中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030401

星星、月亮與太陽的美麗邂逅-圖形的平方化

學校名稱：臺中市立龍津高級中學附設國中

作者：	指導老師：
國二 林班鼎	陳麗純 陳成達

關鍵詞：平方化、Geogebra

摘要

本研究是為了可以將不規則形做簡單的改變，使它變成容易計算出面積的正方形。而若要將多邊形變為正方形，就必須將它平方化。我們製作出長方形、三角形、梯形、圓形、新月形、星形等圖形平方化後的結果。

拜賜科技的發展，電腦已能使各位可以輕鬆地計算出任何圖形的面積。以前的幾何學家利用尺規作圖繪出一維圖形(直線)與二維圖形(圓)，但卻一直無法繪出如拋物線的複雜圖形。另外還有一個很大的問題存在，那就是面積的計算-----平方化的問題。一種將圖形切割後化為正方形的方法，可使面積更易算出，不須使用其他圖形的面積公式，若能做出這樣的圖形則稱此圖形為「可平方化」或「可正方化」。

壹、研究動機

暑假時無意間看了一本書-----《天才之旅》，裡面介紹了許多偉大的數學定理，其中令我最陶醉的就是希波克拉底斯的新月形平方化。剛好，又適逢社團教到如何使用電腦程式-----Geogebra(由奧大利數學家發明，為一個免費的「動態幾何軟體」，此軟體遇到無限小數的狀況會四捨五入)，讓新月形平方化求證這件困難的事能迎刃而解，不再難以摸索，再精益求精求出完美的曲線-----圓的面積。為了使各面積更容易求出，因此作此研究。

貳、研究目的

一、知道甚麼是平方化

二、了解計算圖形面積的根本

三、找出各種圖形平方化後的結果

四、利用圖形使大家更能理解如何將計算面積的方式簡單化

五、找出各種圖形適合的切割方式

參、研究設備及器材

電腦 Geogebra 軟體、計算機

肆、研究過程或方法

一、研究流程

(一)將所要平方化之圖形繪製於繪圖區

(二)盡量將他割成長方形(實驗一會介紹) 或三角形(實驗二會介紹)，如圖 1 所示

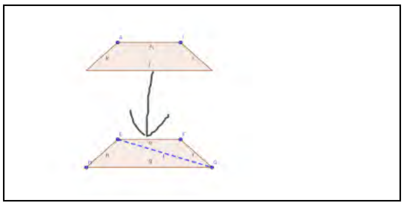


圖 1 將圖形割成三角形

(三)最後將所有沒弧度的形狀切割或補成長方形，則如圖 2 所示

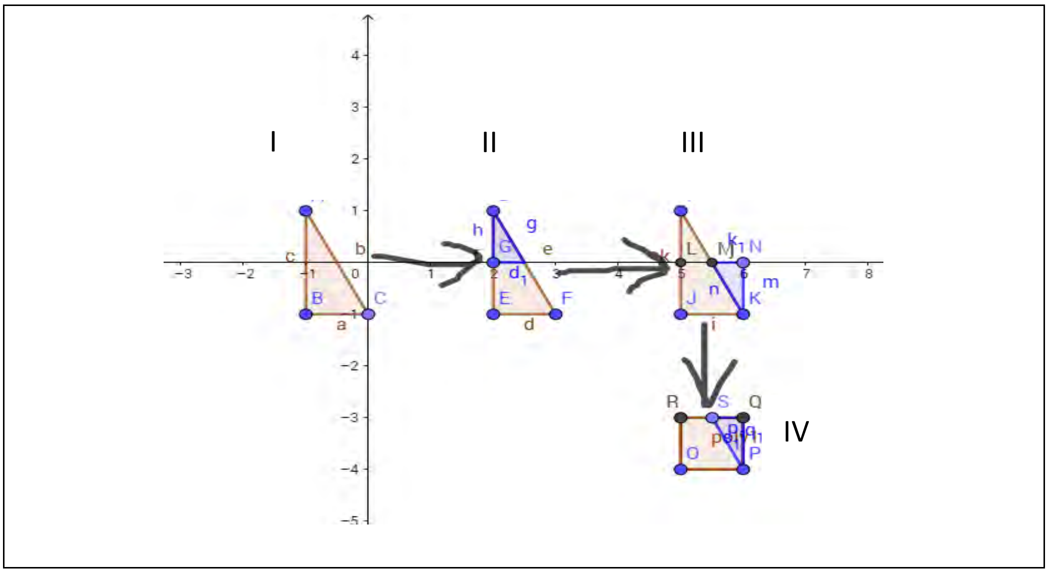


圖 2 利用切割或補成簡單的圖形

圖 2 之方法：

利用 Geogebra 軟體製繪製出一直角三角形。

1. 在 $\overline{AB}$ 線段上取中點 G 連接三角形兩邊中點。
2. 以圖 III 所示，將以 M 點為中心△LIM，向下旋轉併成一長方形。
3. 因此可將直角三角形化成一長方形之結果。

(四)將長方形平方化

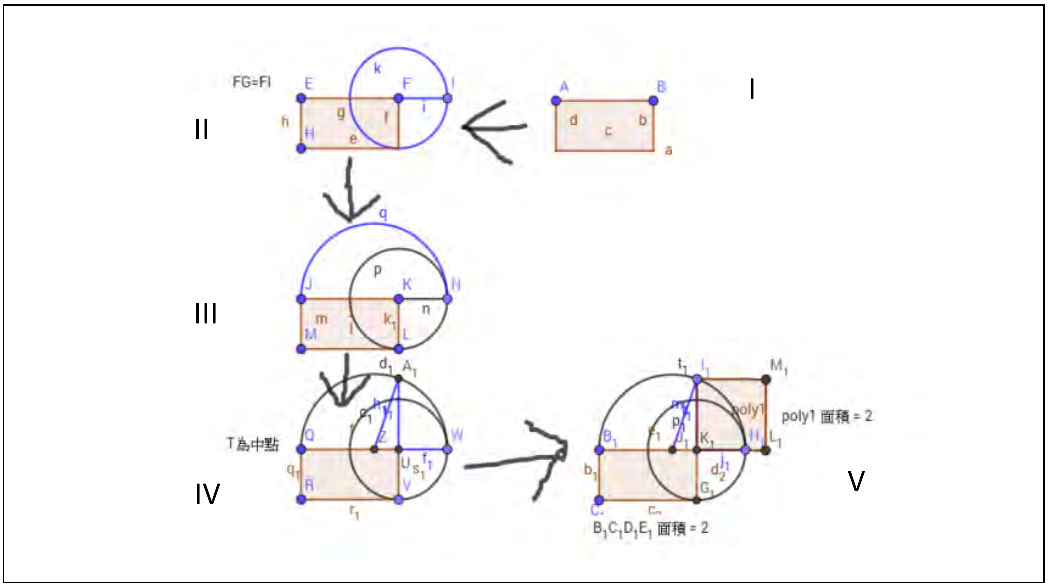


圖 3 將長方形平方化的步驟

圖 3 之方法：

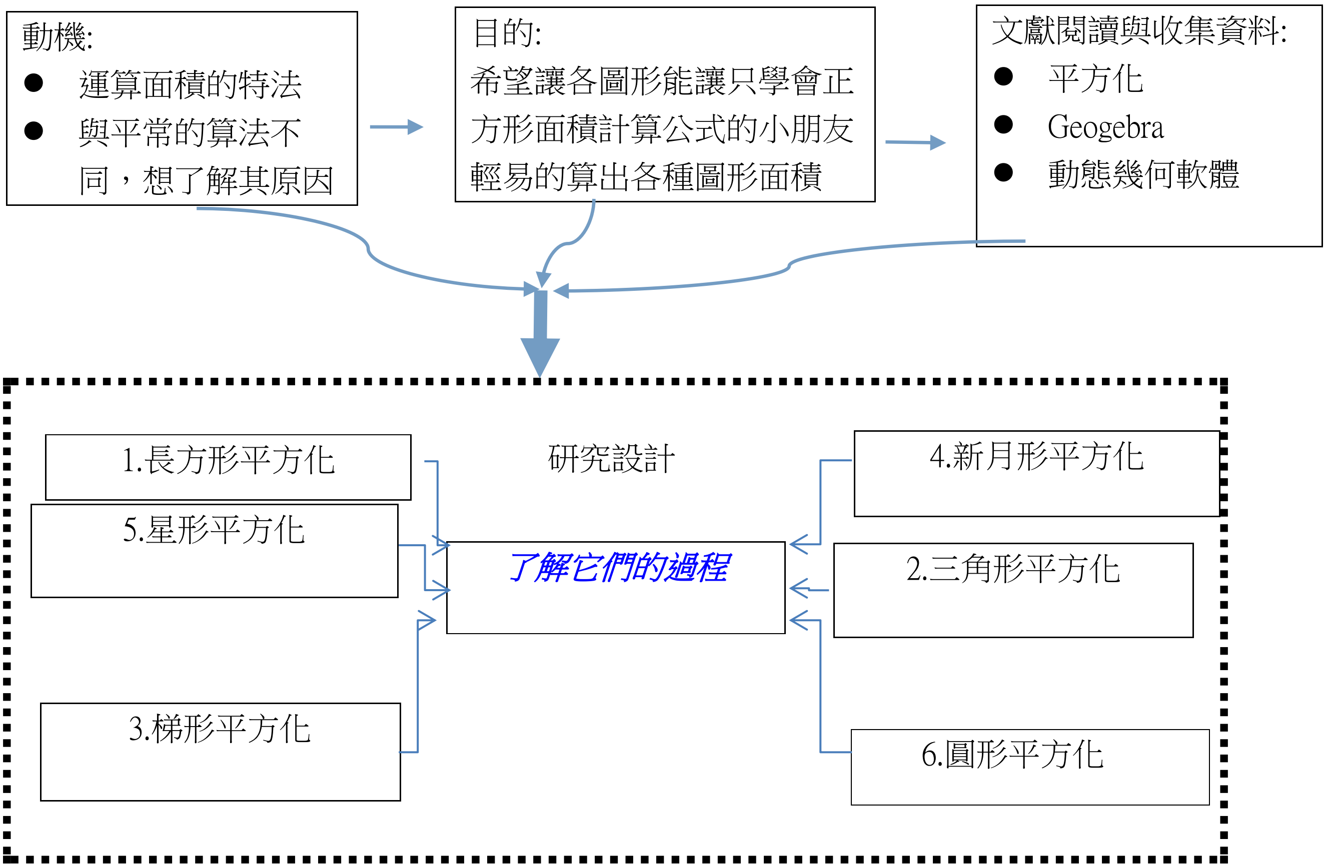
一、說明：

1. 利用 Geogebra 軟體製繪製出一長方形。
2. 以圖 II 所示，畫出與長方形等寬的直線，連接長方形的長。
3. 以圖 III 所示，連接後的兩端線段 $\overline{JN}$ 為直徑作一半圓。
4. 以寬往上延伸連接到半圓圓周，此長度大小作為正方形邊長
5. 最後完成正方形，即為平方化後的結果。

二、預計結果：

任何無弧度的圖形利用尺規作圖皆可被平方化，並嘗試著讓有弧度的圖形也平方化，達到能快速算出面積的效果。

四、實驗流程圖



伍、研究結果與討論

※無弧度圖形的平方化

一、長方形平方化(此為文獻資料經延伸而來)

(一) 方法：

利用 Geogebra 軟體製作出等面積的正方形

1. 製作一長方形，利用尺規作圖將他化為正方形。

(1) 利用尺規作圖繪製出一半圓(直徑為長+寬)。

(2) 將寬延伸至半圓圓周上，此為正方形之邊長，繪出正方形，即為平方化後的結果。

(二) 結果：

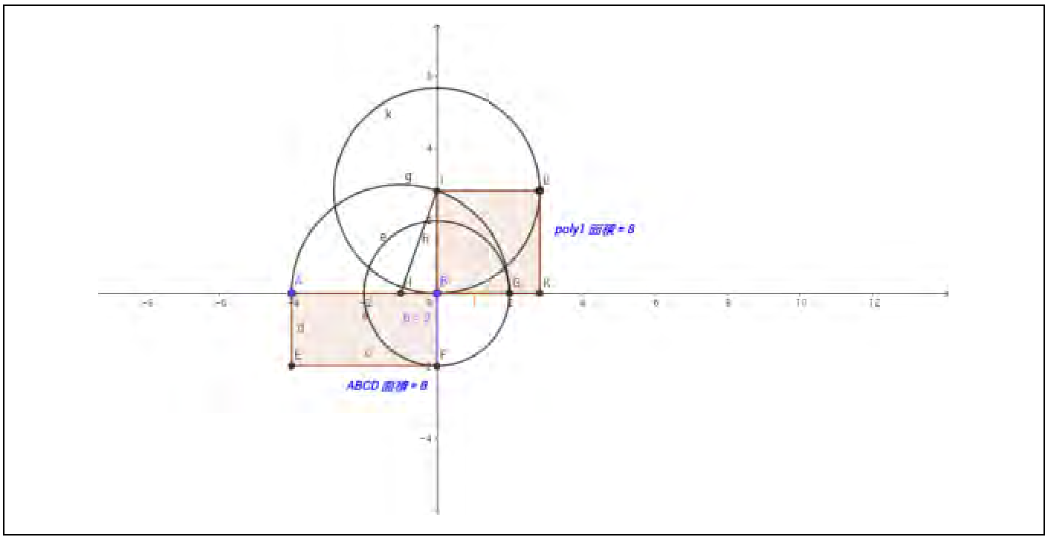


圖 4　　長方形平方化

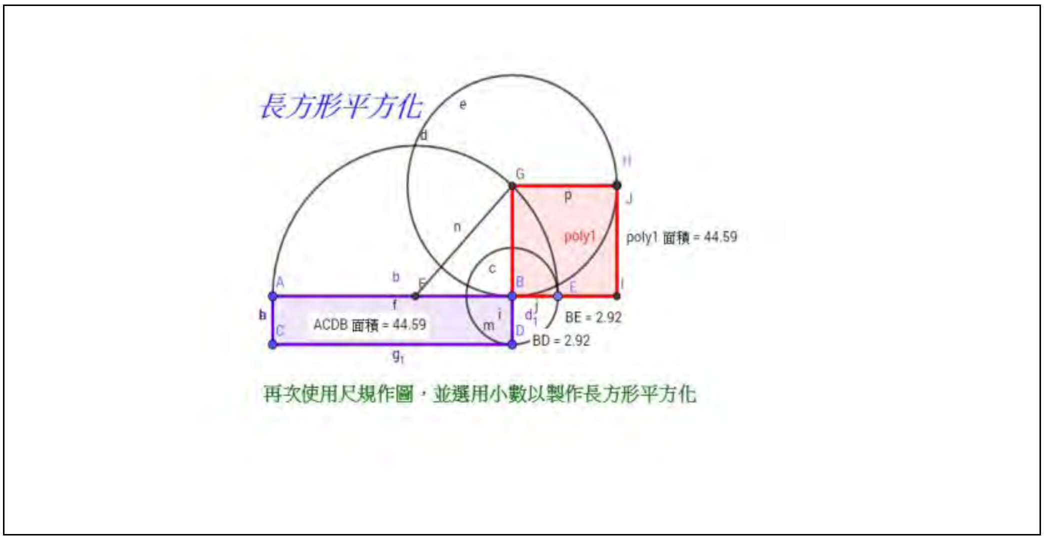


圖 5　　長方形平方化

(三) 驗證：

1. 假設長方形長與寬分別為 x 和 y。
2. 做一半圓使其直徑為 x+y。
3. 找到半圓圓心並延伸長方形的寬，再以圓心作半徑，兩線相交。
4. 以長方形寬之延伸，延伸至弧上的長度作為邊，繪製出一與此長方形

等面積的正方形，如圖 4 及圖 5。

$\overline{AB}$=4，4×2=8；$\overline{BG}$=2(尺規作圖)，(2+4)/2=3(中心點)，$\overline{BH}$=1，$\overline{HI}$=3(尺規作圖)。利用畢氏定理得到$\overline{BU}$=$\sqrt{8}$，得正方形面積=8。故正方形面積=長方形面積。

二、三角形平方化

(一) 方法：

利用 Geogebra 軟體製作出等面積的正方形

1. 繪製出一三角形。
2. 連接三角形兩邊中點。
3. 將切割後上面的三角形往下補成長方形，如下圖。
4. 利用三長方形平方化的方式即可得出此三角形平方化圖形。

(二) 結果：

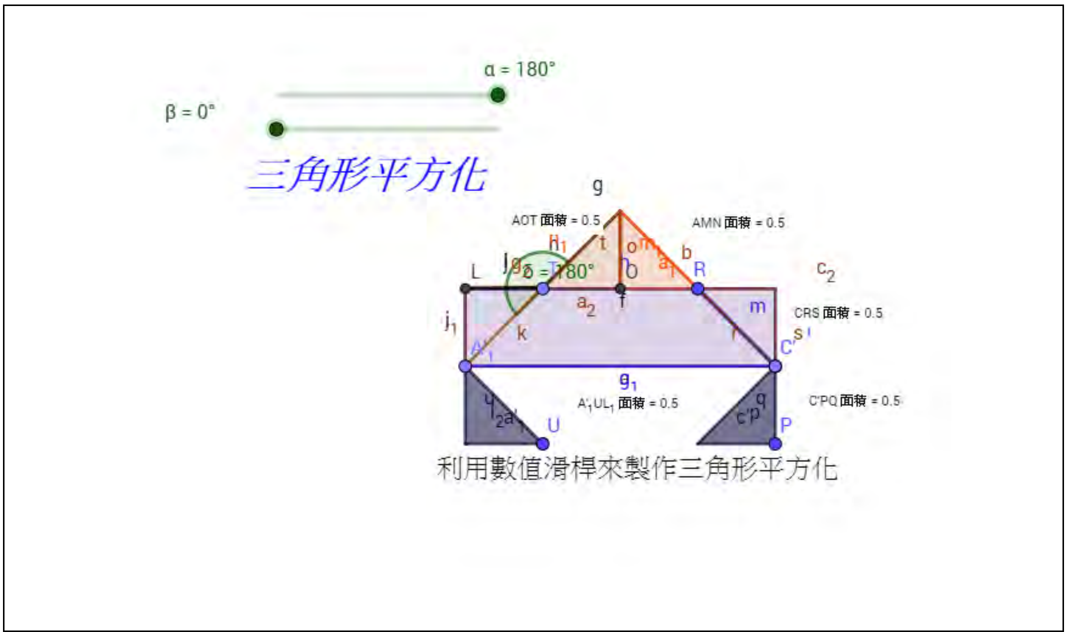


圖 6 三角形平方化

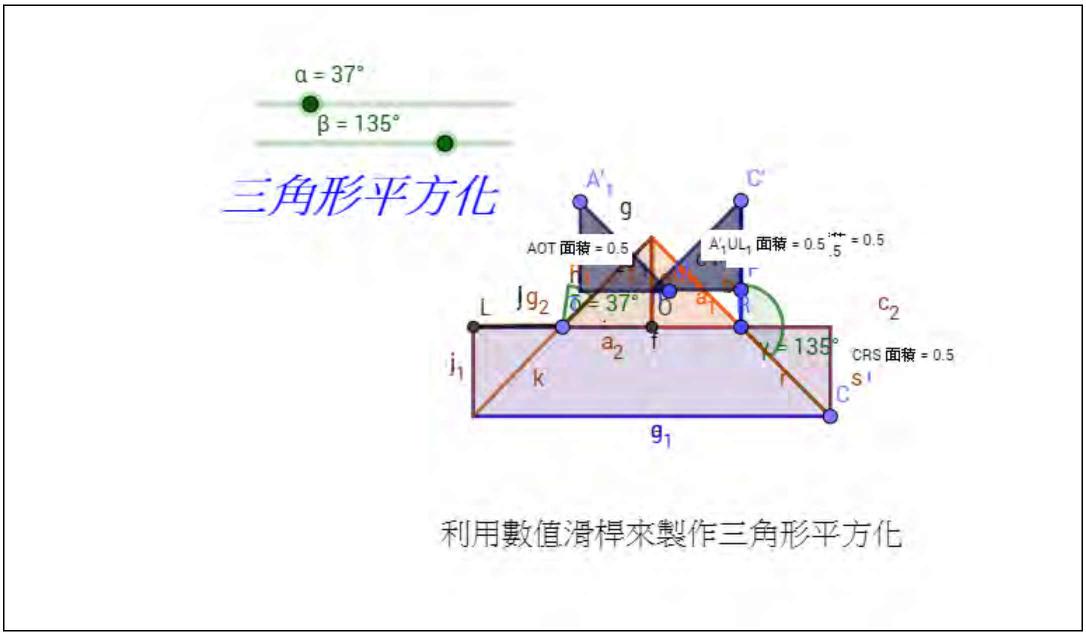


圖 7 三角形平方化

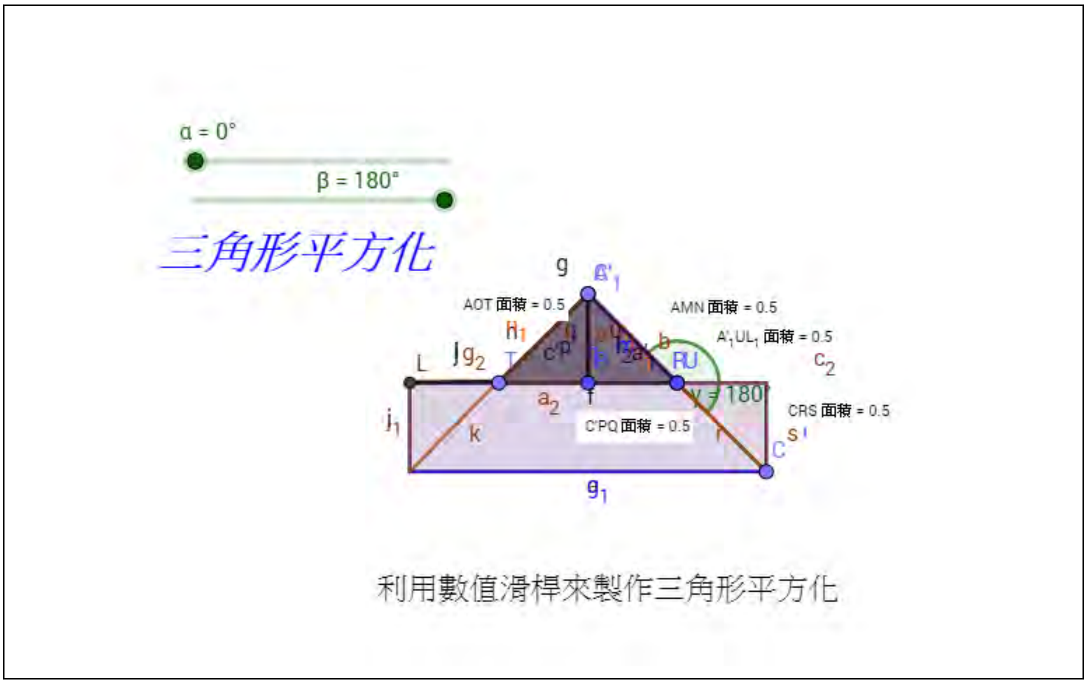


圖 8 三角形平方化

(三) 驗證：

1. 假設三角形底和高分別為 x 和 y，切割成一三角形(上)和一梯形(下)。
2. 小三角形底為 1/2x，高為 1/2y;梯形上底為 1/2x，下底為 x，高為 1/2y。
3. 最後得三角形面積=xy/2

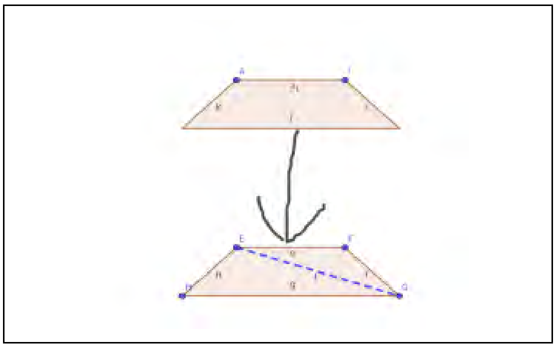
另外為了驗證三角形平方化後結果的準確性，因此當成功的平方化後還得確認兩圖的面積相等(利用三角形面積公式和切割的方式來製作)。

三、梯形面積平方化

(一) 方法：

方法 1：(文獻提供)

1. 將梯形對角切割成兩三角形，再用三角形平方化來加以平方。(如下圖)



方法 2：

利用 Geogebra 軟體製作出等面積的長方形和三角形

1. 繪出一梯形將其一邊切割為三角形再補到另一邊，使其成為長方形。
2. 利用長方形平方化來將梯形平方化。

(二) 結果：

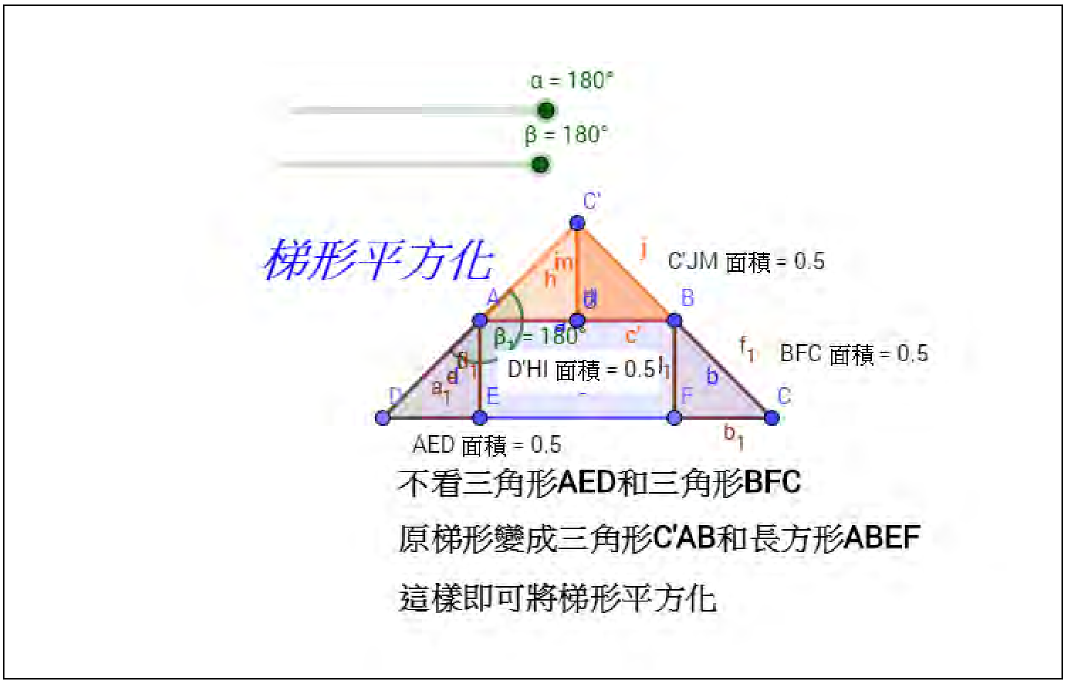


圖 9　梯形平方化

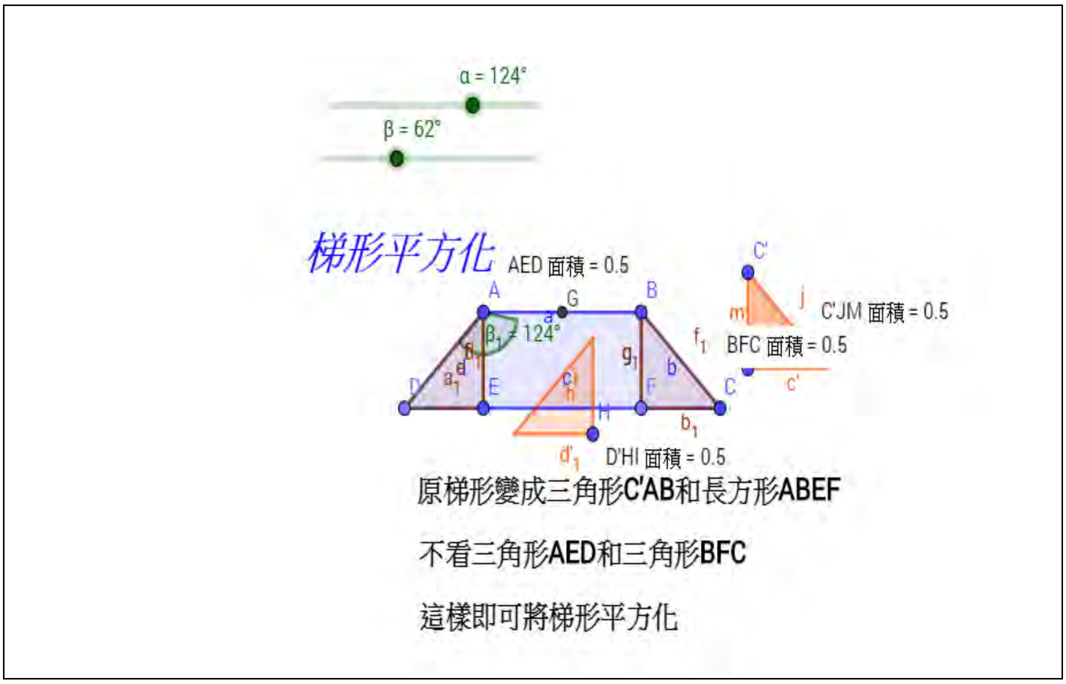


圖 10　梯形平方化

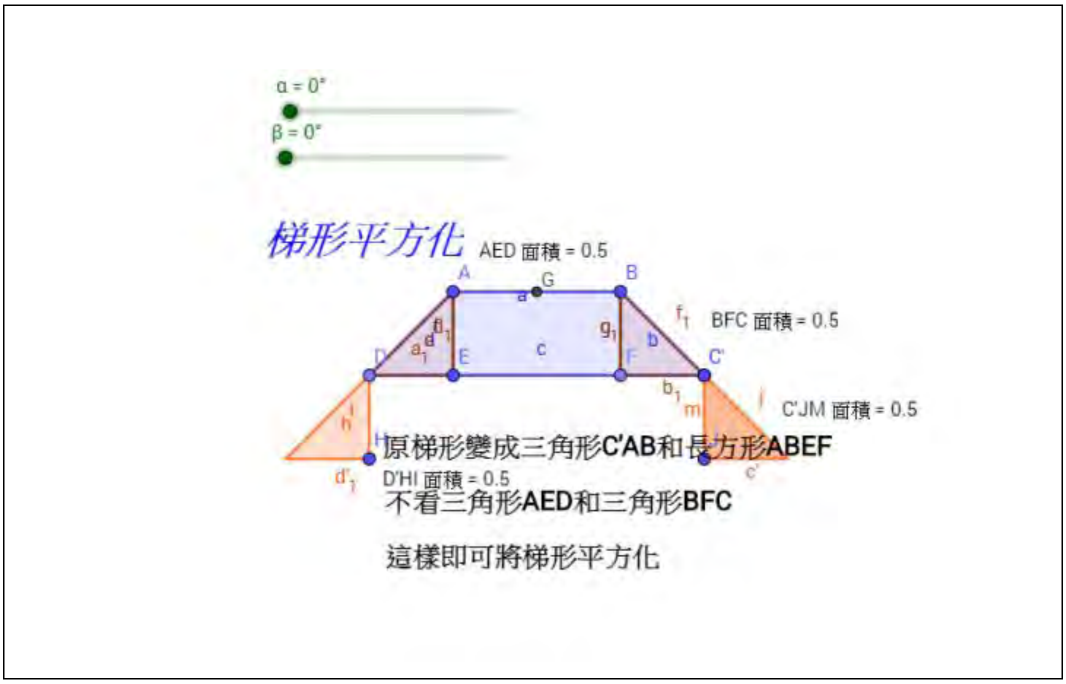


圖 11　梯形平方化

(三) 驗證：

其驗證方法與三角形大致相同：

1. 假設梯形底和高分別為 x 和 y，補成一三角形(上)和一長方形(下)。
2. 小三角形底為 1/2x(梯形之上底)，高為 1/2y;梯形上底為 1/2x，下底為 x，高為 1/2y。
3. 最後得梯形面積=xy/2

另外為了驗證梯形平方化後結果的準確性，因此當成功的平方化後還得確認兩圖的面積相等(利用三角形面積公式和切割的方式來製作)。

※有弧度圖形的平方化

四、新月形平方化(文獻資料延伸)

(一) 方法：

利用 Geogebra 軟體補上三角形和半圓使新月形更容易平方化。

(二) 結果和證明：

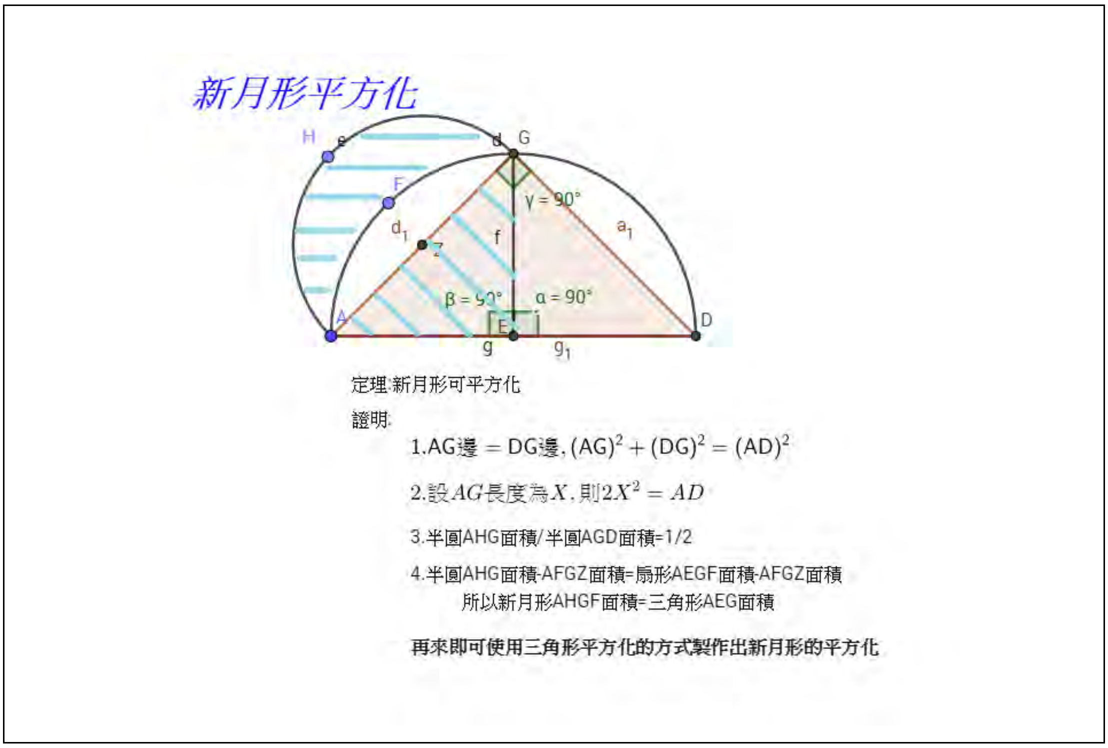


圖 12　新月形平方化與其證明

1. 假設等腰直角三角形兩股與斜邊分別為 x、y，其他所設代數如圖上顯示。
2. AG=DG，故$(AG)^2+(DG)^2=(AD)^2$，得$(2X^2=y^2)$。
3. 半圓 AHG 面積/半圓 AGD 面積=1/2。
4. 半圓 AHG-弓形 AFGZ 之面積(得到一新月形)=扇形 AEGF 面積-弓形 AFGZ 面積(得到一等腰直角三角形)。
5. 故若再使用三角形平方化，即可得到一完整的平方化結果。

※並不是所有新月形皆可平方化

五、星形平方化

(一) 方法:

利用 Geogebra 軟體切割成 8 個三角形再製作出等面積的正方形。

1. 繪製一星形。
2. 將中間切割成 3 個三角形外圍則為五個三角形。
3. 利用三角形平方化製作出其結果。

(二) 結果:

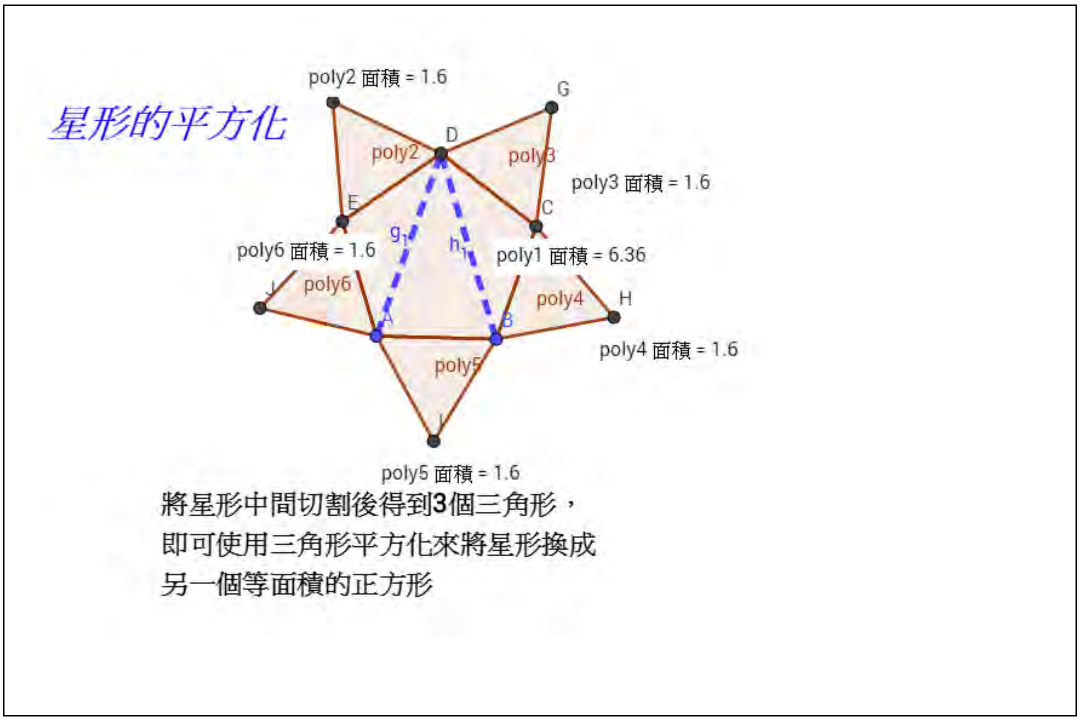


圖 13　星形平方化與其方式

(三) 驗證:

為了驗證星形平方化後結果的準確性，因此當成功的平方化後還得確認兩圖的面積相等(利用三角形面積公式和切割的方式來證明，如上圖所示)。

六、圓形最小圓平方化*(不適用於各種圓)*

(一) 方法 1：

利用 Geogebra 軟體製作輔助線，並製作出與其近似面積的正方形(因為化圓為方理論上是不可能的)。

1. 取中間之圓，找出其直徑，此為所求正方形之對角線。
2. 找到直徑兩邊端點的中點，1 端點到此中點的距離即為正方形之邊長。
3. 此正方形之面積大約等於最先繪製之圓的面積。

畫一圓，並以此圓之圓心做同心圓 2 個，三圓的距離需為等差數列且三圓之半徑長度比需為 4：5：6 或 3：4：5(不一定) ，證明如下:

1. 設三圓半徑為(r-d，r，r+d)。
2. 則可推出小圓面積 =【中圓直徑)^2】/2
3. 得 πr^2={【2(r+d)】^{2}}/2=$2(r+d)^2$
4. $\pi r^2=2r^2+4dr+2d^2$
5. $(\pi-2)r^2-4dr-2d^2=0$
6. r=(2d±√(2π)d/(π-2)…負不合。
7. r 約等於 3.95d
8. r 取近似值 4d
9. 得三圓半徑為 3:4:5

方法 2：

1. 畫 1 圓，並且以方法 1 之步驟 1 繪出直徑。
2. 取直徑之中點與直徑兩端點其中一點作圖。
3. 以圓心延伸兩點之射線中點作為正方形之 1 點，而其餘兩點則為正方形之另兩點。如圖 19。

(二) 結果：

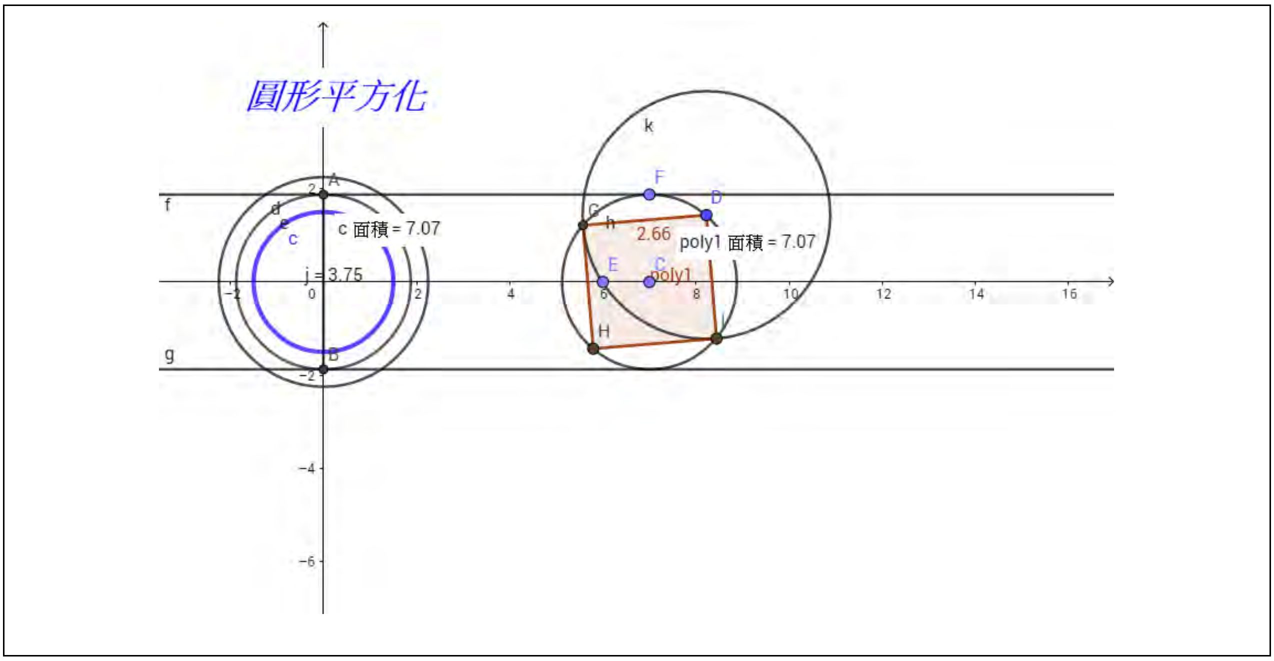


圖 14　圓形平方化(半徑比為 3:4:5)

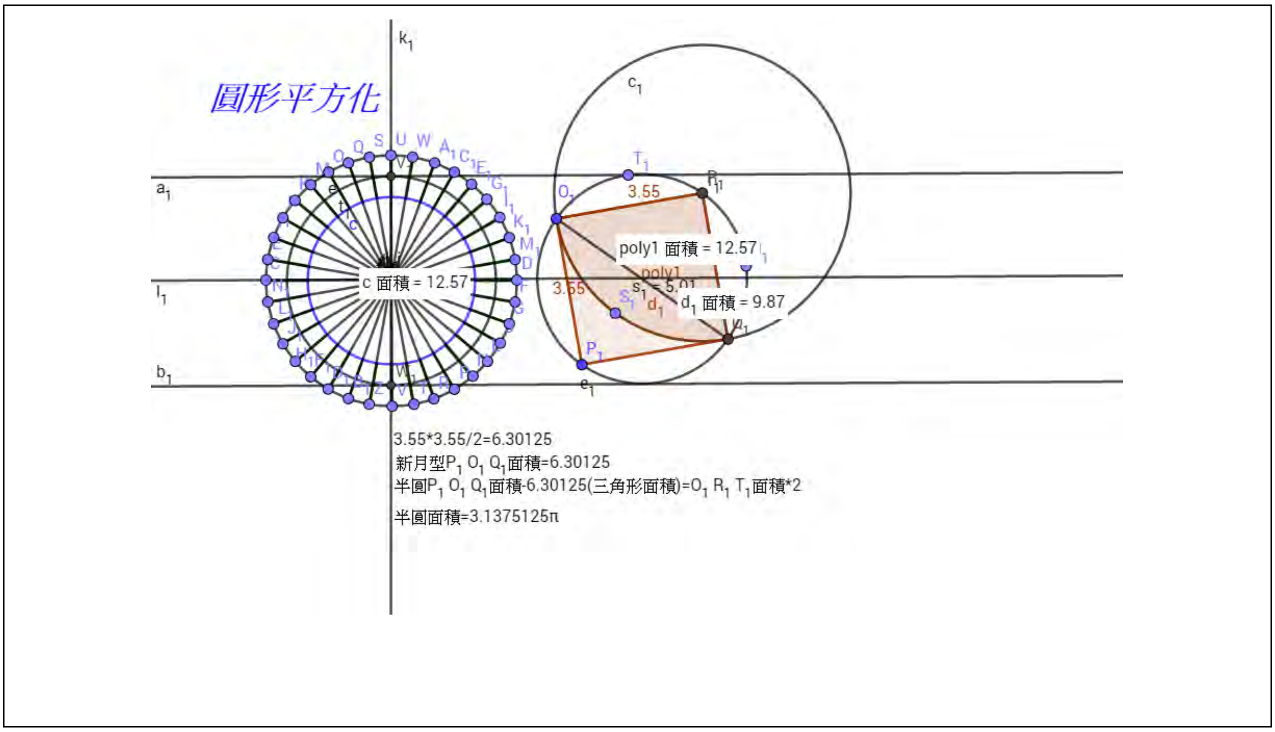


圖 15　圓形平方化(半徑比為 3:4:5)

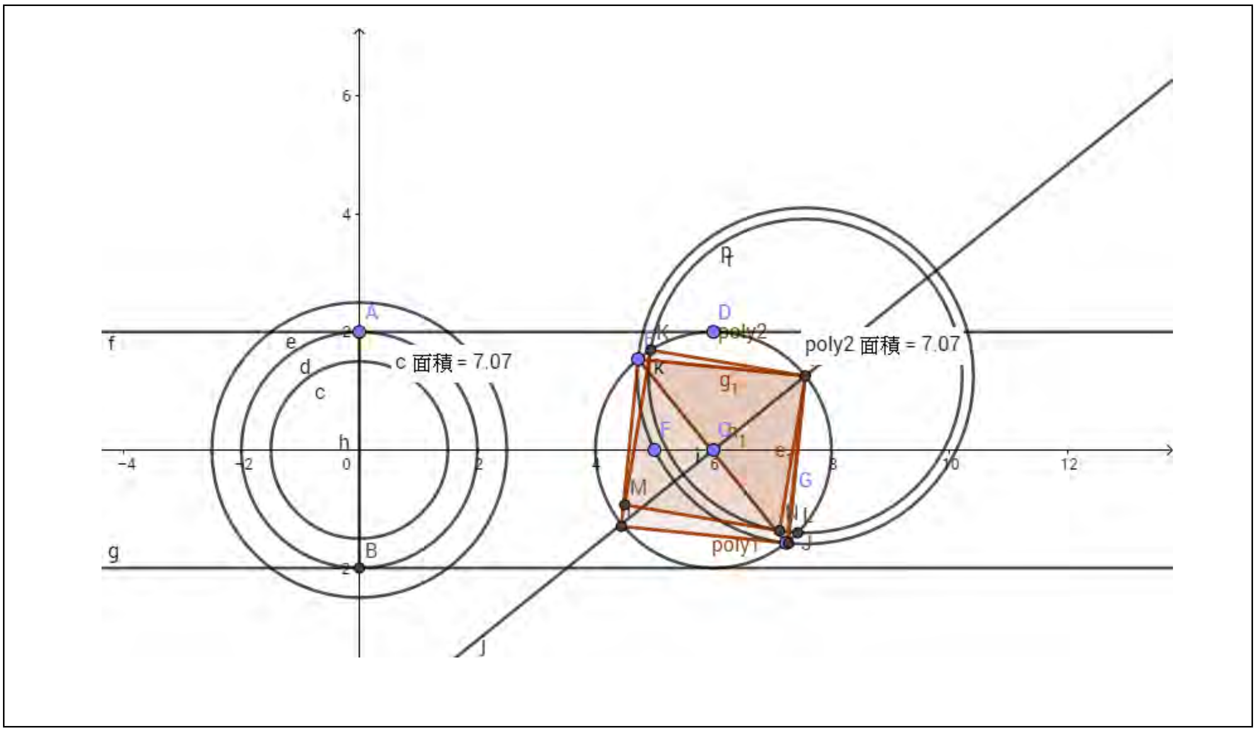


圖 16 圓形平方化(半徑分別為 6,8,10)

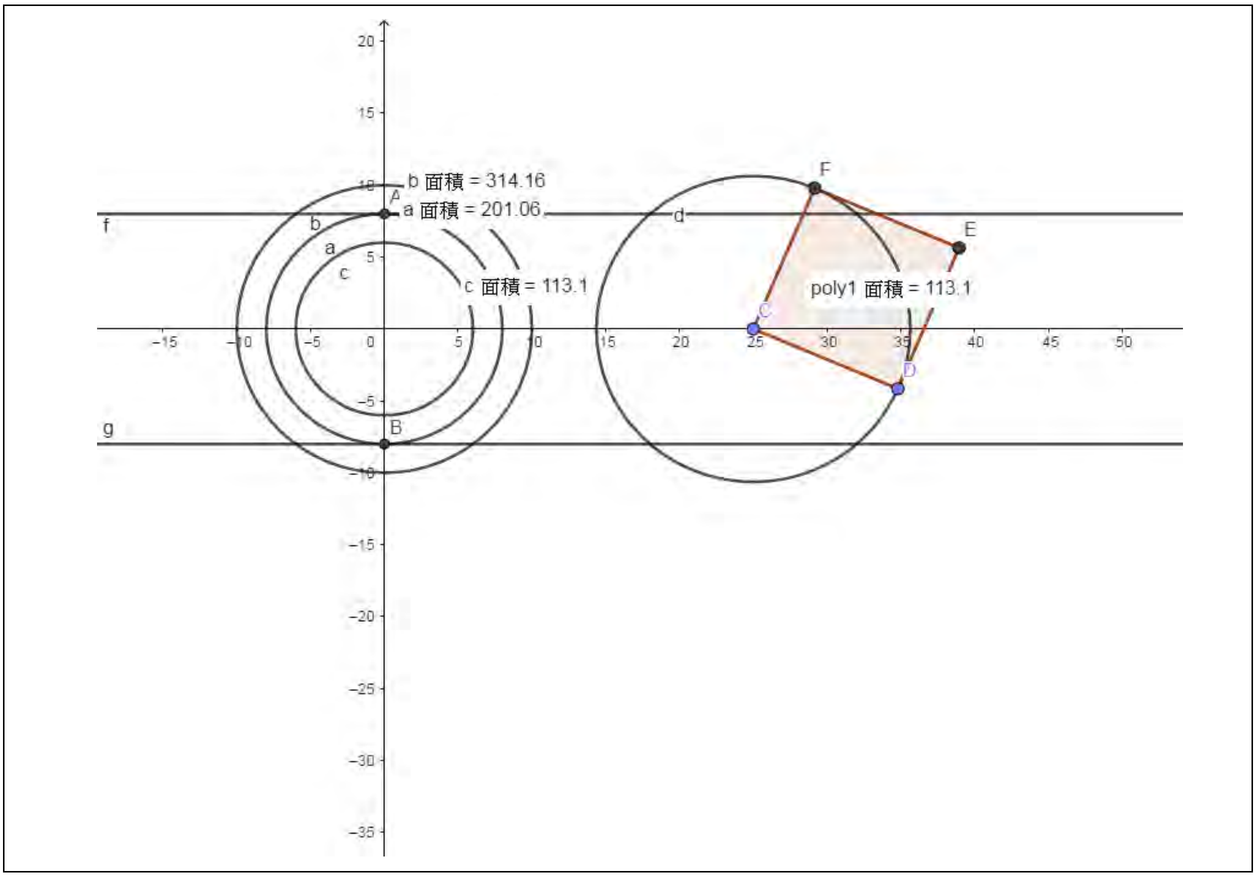


圖 17 圓形平方化(半徑分別為 6,8,10)

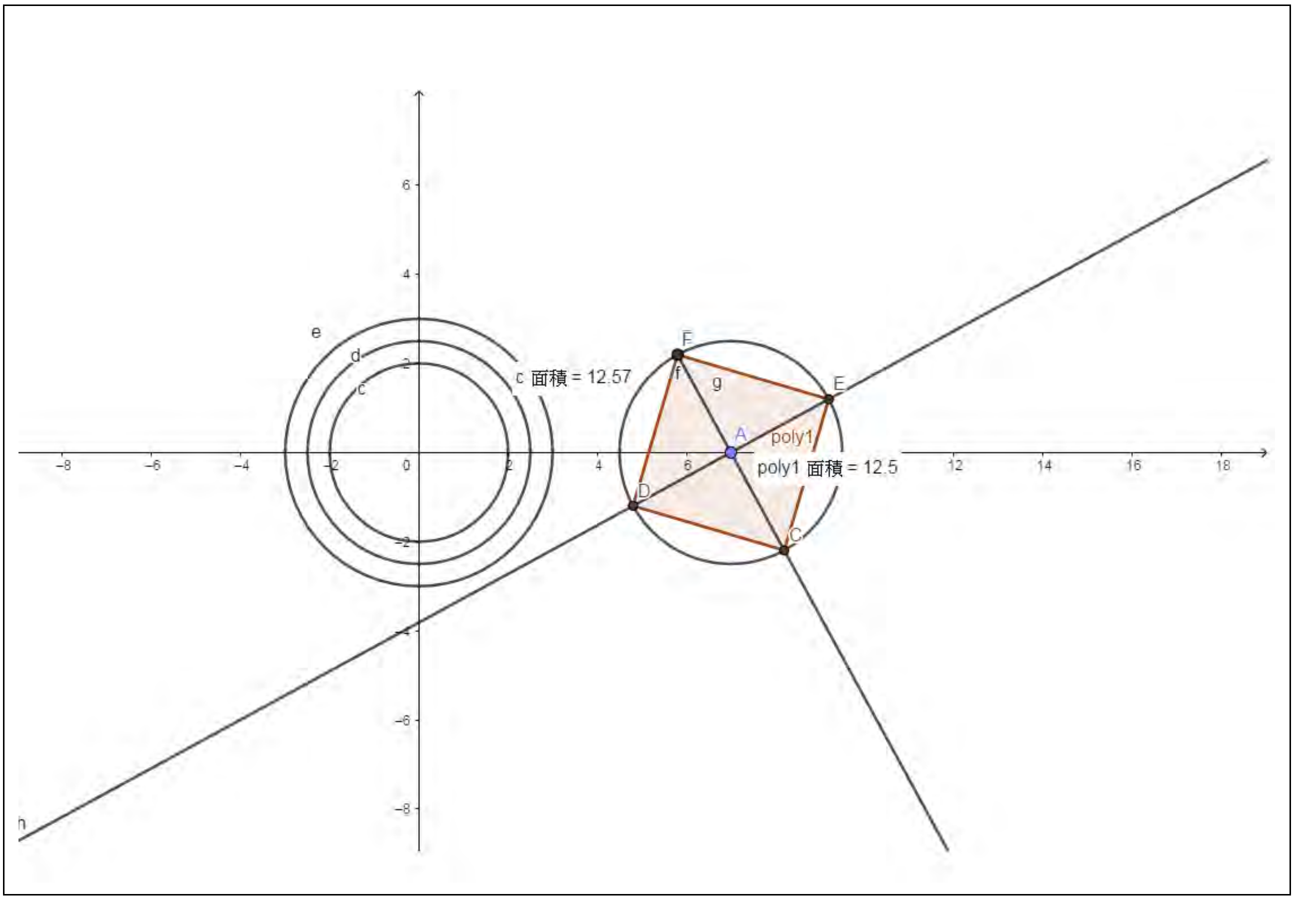


圖 18　圓形平方化(4:5:6)

(三) 驗證：

為了驗證圓形平方化後結果的準確性，因此當成功的平方化後還得確認兩圖的面積相等(利用圓形面積公式來證明，如圖 15、16 所示)。

將圖 16 和 17 所要求的最小圓 c 擴大成三個圓，取中間的圓來畫 2 條輔助線，繪出與 2 條線相切的圓，並且作一大圓，圓心在此小圓上，使大圓通過小圓的兩點(兩點連起來微小圓直徑)，以大圓的圓心和通過的其中一點當邊長，繪出正方形，此正方形面積等於圓形面積，平方化成功。另外由圖 18 的 2 個正方形可知:<u>一圓可容納無數個大約與此圓面積相等的正方形。</u>

七、三圓中間的圓平方化*(不適用於各種圓)*

(一) 方法 1:

利用 Geogebra 軟體製作輔助線，並製作出與其近似面積的正方形(因為化圓為方理論上是不可能的)。

1. 繪一正方形與小圓相切即為所求。

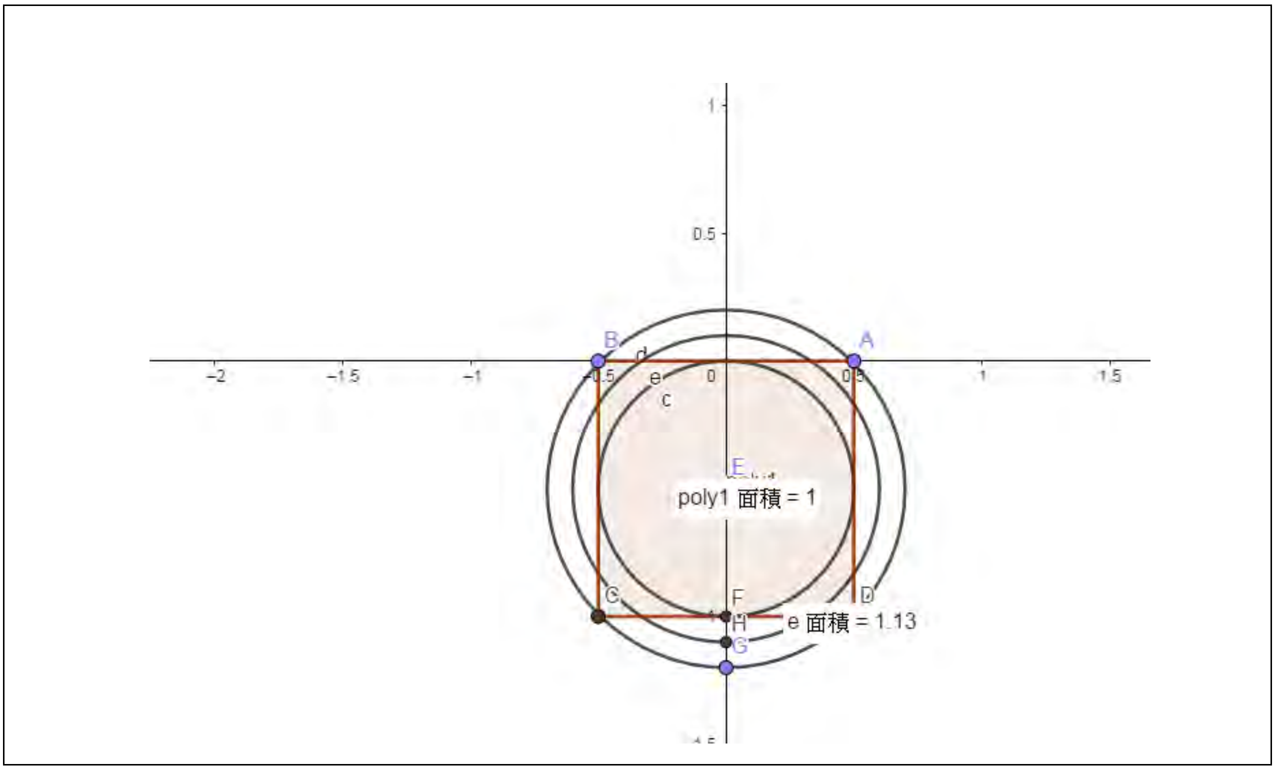


圖 19　取中間圓之平方化

事實上，其實 3 個等差數列的圓只是正方形(所求之圓為此正方形的內接圓)的內接圓和外接圓與此兩圓之同側兩點的中心。如上圖 F、G 之中點 H。取 H 圓，即為上述方法所提及之中間的圓。

八、弓形平方化(新月形的延伸)

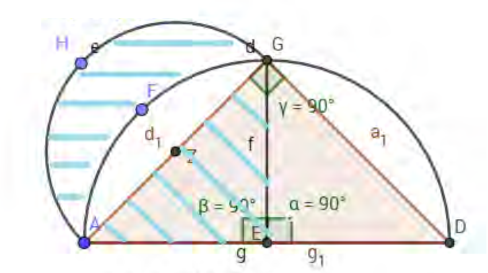
(一) 方法：

利用 Geogebra 軟體作圖，並將面積算出，最後將它化為正方形

1. 延伸新月型平方化所提到的弓形。
2. 弓形即是將扇形剪去三角形而得。
3. 利用新月形證明的概念將其平方化。

(二) 結果：

弓形平方化



定理：弓形平方化

GFAZ 為一弓形

延伸新月形平方化得到 GHAF=GAE

因此中間的弓形面積 ＝ 扇形 GFAE - △GAE

圖 20　弓形平方化

※並不是所有弓形皆可平方化

(三) 驗證：

可利用新月形的證明來證明弓形平方化：

1. 假設等腰直角三角形兩股與斜邊分別為 x、y，其他所設代數如圖上顯示。
2. AG=DG，故$(AG)^2+(DG)^2=(AD)^2$，得$(2X^2=y^2)$。
3. 半圓 AHG 面積/半圓 AGD 面積=1/2。

4. 半圓 AHG-弓形 AFGZ 之面積(得到一新月形)=扇形 AEGF 面積-弓形 AFGZ 面積(得到一等腰直角三角形)。
5. 故若再使用三角形平方化，即可得到一完整的平方化結果。
6. 弓形即是以第４點的弓形ＡＦＧＺ面積的延伸。

另外為了驗證弓形平方化後結果的準確性，因此當成功的平方化後還得確認兩圖的面積相等(利用新月形平方化的結論延伸來證明)，如上六點所示。

※並不是所有新月形皆可平方化，因此也不是各種弓形皆可平方化。

九、生活中的應用(花狀圖)

(一) 方法：

1. 繪製一花狀圖。
2. 利用切割的方式將他化為各種圖形。
3. 利用上面介紹之各種平方化的方式來將其平方化。

(二) 結果：

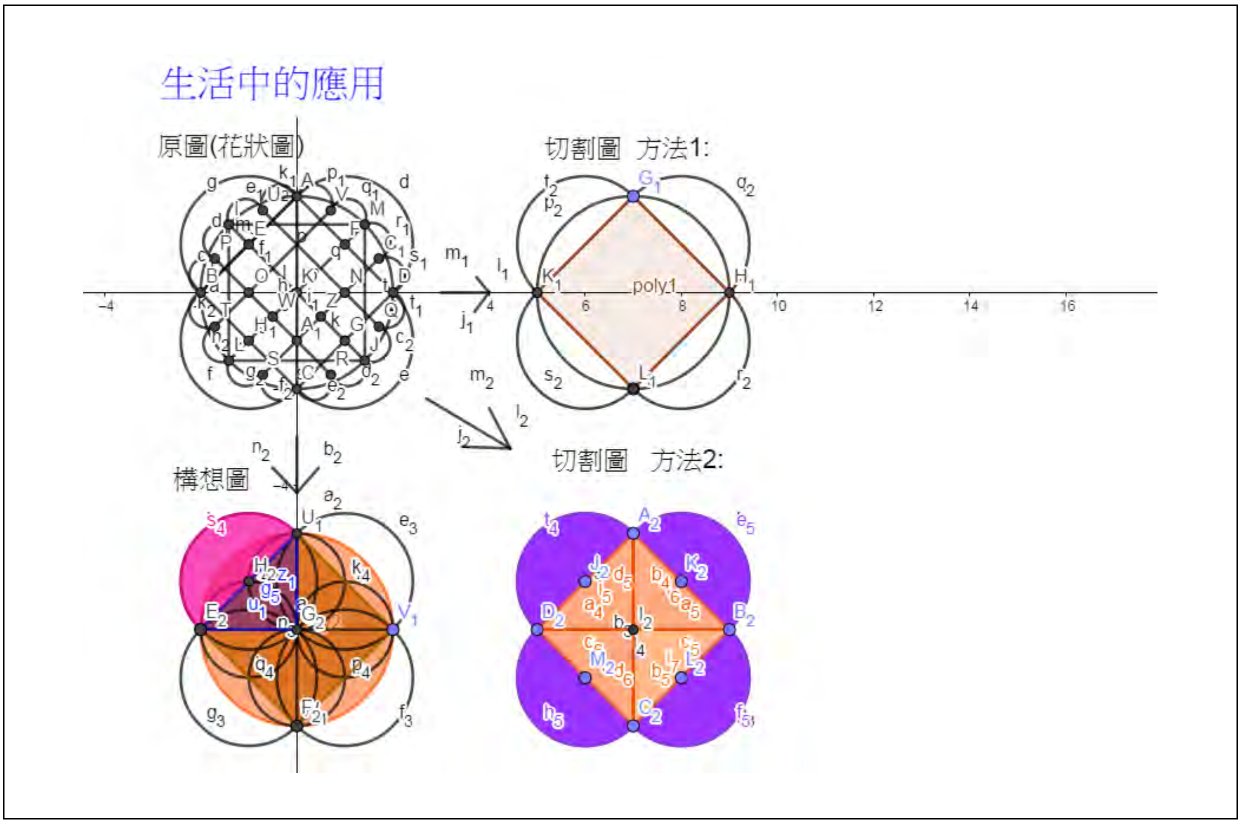


圖21 生活中的應用(花狀圖)

其實花狀圖有多種的方法可用來切割成各種圖形。如上圖，方法 1：將花狀圖割成 4 半圓和 1 正方形。方法 2：將方法 1 之正方形割成 4 塊直角三角形，即可以更簡單之方法來，將其平方化。

(三) 驗證:

由以上各圖形介紹綜合後繪製成此花狀圖，其中構想圖為製作此圖前的想法；

方法一：利用切割的方式將它切成正方形(4 個三角形)

以及半圓形(新月形+弓形)再利用平方化簡單的算出其面積{其面積

$2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}$ [2×2/2×4]+ $\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\pi/2\times4=4\pi+8$；

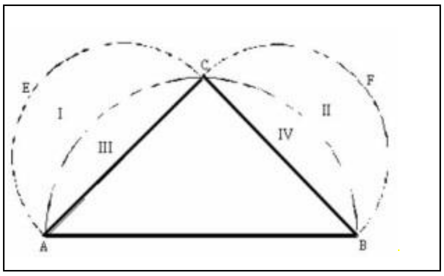
方法二

是將它分為一個圓+四個新月形($2\times2\times\pi+2\times2/2\times4=4\pi+8$)，結果相同。

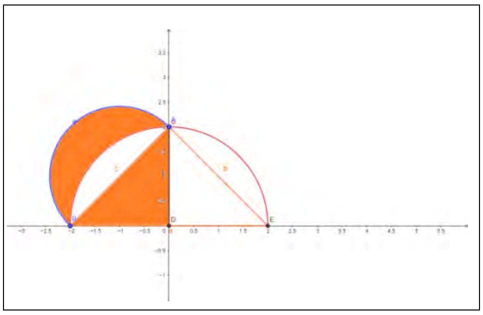
陸、討論

一、希波克拉底斯寫出世上第一部幾何學的書，可惜已經失傳。書中，他首先把定理按邏輯順序排列。歐幾里德（Euclid）的幾何原本前4卷的內容，據說就是利用此書的內容和邏輯排列想法來著述。

二、希波克拉底斯也從事“化圓為方”的研究，他研究一些月牙形的面積問題，以便打開“化圓為方”問題的思路，下面是希波克拉底斯的月牙形求積的例子。



希波克拉底斯發現Ⅰ+Ⅱ=三角形的面積



希波克拉底斯 新月形平方化

三、化圓為方目前仍為不可能之事，但我們可以利用圖形平方化畫出與圓形大約相等面積之正方形(Geogebra 軟體遇到無限小數的狀況會四捨五入)。

四、在沒有電腦的情況之下，可否只用尺規來完成各種規則與不規則形的平方化。

五、面積可用平方化完成，同樣地，體積是否可以利用立方化來完成。

六、在甚麼條件下的圓可用來平方化。

七、若將圖形盡量切割可使平方化更快、更順利嗎？

柒、結論

一、平方化就是將圖形變成易計算出面積的三角形或長方形的一種概念。

二、任何多邊形皆可平方化。

三、三角形、梯形、星形……等無弧度的多邊形皆須先化為長方形在平方化。

四、要將圓形、新月形這兩種圖形平方化，都須畫輔助線，並切割或補上其他簡單的形狀(如:長方形、三角形...)方便製作。

五、一圓可容納無數個大約與此圓面積相等的正方形。

六、延伸新月形平方化---弓形平方化將扇形面積減去三角形面積即為弓形面積，最後再將它變為正方形。

七、在生活周遭，只要將複雜形的圖形看成平面的，幾乎都可以用切割或補得方式來平方化。

八、化圓為方為不可能之事，但圖形平方化將可以畫出與圓形大約相等面積之正方形。

九、不是每種圓形、新月形、弓形皆可使用上述之方法。

十、本研究之長方形、新月形兩圖形平方化皆為透過文獻延伸而來。

十一、本研究之目的為希望將複雜之圖形平方化得到簡單的圖形，並且能推廣此方法的應用。

十二、在沒有電腦的情況之下，是可以用尺規來完成各種規則與不規則形的平方化，但越複雜的圖形製作時間越久。

十三、利用立方化來算體積原則上是可行的，但需要更進階之軟體才能完成作圖。

十四、圓形平方化所使用之三圓的半徑比宜為３：４：５。

十五、若將圖形盡量切割可使平方化更快、更順利。

捌、參考資料

1.國中翰林版第 3 冊第 2 章 平方根與畢氏定理

2.國中翰林版第 4 冊第 1 章 等差數列與等差級數

3.維基百科。動態幾何圖形。取自

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8B%95%E6%85%8B%E5%B9%BE%E4%BD%95%E8%BB%9F%E9%AB%94

4.希波克拉底斯與月牙形面積研究。取自

http://www.fivedream.com/page1.aspx?no=221249&step=1&newsno=28251

5.William Dunham\天才之旅\牛頓出版公司\P.13～P.22:希波克拉底斯的新月形平方化\1998 年出版

【評語】030401

探討將給定的平面圖像轉換成等面積的正方形的平方化問題。針對所給出的圖像為長方形、三角形或星形時的轉換方式，給出了說明。對於將給定的圓轉換成面積近似的正方形的問題，也作了一些討論。平方化問題是一個非常古老的問題，而新月形的平方化故事，因為牽涉到圓的平方化問題，又是其中常被提及的一段數學典故。因為故事很有趣，也因此引發作者對此問題的好奇心。對問題抱持著好奇的態度並積極的尋求解答是從事研究工作最重要的一個部分，作者在這方面的表現是值得稱許的。但作者沒有注意到的是，這個問題其實已經有許多的結果了。作品中關於多邊形的部分都是已經被討論過的。而圓的部分，作者用近似的方式說明，似乎與原始的平方化問題的本意有些出入。作者確實得出了一些結論，但如果在研究之初能多做一些資料蒐集的工作，應該可以避免浪費時間重複前人的研究結果。有點可惜了。

作品海報

摘要

本研究是為了可以將不規則形做簡單的改變，使他變成容易計算出面積的正方形。而若要將多邊形變為正方形，就必須將它平方化。我們製作出長方形、三角形、梯形、圓形、新月形、星形等圖形的平方化後的結果。

拜賜科技的發展，電腦已能使各位可以輕鬆地計算出任何圖形的面積。以前的幾何學家利用尺規作圖繪出一維圖形(直線)與二維圖形(圓)，但卻一直無法繪出如拋物線的複雜圖形。另外在這時還有一個很大的問題存在，那就是面積的計算-----平方化的問題。

壹、研究動機

暑假時無意間看了一本書-----天才之旅，裡面介紹了許多偉大的數學定理，其中令我最陶醉的就是希波克拉底斯的新月形平方化。剛好，又適逢社團教到如何使用電腦程式-----Geogebra 讓新月形平方化求證這件困難的事能迎刃而解，不再難以摸索，再精益求精求出完美的曲線-----圓的面積。為了使各面積更容易求出，因此作此研究。

貳、研究目的

一、知道甚麼是平方化
二、了解計算圖形面積的根本
三、找出各種圖形的平方化後的解果
四、利用圖形使大家更能理解如何將算面積的方式簡單化
五、找出各種圖形適合的切割方式

參、研究設備及器材

電腦 Geogebra 軟體、計算機

肆、研究過程或方法

一、研究流程

(一)將所要平方化之圖形繪製於繪圖區

(二)盡量將他割成三角形或長方形

(三)最後將所有沒弧度的形狀切割或補成長方形，則如圖 2 所示

(四)將長方形平方化，則如圖 3 所示

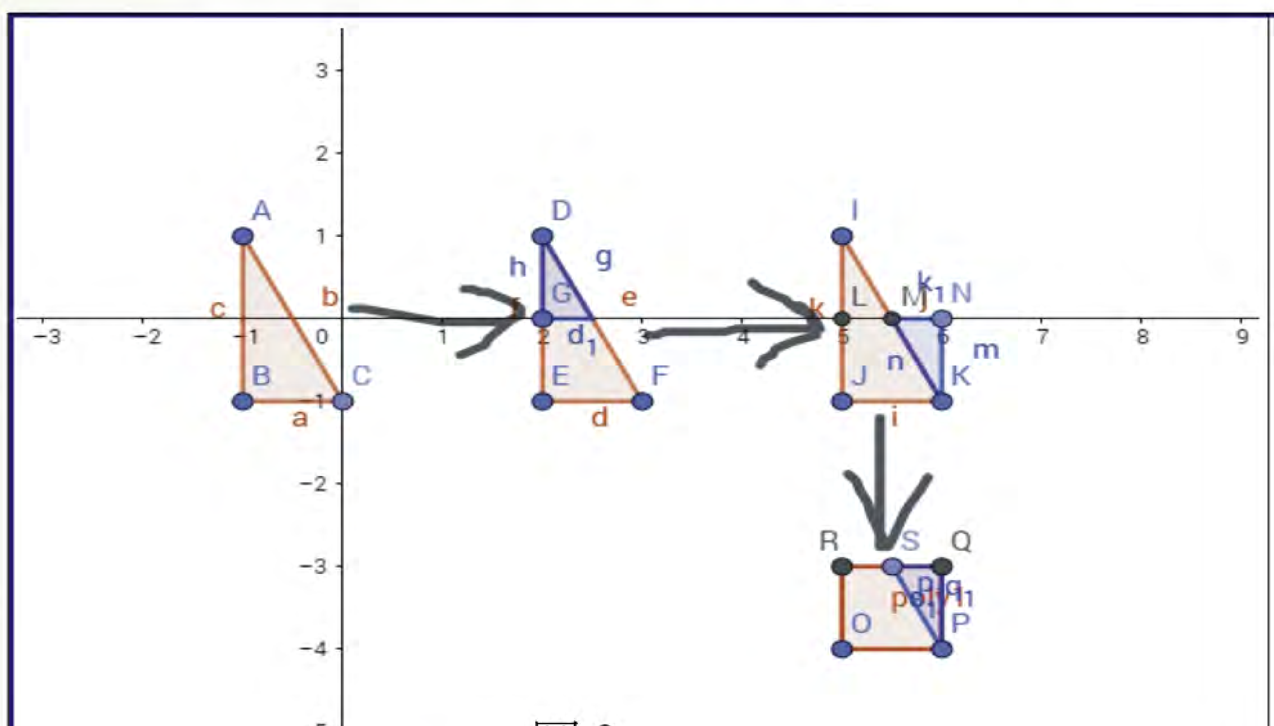


圖 2

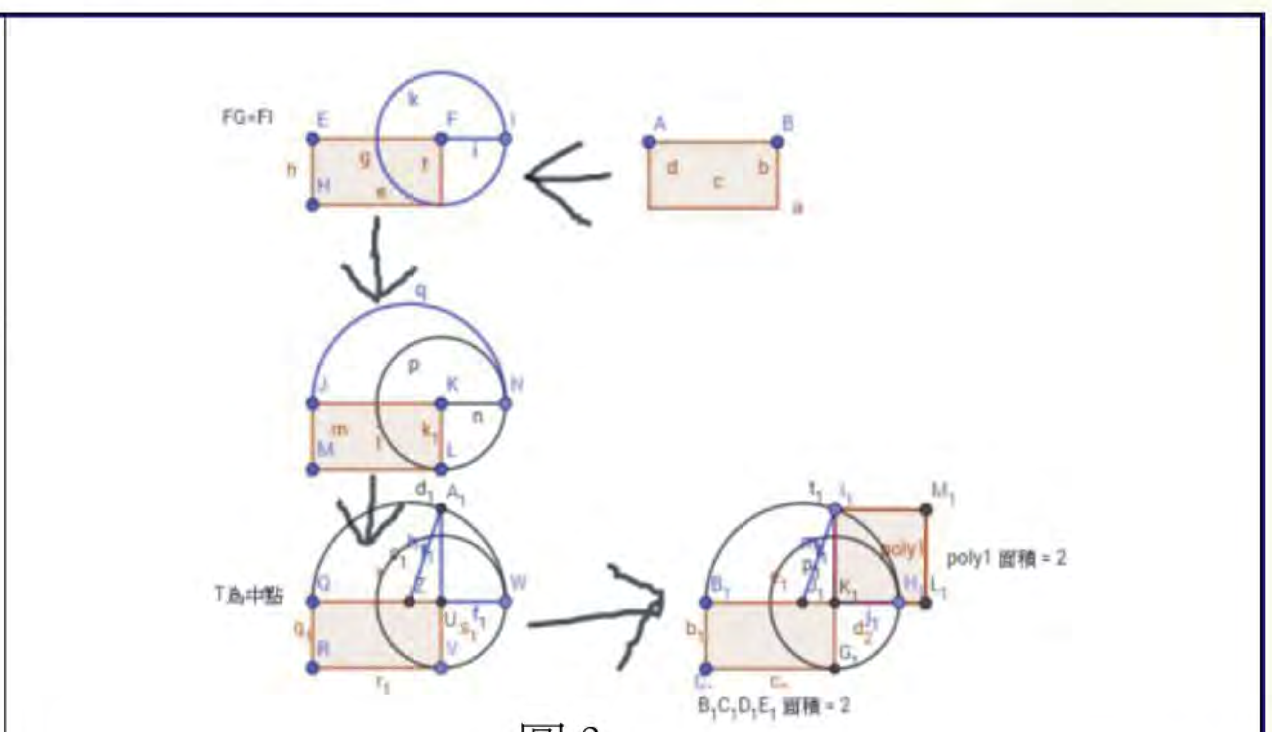


圖 3

二、預計結果：任何無弧度的圖形利用尺規作圖皆可被平方化，並試著讓有弧度的圖形也平方化，達到能快速算出面積的效果。

三、實驗流程圖

動機：
- 運算面積的特法
- 與平常的算法不同，想了解其原因

目的：
希望讓各圖形能讓只學會正方形面積計算公式的小朋友輕易的算出各種圖形面積

文獻閱讀與收集資料：
- 平方化
- Geogebra
- 動態幾何軟體

1.長方形平方化
2.三角形平方化
3.梯形平方化
4.新月形平方化
5.星形平方化
6.圓形平方化

了解它們的過程

伍、研究結果與討論

※無弧度圖形的平方化

一、長方形平方化(此為文獻資料經延伸而來)

(一) 方法：利用 Geogebra 軟體製作出等面積的正方形

(二)驗證：

1.假設長方形長與寬分別為 x 和 y。 2.做一半圓使其直徑為 x+y。 3.找到半圓圓心並延伸長方形的寬，再以圓心作半徑，兩線相交。

4.以長方形寬之延伸，延伸至弧上的長度作為邊，繪製出一與此長方形等面積的正方形，如圖 4 及圖 5。

(三)結果：

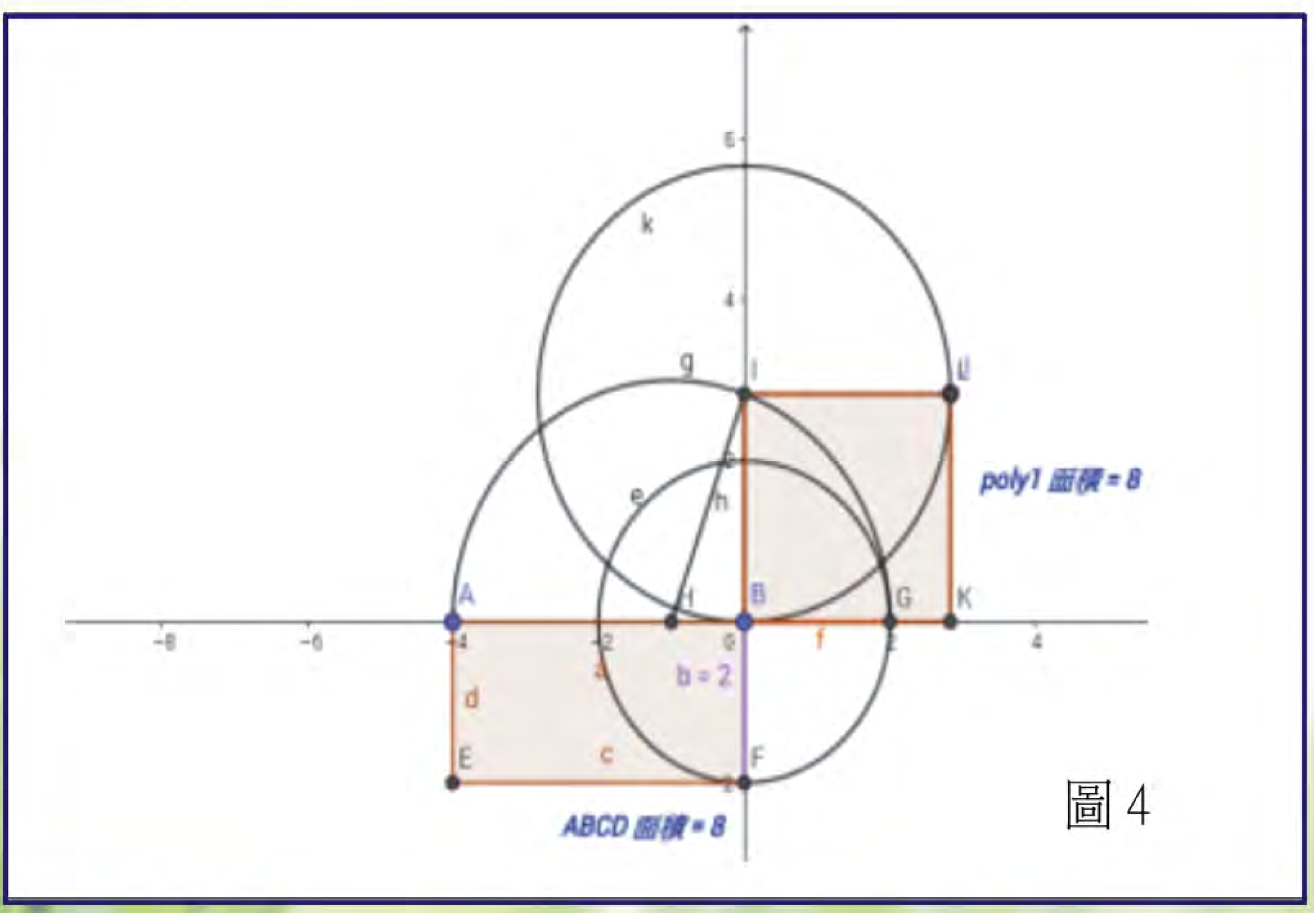


圖 4

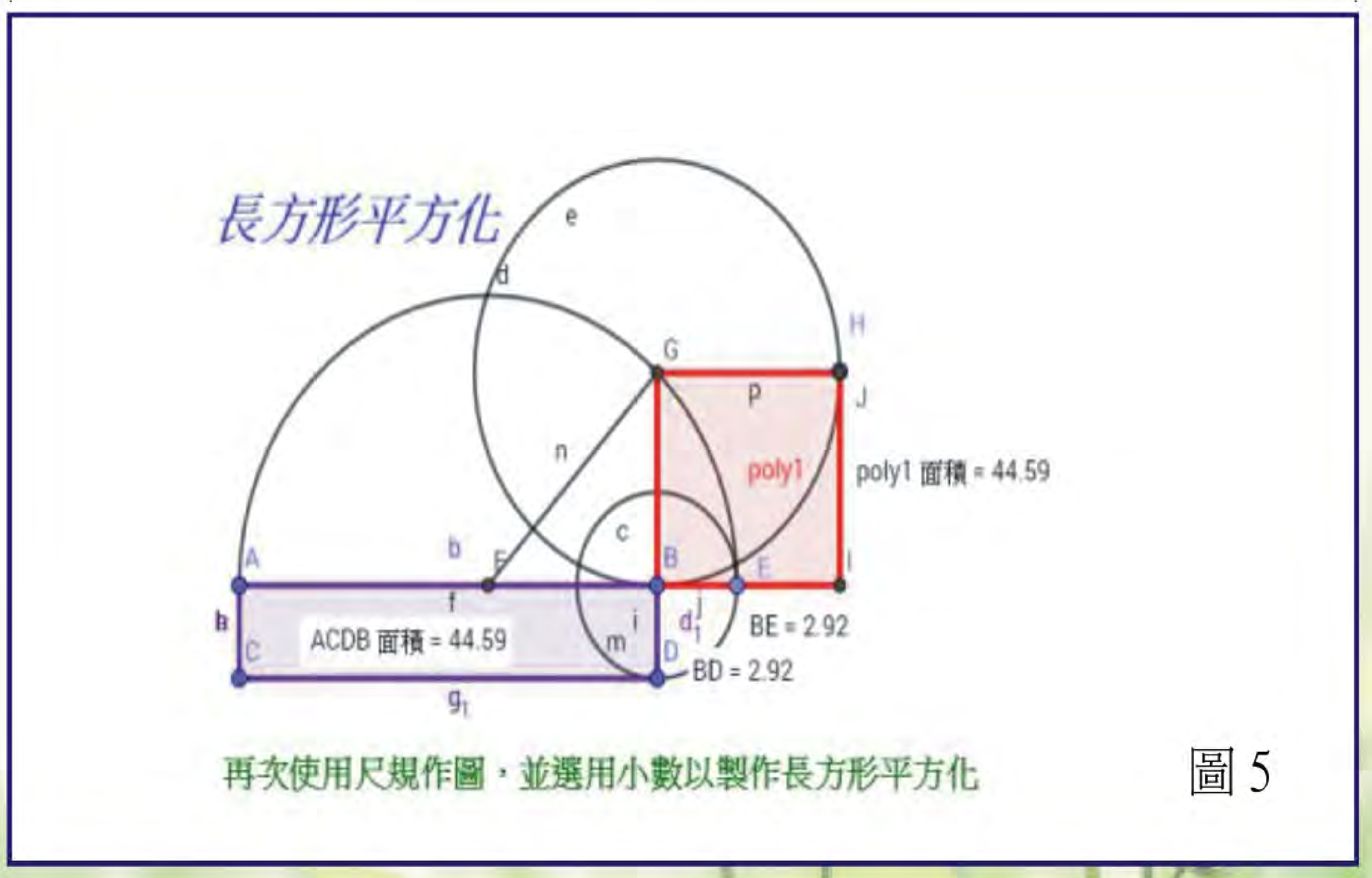
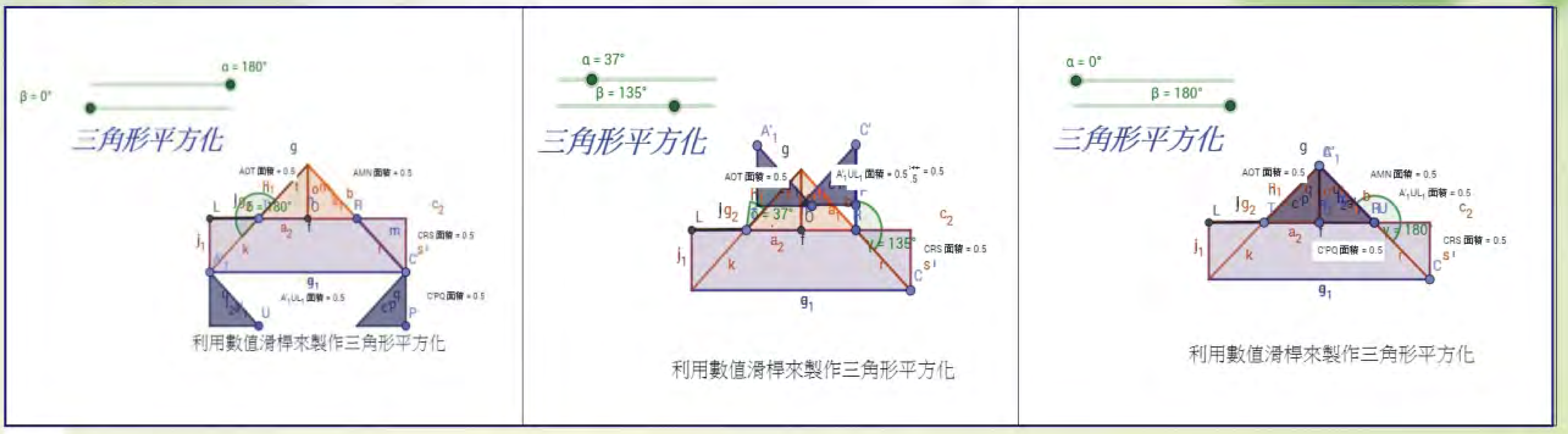


圖 5

二、三角形平方化

(一) 方法：利用 Geogebra 軟體製作出等面積的正方形

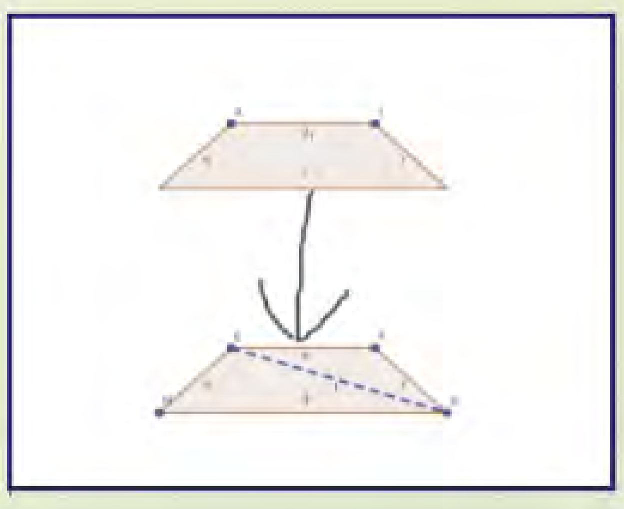
(二) 結果與驗證：



1.假設三角形底和高分別為 x 和 y，切割成一三角形(上)和一梯形(下)。

2.小三角形底為 1/2x，高為 1/2y;梯形上底為 1/2x，下底為 x，高為 1/2y。

3.最後得三角形面積=xy/2。



三、梯形面積平方化

(一) 方法：

方法 1：(文獻提供右圖)

(1)將梯形對角切割成兩三角形，再用三角形平方化來加以平方。

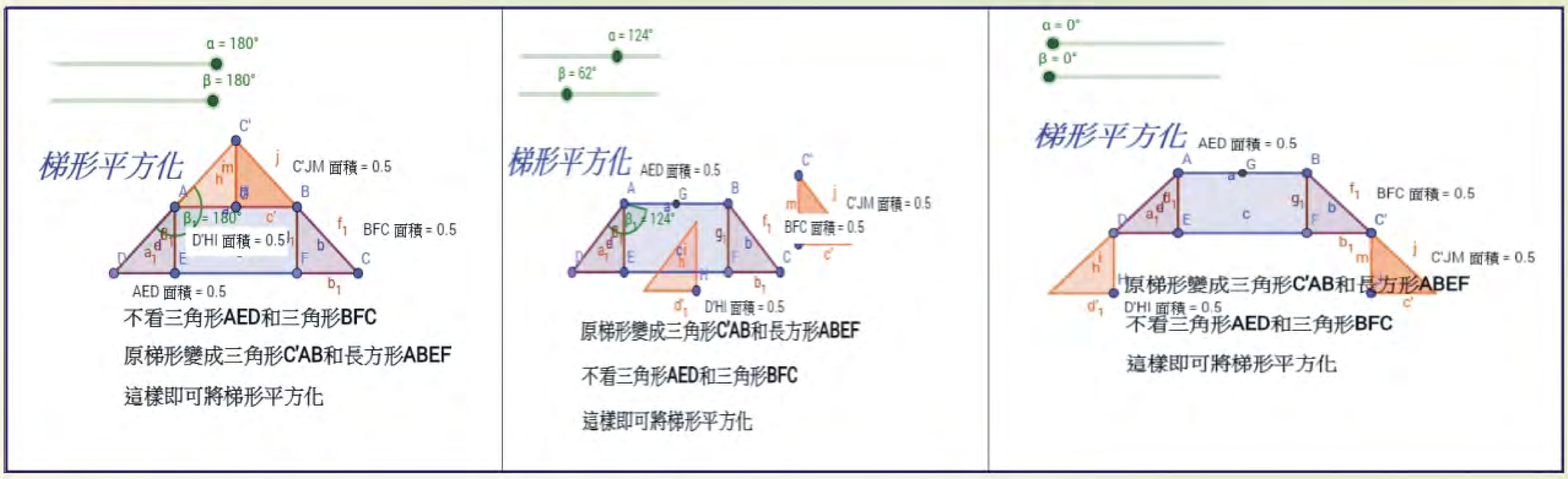
方法 2：

利用 Geogebra 軟體製作出等面積的長方形和三角形

(1)繪出一梯形將其一邊切割為三角形再補到另一邊，使其成為長方形。

(2)利用長方形平方化來將梯形平方化。

(二) 結果與驗證：



其驗證方法與三角形大致相同：

1.假設梯形底和高分別為 x 和 y，補成一三角形(上)和一長方形(下)。

2.小三角形底為 1/2x(梯形之上底)，高為 1/2y;梯形上底為 1/2x，下底為 x，高為 1/2y。

3.最後得梯形面積=xy/2

另外為了驗證梯形平方化後結果的準確性，因此當成功的平方化後還得確認兩圖的面積相等(利用三角形面積公式和切割的方式來製作)。

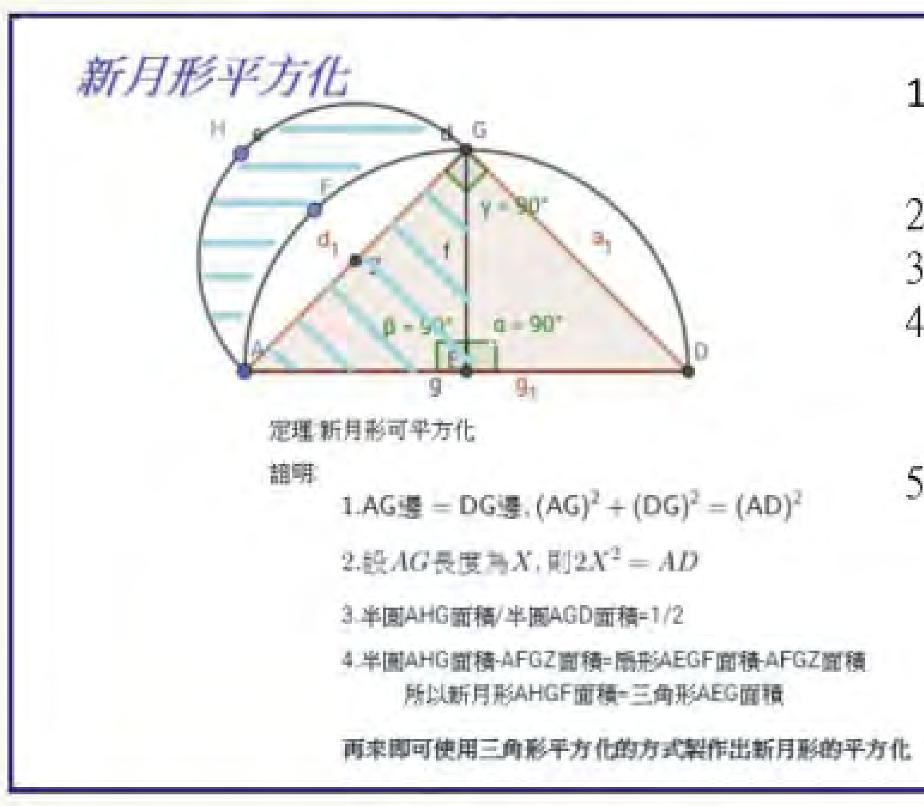
※較複雜的圖形

四、新月形平方化(文獻資料延伸)

(一) 方法：

利用 Geogebra 軟體切割成 8 個三角形再製作出等面積的正方形

(二) 結果與驗證：



1.假設等腰直角三角形兩股與斜邊分別為 x、y，其他所設代數如圖上顯示。

2.AG=DG，故$(AG)^2+(DG)^2=(AD)^2$，得$(2X^2=y^2)$。

3.半圓 AHG 面積/半圓 AGD 面積=1/2。

4.半圓 AHG-弓形 AFGZ 之面積(得到一新月形)，等於扇形 AEGF 面積-弓形 AFGZ 面積(得到一等腰直角三角形)。

5.故若再使用三角形平方化，即可得到一完整的平方化結果。

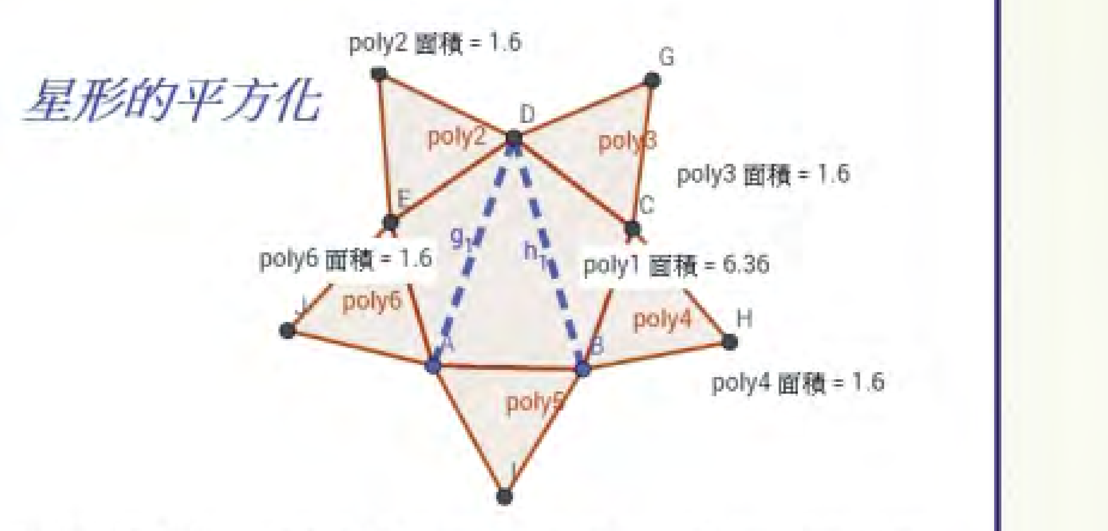
※並不是所有新月形皆可平方化

五、星形平方化

(一) 方法：

利用 Geogebra 軟體補上三角形和半圓使新月形更容易平方化

(二) 結果與驗證：



為了驗證星形平方化後結果的準確性，因此當成功的平方化後還得確認兩圖的面積相等(利用三角形面積公式和切割的方式來證明，如上圖所示)。

六和七、圓形最小圓與三圓中間的圓平方化(不適用於各種圓)

(一) 方法 1：

利用 Geogebra 軟體製作輔助線，並製作出與其近似面積的正方形(因為化圓為方理論上是不可能的)。

1.取中間之圓，找出其直徑，此為所求正方形之對角線。

2.找到直徑兩邊端點的中點，1 端點到此中點的距離即為正方形之邊長。

3.此正方形之面積大約等於最先繪製之圓的面積。

畫一圓，並以此圓之圓心做同心圓 2 個，三圓的距離需為等差數列且三，圓之半徑長度比需為 3：4：5，證明如下：

1.設三圓半徑為(r-d，r，r+d)。

2.則可推出小圓面積 =【中圓直徑^2】/2。

3.得 $\pi r^2=\{【2(r+d)】^2\}/2=2(r+d)^2$

4. $\pi r^2=2r^2+4dr+2d^2$

5. $(\pi-2)r^2-4dr-2d^2=0$

6. $r=(2d\pm\sqrt{(2\pi)}d)/(\pi-2)$…負不合。

7.r 約等於 3.95d

8.r 取近似值 4d

9.得三圓半徑為 3：4：5

方法 2：

1.畫 1 圓，並且以方法 1 之步驟 1 繪出直徑。

2.取直徑之中點與直徑兩端點其中一點作圓。

3.以圓心延伸兩點之射線中點作為正方形之 1 點，而其餘兩點則為正方形之另兩點。

(二) 結果與驗證：

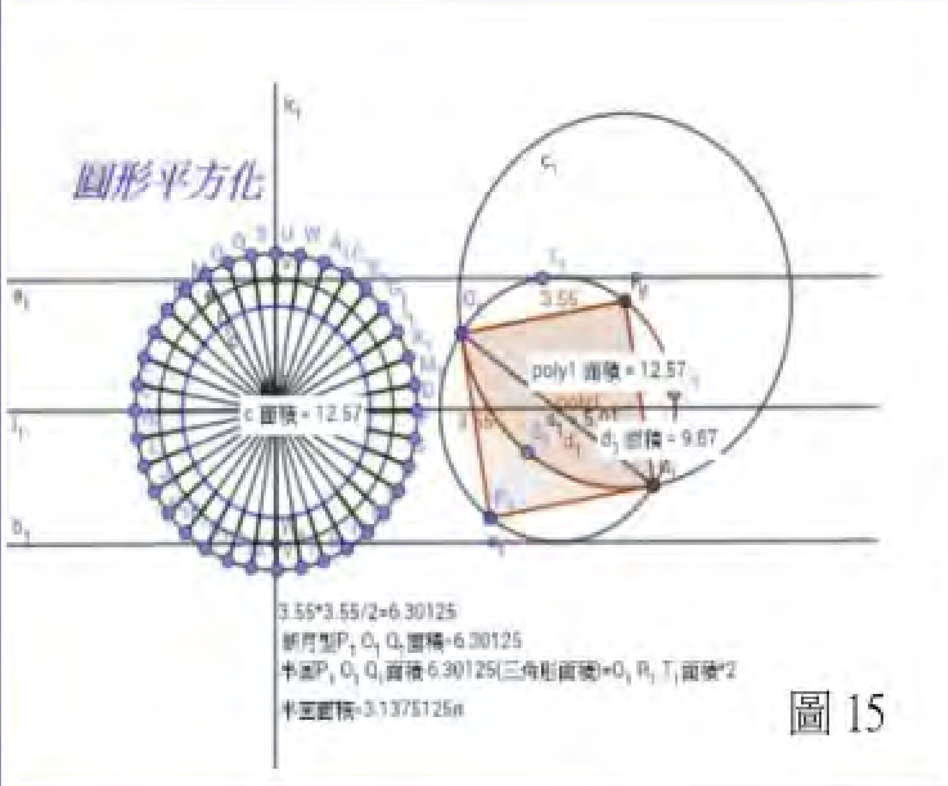


圖 15

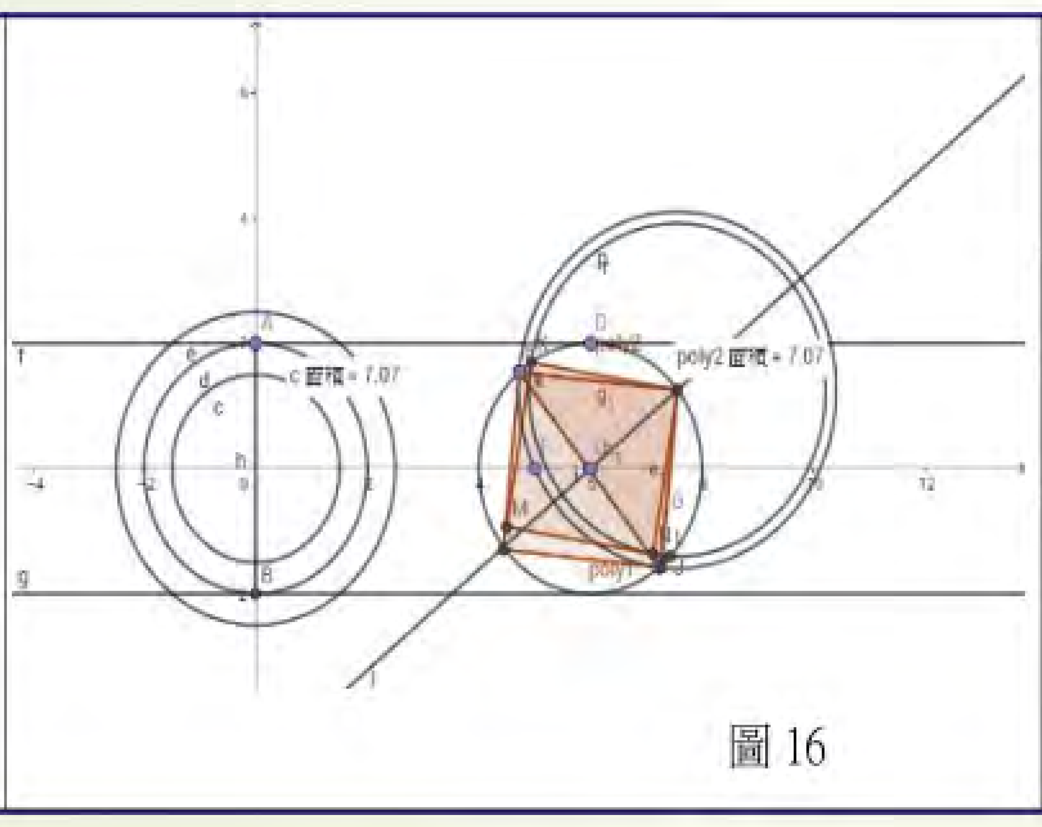


圖 16

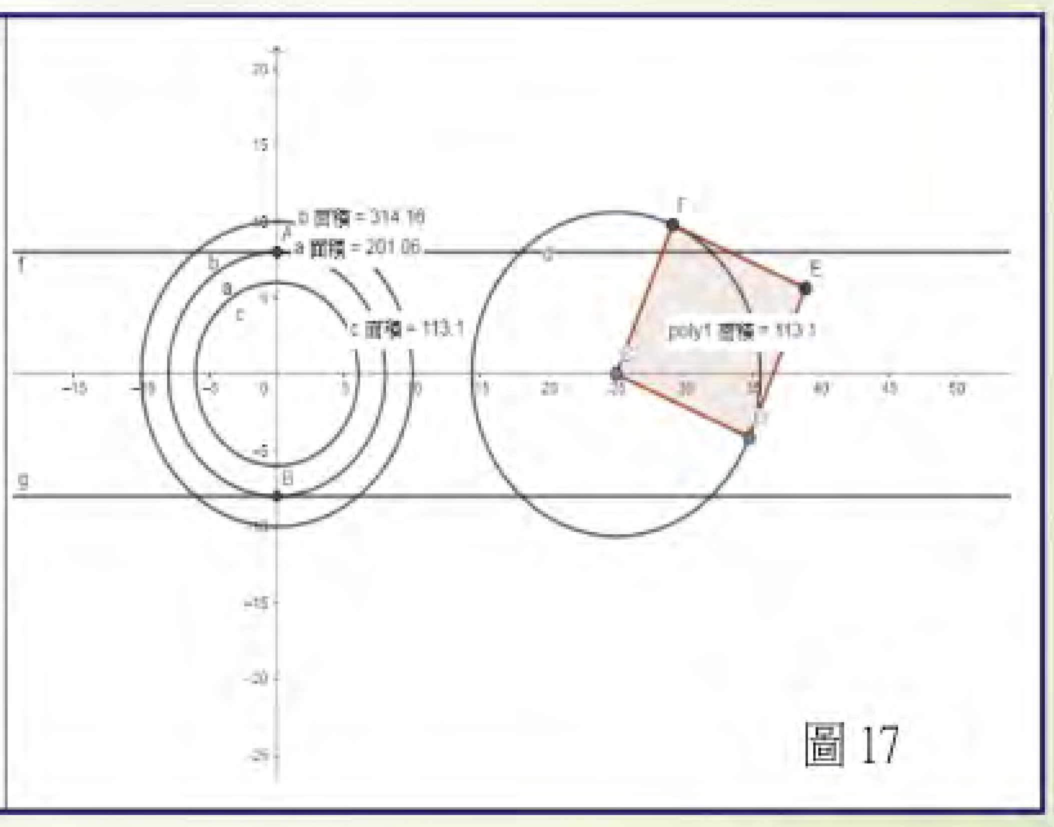


圖 17

為了驗證圓形平方化後結果的準確性，因此當成功的平方化後還得確認兩圖的面積相等(利用圓形面積公式來證明，如圖 15、16 所示)。

將圖 16 和 17 所要求的最小圓 c 擴大成三個圓，取中間的圓來畫 2 條輔助線，繪出與 2 條線相切的圓，並且作一大圓，圓心在此小圓上，使大圓通過小圓的兩點(兩點連起來徵小圓直徑)，以大圓的圓心和通過的其中一點當邊長，繪出正方形，此正方形面積等於圓形面積，平方化成功。

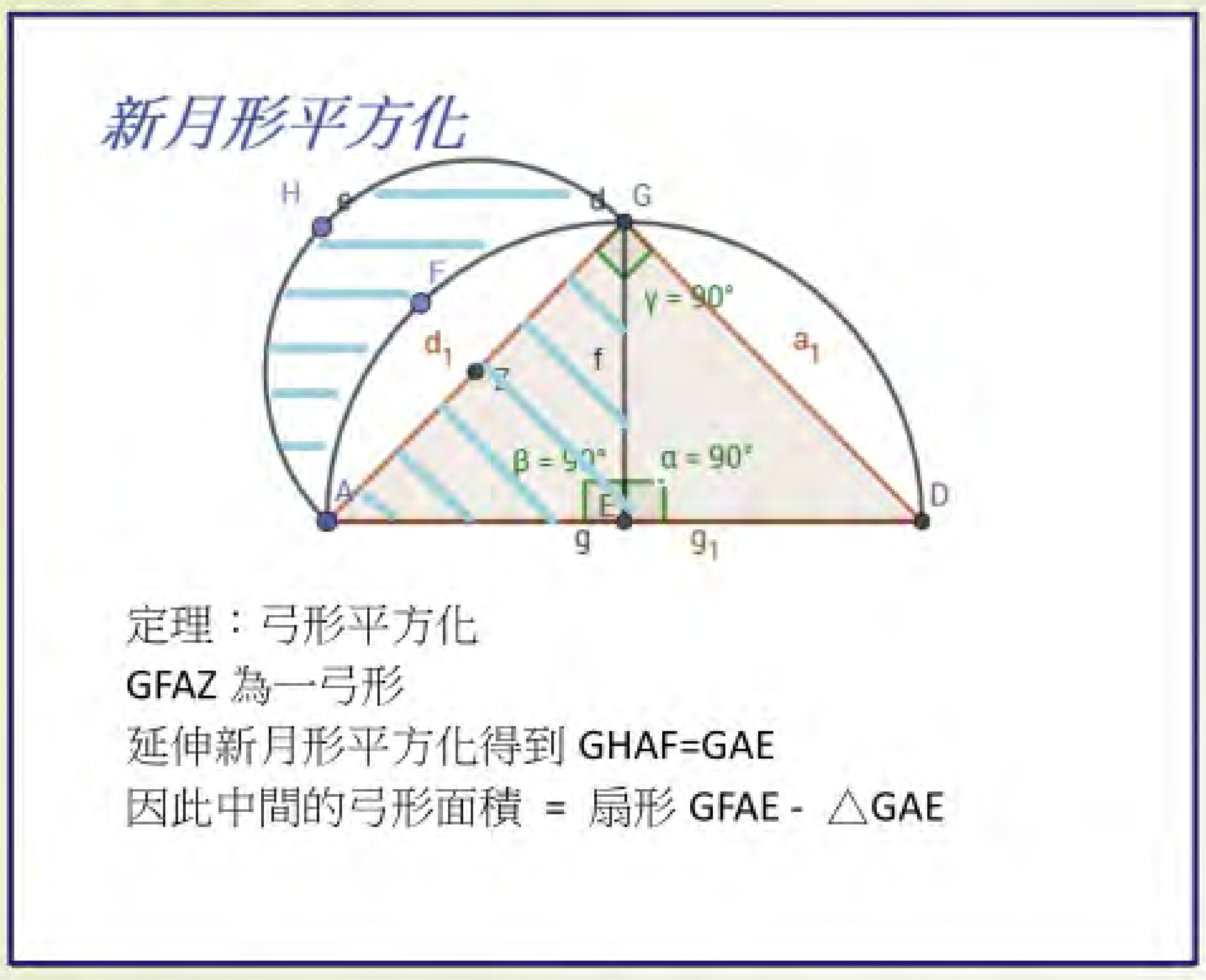
另外由圖可知: 一圓可容納無數個大約與此圓面積相等的正方形。

八、弓形平方化

(一) 方法:

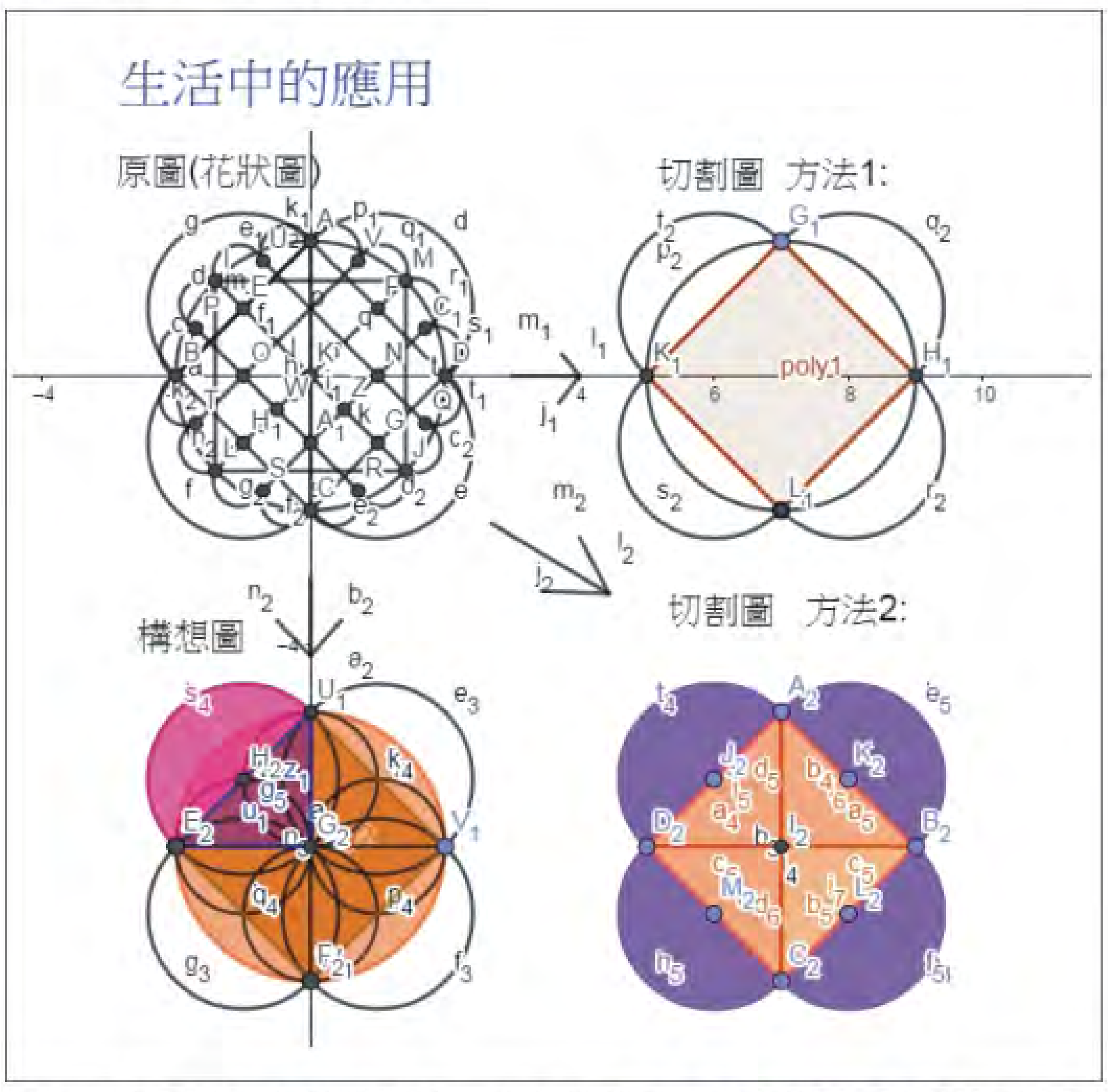
利用 Geogebra 軟體作圖，並將面積算出，最後將它化為正方形

(二) 結果與驗證:



為了驗證弓形平方化後結果的準確性，因此當成功的平方化後還得確認兩圖的面積相等(利用新月形平方化的結論延伸來證明)，如圖所示。

九、生活中的應用(花狀圖)



由以上各圖形介紹綜合後繪製成此花狀圖，其中構想圖為製作此圖前的想法

方法一：利用切割的方式將它切成正方形(4 個三角形)以及半圓形(新月形+弓形)再利用平方化簡單的算出其面積

$2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\,[2\times2/2\times4]+\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\pi/2\times4=4\pi+8$；

方法二：

是將它分為一個圓+四個新月形($2\times2\times\pi+2\times2/2\times4=4\pi+8$)，結果相同。

陸、結論

一、平方化就是將圖形變成易計算出面積的三角形或長方形的概念。

二、三角形、梯形、星形……等無弧度的多邊形皆須先化為長方形在平方化。

三、要將圓形、新月形這兩種圖形平方化，都須畫輔助線，並切割或補上其他簡單的形狀(如:長方形、三角形...)方便製作。

四、在一個圓形內可繪出無限多個等面積的正方形。

五、延伸新月形平方化---弓形平方化將扇形面積減去三角形面積即為弓形面積，最後再將它變為正方形。

六、在生活周遭，只要將複雜形的圖形看成平面的，幾乎都可以用切割或或補的方式來平方化。

七、化圓為方為不可能之事，但圓形平方化將可以畫出與圓形大約相等面積之正方形。

八、不是每種圓形、新月形、弓形皆可使用上述之方法。

九、本研究之長方形、新月形兩圖形平方化皆為透過文獻延伸而來。

十、本研究之目的為希望將複雜之圖形平方化得到簡單的圖形，並且能推廣此方法的應用。

十一、在沒有電腦的情況之下，是可以用尺規來完成各種規則與不規則形的平方化，但越複雜的圖形製作時間越久。

十二、利用立方化來算體積原則上是可行的，但需要更進階之軟體才能完成作圖。

十三、圓形平方化所使用之三圓的半徑比宜為３：４：５。

十四、若將圖形盡量切割可使平方化更快、更順利。