(3)



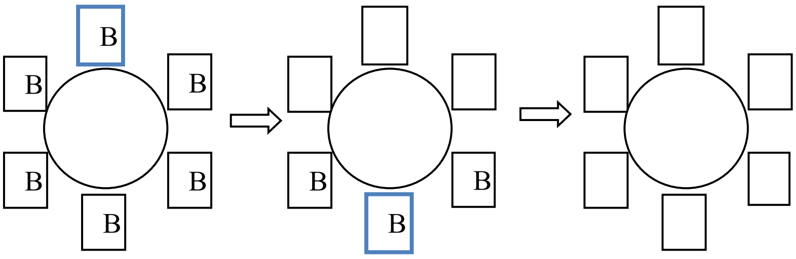
6.5B 共一種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

1W=(1) 1+0

(1)



7.6B 共一種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

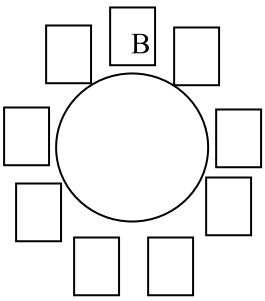


∴m=6 共可分成 2 種等價類群	
0B 可翻成功型	1B 不可翻成功型
0B⇆2B 空二格⇆3B(3+0)⇆3B(1+1+1)⇆ 4B(1+1)⇆ 6B	1B⇆2B 相鄰⇆2B 空一格⇆3B(2+1)⇆ 4B(2+0)⇆ 5B
→由此可推得前面研究內容中 m=6 時無法翻成功	

(二) m=9 時：

1.0B 顯而易見。

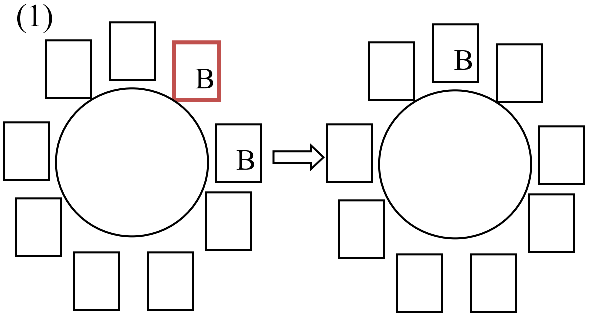
2.1B 如附件無法翻成功。



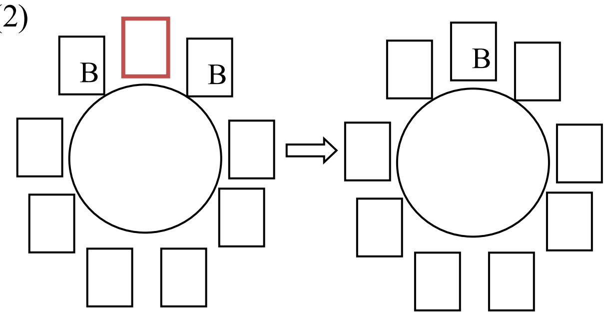
3.2B 共四種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

7W=(1) 7+0 =(2) 6+1 =(3) 5+2 =(4) 4+3

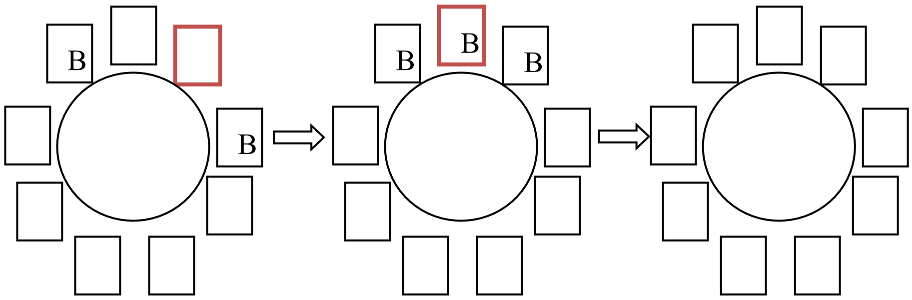
(1)



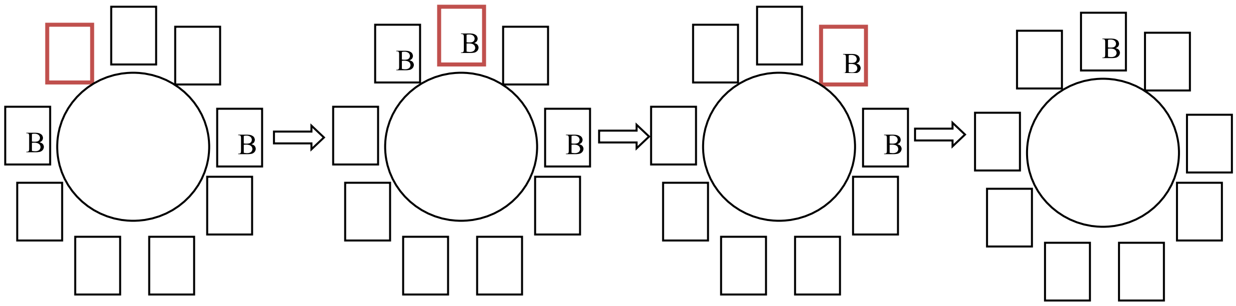
(2)



(3)



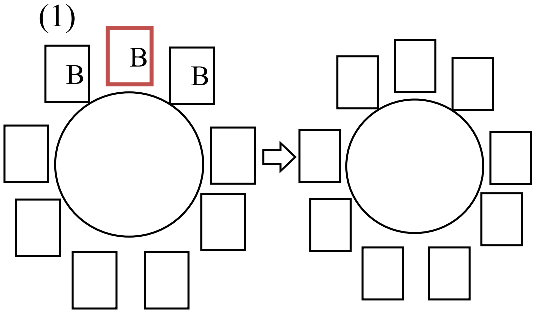
(4)



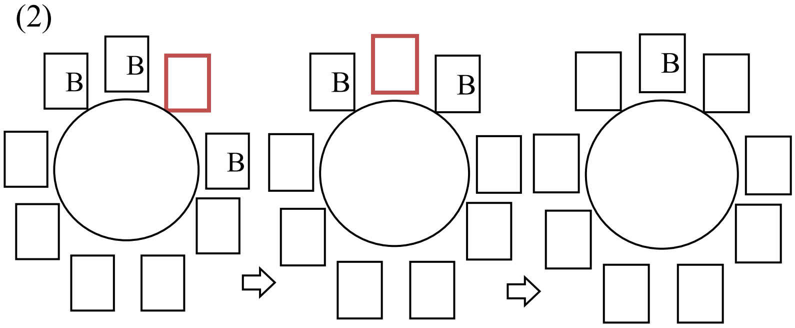
4.3B 共七種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

6W=(1) 6+0 =(2) 5+1 =(3) 4+2 =(4) 3+3=(5) 4+1+1 =(6) 3+2+1 =(7) 2+2+2

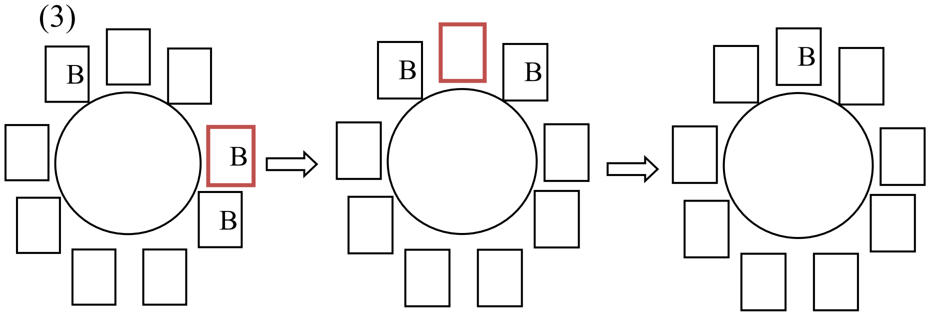
(1)



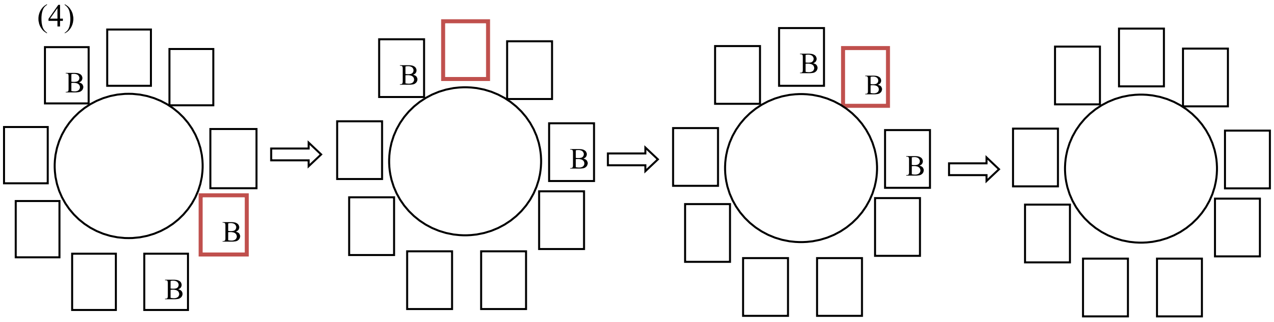
(2)



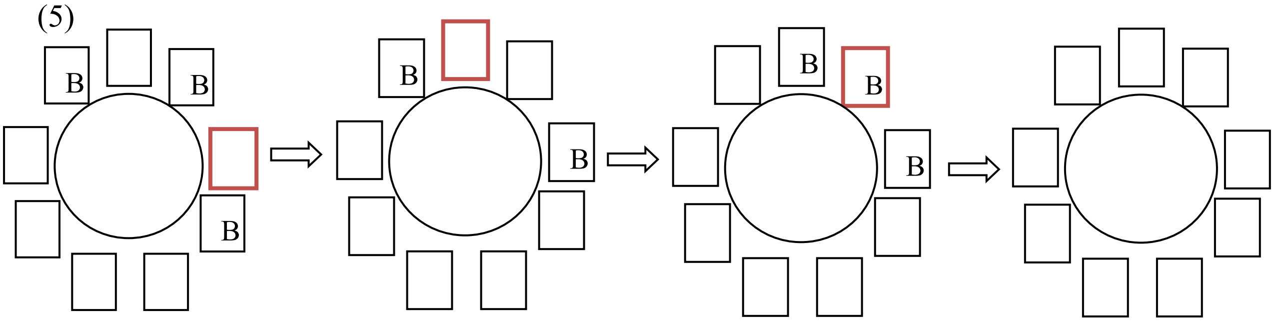
(3)



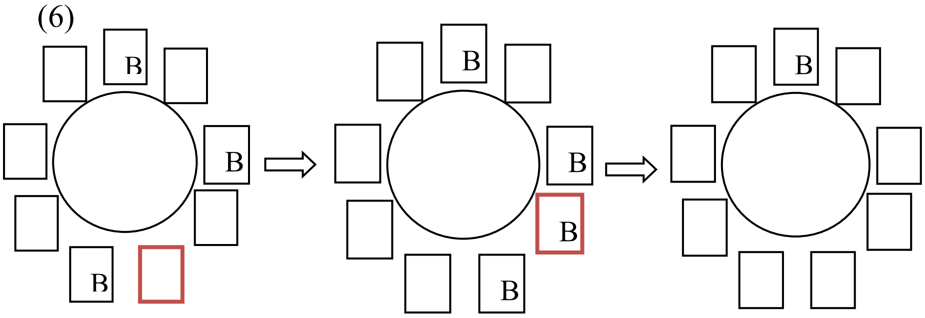
(4)



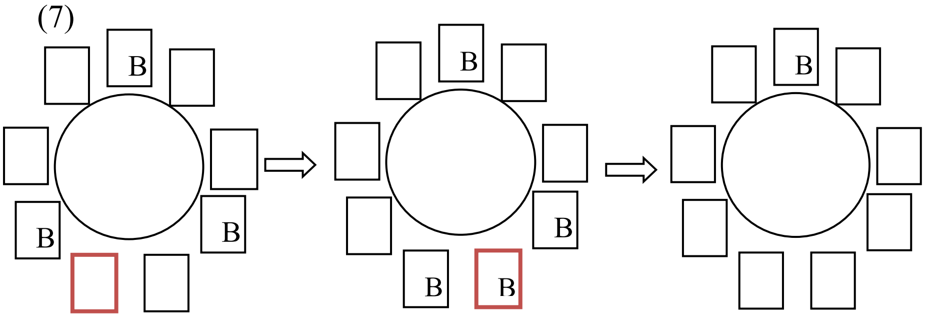
(5)



(6)



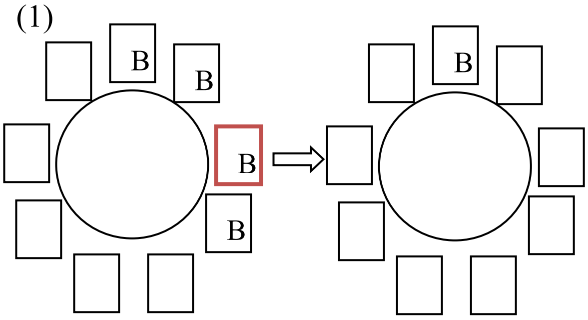
(7)



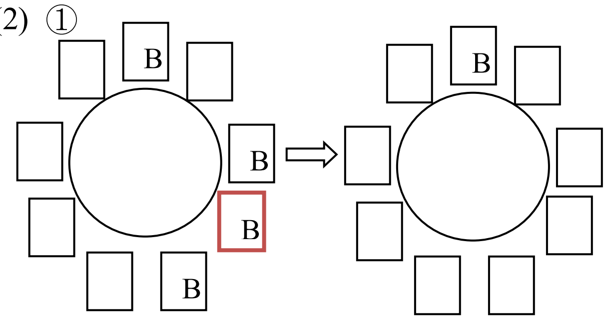
5.4B 共六種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

5W=(1) 5+0 =(2) 4+1 =(3) 3+2 =(4) 3+1+1 =(5) 2+2+1 =(6) 2+1+1+1

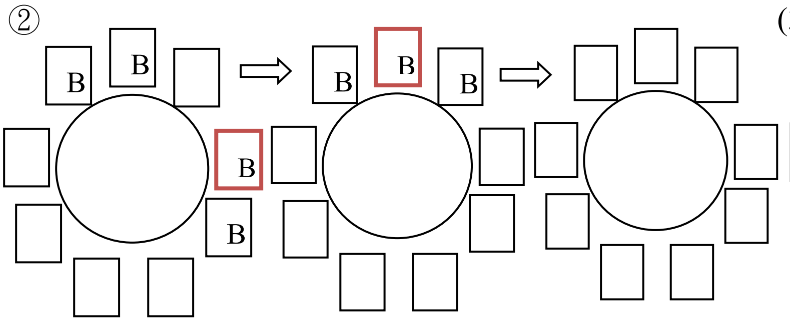
(1)



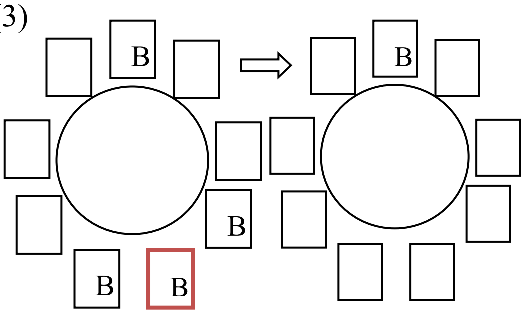
(2) ①



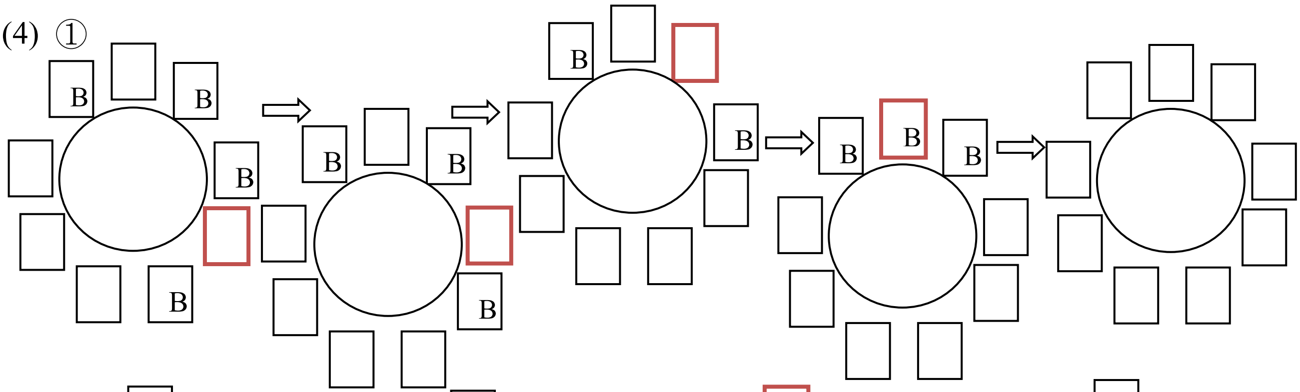
②



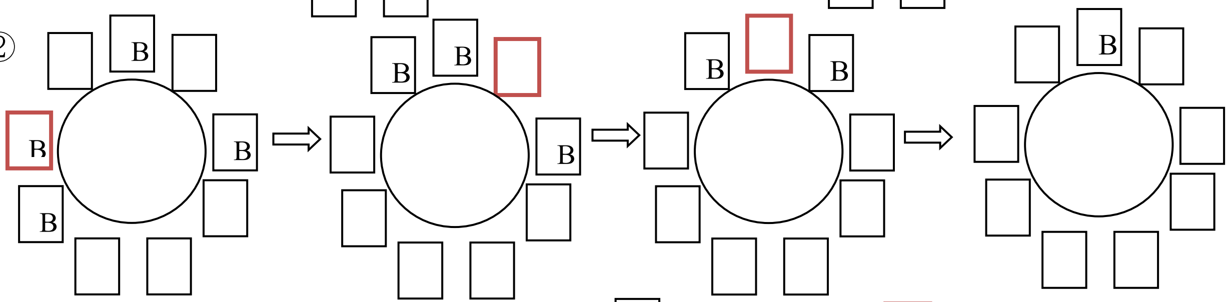
(3)



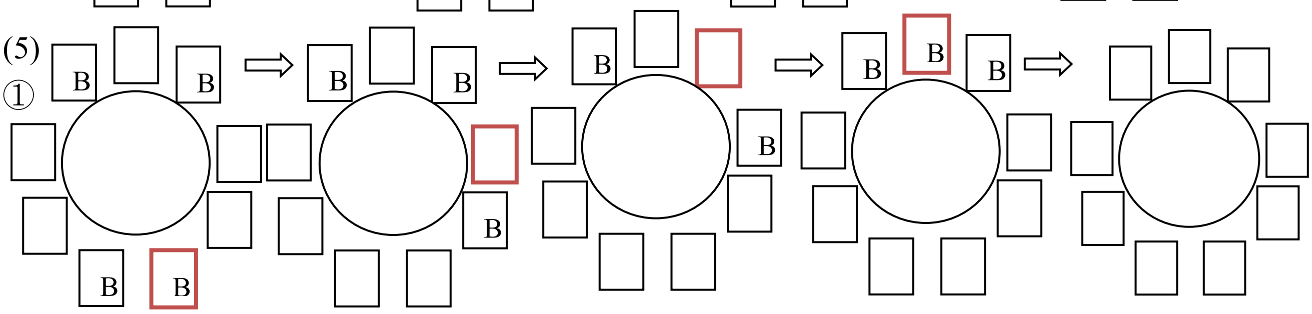
(4) ①



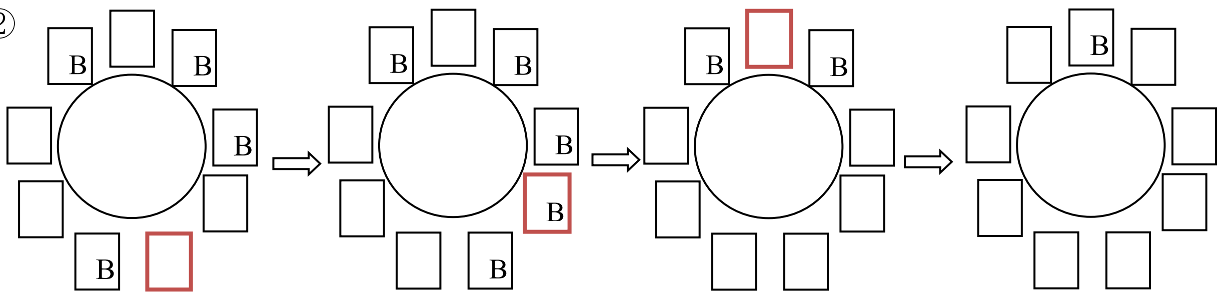
②



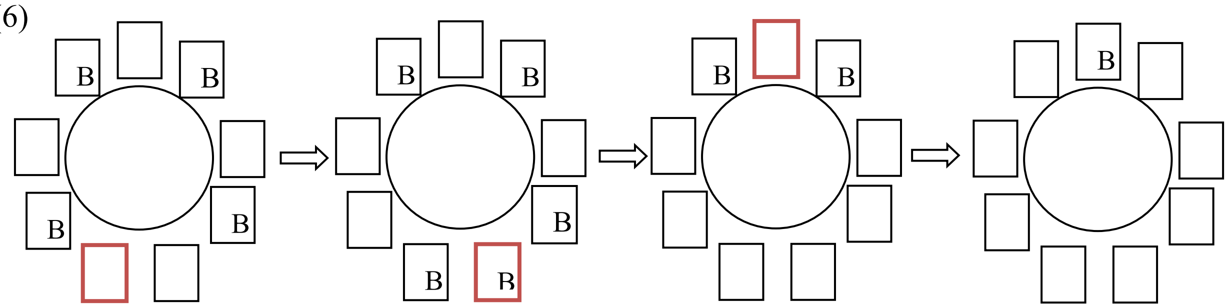
(5)
①



②



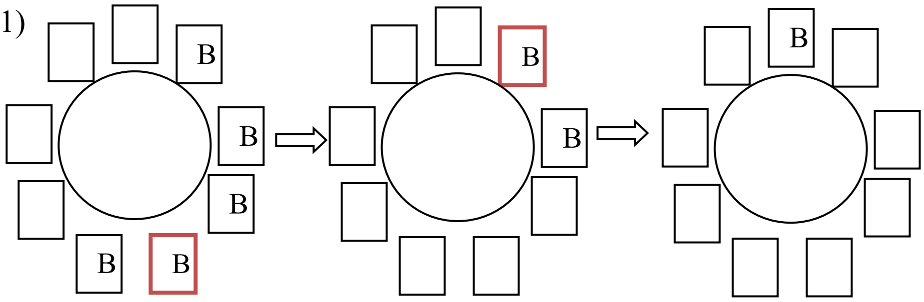
(6)



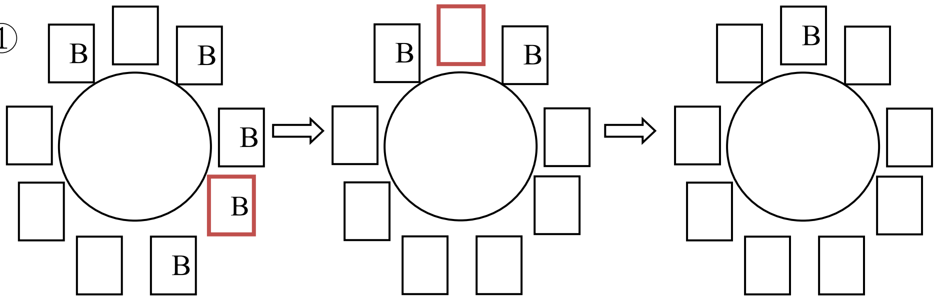
6.5B 共五種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

4W=(1) 4+0 =(2) 3+1 =(3) 2+2 =(4) 2+1+1 =(5) 1+1+1+1

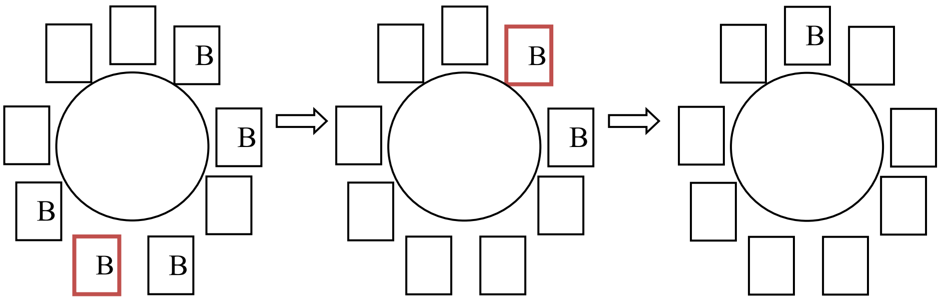
(1)



(2) ①

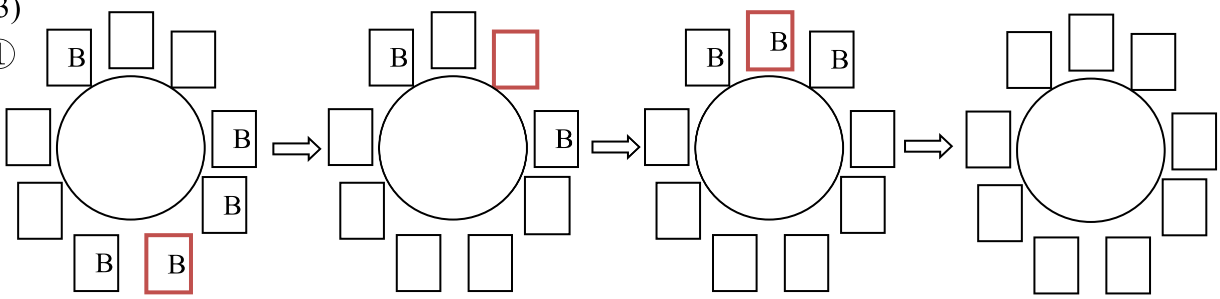


②

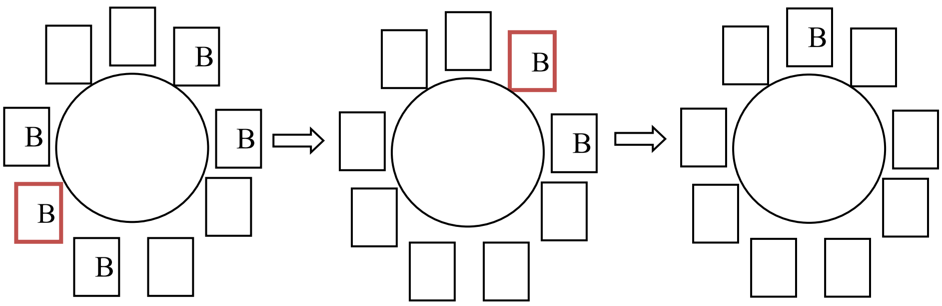


(3)

①

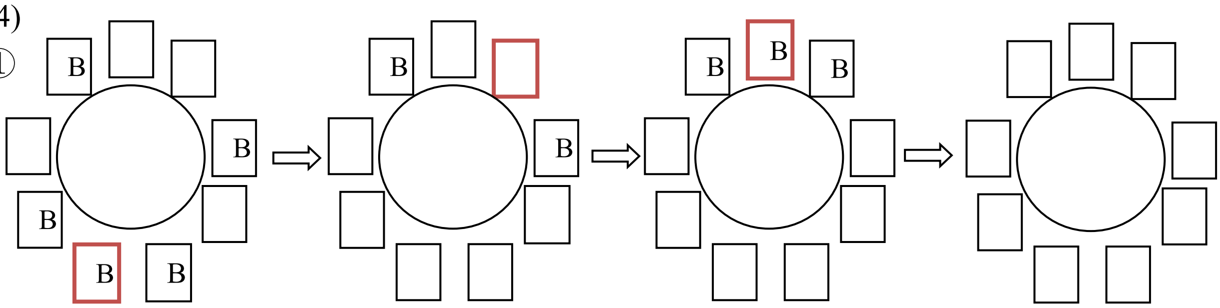


②

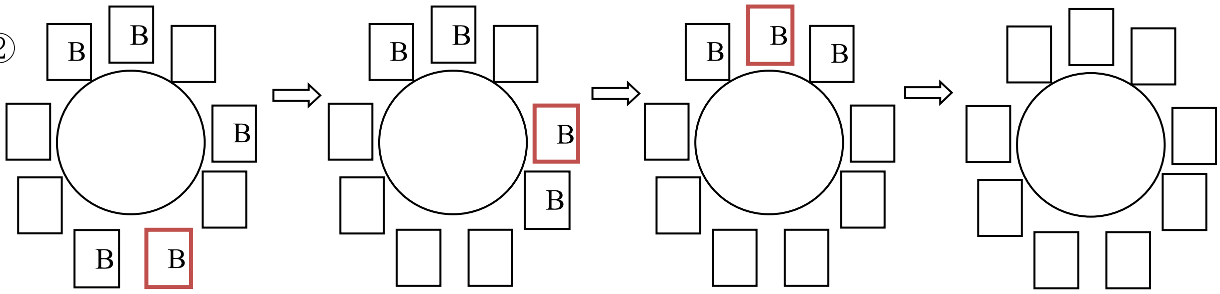


(4)

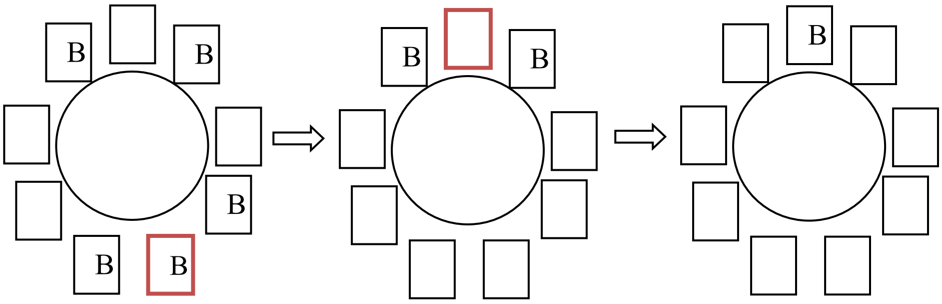
①



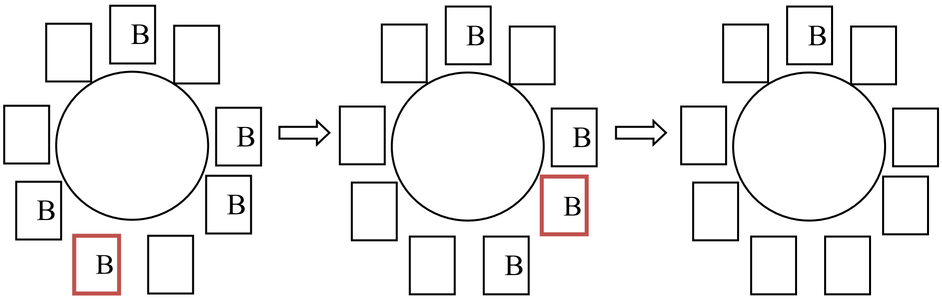
②



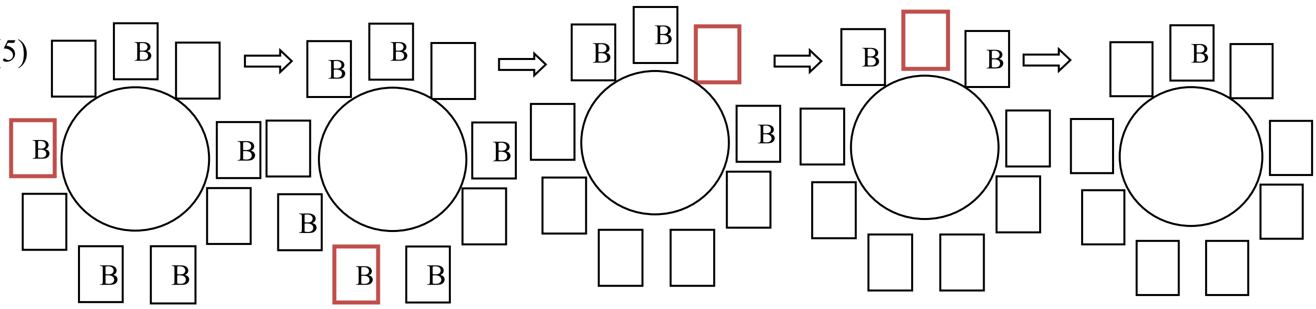
③



④



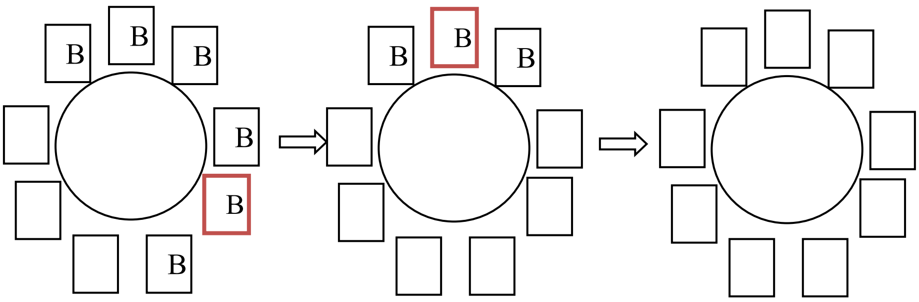
(5)



7.6B 共三種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

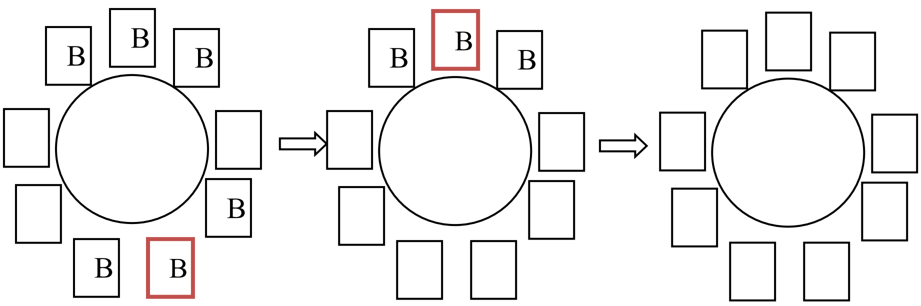
3W=(1) 3+0 =(2) 2+1 =(3) 1+1+1

(1)

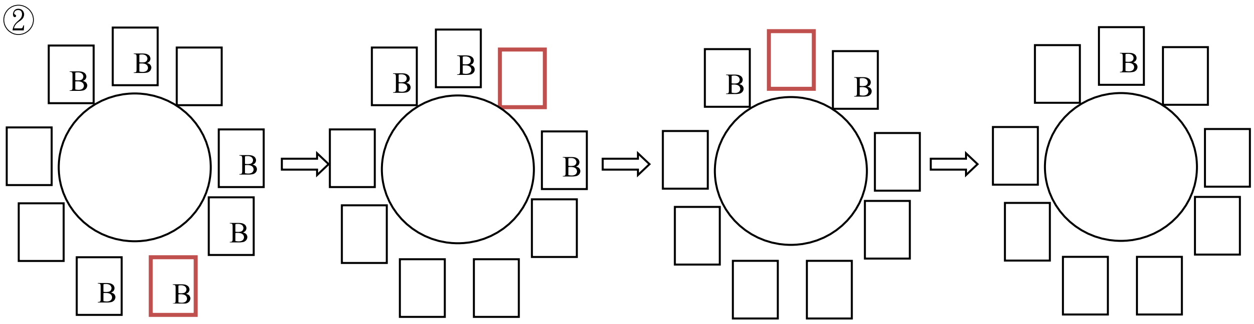


(2)

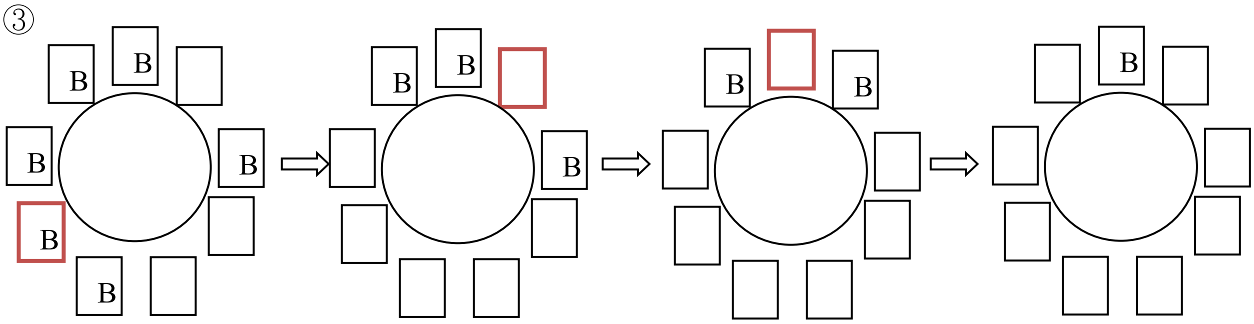
①



②

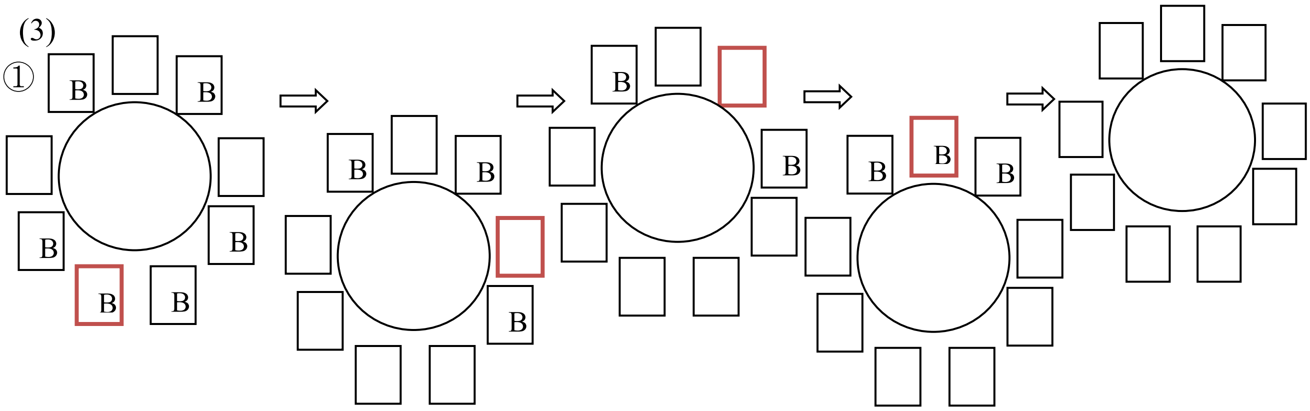


③

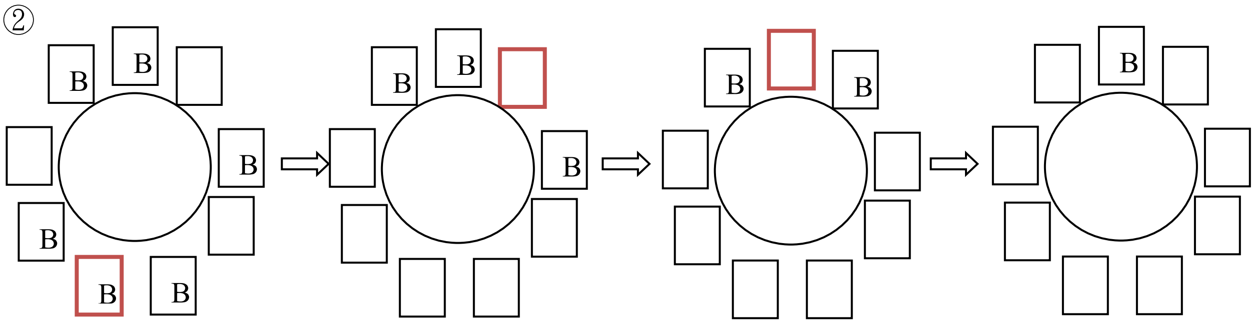


(3)

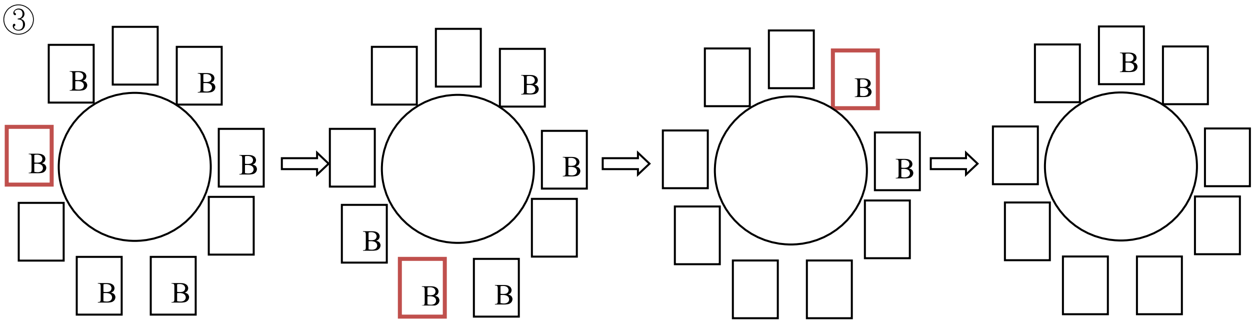
①



②



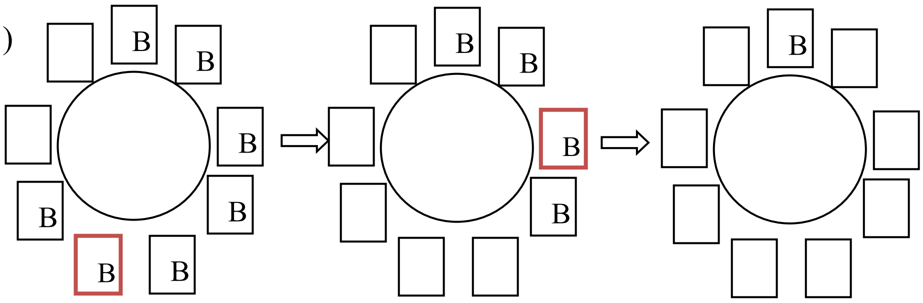
③



8.7B 共二種類型(以白色 W 朝上書籤來看)：

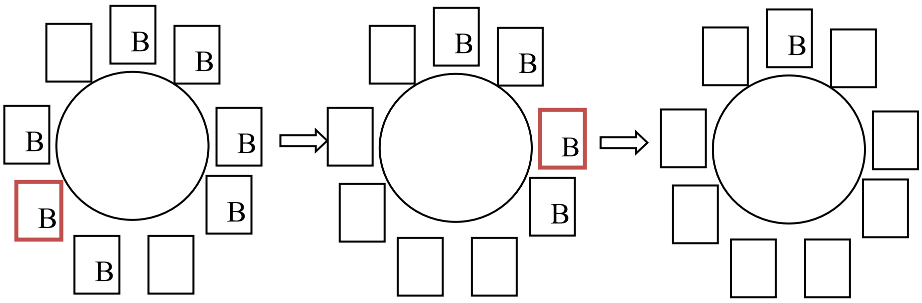
2W=(1) 2+0 =(2) 1+1

(1)

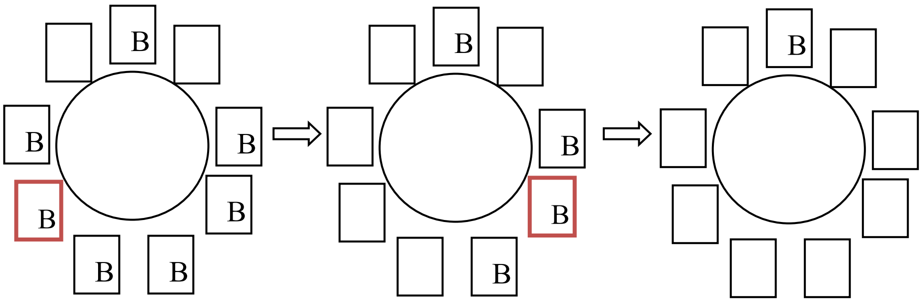


(2)

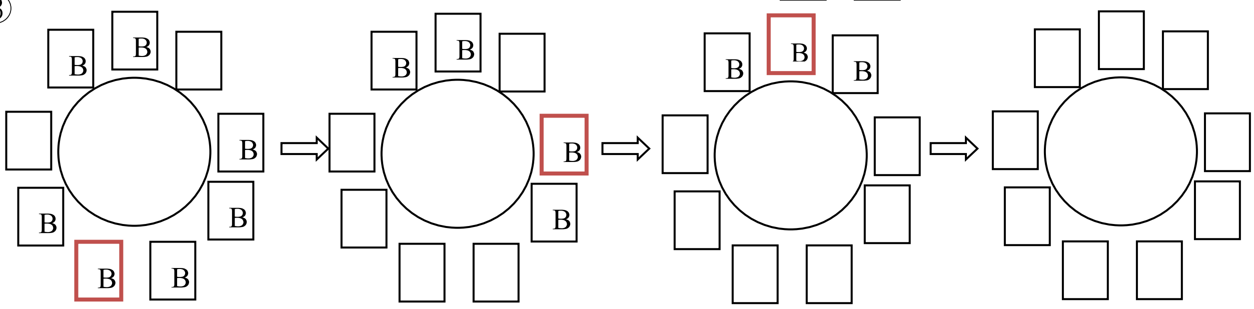
①



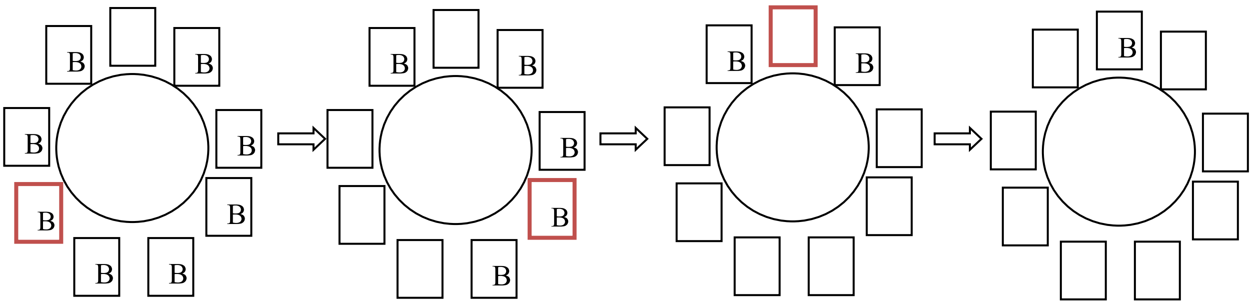
②



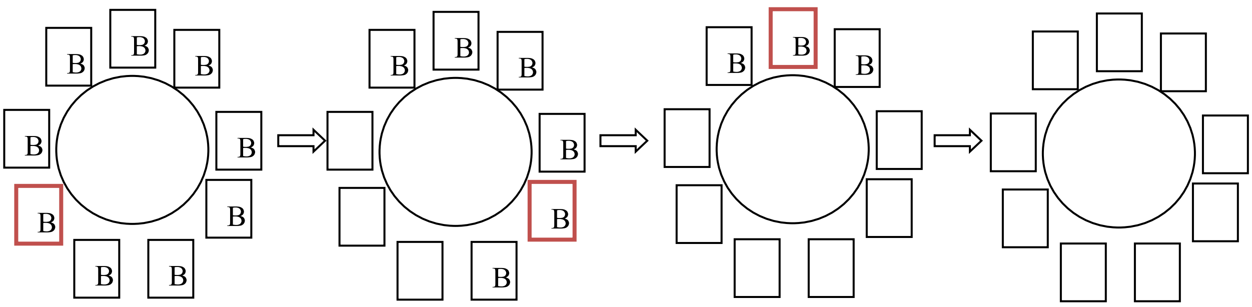
③



9.8B 共一種類型：



10.9B 共一種類型：



∴m=9 共可分成 2 種等價類群	
0B 可翻成功型	1B 不可翻成功型
0B⇆2B 空二格⇆3B(6+0)⇆3B(3+3)⇆3B(4+1+1)⇆4B(4+1②)⇆4B(3+1+1①)⇆4B(2+2+1①) ⇆5B(2+2①) ⇆5B(2+1+1①②)⇆6B(3+0) ⇆6B(2+1①) ⇆6B(1+1+1①) ⇆7B(1+1③) ⇆9B	1B⇆2B 相鄰⇆2B 空一格⇆2B 空三(四)格⇆3B(5+1)⇆3B(4+2)⇆3B(3+2+1)⇆3B(2+2+2) ⇆4B(5+0)⇆4B(4+1①)⇆4B(3+2)⇆4B(3+1+1②)⇆4B(2+2+1②)⇆4B(2+1+1+1) ⇆ 5B(4+0)⇆5B(3+1) ⇆5B(2+2②) ⇆5B(2+1+1③④) ⇆5B(1+1+1+1) ⇆6B(2+1②③) ⇆6B(1+1+1②③) ⇆7B(2+0) ⇆7B(1+1①②) ⇆8B
→由此可推得前面研究內容中 m=9 時無法翻成功	

伍、未來展望

一、雖然本次研究探討了翻書籤問題的一些類型，但是尚未窮盡所有類型，如「增加黑色書籤張數及各種白色書籤間隔數」、「不限制每次只能翻黑色朝上書籤條件限制的更少步數可逆翻法」、「依次探討一次可翻 2、4、5 張或更多張的數學模型」，也希望進一步研究探討在書籤總張數及黑色朝上書籤數不限制的一般化情形下，可以快速判別各類型是否可以翻成功及找到其達成最小步數的有效翻法。

二、數學真的很變化莫測，透過學過的知識，將其應用於解決生活中的數學問題又很迷人，希望在未來能學習更充足的數學知識，可以透過更多元的觀點推廣探討到各種情形及嚴謹證明何謂最短達成步數的路徑，獲得自己尋找到的數學寶藏。

陸、結論

這次透過學過的等差數列來求解一個看似很簡單卻蘊含一些數學規律的翻書籤問題，雖然在充滿升學壓力的國三歲月裡要花上一些研究的時間和精力，但並沒有用到很高深的數學知識便能去著手完成一個研究，這過程中重新組織自己的思維並學以致用，是這次參與科展的最大樂趣與獲得。

柒、參考資料

一、翰林版數學第四冊 (105 年版)

二、游森棚（民 105）。翻來覆去。**科學研習月刊，55-1**，53。

【評語】030402

考慮如下的單人遊戲：給定排成一圈的書籤，其中有若干張面朝上。在每一步時，可選取其中一張面朝上的書籤，將這張書籤及其左右與其相鄰的兩張書籤翻面。如果要讓所有的書籤都面朝下方，是否可順利完成？而最少翻面次數又為何？針對一些特定的初始狀態，給出了分析。這個問題其實是網路上廣為流傳的『點燈』問題的一個變形的版本。與原始問題的不同點在於，作者們限定了每此都必須選取面朝上的書籤執行翻面的動作，這也讓問題有了變化。透過對較小的例子所觀察到的規律，作者們給出了在一些給定的初始條件下翻面的可行性一個通則。能藉由觀察小的例子、尋求規律並給出通則，顯示作者已有從事研究工作的一些基本想法，值得稱許。稍嫌美中不足的是，沒有能夠針對所得出的結果給出清楚的說明或論證，這讓部分的結論看起來像是只經由觀察較小的例子所給出的結果而並非通則。如果能在說理的部分再多做著墨，並針對最少翻面次數給出一些結果，應該會更好。

作品海報

摘要

本文透過翻書籤問題，觀察改變黑色面朝上書籤數1張及2張(含改變中間間隔白色面朝上書籤數各種類型)時，探討書籤總張數及達成翻開所需步數之間的關係，發現到初步判別方法及彼此間呈現等差數列的規律情形。

壹、研究動機

升上國三，在努力準備會考時，老師每週都會丟那麼一道數學題來幫助我們活化腦袋一下，順便有獎徵答一番，其中有一個題目：「在一個圓的周圍放8張書籤，每張書籤一面為白色，另一面為黑色。所謂的「一步」是指「選取1張黑色面朝上的書籤，並將這張書籤及與它相鄰的2張書籤同時翻轉過來」。如果開始時，只有1張書籤黑色面朝上，則至少經過若干步後，所有書籤都變為白色面朝上？」，動手試著試著，感覺蠻有趣的，似乎能利用國二學習過的數列單元來探究其箇中規律，便投入了該問題的研究和探討。

貳、研究目的

在固定黑色面朝上的書籤張數及改變書籤總張數m的情況下，探求以一開始翻任1張黑色面朝上的書籤，經過n步達到所有書籤都變為白色面朝上的步數：

一、當固定只有一張黑色面朝上的書籤時，改變書籤總張數m觀察探討所有書籤都變為白色面朝上的所需步數n。

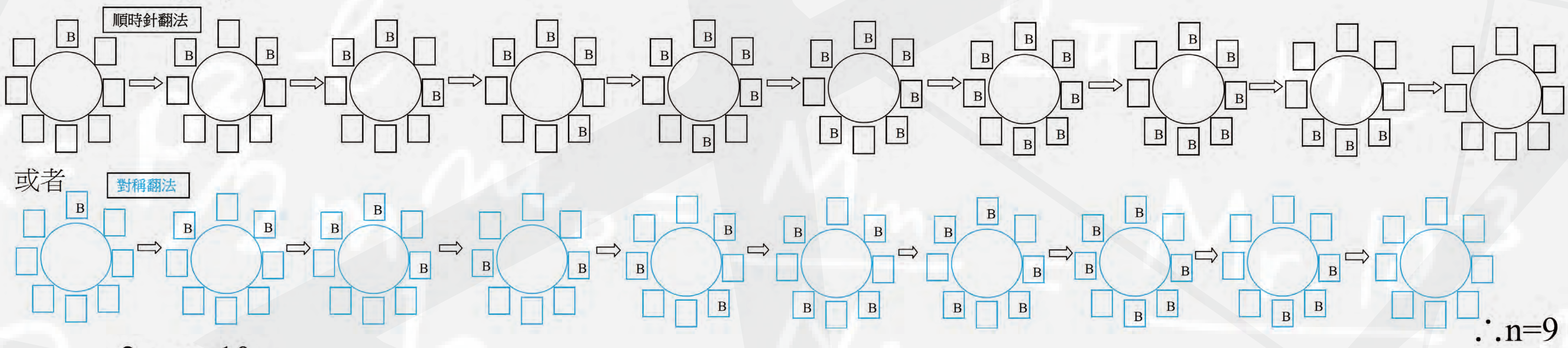
二、當固定只有二張黑色面朝上的書籤時，改變書籤總張數m觀察探討所有書籤都變為白色面朝上的所需步數n。

參、研究過程

一、當固定只有一張黑色面朝上的書籤時，改變書籤總張數m(m≧3)，以實際操作觀察探討所需步數n，且若無法翻成功，則定義其步數n=0：

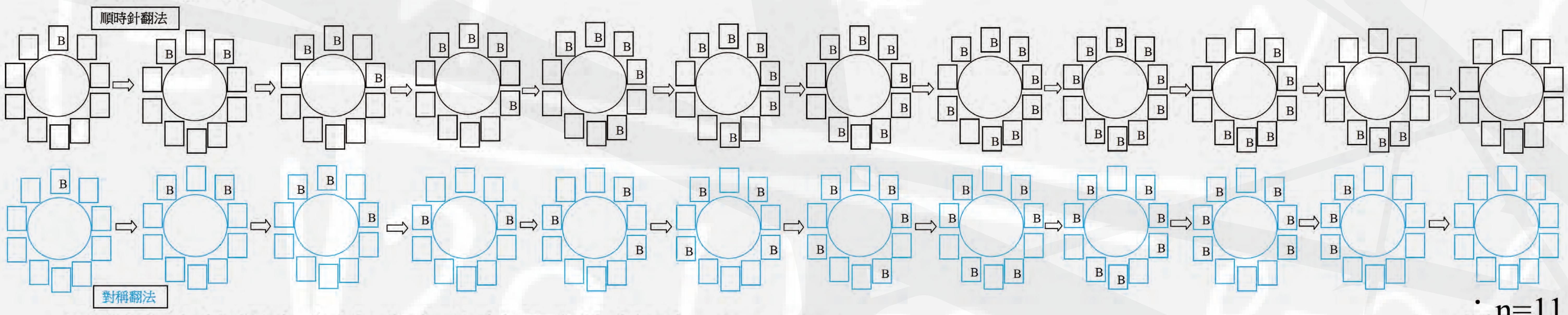
在此列出 m=8及10的情形(m=3時，明顯無法翻成功)，且將黑色面朝上書籤標示為$\boxed{B}$：

1、m=8



∴n=9

2、m=10



∴n=11

再列出表格觀察各達成步數所形成的數列a_m(m≧3)：

書籤總張數 m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數列 a_m	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
達成步數 n	0	3	5	0	7	9	0	11	13	0	15	17	0

規律探討

(1)「定理一」:若以 3 的餘數進行分類，則當 m=3k(k 為正整數)時，a_m= 0；當 m=3k+1 時，a_m= 4k-1；當 m=3k+2 時，a_m= 4k+1。

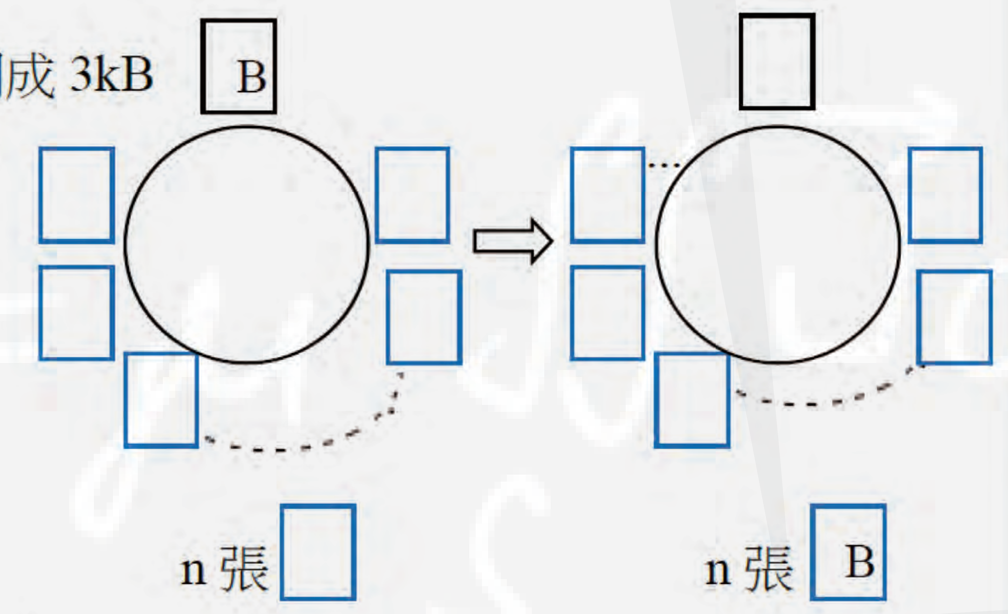
證明：

①當 m=3k(k 為正整數)時 a_m= 0:將於研究結果四補充說明及猜測推論。

②當 m=3k+1 時 a_m= 4k-1：

發現若採順時針翻法，經 n-1 步會翻成 nB→

∴m=3k+1 經 3k-1 步可以翻成 3kB 為 3 的倍數可以翻成功；此時達成步數為 3k-1+ k= 4k-1。



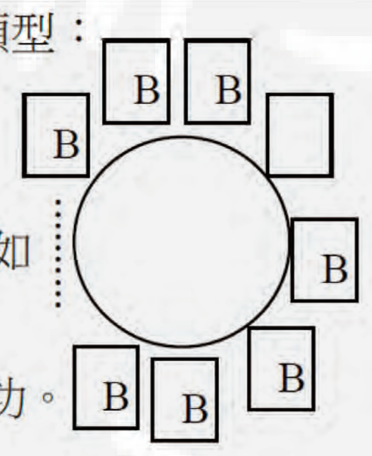
③當 m=3k+2 時 a_m= 4k+1：

承②順時針翻法經 3k+2-2=3k 步可以翻成(3k+1)B，此時再翻會變成(3k+1)B-2B+1B=3kB，為 3 的倍數∴可以翻成功；且達成步數為 3k+1+ k= 4k+1。

(2) 由 5、m=8 及 7、m=10 得知翻法並非唯一，而在只有一張黑色面朝上書籤的情況下，左右對稱，在此採取順時針方向翻法。

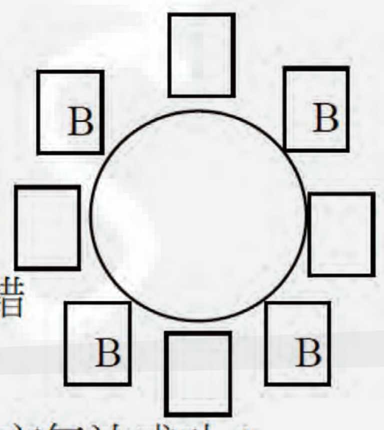
(3) 觀察猜測可以翻成功的類型：

①當 m=2k+1 奇數型時，形如



可以翻成功，但如先前例子 m=3、9 時亦無法成功。

②當 m=2k 偶數型時，形如黑白交錯



可以翻成功，但如先前例子 m=6、12 時亦無法成功；而且 m=8 時可以翻成此類型，m=10 時卻不能翻成此類型。

二、當固定只有二張黑色面朝上的書籤時，改變書籤總張數m (m≧3)，以實際操作觀察探討所需步數n，且若無法翻成功，同樣定義其步數n=0：

在此我們將分別討論二張黑色面朝上書籤與中間間隔白色面朝上書籤張數的三種情形，並一樣列表來觀察所需步數n：

(一) 2B相鄰(二張黑色面朝上書籤中間間隔 0張白色面朝上書籤)的情形如右：

書籤總張數 m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數列 a_m	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
達成步數 n	0	4	6	0	8	10	0	12	14	0	16	18	0

規律探討

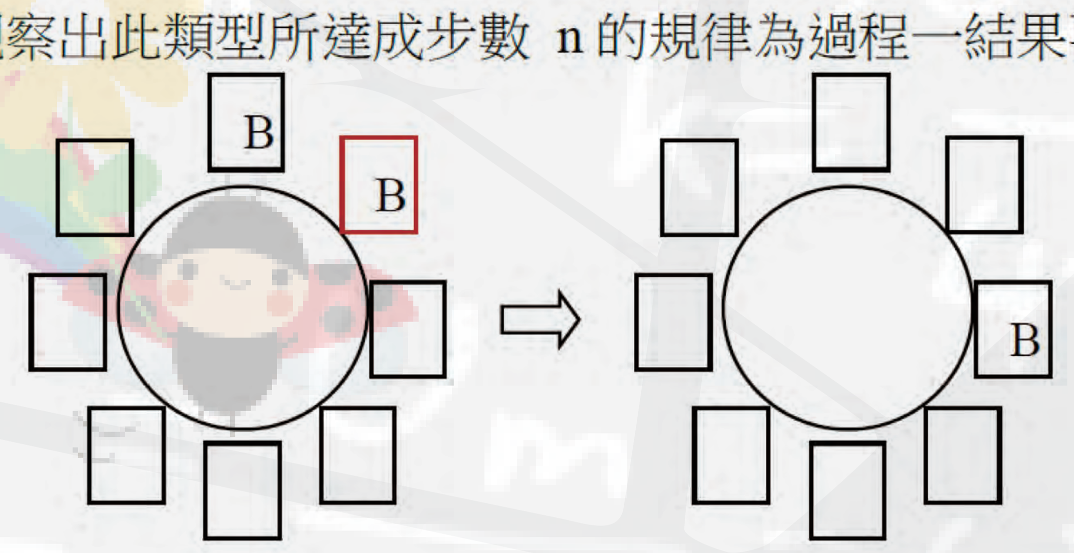
(1)「定理二」:若以 3 的餘數進行分類，則當 m=3k(k 為正整數)時，a_m= 0；當 m=3k+1 時，a_m= 4k；當 m=3k+2 時，a_m= 4k+2。

證明：

當 m=3k(k 為正整數)時 a_m= 0：同樣於研究結果四說明。

當 m=3k+1 時 a_m= 4k 及當 m=3k+2 時 a_m= 4k+2：

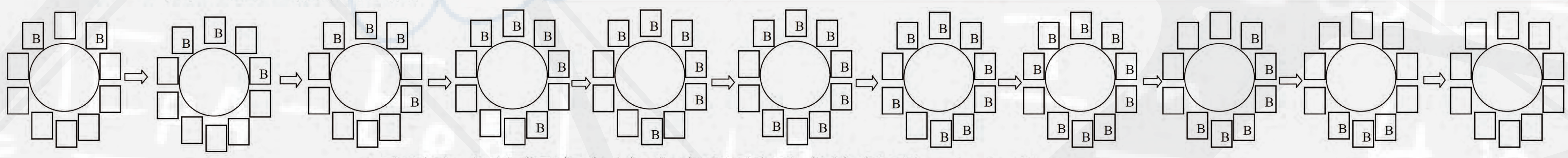
由一開始翻開任一張黑色面朝上的書籤即成研究過程一 1 $\boxed{B}$的狀態，不難觀察出此類型所達成步數 n 的規律為過程一結果再加上 1 步。



(二) 2B空一格(二張黑色面朝上書籤中間間隔1張白色面朝上書籤)的情形：

在此列出m=10的情形如下：

1、m=10與2B空七格狀況相同



…………………………再列出表格觀察各達成步數所形成的數列a_m(m≧3)：

∴n=10

書籤總張數 m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數列 a_m	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
達成步數 n	0	2	4	0	6	8	0	10	12	0	14	16	0

規律探討

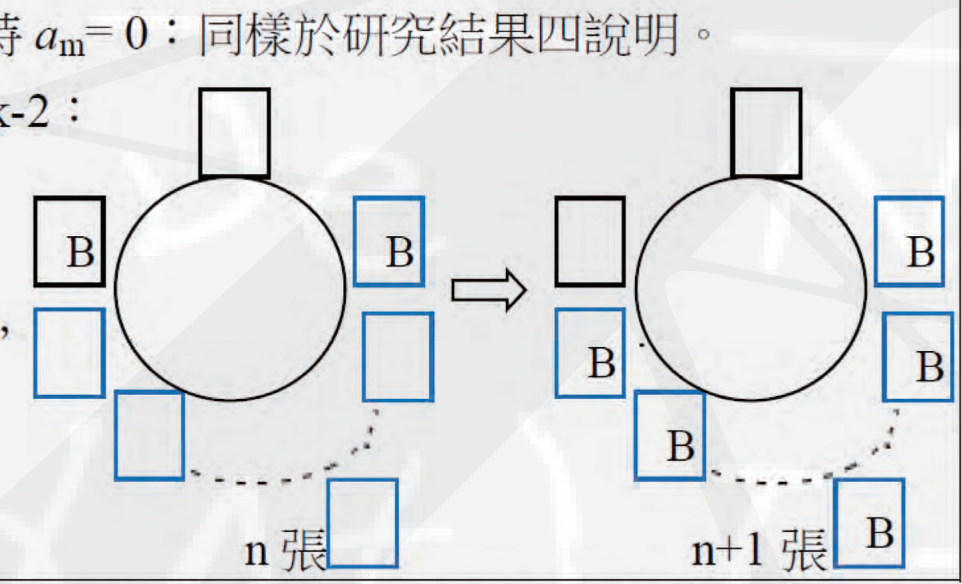
(1)「定理三」:若以 3 的餘數進行分類，則當 m=3k(k 為正整數)時，a_m= 0；當 m=3k+1 時，a_m= 4k-2；當 m=3k+2 時，a_m= 4k。

證明：

①當 m=3k(k 為正整數)時 a_m= 0：同樣於研究結果四說明。

②當 m=3k+1 時，a_m= 4k-2：

若採**順時針**翻法→經(n+1)步會翻成(n+1)B，而由(n+1)B 亦可初步判斷該類型是否可以翻成功。



∴在 m=3k+1 時經 3k-1 步可以翻成(3k-1)B，但只要經 3k-2 步即可翻成 3kB，即可翻成功；此時所需步數為 3k-2+k=4k-2。

例如：

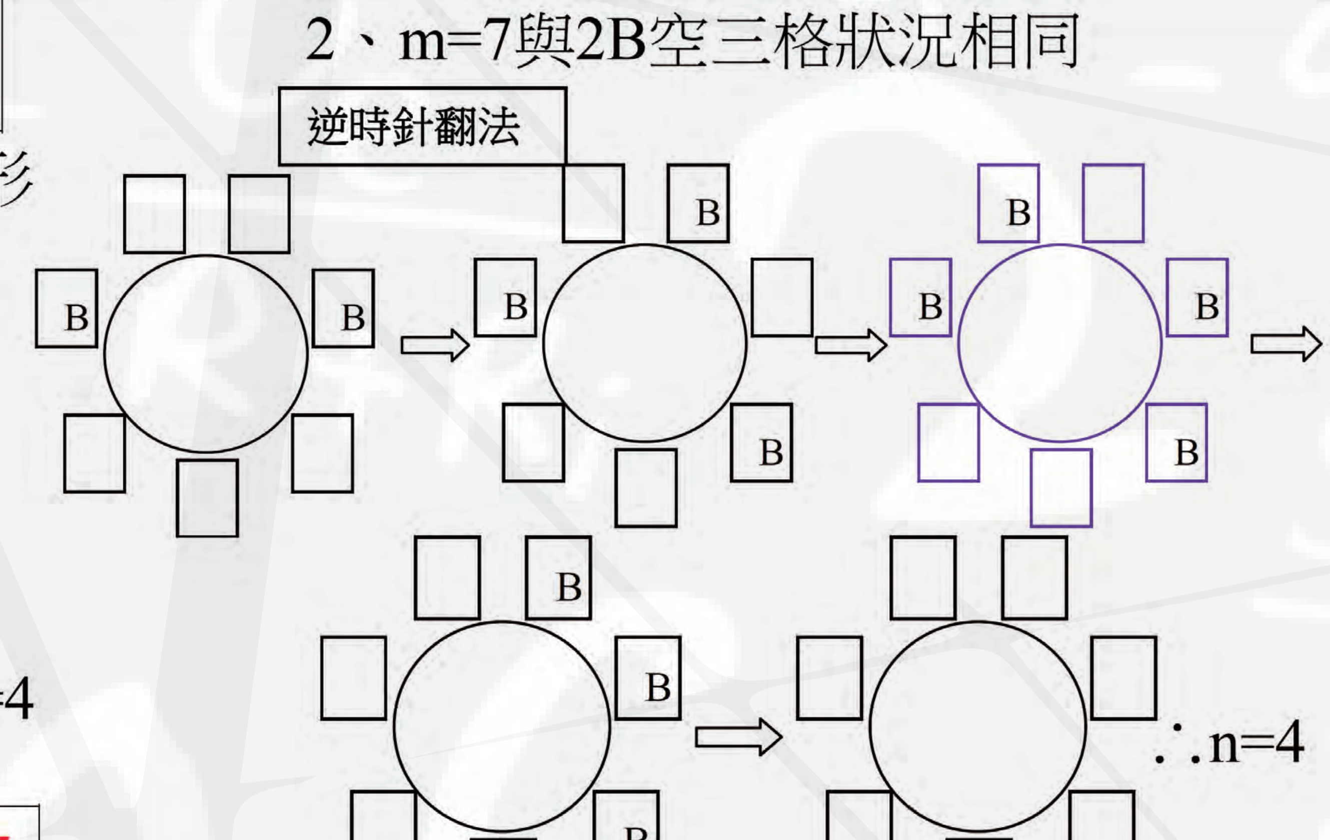
m=10 時，順時針可以翻成 8B(需 8 步)，但在此 7 步就可以翻成 9B。

③當 m=3k+2 時 a_m= 4k：

承②**順時針**翻法經 3k 步可以翻成 3kB 即可翻成功，且達成步數為 3k+k=4k。

(2) m=3 時與 2B 相鄰 m=3 時類型一樣。

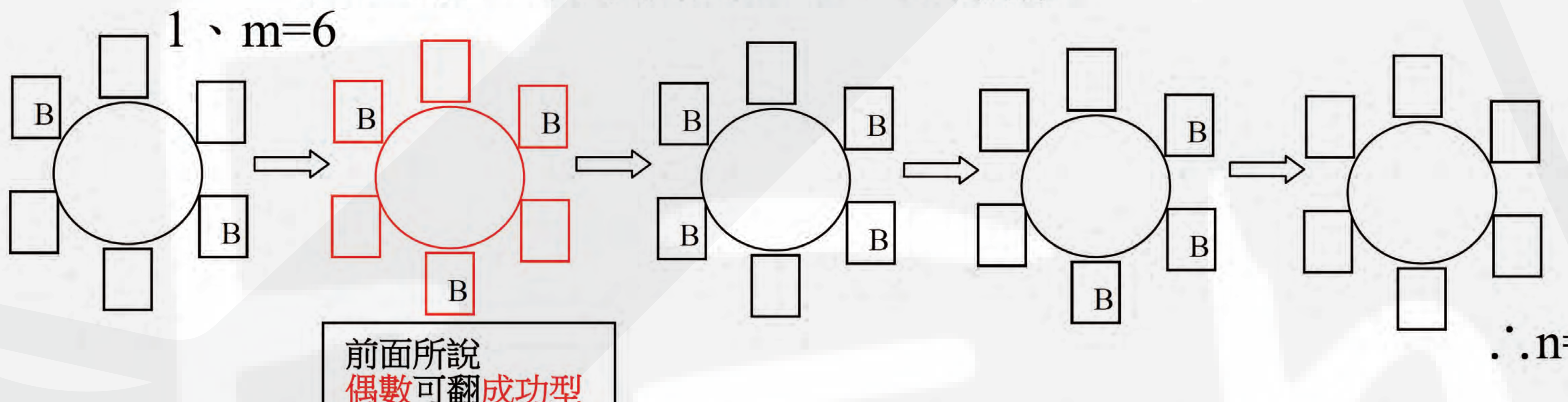
2、m=7與2B空三格狀況相同



∴n=4

(三) 2B空二格(二張黑色面朝上書籤中間間隔2張白色面朝上書籤)的情形 (m≧4)： 以下列出m=6、7的情形：

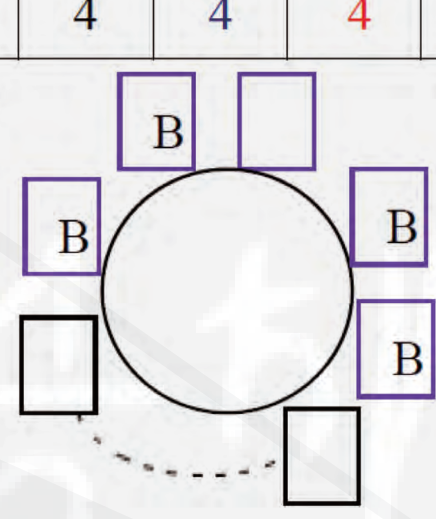
1、m=6



∴n=4

書籤總張數 m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數列 a_m	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
達成步數 n	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

(1) 過程中會發現可翻成功型：



(2)「定理四」：當 m 為≧4 的整數時，a_m= 4 (達成步數皆相同)。

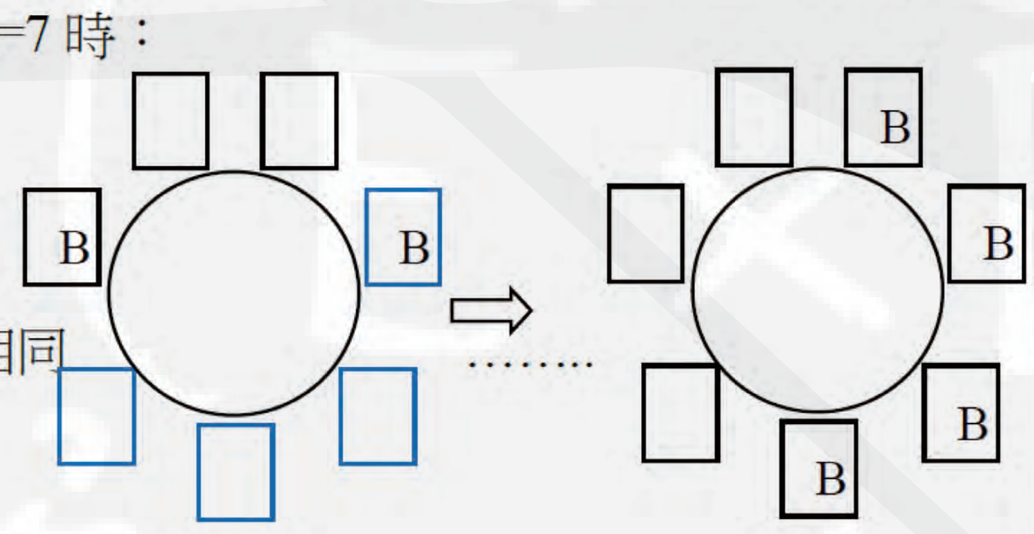
證明：

一般而言，如先前研究過程，其操作翻法大多是各種類型依**順時針**方向而翻動，而觀察 2、m=7 時：

若**順時針**翻法會翻成 4B

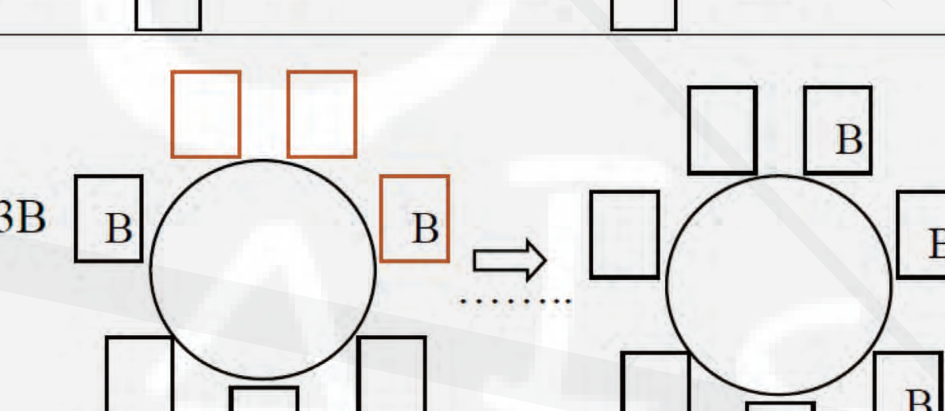
此時再翻即與 1B(m=7)相同

∴n=7+4+1=12

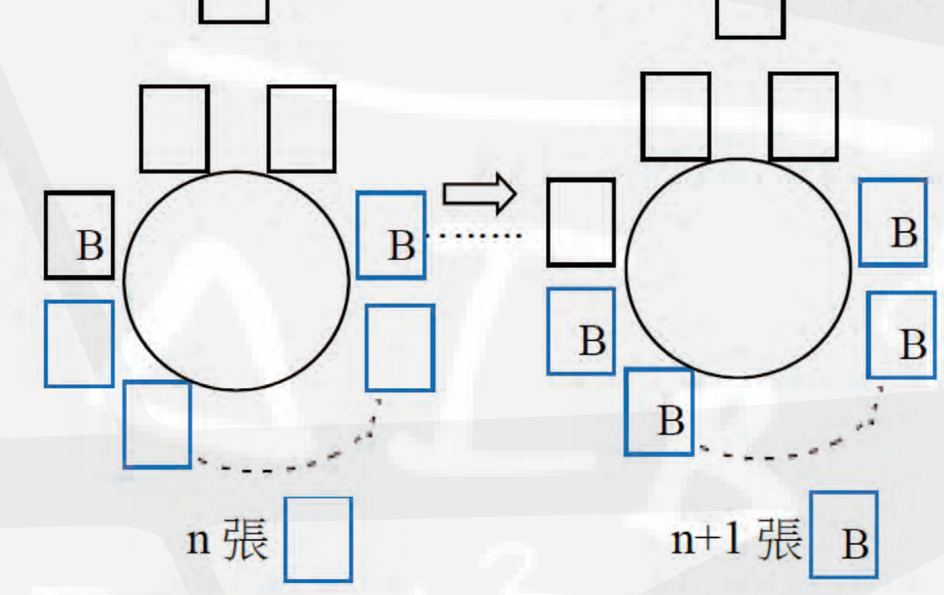


若**逆時針**翻法會翻成 3B

∴n=4

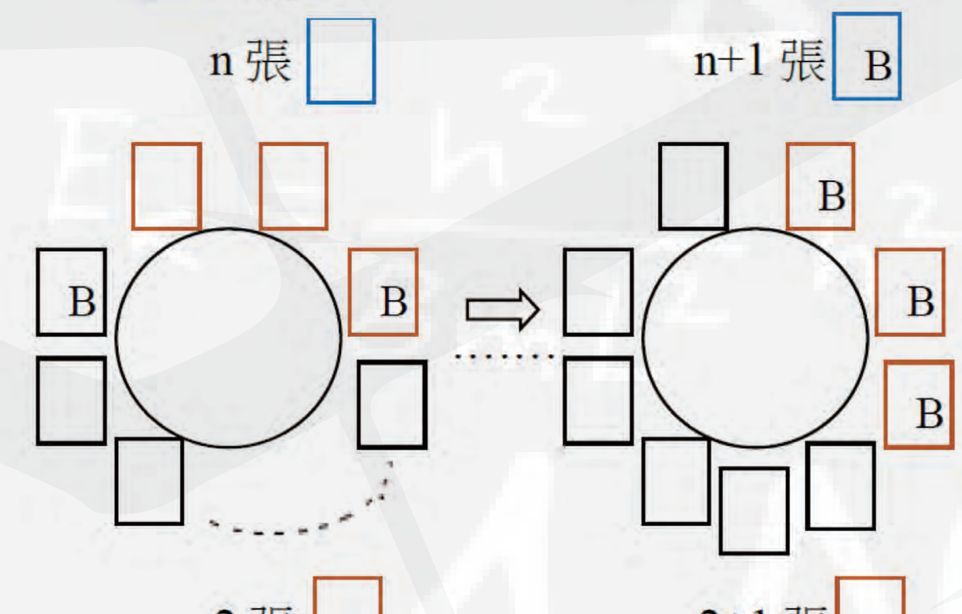


初步可得**順時針**翻法→會翻成(n+1)B，而由(n+1)B 亦可初步判斷該類型是否可以翻成功。



若**逆時針**翻法→會翻成 3B

∴n=4



肆、研究結果

一、觀察 1B 至 2B 空三格的情形：

書籤類型 / 發現	1B	2B 相鄰	2B 空一格	2B 空二格	2B 空三格
書籤總張數 m 條件限制	m≧3	m≧3	m≧3	m≧4	m≧5
翻開所需達成步數 a_m 有等差數列的規律：	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數且 k≧2) a_m
m=3k	0	0	0	4	0
m=3k+1	4k-1	4k	4k-2	4	4k-4
m=3k+2	4k+1	4k+2	4k	4	4k-2 但是當 m=5 時，$a_m=6$
其他	1.翻法並非唯一，且在 2B 空一、二、三格時皆能由**順時針**或**逆時針**翻法初步判斷該類型是否可以翻成功及得到依該翻法所需達成的步數，但同樣不是唯一的翻法及未必是達成其所需的最短路徑。 2.在研究的過程中可以觀察到一些可翻成功的模式類型，如 1B 及 2B 空二格的過程。 3.因環狀排列及書籤張數關係，會發現某些類型有重複出現過的情形：如在 2B 空三格中，當 m=5 時與 2B 相鄰狀況相同；m=6 時與 2B 空一格狀況相同；m=7 時與 2B 空二格狀況相同。基本上隨著書籤總張數及中間間隔白色面朝上書籤數遞增的情形下，這樣重複先前出現的狀況會漸趨更多。				

二、固定 2B 探討隨書籤張數增加時，其規律變化情形：

(一)2B 中間間隔白色朝上書籤數為 3t(3 的倍數)的情形

書籤類型 / 發現	2B 相鄰	2B 空三格	2B 空六格	2B 空九格
書籤總張數 m 條件限制	m≧3	m≧5	m≧8	m≧11
翻開所需達成步數 a_m 有等差數列的規律：	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數且 k≧2) a_m	(k 為正整數且 k≧3) a_m	(k 為正整數且 k≧4) a_m
m=3k	0	0	0	0
m=3k+1	4k	4k-4	4k-8	4k-12
m=3k+2	4k+2	4k-2 而 k=1 時，$a_m=6$	4k-2 而 k=2 時，$a_m=10$	4k-2 而 k=3 時，$a_m=14$

(二)2B 中間間隔白色朝上書籤數為 3t+1(被 3 除餘 1)的情形

書籤類型 / 發現	2B 空一格	2B 空四格	2B 空七格	2B 空十格
書籤總張數 m 條件限制	m≧3	m≧6	m≧9	m≧12
翻開所需達成步數 a_m 有等差數列的規律：	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數且 k≧2) a_m	(k 為正整數且 k≧3) a_m	(k 為正整數且 k≧4) a_m
m=3k	0	0	0	0
m=3k+1	4k-2	4k-2	4k-2	4k-2
m=3k+2	4k	4k-4	4k-8	4k-12

(三)2B 中間間隔白色朝上書籤數為 3t+2(被 3 除餘 2)的情形

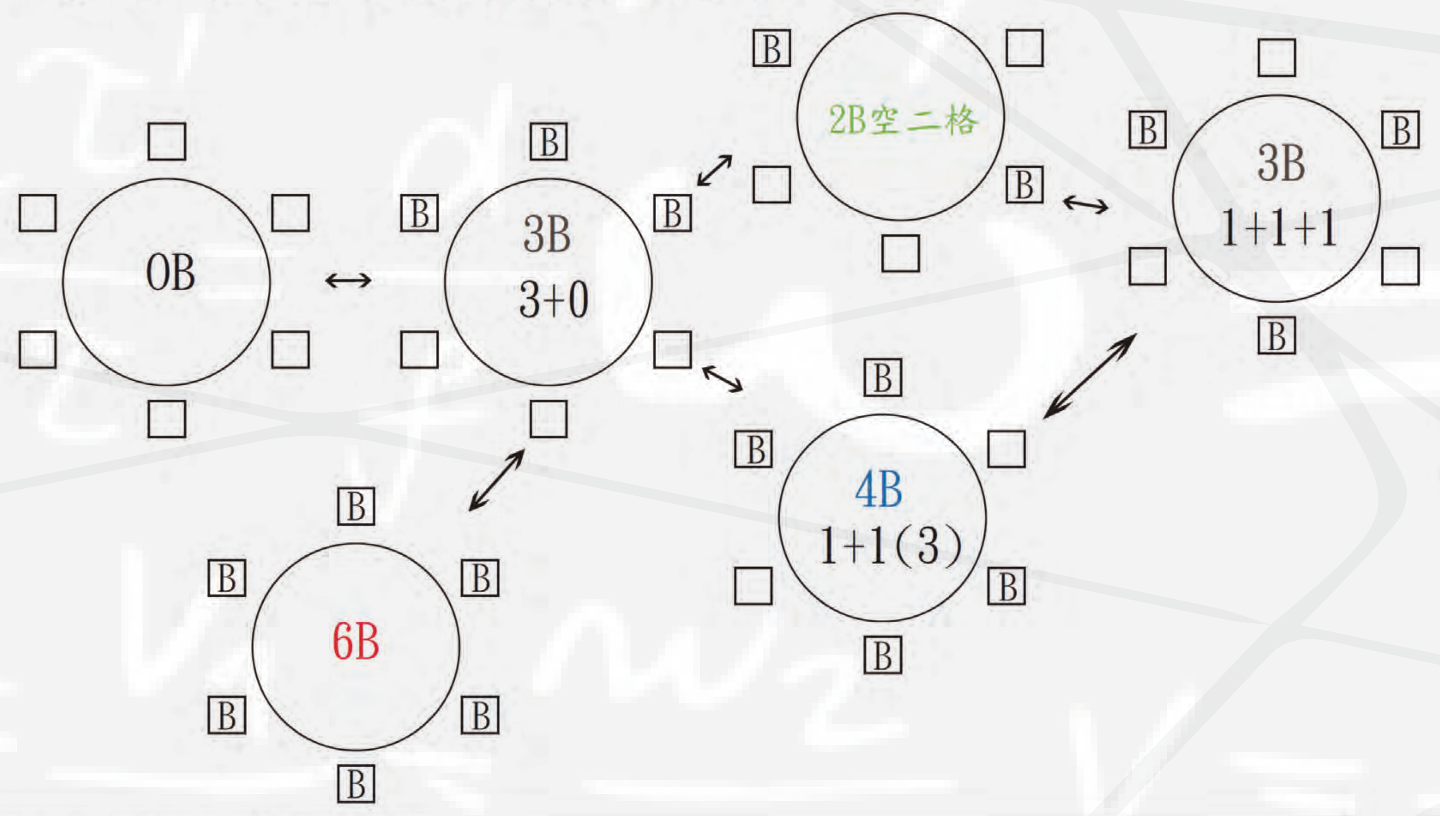
書籤類型 / 發現	2B 空二格	2B 空五格	2B 空八格	2B 空十一格
書籤總張數 m 條件限制	m≧4	m≧7	m≧10	m≧13
翻開所需達成步數 a_m 有等差數列的規律：	(k 為正整數) a_m	(k 為正整數且 k≧2) a_m	(k 為正整數且 k≧3) a_m	(k 為正整數且 k≧4) a_m
m=3k	4(k≧2)	8(k≧4) 而 k=3 時，$a_m=4$	12(k≧6) 而 k=4 時，$a_m=4$；k=5 時，$a_m=8$	16(k≧8) 而 k=5 時，$a_m=4$；k=6 時，$a_m=8$；k=7 時，$a_m=12$
m=3k+1	4	8	12	16
m=3k+2	4	8	12	16

三、固定書籤張數探討 2B 各類型間有何規律變化情形：
(以下 $2B_n$ 代表 2B 中間間隔 n 張白色書籤)

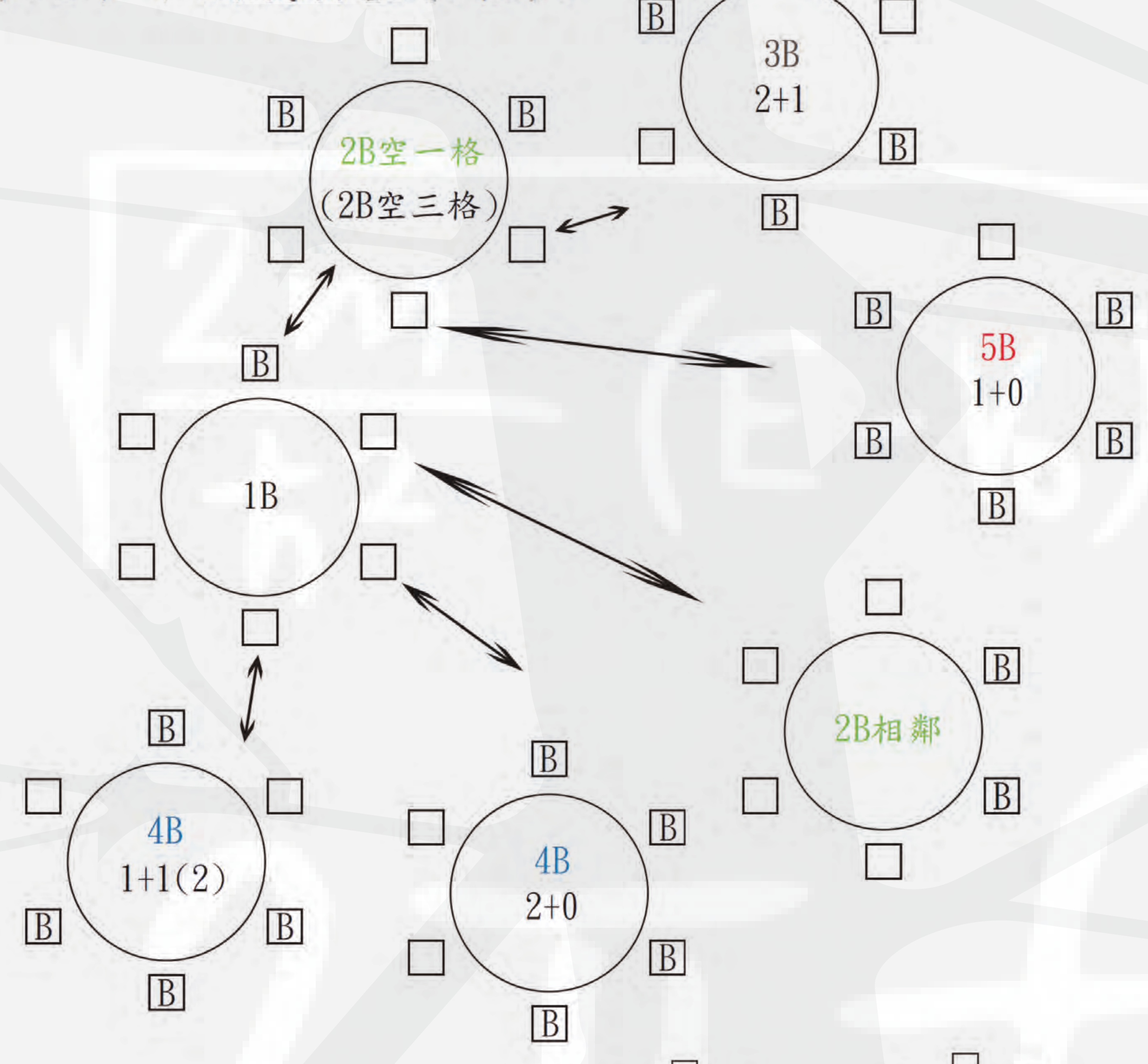
書籤張數 m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2B 達成步數 n	0	4	6	0	8	10	0	12	14	0	16	18	0
$2B_1$ 達成步數 n	0	2	4	0	6	8	0	10	12	0	14	16	0
$2B_2$ 達成步數 n	×	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$2B_3$ 達成步數 n	×	×	6	0	4	6	0	8	10	0	12	14	0
$2B_4$ 達成步數 n	×	×	×	0	6	4	0	10	8	0	14	12	0
$2B_5$ 達成步數 n	×	×	×	×	8	8	4	8	8	8	8	8	8
$2B_6$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	10	0	4	10	0	8	14	0
$2B_7$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	0	10	4	0	14	8	0
$2B_8$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	12	12	4	12	12	8
$2B_9$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	×	14	0	4	14	0
$2B_{10}$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0	14	4	0
$2B_{11}$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	16	16	4
$2B_{12}$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	18	0
$2B_{13}$ 達成步數 n	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0

四、說明前述書籤張數為3的倍數時無法翻成功的理由：

一、m=6 (1)0B可翻成功型(6種):



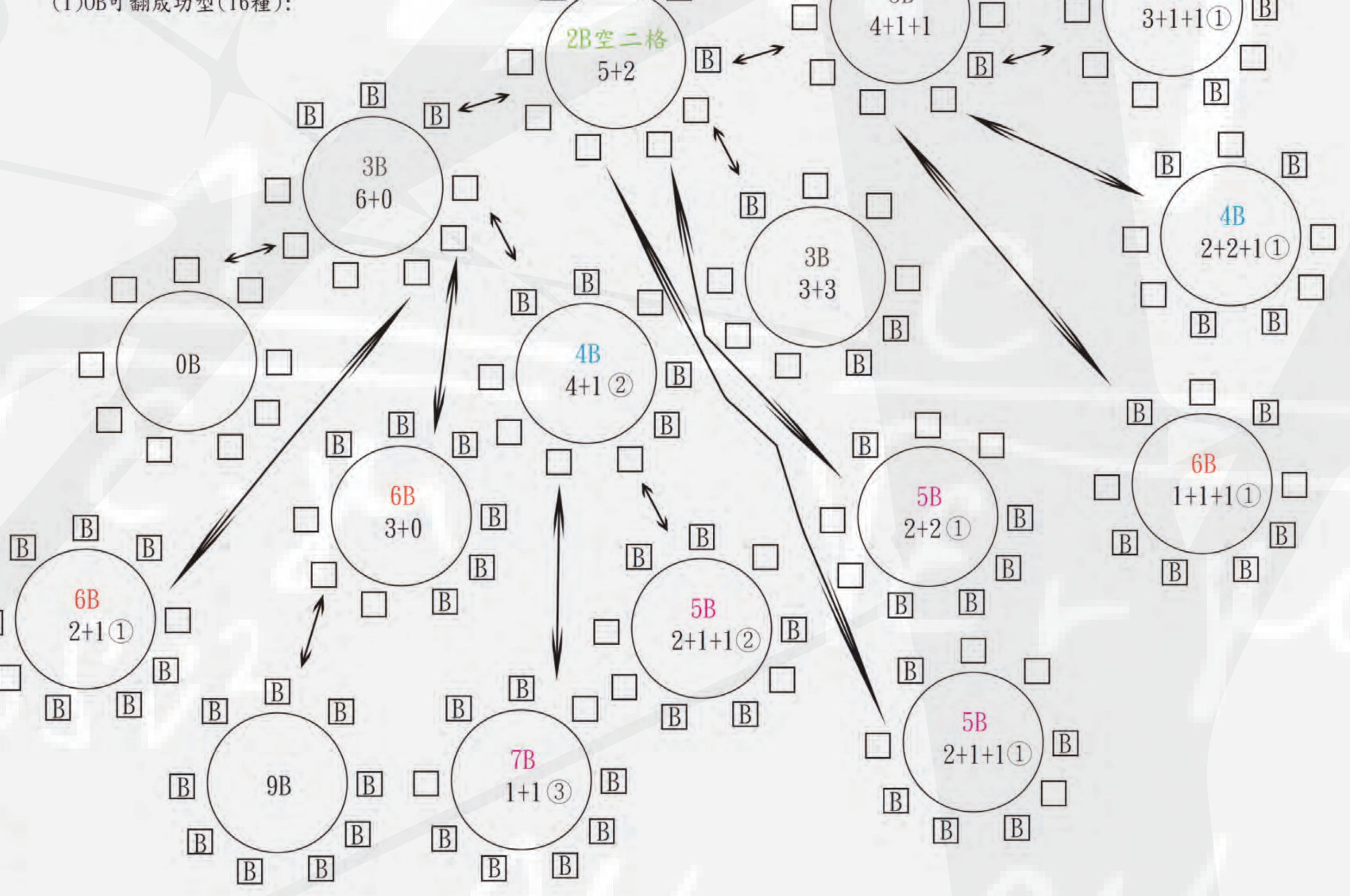
(2)1B不可翻成功型(7種):



∴m=6 共可分成 2 種等價類群	
0B 可翻成功型(6 種)	1B 不可翻成功型(7 種)
0B⇆2B 空二格⇆3B(3+0)⇆3B(1+1+1)⇆4B(1+1(3))⇆ 6B	1B⇆2B 相鄰⇆2B 空一格⇆3B(2+1)⇆4B(1+1(2))⇆4B(2+0)⇆ 5B
→由此可推得前面研究內容中 m=6 時無法翻成功	

二、m=9

(1)0B可翻成功型(16種):



∴m=9 共可分成 2 種等價類群	
0B 可翻成功型(16 種)	1B 不可翻成功型(30 種)
0B⇆2B 空二格⇆3B(6+0)⇆3B(3+3)⇆3B(4+1+1)⇆4B(4+1②)⇆4B(3+1+1①)⇆4B(2+2+1①) ⇆5B(2+2①) ⇆5B(2+1+1①②)⇆6B(3+0) ⇆6B(2+1①) ⇆6B(1+1+1①) ⇆7B(1+1③) ⇆9B	1B⇆2B 相鄰⇆2B 空一格⇆2B 空三(四)格⇆3B(5+1)⇆3B(4+2)⇆3B(3+2+1)⇆3B(2+2+2) ⇆4B(5+0)⇆4B(4+1①)⇆4B(3+2①②)⇆4B(3+1+1②)⇆4B(2+2+1②)⇆4B(2+1+1+1) ⇆ 5B(4+0)⇆5B(3+1①②) ⇆5B(2+2②) ⇆ 5B(2+1+1③④) ⇆5B(1+1+1+1) ⇆6B(2+1②③) ⇆6B(1+1+1②③) ⇆7B(2+0) ⇆7B(1+1①②) ⇆8B
→由此可推得前面研究內容中 m=9 時無法翻成功	

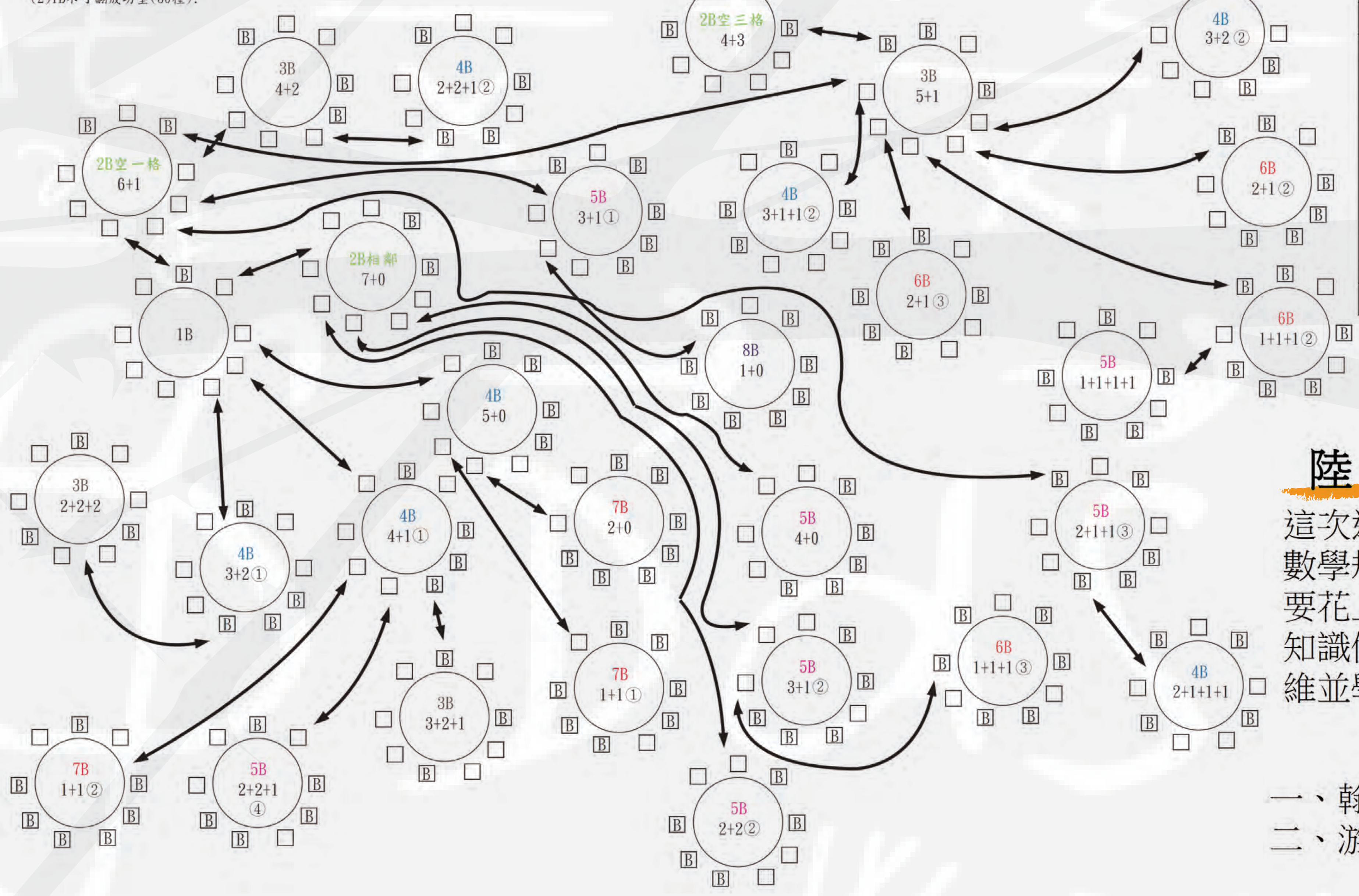
伍、未來展望

一、雖然本次研究探討了翻書籤問題的一些類型，但是尚未窮盡所有類型，如「增加黑色書籤張數及各種白色書籤間隔數」、「不限制每次只能翻黑色朝上書籤條件限制的更少步數可逆翻法」、「依次探討一次可翻 2、4、5張或更多張的數學模型」，也希望進一步研究探討在書籤總張數及黑色朝上書籤數不限制的一般化情形下，可以快速判別各類型是否可以翻成功及找到其達成最小步數的有效翻法。

二、數學真的很變化莫測，透過學過的知識，將其應用於解決生活中的數學問題又很迷人，希望在未來能學習更充足的數學知識，可以透過更多元的觀點推廣探討到各種情形及嚴謹證明何謂最短達成步數的路徑，獲得自己尋找到的數學寶藏。

二、m=9

(2)1B不可翻成功型(30種):



陸、結論

這次透過學過的等差數列來求解一個看似很簡單卻蘊含一 些數學規律的翻書籤問題，雖然在充滿升學壓力的國三歲月裡要花上一些研究的時間和精力，但並沒有用到很高深的數學知識便能去著手完成一個研究，這過程中重新組織自己的思維並學以致用，是這次參與科展的最大樂趣與獲得。

柒、參考資料

一、翰林版數學第四冊 (105年版)
二、游森棚（民105）。翻來覆去。**科學研習月刊，55-1**，53。