

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 物理科

030113

當單擺遇上共振

~實驗探討單擺在共振時發生順逆轉現象

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者： 國一 李承芸 國一 徐稚媛 國一 柯芮芳	指導老師： 蔡名峯 陳炳彰
---	-----------------------------

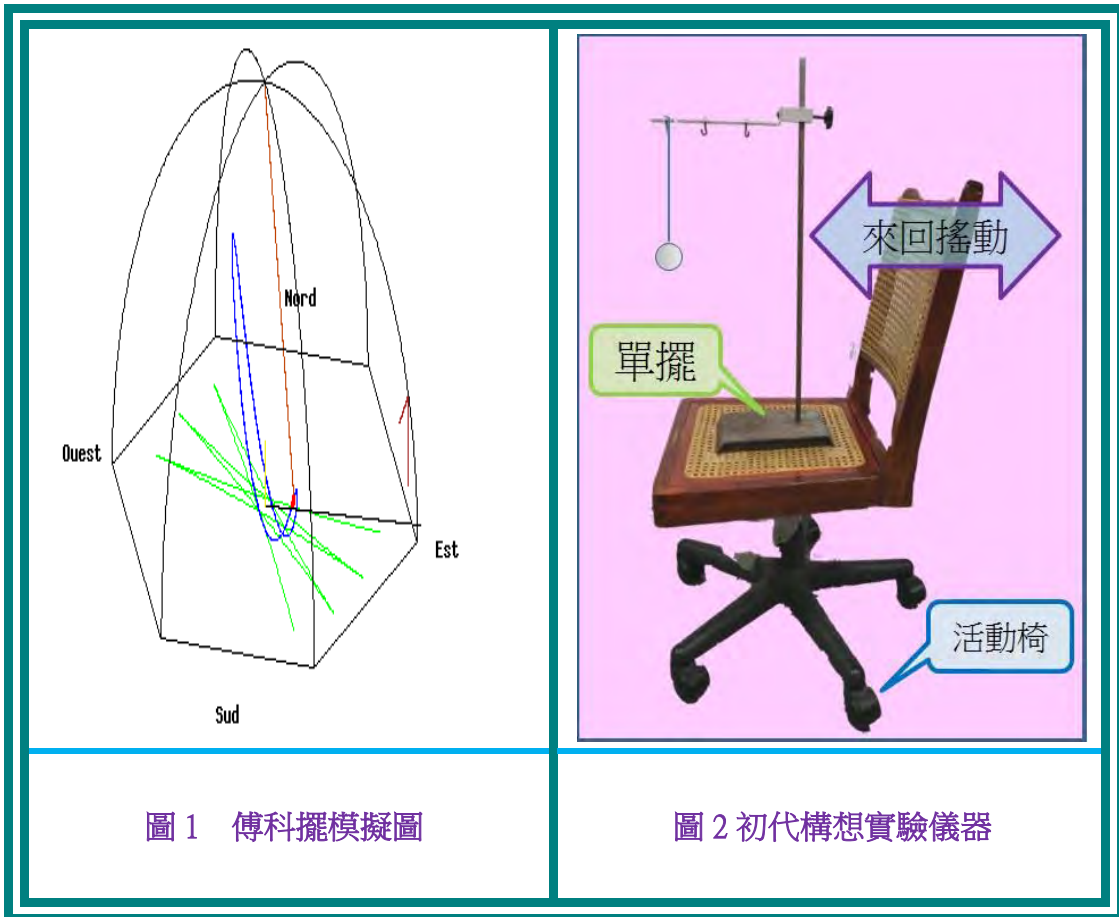
關鍵詞：單擺、共振

摘要

老師在實驗影片中介紹了傅科擺，引起本組的興趣，想到若設計單擺加共振會如有何結果。本組根據構想設計了「單擺共振儀器」來進行實驗，選擇擺長長度、不同質量的擺錘為變因，利用調速器調整懸吊單擺之橫桿週期，並將實驗過程錄影，再以 Tracker 分析影片，求得橫桿的週期及擺錘運動軌跡、順逆轉等數據。本組發現：當單擺的週期與橫桿週期接近時，單擺的擺錘會明顯的出現越盪越高，而後繞著中心旋轉的現象，其軌跡產生由橢圓→圓→直線→橢圓→圓→直線的重複運動，好像李薩如圖形。另外，當單擺的擺動週期與橫桿的週期相近時，單擺的擺錘運動會在橫桿的振幅處，發生順逆改變的情形，即擺錘的運動在平面投影，本來順時針旋轉會瞬間變為逆時針旋轉。

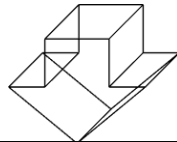
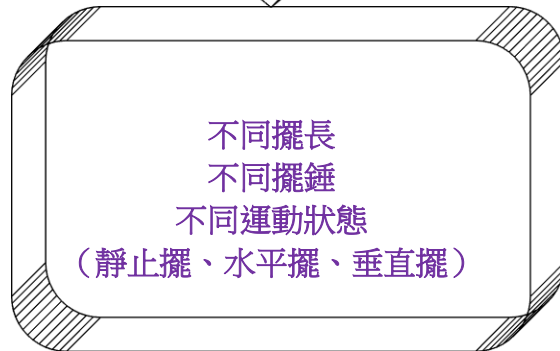
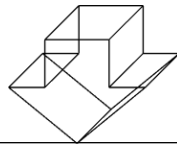
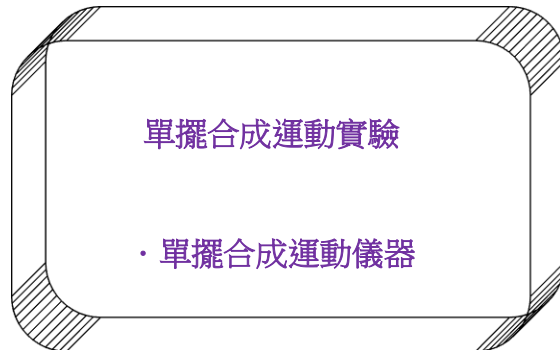
壹、研究動機

在尋找科展的題目的過程中，發現老師的教學影片中（圖 1）：傅科擺模擬圖，即擺錘運動在平面的投影是直線且會改變運動方向。本組突發奇想：那若把單擺綁在一振盪的橫桿上，則擺錘運動的平面投影又會是如何呢？因此本組利用一老舊斑駁的單擺置於活動椅上，以人力來回推動活動椅，結果發現在一特定的推動週期時，單擺的擺錘會明顯的出現越盪越高，而後繞著中心旋轉，時而加速時而減速來回往復運動，隱約還有順逆轉交替的規律現象。因此本組決定對於這個現象，設計實驗器材來進行研究。










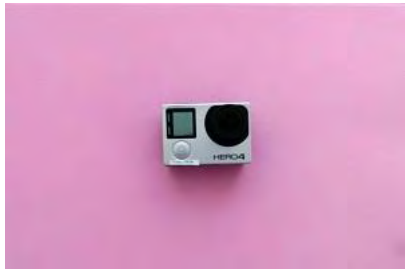




貳、研究目的

- 一、探討橫桿不動時，不同擺長時，單擺自然週期的理論週期
 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ 與實測自然週期的比較。
- 二、探討擺錘靜止時，改變橫桿週期，擺錘平面投影的運動情形。
- 三、探討單擺的擺錘在平面投影產生順時針旋轉→逆時針時旋轉時，此現象發生時橫桿的端點位置。
- 四、探討單擺的擺錘在平面投影有從順時針旋轉→逆時針時旋轉的重複現象產生時，單擺週期與橫桿振動的週期的關係。
- 五、探討單擺的擺錘在平面投影從順時針旋轉→逆時針時旋轉→順時針旋轉的週期與單擺自然週期和橫桿週期的關係。



參、研究設備及器材

一、材料及設備

		
圖 3 擺錘（塑膠）	圖 4 捲尺（測量擺線長）	圖 5 游標尺（測球直徑）
		
圖 6 速率調整器	圖 7 量角器（測擺角）	圖 8 滑軌
		
圖 9 擺錘（鐵 銅 鋁球）	圖 10 相機（錄影）	圖 11 線
		
圖 12 G 型夾（固定用）	圖 13 Tracker 軟體	圖 14 電鑽

二、「單擺共振儀器」的設計與製作

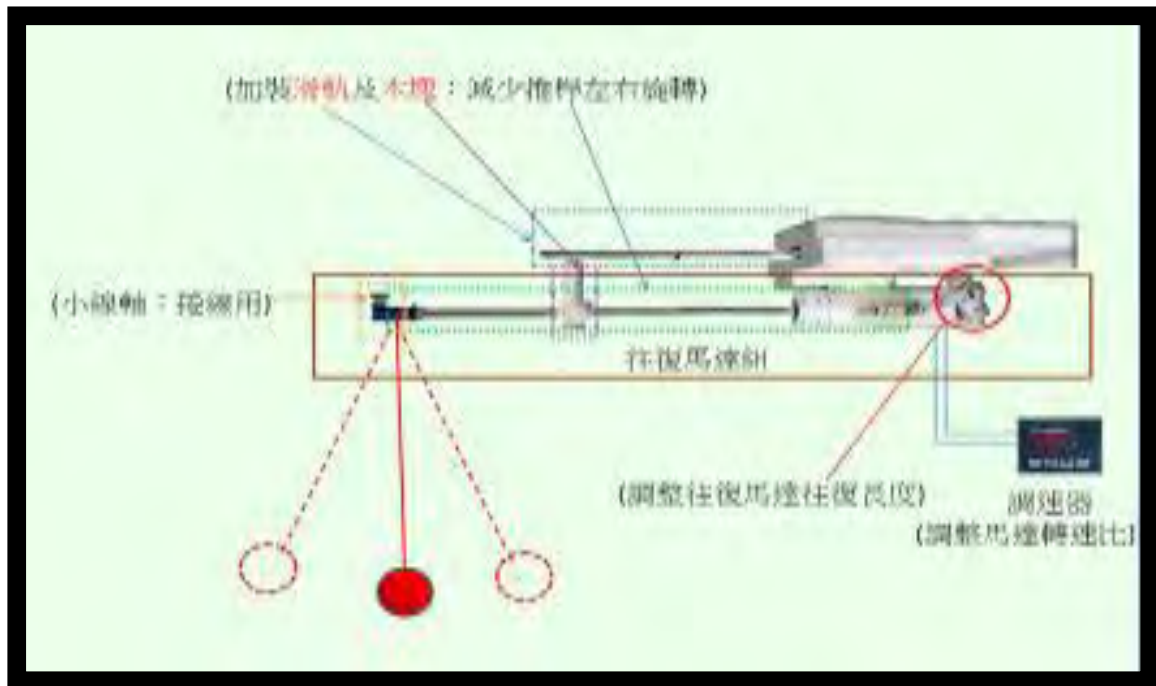


圖 15-1 單擺共振儀器之設計圖

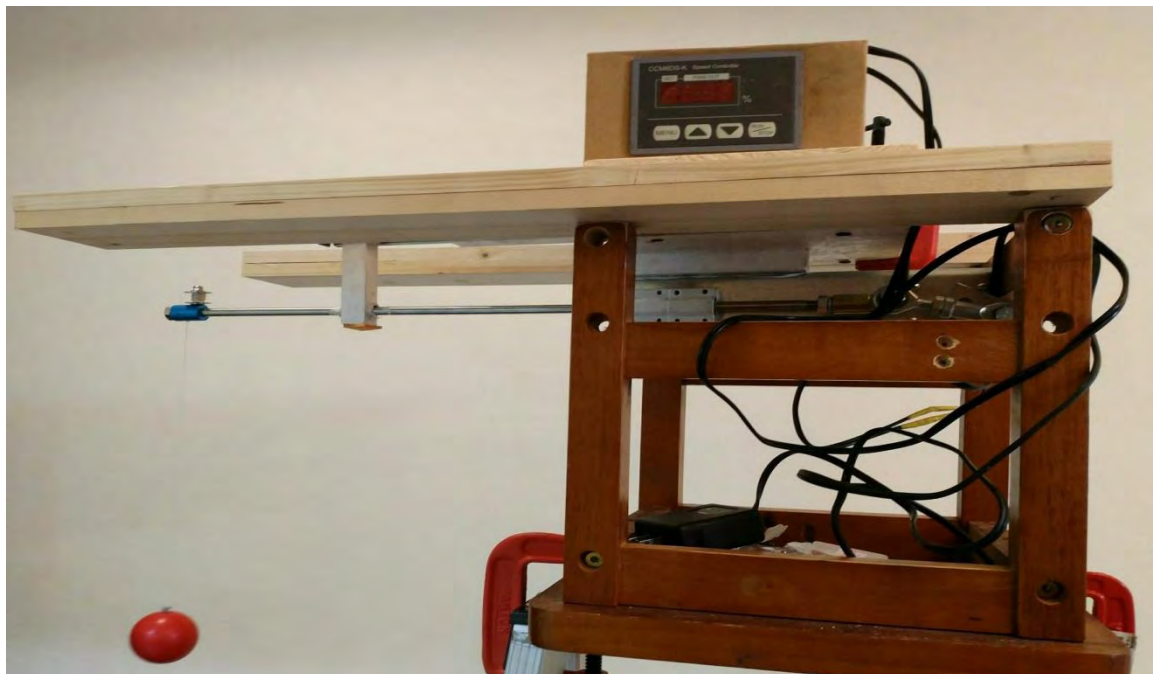


圖 15-2 單擺共振儀器實際圖

肆、研究過程與方法

一、蒐集單擺及共振資料

單擺是一種懸掛於定點且在重力影響下擺動的物體。

§ 單擺週期公式

- 特性：擺長固定時其週期具有等時性
- 單擺週期： $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ (可由簡諧運動推導)
- 分析受力模式
若受力滿足 $\vec{F} = -k\vec{x}$ 即可視為簡諧運動

$\vec{F} = -mg \cdot \sin\theta$
 $\approx -mg \cdot \theta$ (θ不大時 $\sin\theta \approx \theta$)
 $= -mg \cdot \frac{x}{\ell}$
 $\vec{F} = -\left(\frac{mg}{\ell}\right) \cdot x$

簡諧週期： $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
 單擺週期： $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g/\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$\theta = \frac{\text{弧長}}{\text{半徑}} = \frac{x}{\ell}$

圖 16 單擺擺角小於 5 度時的公式

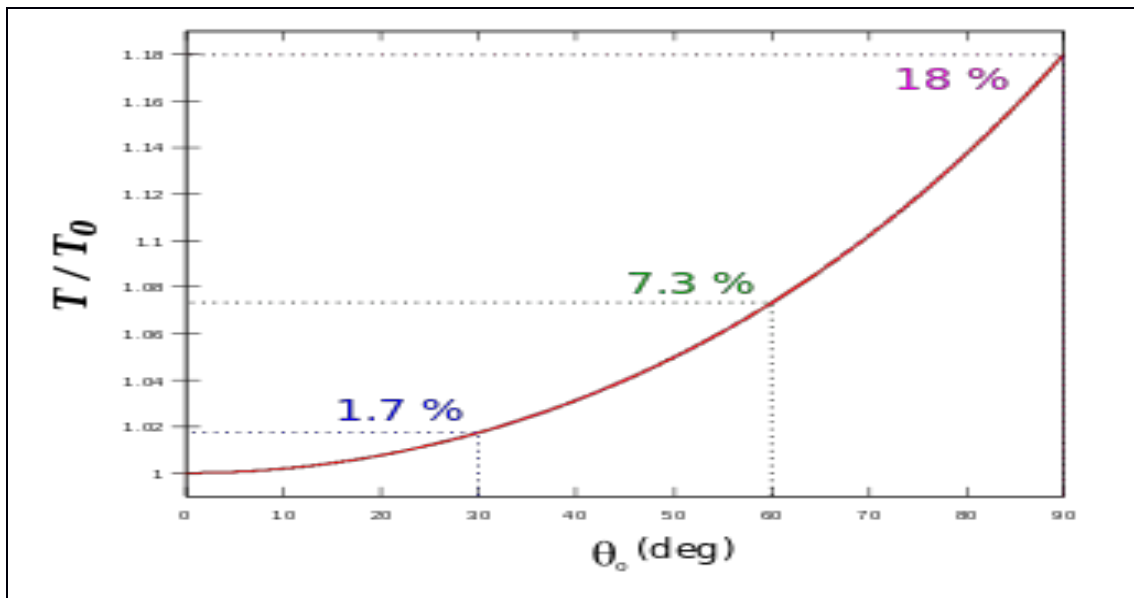


圖 17 實際單擺擺角與小角度公式的誤差

共振 (Resonance) :

就物理學而言，共振是指系統（通常為一線性系統）常容易隨著一些特別的頻率而產生振動，這種現象稱為共振，這些特別的週期稱為此系統的共振週期。當系統處在這些共振週期的振動時，即使微小的振動最後也可能形成大幅度的擺動。

二、概念演進

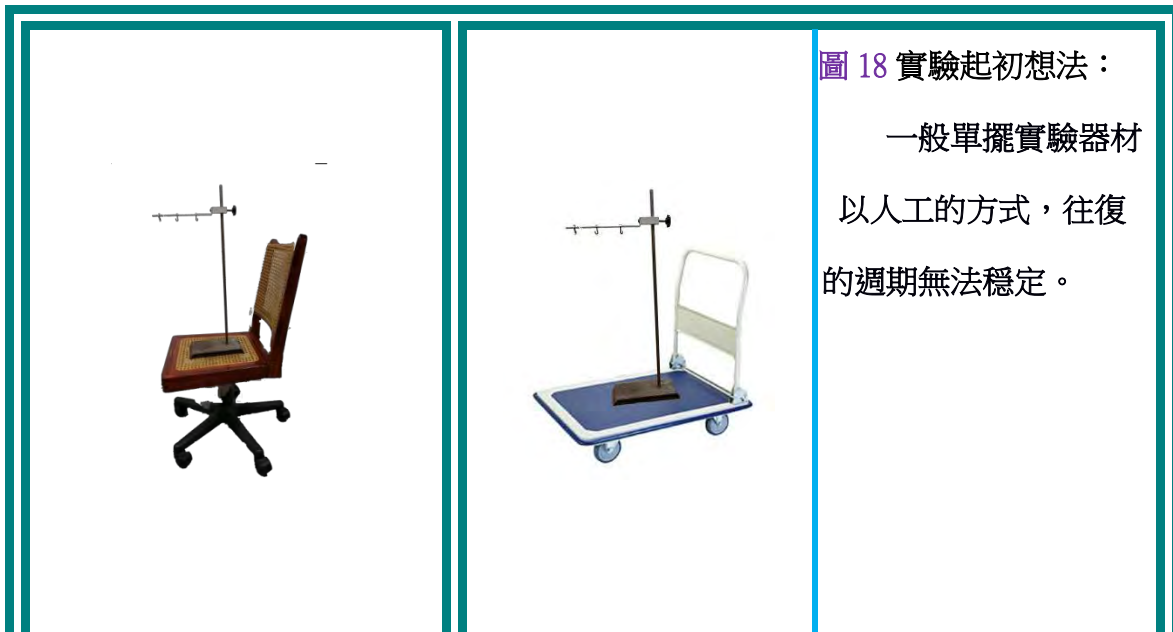


圖 18 實驗起初想法：

一般單擺實驗器材
以人工的方式，往復
的週期無法穩定。

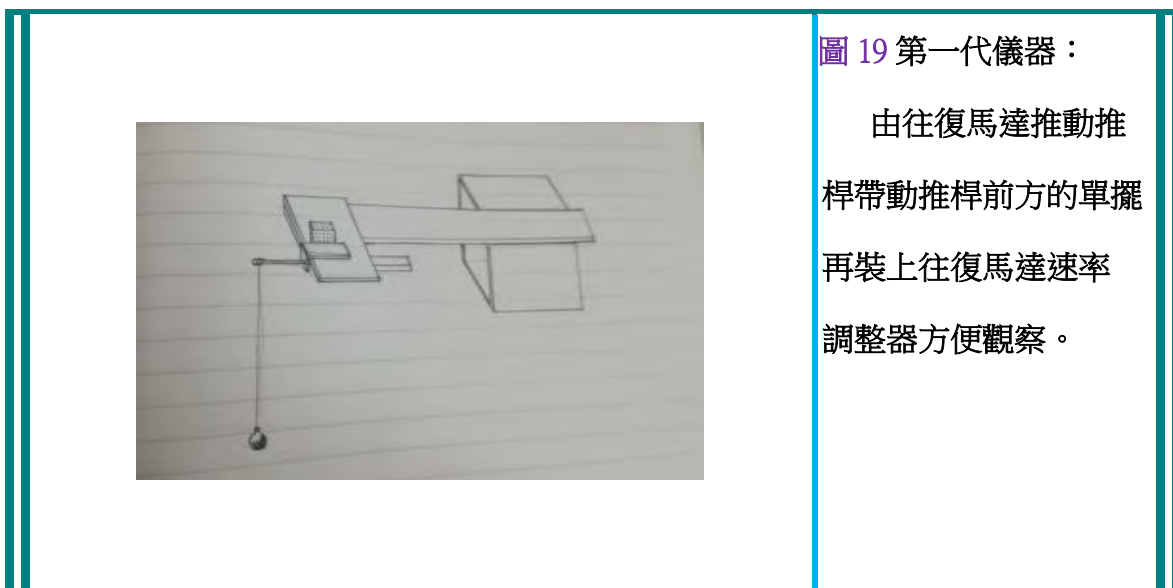


圖 19 第一代儀器：

由往復馬達推動推
桿帶動推桿前方的單擺
再裝上往復馬達速率
調整器方便觀察。

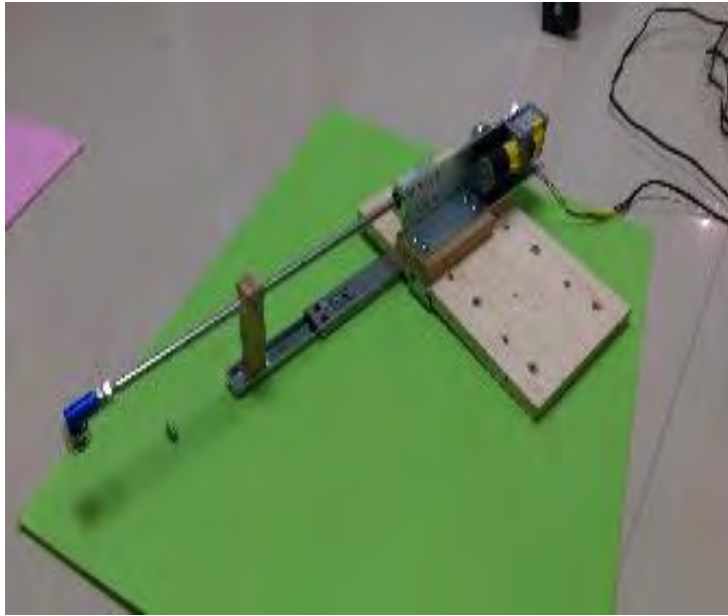


圖 20 第二代

第一代儀器前方的推桿容易搖晃，本設計將其固定在木板套環加上滑軌以解決問題，並固定在木板減低推桿搖晃，因此設計出了第二代「單擺共振儀器」。

三、組裝器材



圖 21 將木板裁切好並組裝



圖 22 加上速率調整器與電路



圖 23 完成單擺共振儀器

四、實驗步驟：

(一) .製作實驗

		
<p>圖 24</p> <p>實驗前，先將擺錘靜置 並擺在所需的位置</p>	<p>圖 25</p> <p>測量擺長長度 (從擺線量到擺錘中心)</p>	<p>圖 26</p> <p>啟動速率調整裝置， 控制推桿運動與放開擺錘</p>

(二) .觀察數據

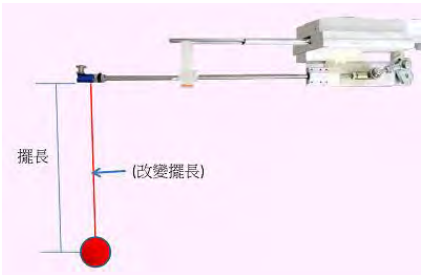
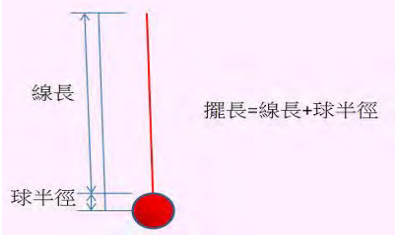
微調往復馬達的速率比，並觀察擺錘擺運的情形，記錄下來



調速器：

顯示的數字為轉速比率，而非真實轉速。

(三) .改變擺長

	
<p>圖 27 在改變擺長的實驗時，將擺線夾緊</p>	<p>圖 28 在每次實驗前，都會測量擺長</p>

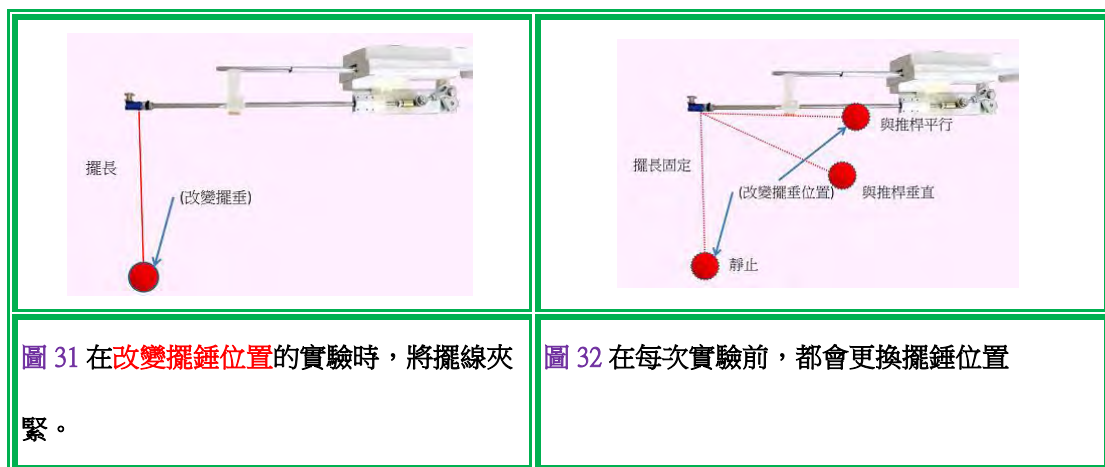
在擺長方面，經討論後決定使用 9 種擺長（9、16、30、36、40、50、64、65、80cm）。

(四) 改變擺錘



本組在選擇擺錘時，總共收集了 4 種材質（塑膠球、鐵製、銅製、鋁製）的擺錘，其中本組選擇以塑膠擺錘做實驗主體，然而鐵製、銅製、鋁製、體積較小，比較不容易錄製軌跡因此而影響實驗結果，故最後選擇體積較大的**塑膠擺錘**和重量較重的**鐵球**來進行此次的實驗。

(五) 改變單擺擺放位置



擺錘位置：

1. 擺錘靜止
2. 擺錘與推桿平行
3. 擺錘與推桿垂直

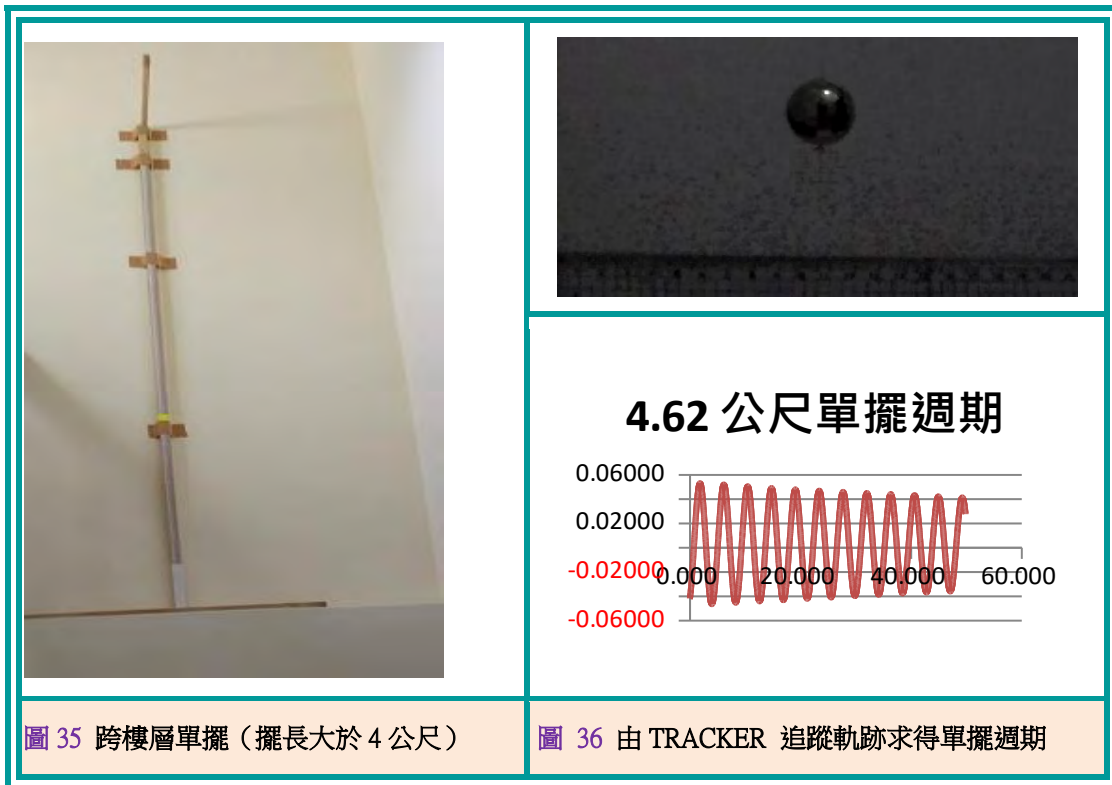
伍、研究結果與討論

一、探討橫桿不動時，不同的擺長，單擺週期的

理論計算週期 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ 與實測自然週期的比較。

(一) 實驗一 求本地的 g (重力加速度)

本組利用單擺週期公式計算出各擺長的理論週期 由圖 35 及圖 36 得知 單擺週期公式 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ 這個公式在擺角 <5 度十分正確 因此我們設計了一個實驗：先求本地的 g (重力加速度)



項目	擺長	圓周率	週期
值	4.62 公尺	3.1415962	4.313833

使用擺長 4.62 公尺如圖 35，使擺錘擺動小於 5 公分 (如圖 36)，如此擺角小於 1 度，使用 tracker 追蹤單擺，求得單擺週長 $T = 4.31383$ ，代入公式得 $g = 9.8011$

(二) 實驗二 Tracker 軟體分析不同擺長的單擺實測自然週期

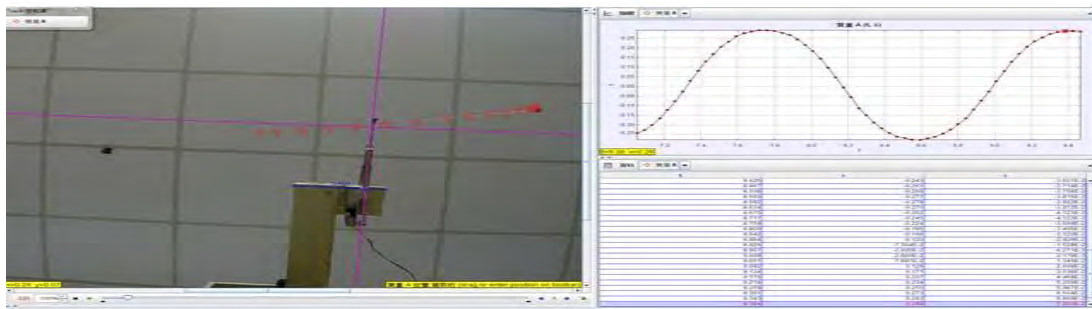


圖 37 擺長 65cm 時單擺週期分析

表一 不同擺長的單擺實測週期整理表

擺長 (公分)	單擺實測週期 (秒)
9.00	0.603
16.00	0.809
30.00	1.147
36.00	1.208
40.00	1.326
50.00	1.418
64.00	1.621
65.00	1.690
80.00	1.918

(三) 利用單擺週期公式反算理論週期 取擺長 (30 40 50 65 80 公分) 五組與擺錘為塑膠球 鐵球並結合實驗二的實測自然週期匯整表

表二 塑膠球與鐵球的實測週期與理論週期

擺長 (公分)	實測週期 塑膠球 (秒)	理論週期 (秒)	實測週期 鐵球 (秒)
30.00	1.147	1.099	1.043
40.00	1.326	1.269	1.252
50.00	1.418	1.419	1.418
65.00	1.690	1.618	1.626
80.00	1.918	1.795	1.832

本組發現不同的擺長，其理論週期與實測週期都相當接近。如下圖 38

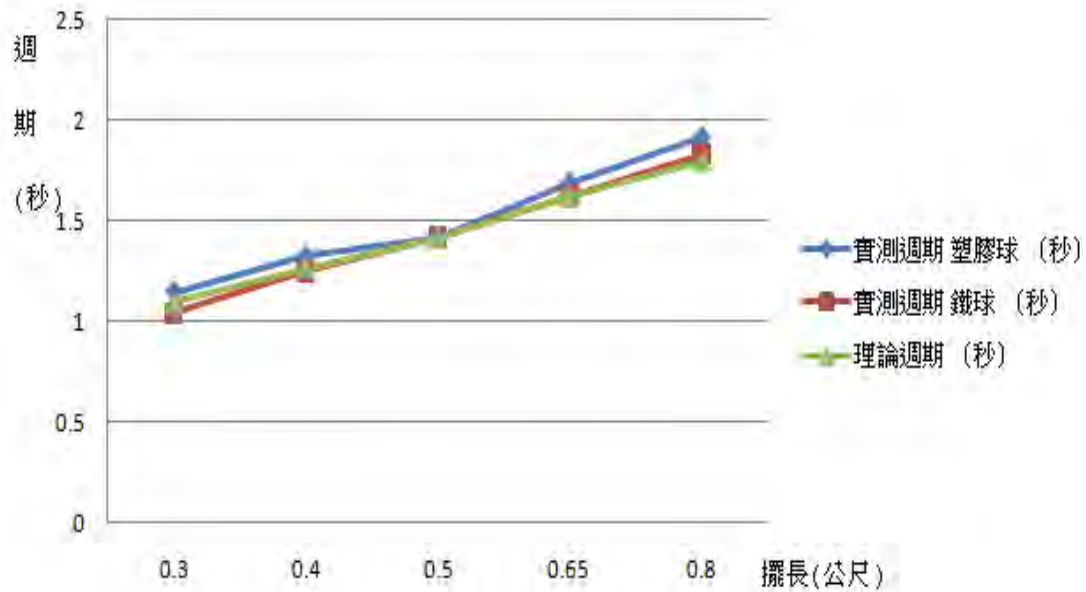


圖 38 塑膠球與鐵球的實測週期與理論週期比較圖

討論

- 1.在單擺測重力加速度的實驗中，讓我們了解單擺具有等時性的特性。
- 2.在單擺的擺長和擺角固定不變的情形下，擺錘為塑膠球 鐵球的改變不會影響單擺的擺動週期。
- 3.在單擺的擺重和擺角固定不變的情形下，擺錘長度的改變會影響單擺的擺動週期。
- 4.本組實驗發現單擺自然週期公式計算出的理論週期與實測週期相似，因此推斷出，單擺實測週期可利用單擺自然週期公式計算。

二、探討擺錘靜止時，**改變橫桿週期**，擺錘平面投影的運動情形。

(一) **實驗三**使用 Tracker 軟體分析各擺長的橫桿週期，並**調整橫桿週期**

觀察擺錘在平面投影的運動軌跡

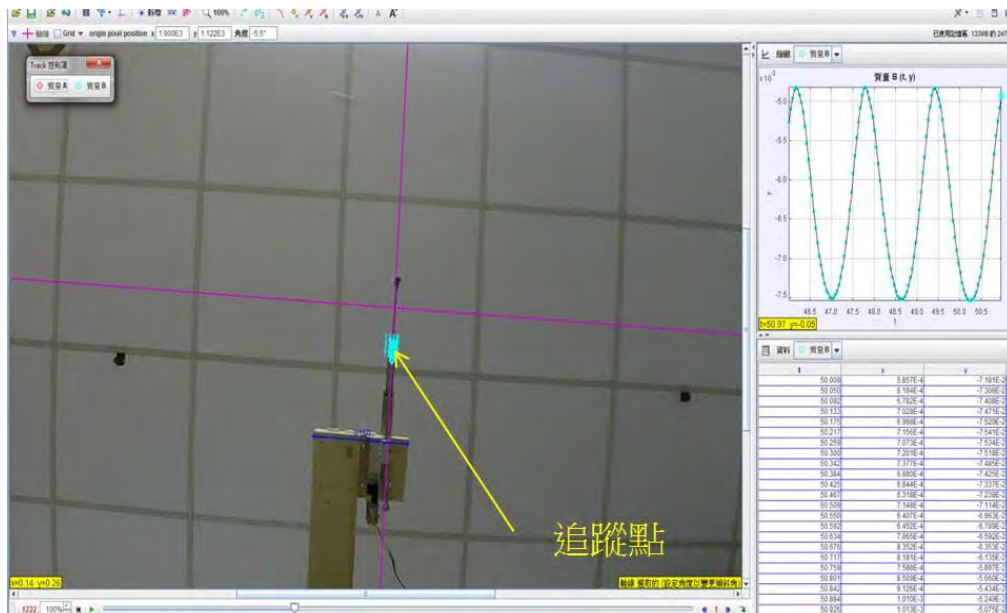


圖 39 擺長 65cm 時橫桿週期分析

Y座標(公尺) **擺長65公分橫桿的週期**

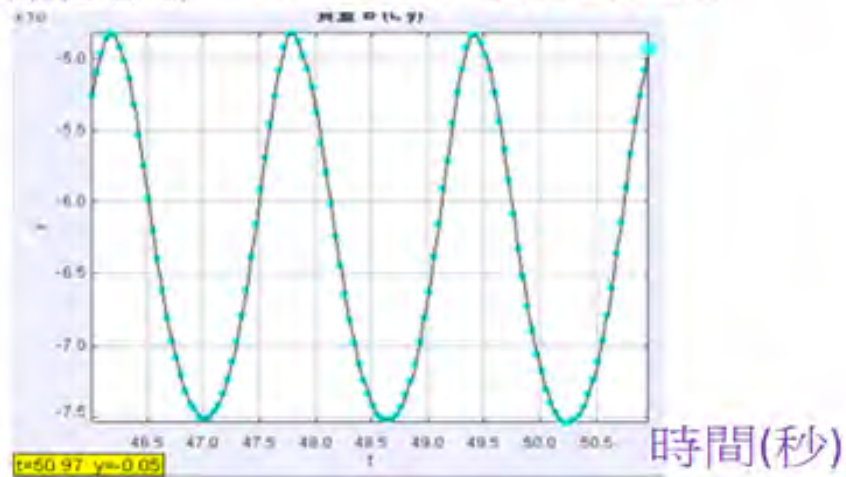


圖 40 擺長 65cm 時橫桿週期分析

經討論 本組利用多個波谷相差的時間平均，可得橫桿週期。

表三 實驗三觀察整理表

擺長 (公分)	單擺實測週期 (秒)	橫桿週期 (秒)	擺錘的投影軌跡
9.00	0.603	0.589 以下	直線往復
		0.602	順逆時針反覆旋轉
		0.609 以上	單一方向不同形狀旋轉
16.00	0.809	0.789 以下	直線往復
		0.806	順逆時針反覆旋轉
		0.819 以上	單一方向不同形狀旋轉
30.00	1.147	1.043 以下	直線往復
		1.099	順逆時針反覆旋轉
		1.132 以上	單一方向不同形狀旋轉
36.00	1.208	1.174 以下	直線往復
		1.217	順逆時針反覆旋轉
		1.278 以上	單一方向不同形狀旋轉
40.00	1.326	1.248 以下	直線往復
		1.269	順逆時針反覆旋轉
		1.312 以上	單一方向不同形狀旋轉
50.00	1.418	1.385 以下	直線往復
		1.419	順逆時針反覆旋轉
		1.451 以上	單一方向不同形狀旋轉
64.00	1.621	1.573 以下	直線往復
		1.618	順逆時針反覆旋轉
		1.660 以上	單一方向不同形狀旋轉
65.00	1.690	1.582 以下	直線往復
		1.627	順逆時針反覆旋轉
		1.689 以上	單一方向不同形狀旋轉
80.00	1.918	1.723 以下	直線往復
		1.795	順逆時針反覆旋轉
		1.856 以上	單一方向不同形狀旋轉

討論

本組發現單擺共振儀器在單擺的實測週期與推桿的週期很接近時 (即共振時)，擺錘運動的平面投影才會產生順逆時針重複運動的現象。

(二) 當擺錘平面投影的運動軌跡產生由橢圓→圓→直線就可能要旋轉方向反轉（由順變逆或由逆變順）。由圖 41-1 得知，發生了一次逆轉的現象，因為除了剛開始與儀器垂直的直線擺動外，還有一個斜的直線擺表示發生了逆轉。

擺長50公分 第1順時針轉

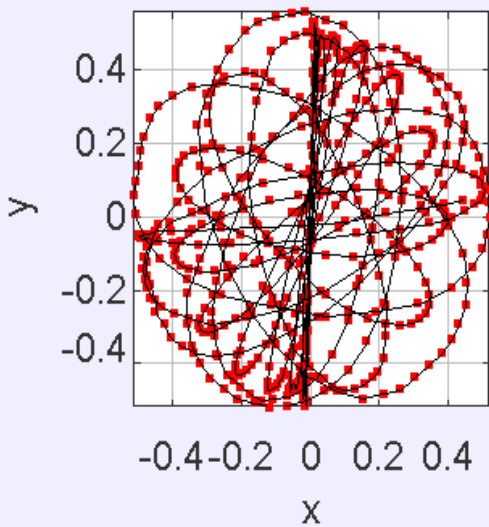


圖 41-1. 第 1 次順時針轉

擺長50公分 第1次逆時針轉

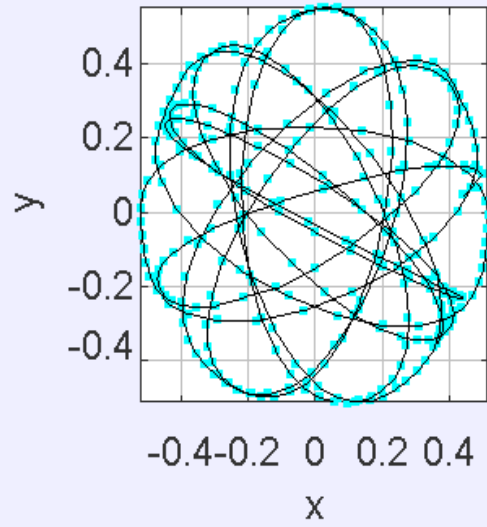


圖 41-2. 第 1 次逆時針轉

擺長50公分 第2次順時針轉

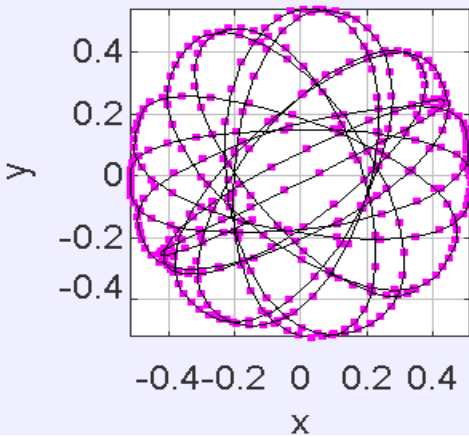


圖 41-3. 第 2 次順時針轉

擺長50公分 第2次逆時針轉

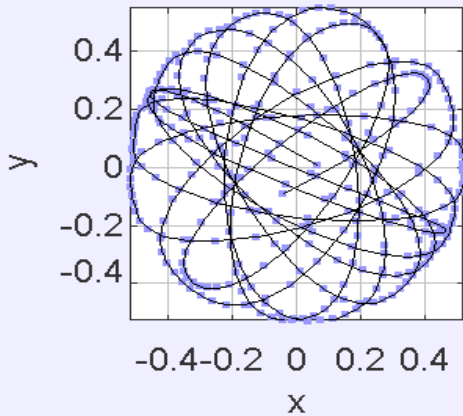


圖 41-4. 第 2 次逆時針轉

擺長50公分 第3次順時針轉

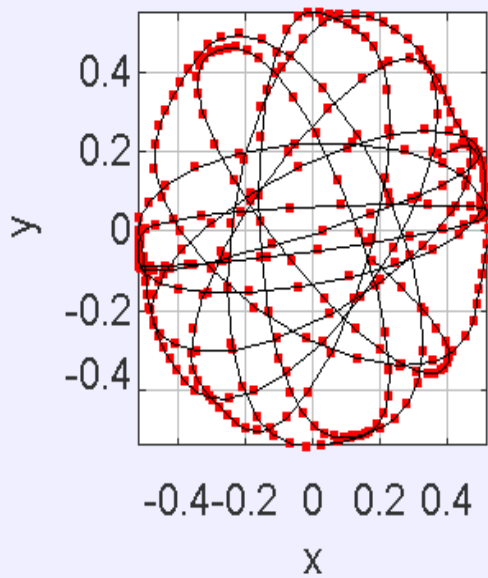


圖 41-5. 第 3 次順時針轉

擺長50公分 第3次逆時針轉

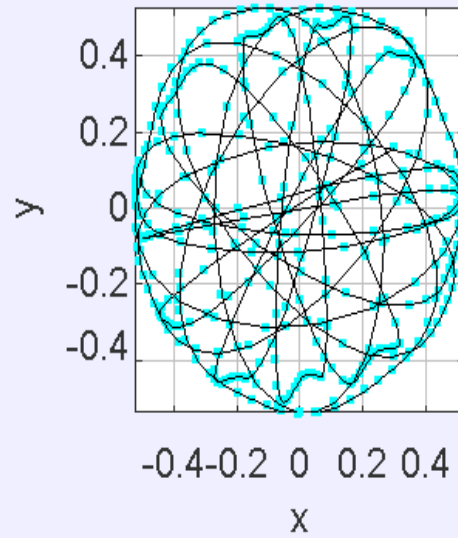


圖 41-6. 第 3 次逆時針轉

擺長50公分 第4次順時針轉

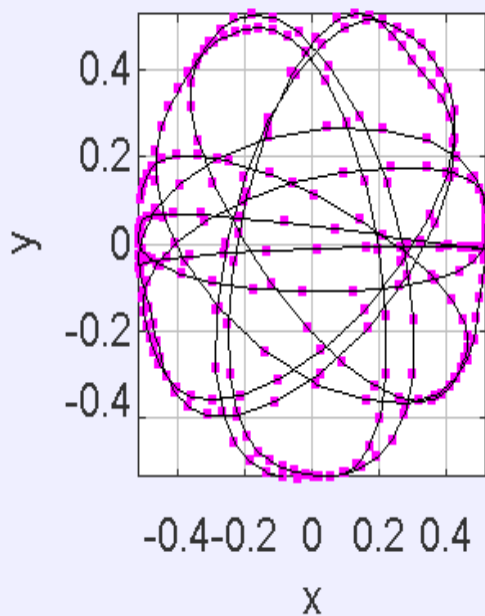


圖 41-7. 第 4 次順時針轉

擺長50公分 第4次逆時針轉

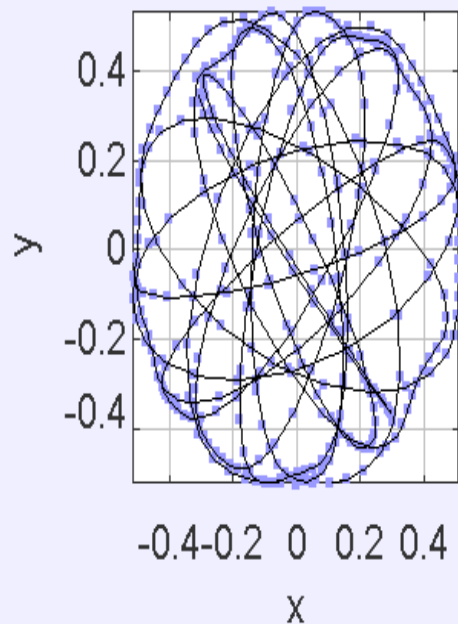


圖 41-8. 第 4 次逆時針轉

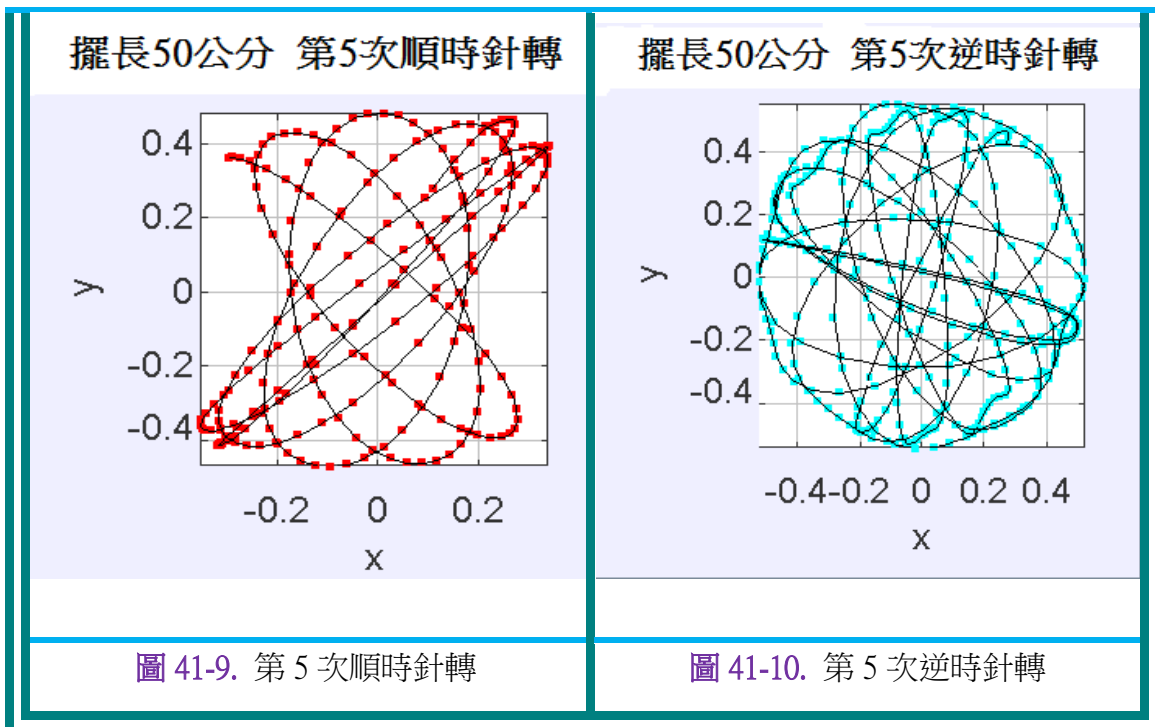


圖 41 擺長 50 公分 擺錘為塑膠球的平面投影運動軌跡分析

(三) 單擺擺錘的平面投影軌跡圖 (圓形、橢圓、直線) 中，發現有相似李薩如圖形；本組查找資料與歸類如圖 43 所示 Lissajous figures 是由兩個互相垂直的正弦曲線或餘弦曲線在坐標平面上合成的曲線；也可以說，方向互相成直角的兩振動，重疊時所形成的位移圖形。

數學參數如圖 42

$$x(\theta) = a \cdot \sin(\theta)$$

$$y(\theta) = b \cdot \sin(n\theta + \phi)$$

a, b : x, y 的振幅

n : 擺動或振動的頻率比率 (n ≥ 1)

φ : 相位差 (0 ≤ φ ≤ π/2)

圖 42 李薩如 數學參數

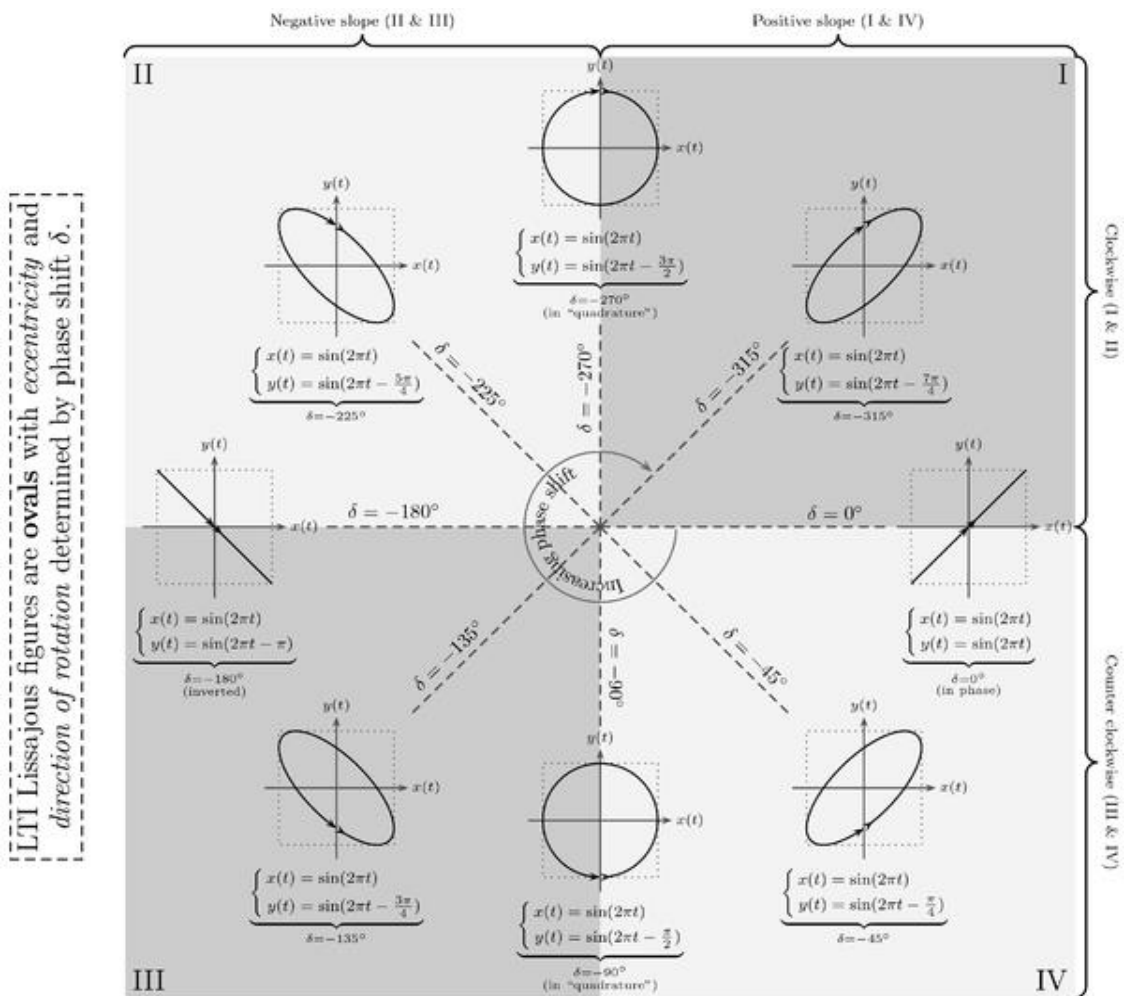


圖 43 李薩如圖

討論

1. 李薩如圖實際上是兩個波同時在 X 軸和 Y 軸上疊加形成的。但是如果這兩個相互垂直的振動的週期（頻率）為任意值，那麼它們的合成運動就會比較複雜，而且軌跡是不穩定的。然而如果兩個振動的週期（頻率）成簡單的整數比，這樣就能合成一個穩定、封閉的曲線圖形，這就是李薩如圖。
2. 由實驗三本組發現單擺擺錘平面投影軌跡從橢圓→圓→直線→橢圓→圓→直線的重覆運動這是李薩如圖。那橫桿端點除了 X 軸的振動應該還有 Y 軸的振動所以再做實驗四來證實是否推論正確。

(四) 實驗四 Tracker 軟體分析推桿端點 x, y 軸向的振幅

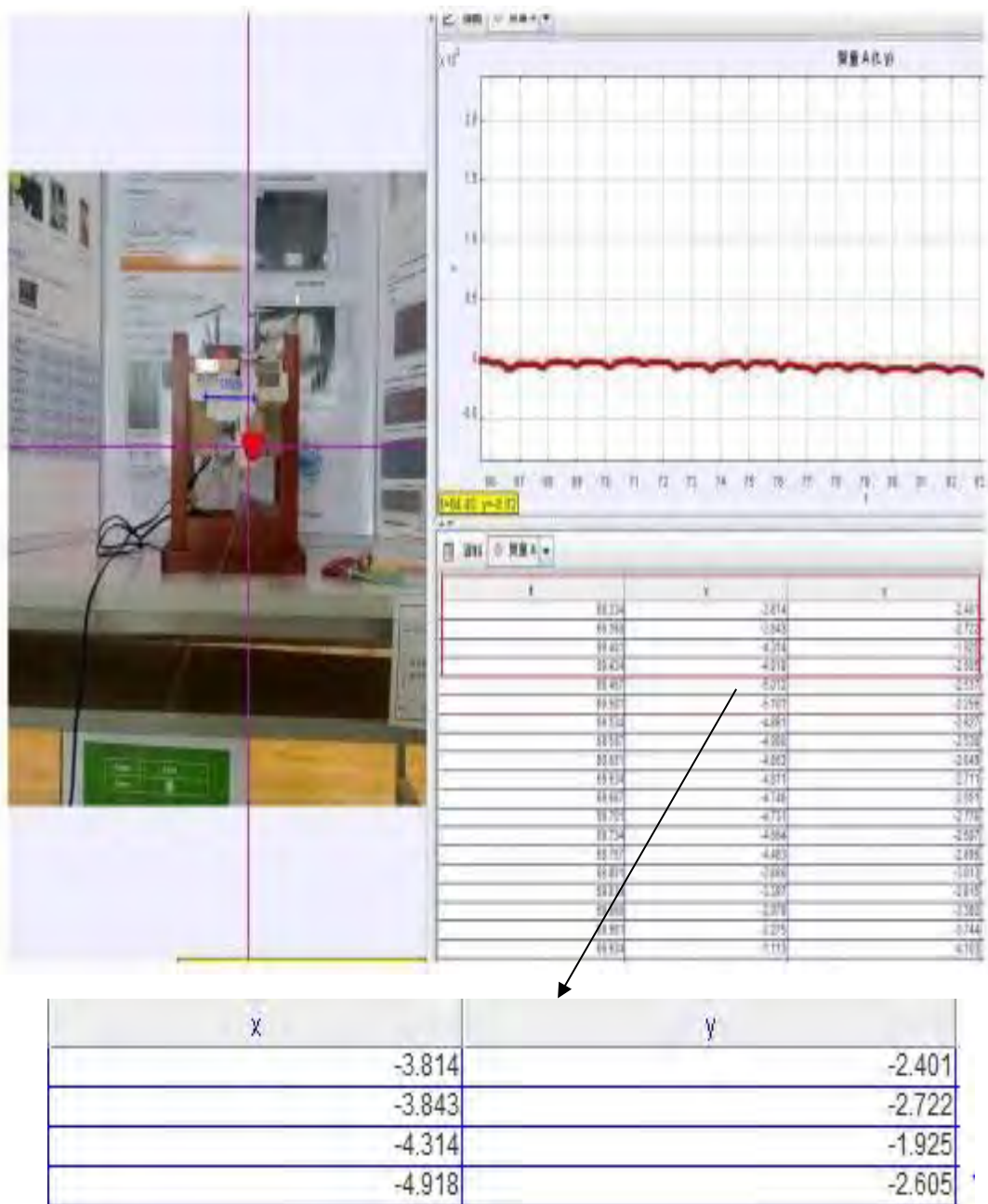


圖 44 擺長 36cm 時橫桿端點振幅分析

討論

實驗四發現在推桿端點 x, y 軸上有接近 1 公分的振幅；讓本組了解單擺擺錘在平面投影的運動軌跡產生順轉逆旋轉現象瞬間 橫桿端點有 X 軸 Y 軸兩個方向的振動。

三、探討單擺的擺錘在平面投影產生順時針旋轉→逆時針時旋轉時

此現象發生時**橫桿的端點位置**

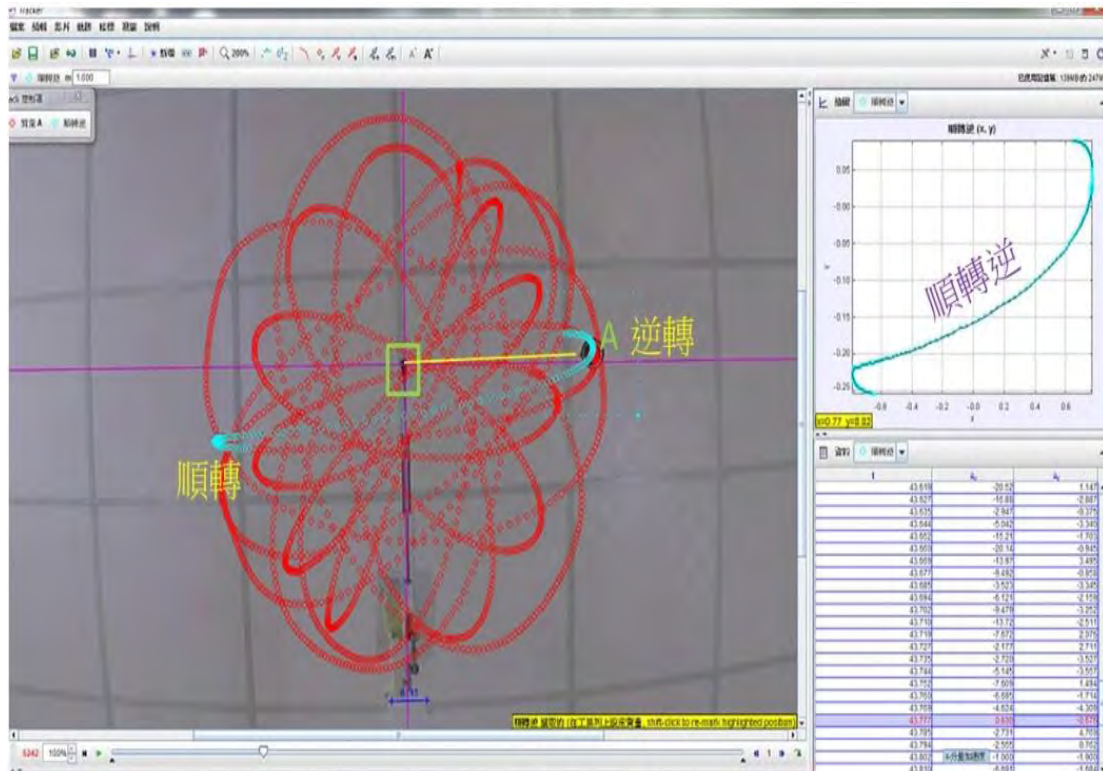


圖 45 順轉逆軌跡分析圖

如圖 45，當擺錘由順轉逆時，在 A 點擺錘的**加速度最大**而推桿至往前的最遠端，而後開始往後拉動擺錘形成由順轉逆。如圖 46

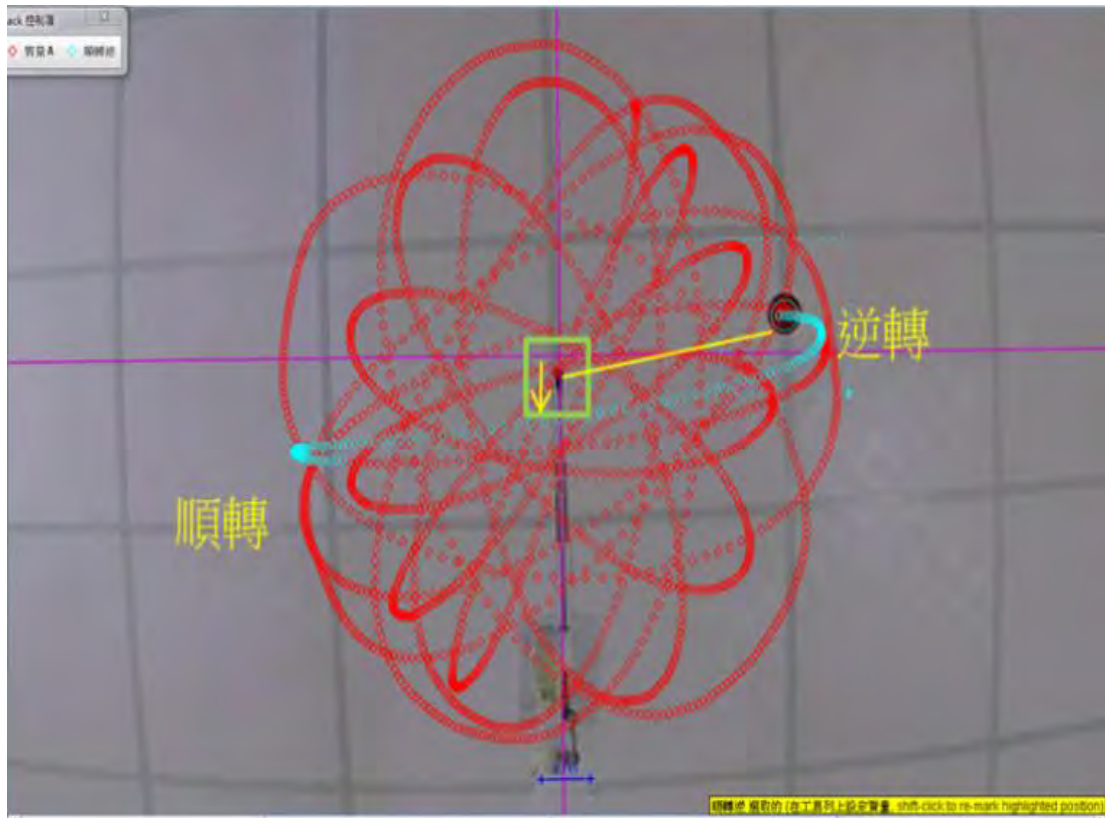


圖 46 當推桿至往前的最前端，而後開始往後拉動擺錘形成由順轉逆。

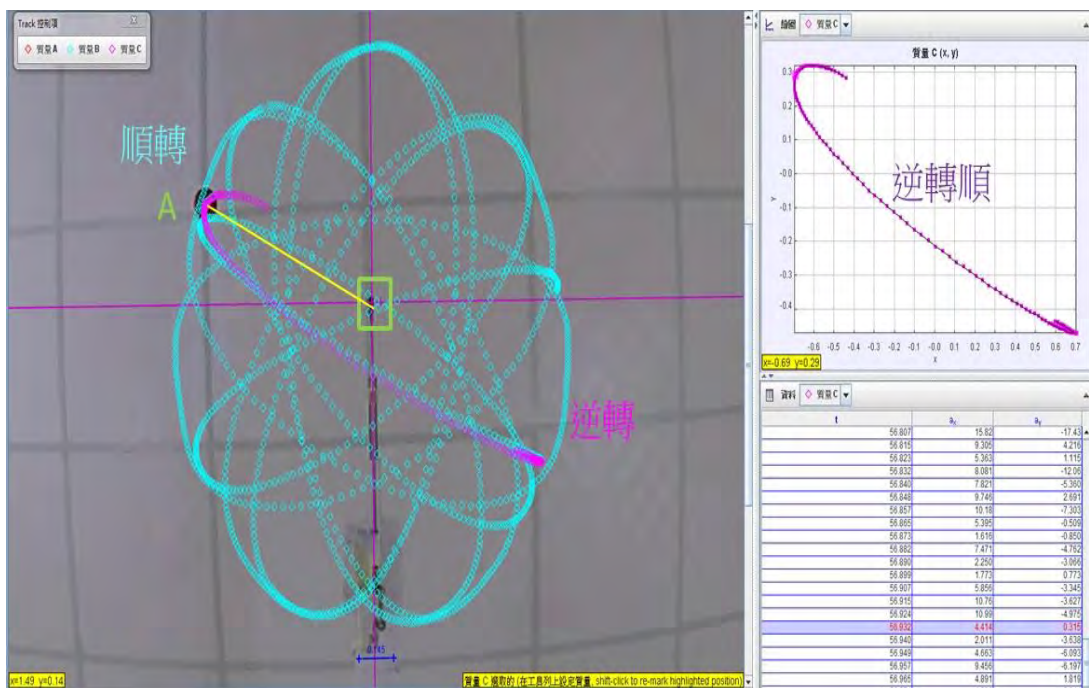


圖 47 逆轉順由下往上攝影的軌跡分析圖

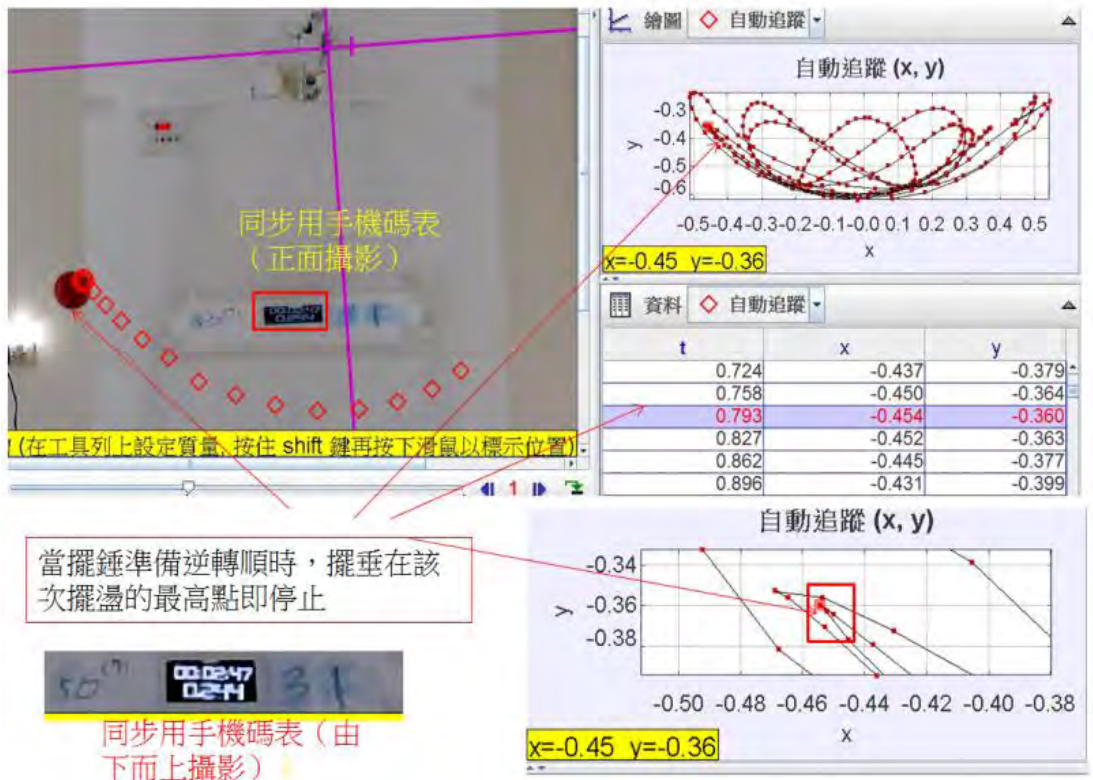


圖 47 逆轉順正面攝影的軌跡分析圖。

如圖 48，當擺錘由逆轉順時，在 A 點擺錘的**加速度最大**，而推桿至往前的最遠端，而後開始往後拉動擺錘形成由**逆轉順**。

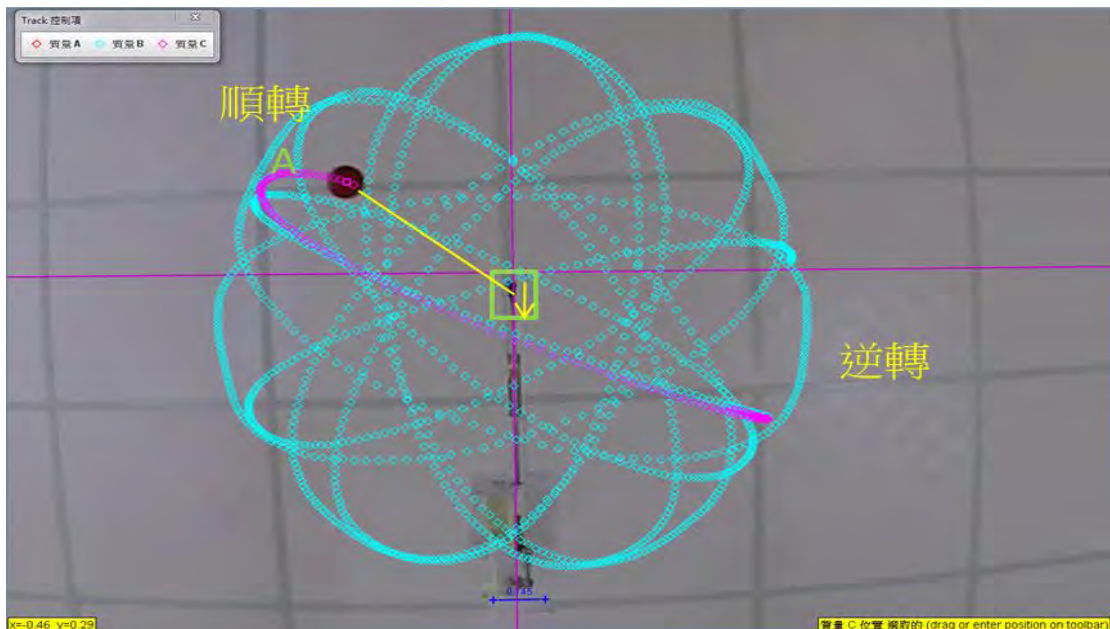


圖 48 當推桿至往前的最前端，而後開始往後拉動擺錘形成由**逆轉順**。

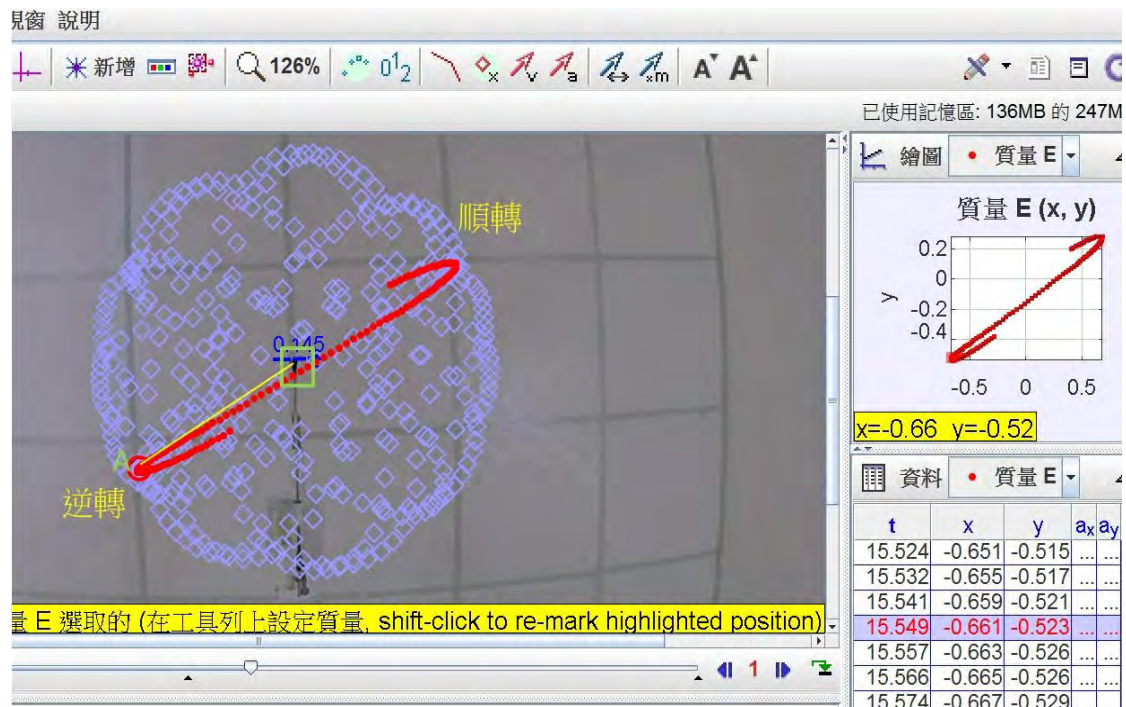


圖 49 順轉逆 2 軌跡分析圖

如圖 49，當擺錘由順轉逆時，在 A 點擺錘的加速度最大，而推桿至最近端，而後開始往前拉動擺錘形成由順轉逆。如圖 50

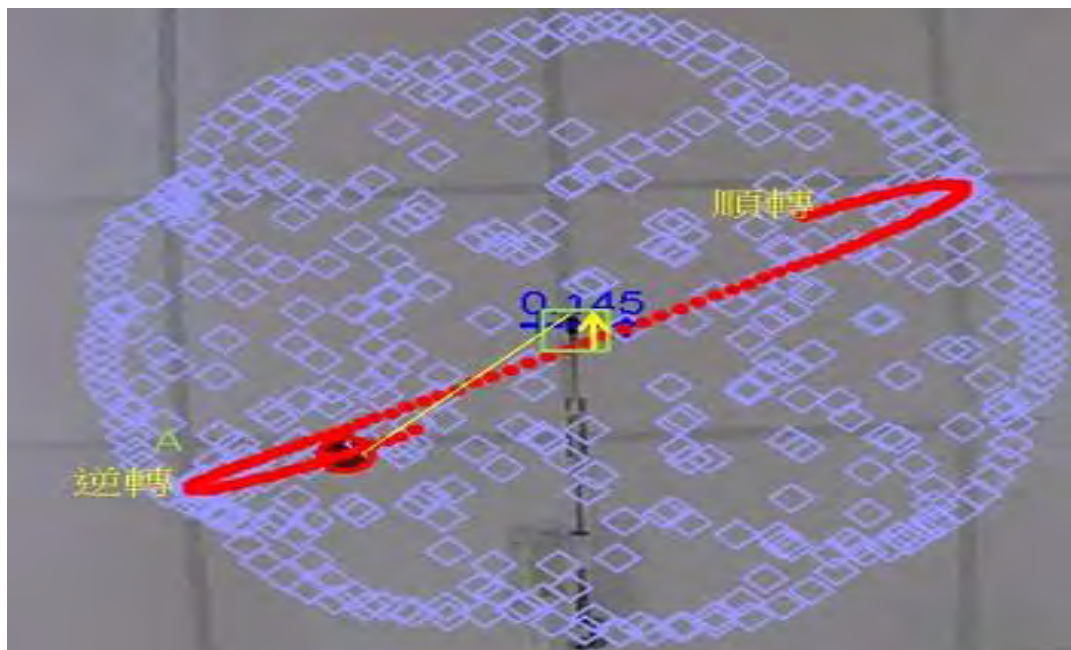


圖 50 當推桿至往前的最後端，而後開始往前拉動擺錘形成由順轉逆。

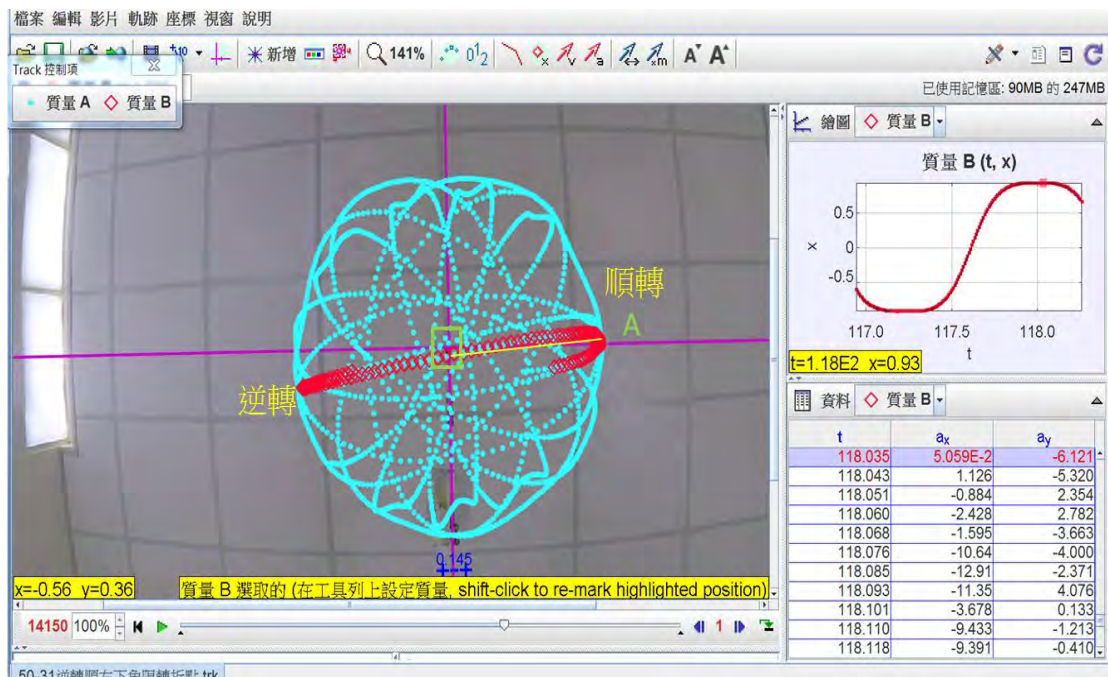


圖 51 順轉逆 2 軌跡分析圖

如圖 51，當擺錘由逆轉順時，在 A 點擺錘的**加速度最大**，
而推桿至最近端，而後開始往前拉動擺錘形成由**逆轉順**。如圖 52



圖 52 當推桿至往前的最後端，而後開始**往前拉動**擺錘形成由**逆轉順**。

	<p>圖 53-1 :</p> <p>本組觀察，當單擺在 A B 區要發生順逆轉方向改變時，橫桿恰至遠端點，接著橫桿往回拉，單擺即順勢翻轉。</p> <p>A 區如圖 46、B 區如圖 48</p>
	<p>圖 53-2 :</p> <p>本組觀察，當單擺在 C D 區要發生順逆轉方向改變時，橫桿恰至近端點，接著橫桿往前拉，單擺擺錘即順勢翻轉。</p> <p>C 區如圖 50、D 區如圖 52</p>

圖 53 擺錘在平面投影產生順時針旋轉→逆時針時旋轉時此現象發生時 橫桿的端點位置

討論

當單擺擺錘平面投影的運動軌跡發生順時針瞬間變逆時針旋轉時，

推桿剛好在兩端即加速度最大時。如圖 53

四、探討單擺的擺錘在平面投影有順時針旋轉→逆時針時旋轉的

重複現象產生時； 單擺實測自然週期與橫桿振動的週期

之間的關係

(一) 實驗五 取四組擺長 (9、16、36、64 公分)

Tacker 觀察單擺的擺錘在平面投影相關週期、單擺週期與橫桿週期

表四 單擺的擺錘在平面投影發生順時針旋轉→逆時針旋轉的現象時，單擺實際週期與橫桿週期的關係表

擺長 (公分)	單擺實測週期 (秒)	橫桿週期 (秒)
9	0.603	0.602
16	0.809	0.806
36	1.209	1.207
64	1.621	1.618

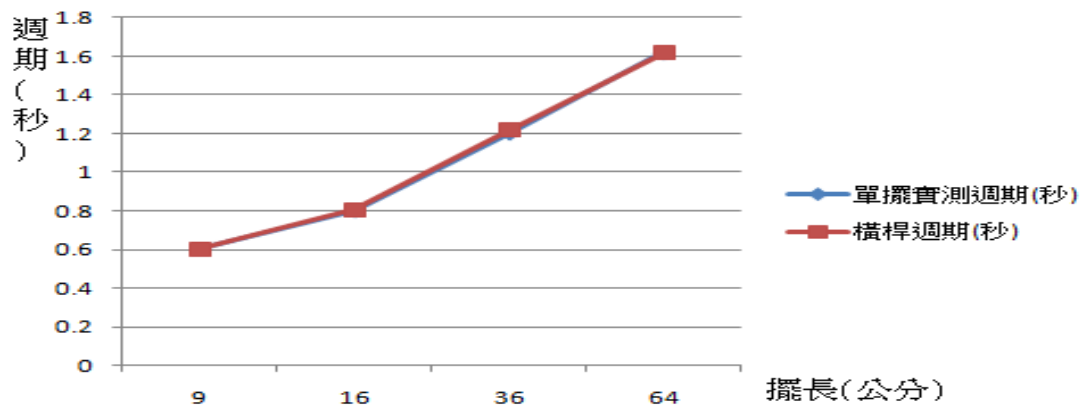


圖 54 單擺的擺錘在平面投影時發生順轉與逆轉現象單擺實際週期、橫桿週期的比較圖

表五 單擺實測週期減橫桿週期除以單擺理論週期之誤差百分比

擺長 (公分)	單擺實測週期減橫桿週期除以單擺理論週期之誤差百分比
9	0.16%
16	0.37%
36	0.16%
64	0.18%

各個擺長平均誤差百分比為 0.21%

討論

1. 本組發現單擺實測週期與橫桿週期非常接近時（即共振時），才會發生。
2. 單擺擺錘運動的平面投影，運動方向會瞬間改變（即順時針旋轉瞬間變逆時針時旋轉）。
3. 單擺實際自然週期、橫桿週期，4 個擺長的平均誤差，在 Tacker 追蹤分析後，如表五。擺長平均誤差百分比為 0.21%

五、探討單擺的擺錘在平面投影從順時針旋轉→逆時針時旋轉→

順時針旋轉的週期與單擺實測自然週期和橫桿週期的關係

表六 單擺擺長、橫桿週期、橫桿靜止的單擺實測週期、擺錘平面投影的運動方向會改變時的週期的整理表

單擺擺長（公分）	9	16	36	64
橫桿靜止的單擺實測週期（秒）	0.603	0.809	1.208	1.621
橫桿週期（秒）	0.602	0.806	1.207	1.618
擺錘的週期（秒） 開始順轉→逆轉→順轉 為週期（秒）	7.275	41.693	74.829	108.829

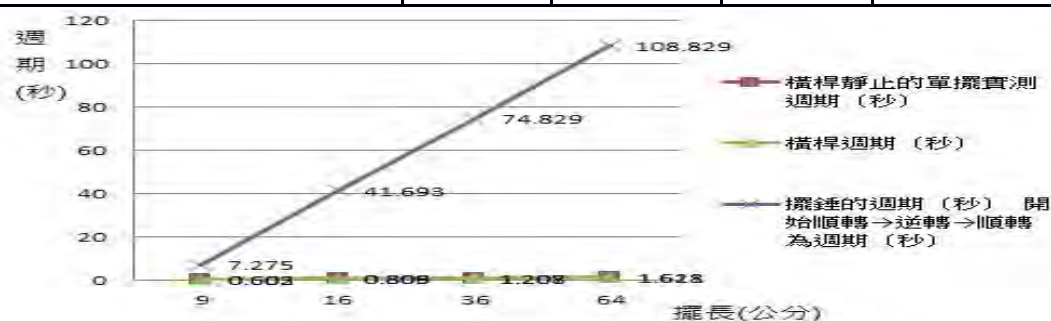


圖 55 擺錘的週期 [開始順轉→逆轉→順轉為週期（秒）]、橫桿週期（秒）、橫桿靜止的單擺實測週期（秒）三者比較圖

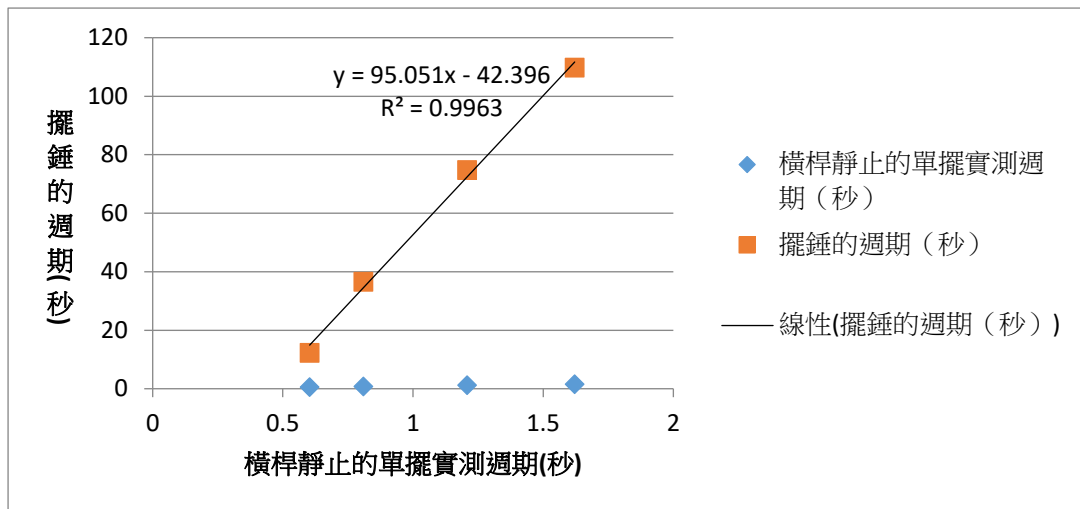


圖 56 橫桿靜止的單擺實測週期與擺錘的週期的線性回歸圖

討論

1. 圖 55、56 發現擺錘的週期 [開始順轉→逆轉→順轉為週期 (秒)]、橫桿週期 (秒)、橫桿靜止的單擺實測週期 (秒) 三者為線性關係。
2. 本組發現擺錘平面投影的運動方向會改變時的週期是橫桿週期與橫桿靜止時單擺週期的幾十倍。
3. 當擺長越長時，擺錘的運動軌跡，越接近平面二維的運動。

陸、結論

- 一、單擺共振儀器在單擺的實測週期與推桿的週期很接近時（即共振時），擺錘運動的投影才會產生順逆時針交叉運動的現象。
- 二、當擺錘平面投影的運動軌跡從橢圓→圓→直線→橢圓→圓→直線的重複運動這就是李薩如圖。
- 三、當單擺擺錘運動軌跡的投影發生順時針瞬間變逆時針旋轉時，推桿的端點剛好在兩端即加速度最大時。
- 四、推桿週期與單擺實測週期接近時（共振現象），單擺擺錘運動的投影運動方向會瞬間改變，即順時針旋轉瞬間變逆時針旋轉。

五、為何在共振時，單擺擺錘運動的投影，其旋轉方向瞬間改變的原因，目前還不甚了解，期待有機會能夠再做深入的研究。

柒、參考資料

一、【一本書】

- (一)、科學實驗王 16：波動的特性
- (二)、黃元正、楊勝斐、丘世禎、黃伯霖 • 物理實驗
- (三)、褚德三 • 基礎物理（全） • 龍騰文化
- (四)、高涌泉…等（2015） • 基礎物理（二）B 上 • 龍騰文化

二、【網路資源】

- (一)、李忠義老師（2011/01/06） • 科學 online 共振（Resonance）[http :

//hightscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=19293](http://hightscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=19293)
- (二)、維基百科 • 擺 [https :
//zh.wikipedia.org/wiki/%E6%93%BA](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%93%BA)
- (三)、維基百科 • 共振 [https :
//zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%B1%E6%8C%AF](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%B1%E6%8C%AF)
- (四)、物理實驗 [http :
//blog.creaders.net/u/9108/201602/248672.html](http://blog.creaders.net/u/9108/201602/248672.html)
- (五)、YouTube • 簡諧運動 【觀念】簡諧運動的應用：單擺週期公式
[https :
//www.youtube.com/watch ? v=kV0j6o52-wI](https://www.youtube.com/watch?v=kV0j6o52-wI)
- (六)、單擺是簡諧的兩個證明 [https :
//ngsir.netfirms.com/Q/ME/MQ29.pdf](https://ngsir.netfirms.com/Q/ME/MQ29.pdf)

【評語】 030113

探討問題為經典的驅力下的簡諧震盪行為，是對複雜問題提出挑戰，其實驗精神值得鼓勵。發展了相當精巧的的實驗裝置作為外驅力，觀察結果相當完整，觀察現象豐富。口頭報告十分清楚，書面報告尚有改善空間。若能增加更多的理論分析與實驗結果加以比對更可以凸顯完整性。

壹、研究動機

在尋找科展的題目的過程中，發現老師的教學影片中（圖1）：傅科擺模擬圖，即擺錘運動在平面的投影是直線且會改變運動方向。本組突發奇想：那若把單擺綁在一振盪的橫桿上，則擺錘運動的平面投影又會是如何呢？因此本組利用一老舊斑駁的單擺置於活動椅上，以人力來回推動活動椅，結果發現在一特定的推動週期時，單擺的擺錘會明顯的出現越盪越高，而後繞著中心旋轉，時而加速時而減速來回往復運動，隱約還有順逆轉交替的規律現象。因此本組決定對於這個現象，設計實驗器材來進行研究。

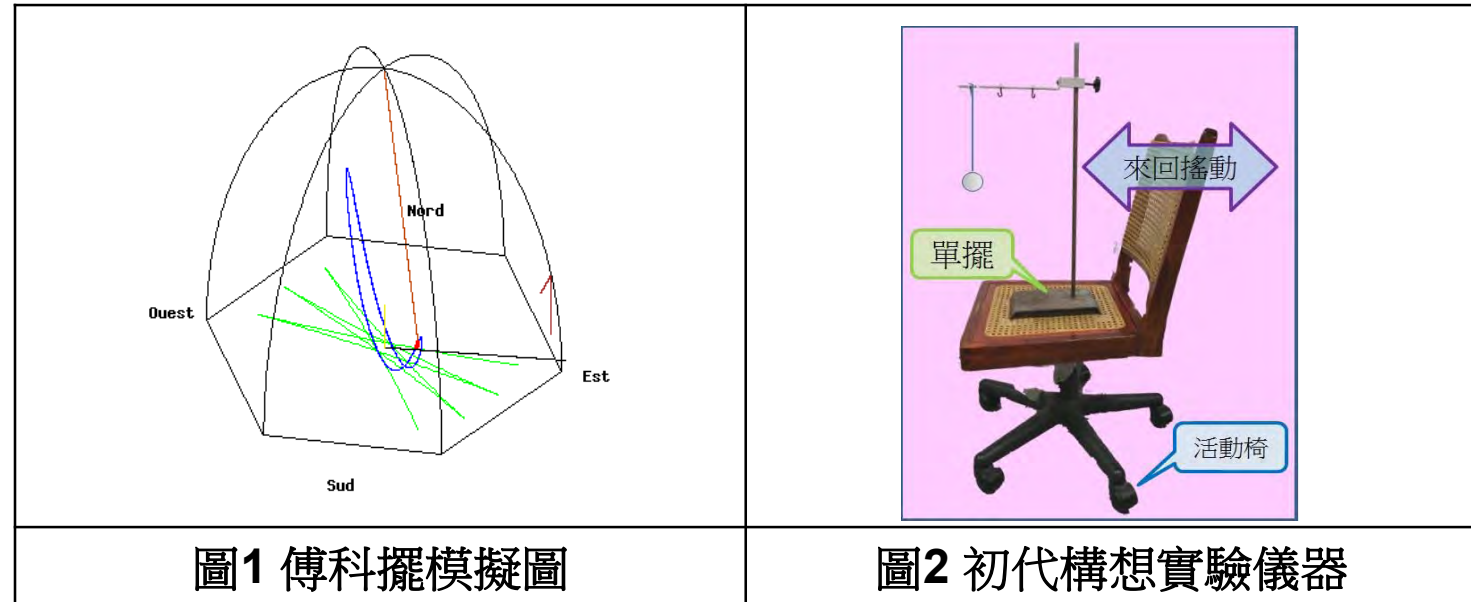


圖1 傅科擺模擬圖

圖2 初代構想實驗儀器

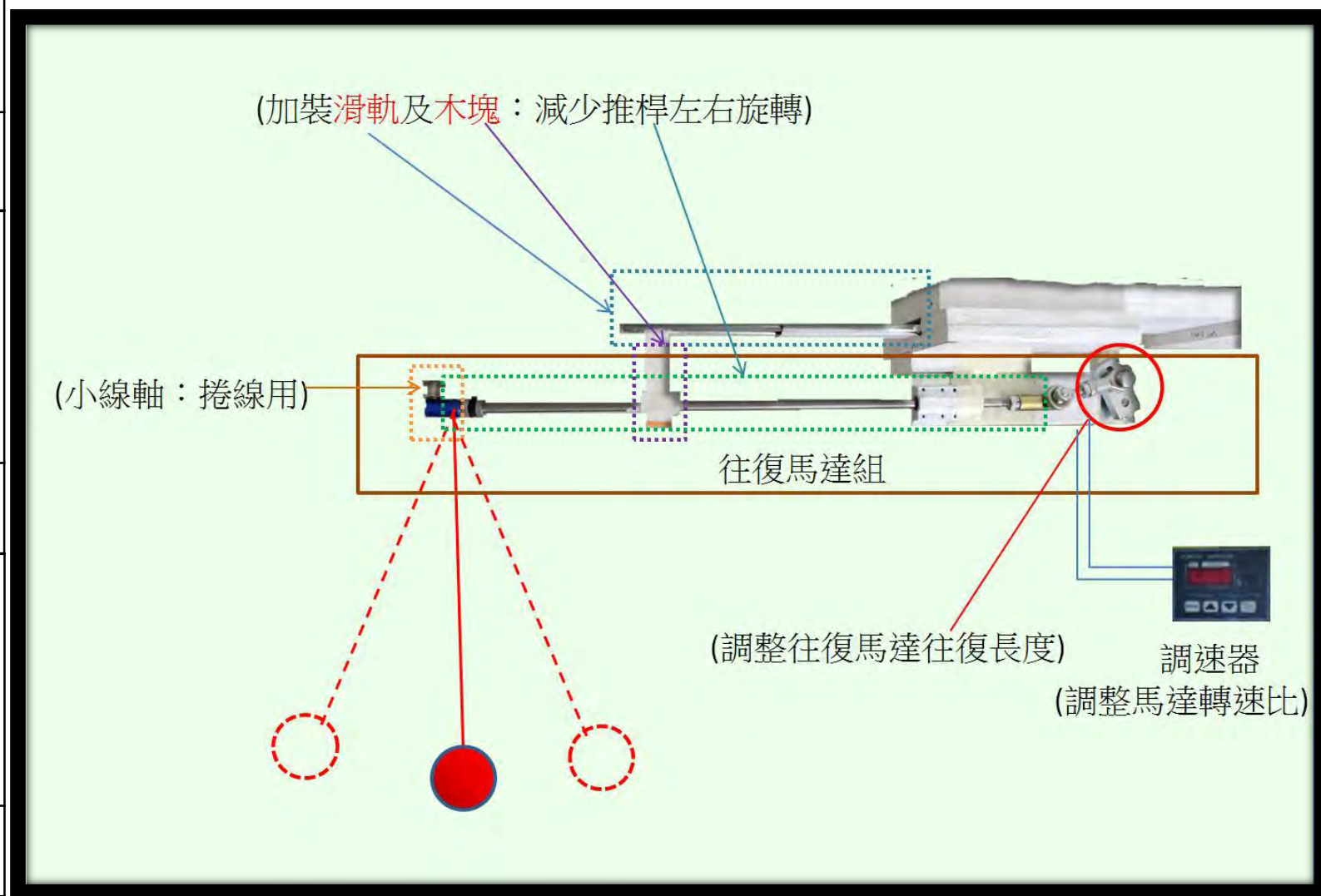
貳、研究目的

- 一、探討橫桿不動時，不同擺長時，單擺自然週期的理論週期 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ 與實測自然週期的比較。
- 二、探討擺錘靜止時，改變橫桿週期，擺錘平面投影的運動情形
- 三、探討單擺的擺錘在平面投影產生順時針旋轉→逆時針時旋轉時，此現象發生時橫桿的端點位置。
- 四、探討單擺的擺錘在平面投影有從順時針旋轉→逆時針時旋轉的重複現象產生時，單擺週期與橫桿振動的週期的關係。
- 五、探討單擺的擺錘在平面投影從順時針旋轉→逆時針時旋轉→順時針旋轉的週期與單擺自然週期和橫桿週期的關係。

參、研究設備與器材

擺錘（塑膠）	捲尺（測量擺線長）	游標尺（測球直徑）	速率調整器
量角器（測擺角）	滑軌	擺錘（鐵 銅 鋁球）	相機（錄影）
線	G型夾（固定用）	Tracker軟體	電鑽

「單擺共振儀器」的設計與製作

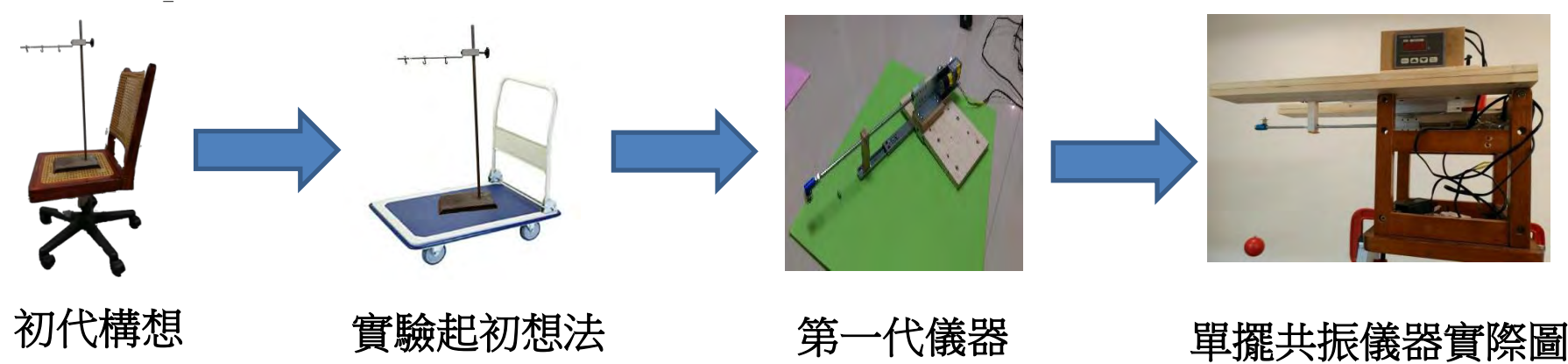


肆、研究過程與方法

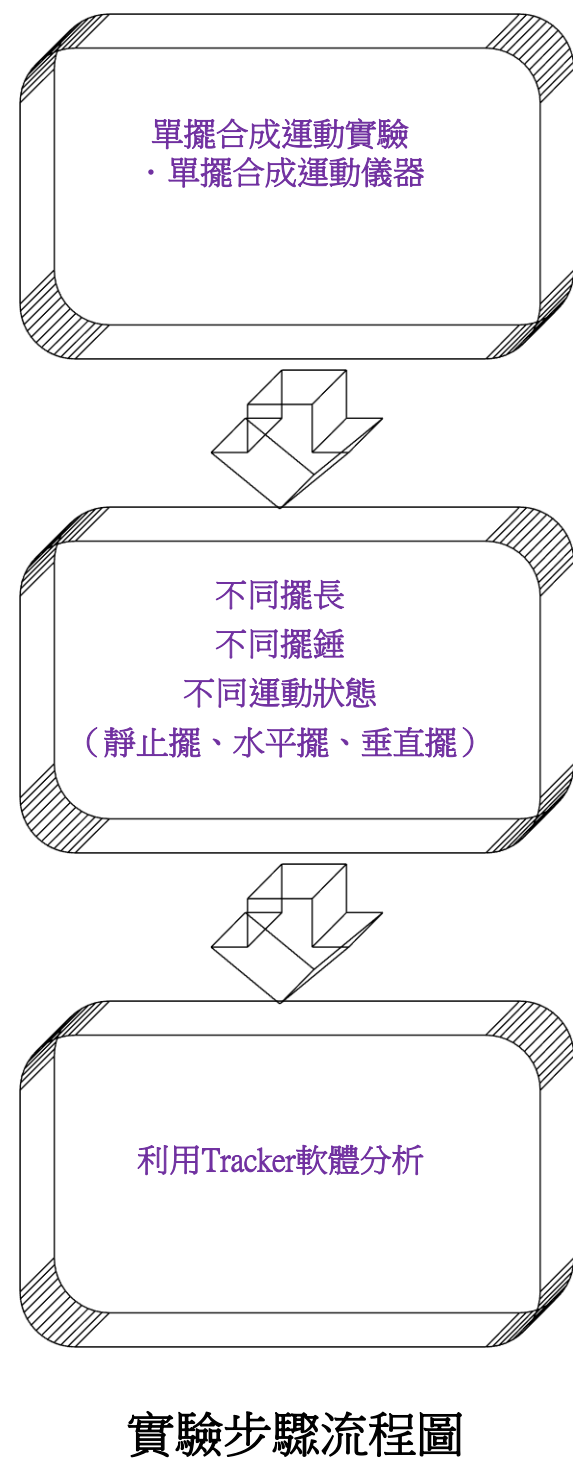
共振 (Resonance) :

就物理學而言，共振是指系統（通常為一線性系統）常容易隨著一些特別的頻率而產生振動，這種現象稱為共振，這些特別的週期稱為此系統的共振週期。當系統處在這些共振週期的振動時，即使微小的振動最後也可能形成大幅度的擺動。

二、概念演進



三、組裝器材



實驗步驟流程圖

一、蒐集單擺及共振資料

單擺是一種懸掛於定點且在重力影響下擺動的物體。

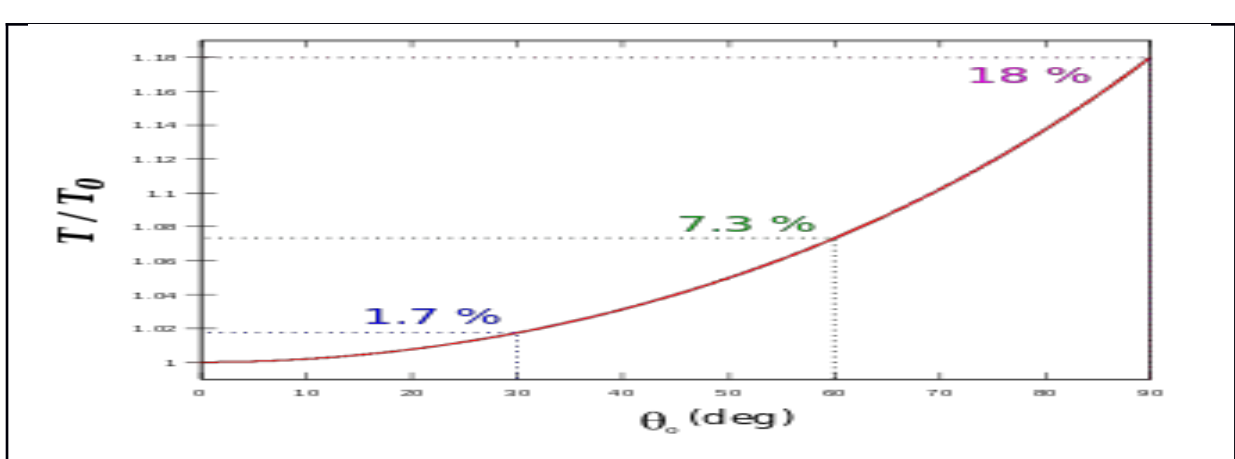
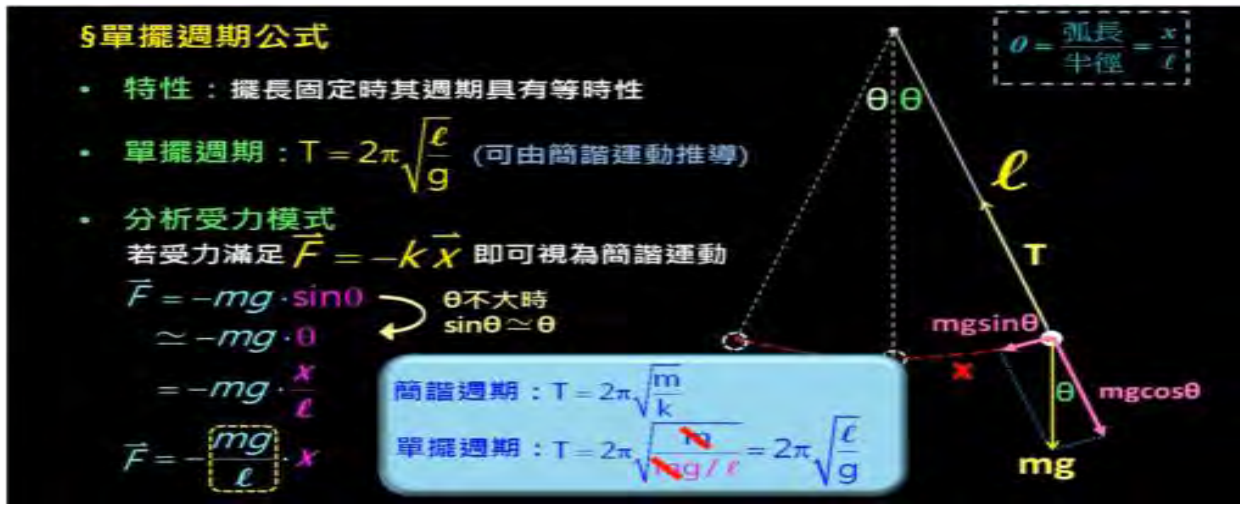
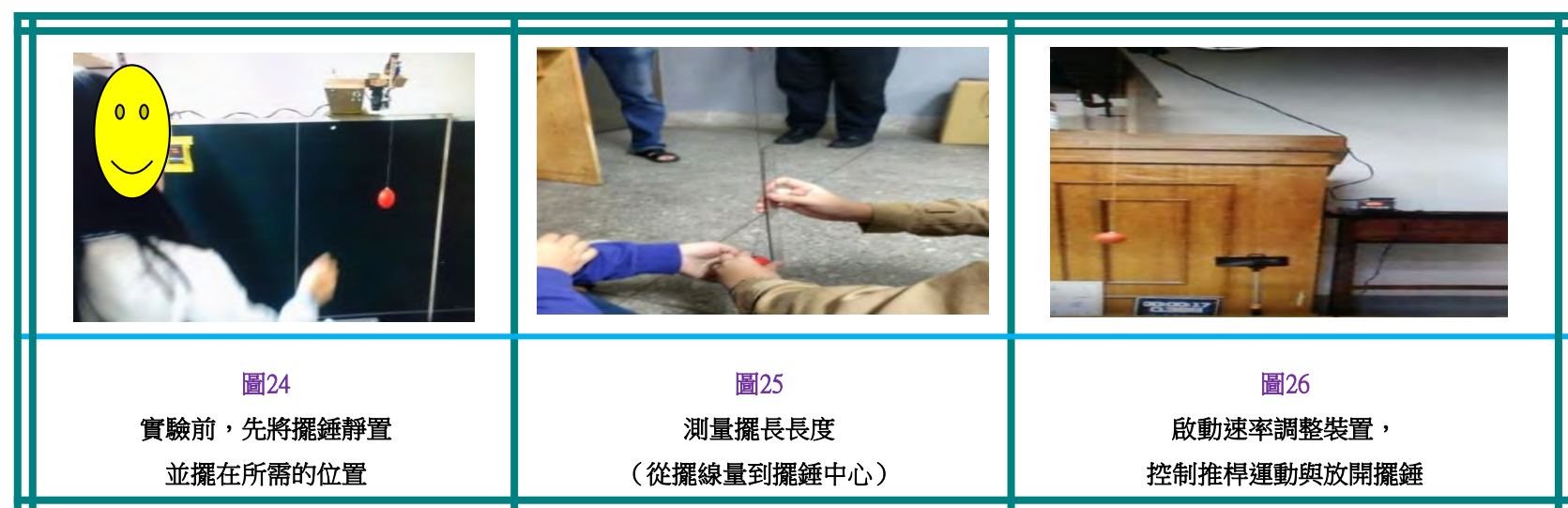


圖17 實際單擺擺角與小角度公式的誤差

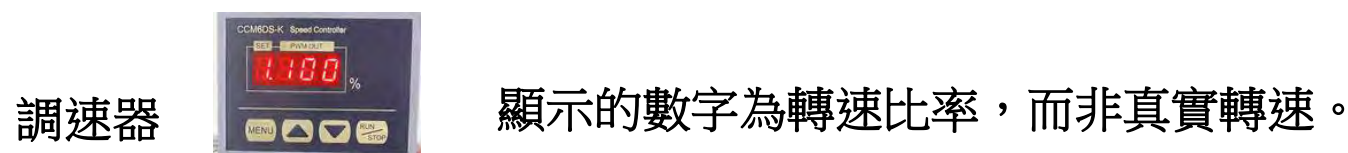
四、實驗步驟

(一) 製作實驗



(二) 觀察數據

微調往復馬達的速率比，並觀察擺錘擺運的情形，記錄下來



調速器

顯示的數字為轉速比率，而非真實轉速。

(三) 改變擺長

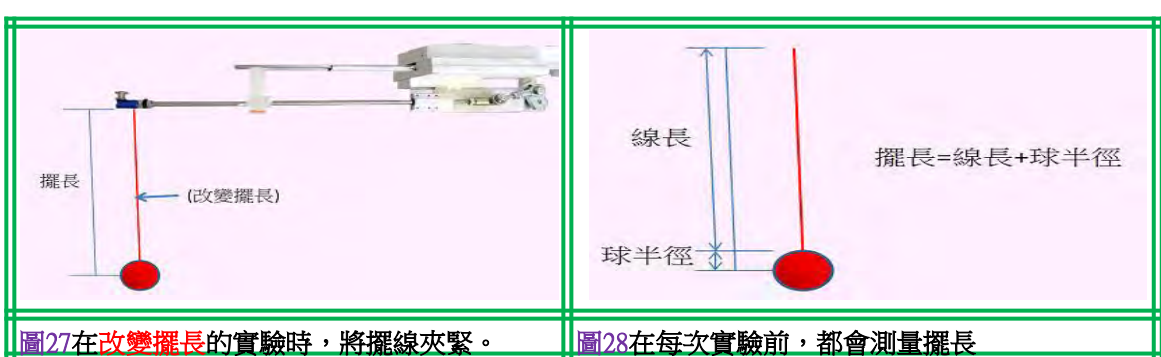


圖27在改變擺長的實驗時，將擺線夾緊。
圖28在每次實驗前，都會測量擺長

在擺長方面，經討論後決定使用9種擺長（9、16、30、36、40、50、64、65、80cm）。

(四) 改變擺錘

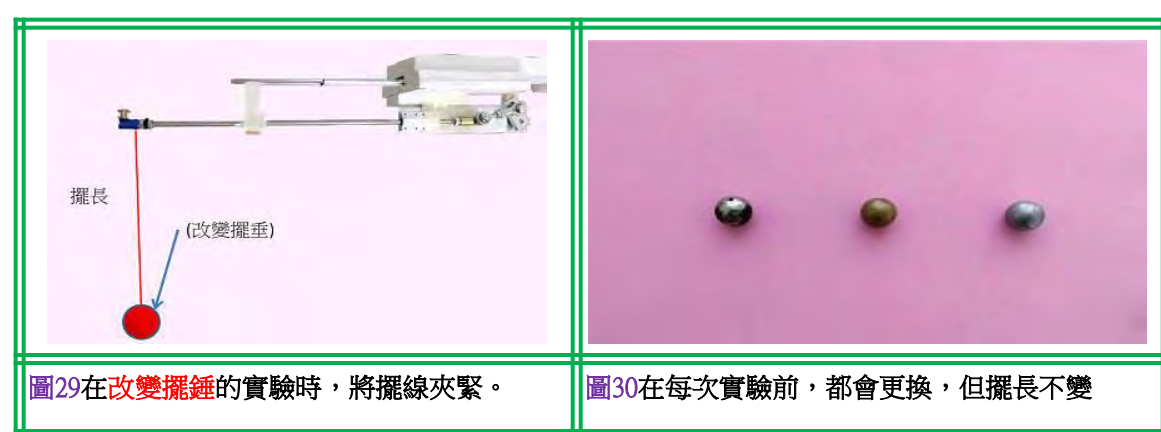


圖29在改變擺錘的實驗時，將擺線夾緊。
圖30在每次實驗前，都會更換，但擺長不變

本組在選擇擺錘時，總共收集了4種材質（塑膠球、鐵製、銅製、鋁製）的擺錘，其中本組選擇以塑膠擺錘做實驗主體，然而鐵製、銅製、鋁製、體積較小，比較不容易錄製軌跡因此影響實驗結果故最後選擇體積較大的**塑膠擺錘**和重量較重的**鐵球**來進行此次的實驗。

(五) 改變單擺擺放位置

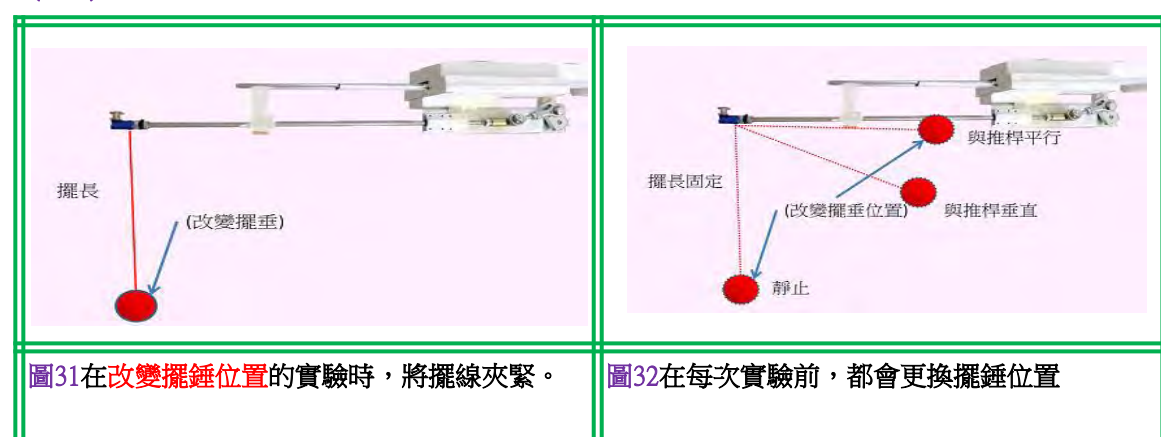


圖31在改變擺錘位置的實驗時，將擺線夾緊。
圖32在每次實驗前，都會更換擺錘位置

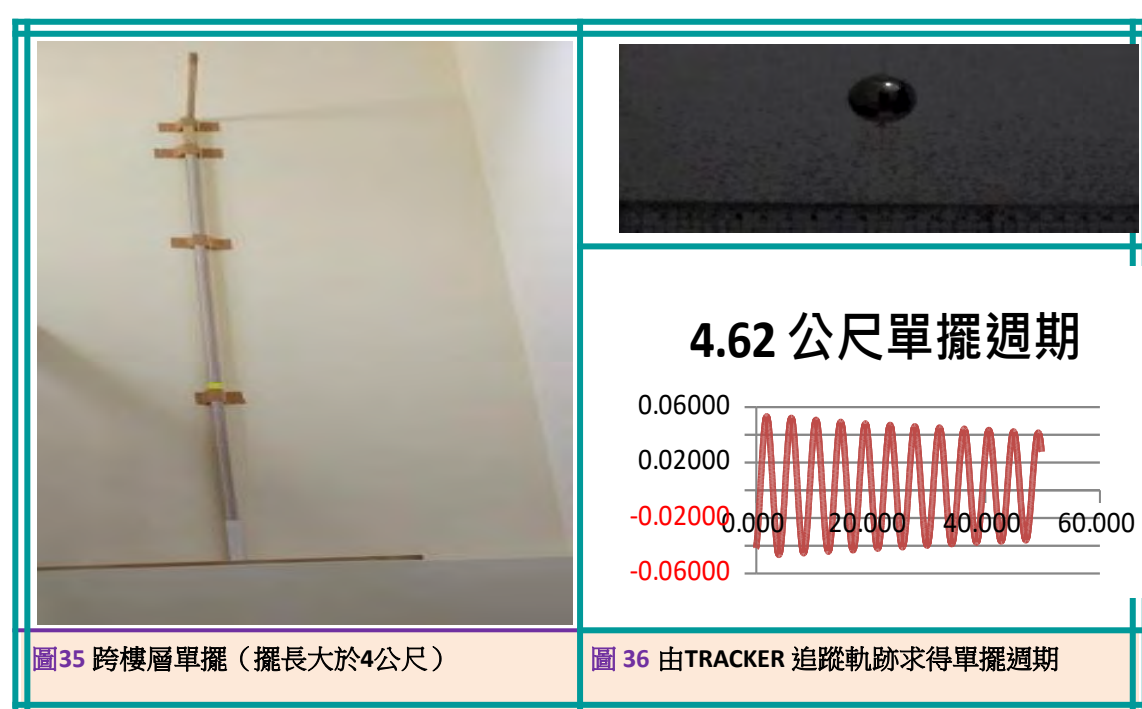
擺錘位置：
1. 擺錘靜止 2. 擺錘與推桿平行 3. 擺錘與推桿垂直

伍、研究結果與討論

一、探討橫桿不動時，不同的擺長，單擺週期的理論計算週期 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ 與實測自然週期的比較。

(一) 實驗一 求本地的g（重力加速度）本組利用單擺週期公式計算出各擺長的理論週期

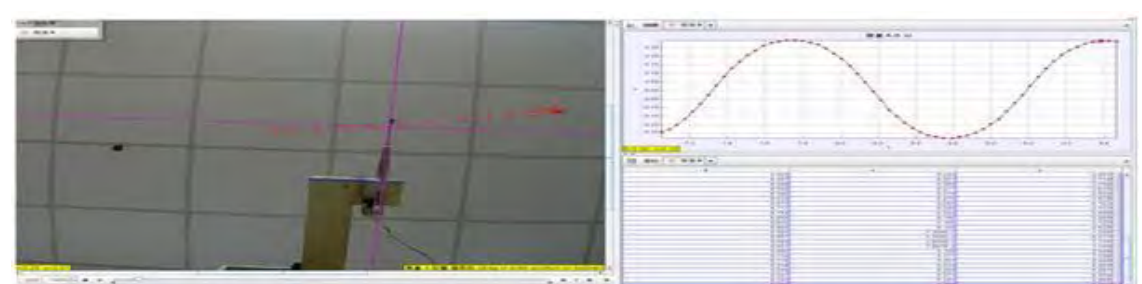
由圖35及圖36得知 單擺週期公式 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ 這個公式在擺角<5度十分正確因此我們設計了一個實驗：先求本地的g（重力加速度）



項目	擺長	圓周率	週期
值	4.62公尺	3.14159265359	4.31833

使用擺長4.62公尺如圖35，使擺錘擺動小於5公分（如圖36），如此擺角小於1度，使用tracker追蹤單擺，求得單擺週長T=4.31833，代入公式 得g=9.8011

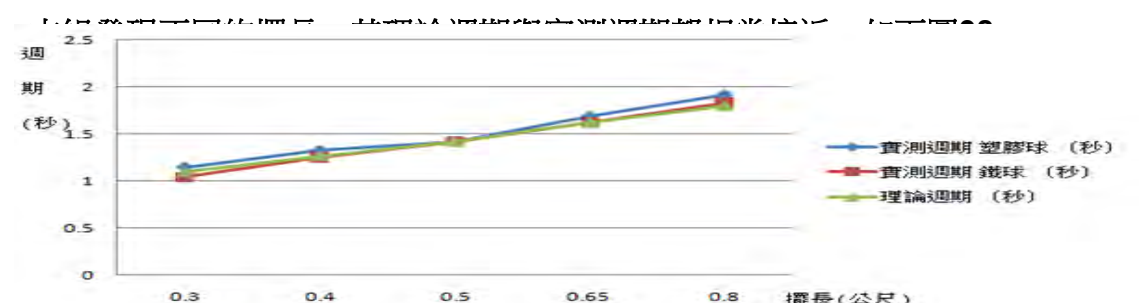
(二) 實驗二 Tracker軟體分析不同擺長的單擺實測自然週期



表二 不同擺長的單擺實測週期整理表			
擺長 (公分)	單擺實測週期 (秒)	理論週期 (秒)	週期誤差 (秒)
9.00	0.603	0.602	0.001
16.00	0.809	0.806	0.003
30.00	1.147	1.099	0.048
36.00	1.208	1.099	0.109
40.00	1.326	1.269	0.057
50.00	1.418	1.419	0.001
64.00	1.621	1.618	0.003
65.00	1.690	1.618	0.072
80.00	1.918	1.795	0.123

(三) 利用單擺週期公式反算理論週期 取擺長（30 40 50 65 80公分）五組與擺錘為**塑膠球 鐵球**並結合實驗二的實測自然週期匯整表

表二 塑膠球與鐵球的實測週期與理論週期			
擺長 (公分)	實測週期 (秒)	理論週期 (秒)	實測週期 鐵球 (秒)
30.00	1.147	1.099	1.043
40.00	1.326	1.269	1.252
50.00	1.418	1.419	1.418
65.00	1.690	1.618	1.626
80.00	1.918	1.795	1.832



討論

- 在單擺測重力加速度的實驗中，讓我們了解單擺具有等時性的特性。
- 在單擺的擺長和擺角固定不變的情形下，擺錘為**塑膠球 鐵球**的改變不會影響單擺的擺動週期。
- 在單擺的擺重和擺角固定不變的情形下，擺錘長度的改變會影響單擺的擺動週期。
- 本組實驗發現單擺自然週期公式計算出的理論週期與實測週期相似，因此推斷出，單擺實測週期可利用單擺自然週期公式計算。

二、探討擺錘靜止時，改變橫桿週期，擺錘平面投影的運動情形。

(一) 實驗三 使用Tracker軟體分析各擺長的橫桿週期，並調整橫桿週期觀察擺錘在平面投影的運動軌跡

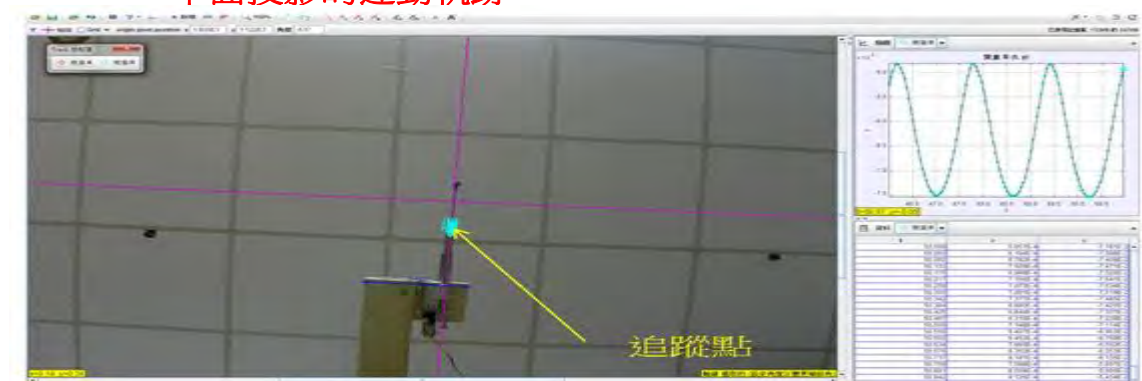


圖 39 擺長 65cm 時橫桿週期分析

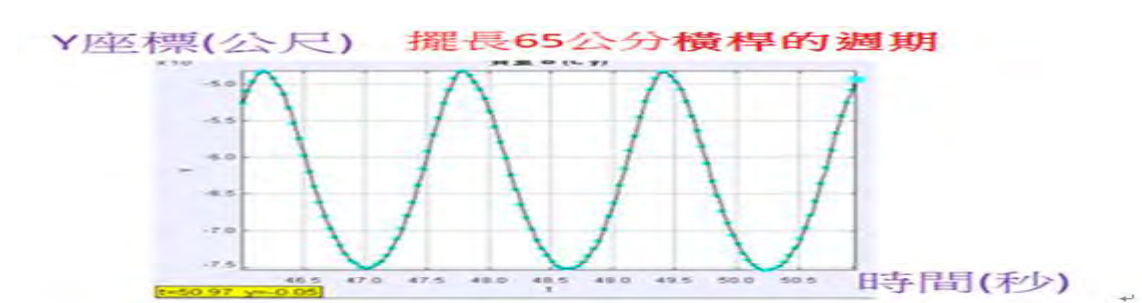


圖 40 擺長 65cm 時橫桿週期分析

經討論 本組利用多個波谷相差的時間平均，可得橫桿週期

表三 實驗三觀察整理表

擺長 (公分)	單擺實測週期 (秒)	橫桿週期 (秒)	擺錘的投影軌跡
9.00	0.603	0.589 以下	直線往復
		0.602	順逆時針反覆旋轉
		0.609 以上	振不起來
16.00	0.809	0.789 以下	直線往復
		0.806	順逆時針反覆旋轉
		0.819 以上	振不起來
30.00	1.147	1.043 以下	直線往復
		1.099	順逆時針反覆旋轉
		1.132 以上	振不起來
36.00	1.208	1.174 以下	直線往復
		1.217	順逆時針反覆旋轉
		1.278 以上	振不起來
40.00	1.326	1.248 以下	直線往復
		1.269	順逆時針反覆旋轉
		1.312 以上	振不起來
50.00	1.418	1.385 以下	直線往復
		1.419	順逆時針反覆旋轉
		1.451 以上	振不起來
64.00	1.621	1.573 以下	直線往復
		1.618	順逆時針反覆旋轉
		1.660 以上	振不起來
65.00	1.690	1.582 以下	直線往復
		1.627	順逆時針反覆旋轉
		1.689 以上	振不起來
80.00	1.918	1.723 以下	直線往復
		1.795	順逆時針反覆旋轉
		1.856 以上	振不起來

討論

本組發現單擺共振儀器在單擺的實測週期與推桿的週期很接近時（即共振時），擺錘運動的平面投影才會產生順逆時針重複運動的現象。

(二) 當擺錘平面投影的運動軌跡產生由**橢圓**→**圓**→**直線**就可能要**旋轉方向反轉**（由順變逆或由逆變順）。由圖41-1得知，發生了一次逆轉的現象，因為除了剛開始與儀器垂直的直線擺動外，還有一個斜的直線擺表示發生了逆轉。

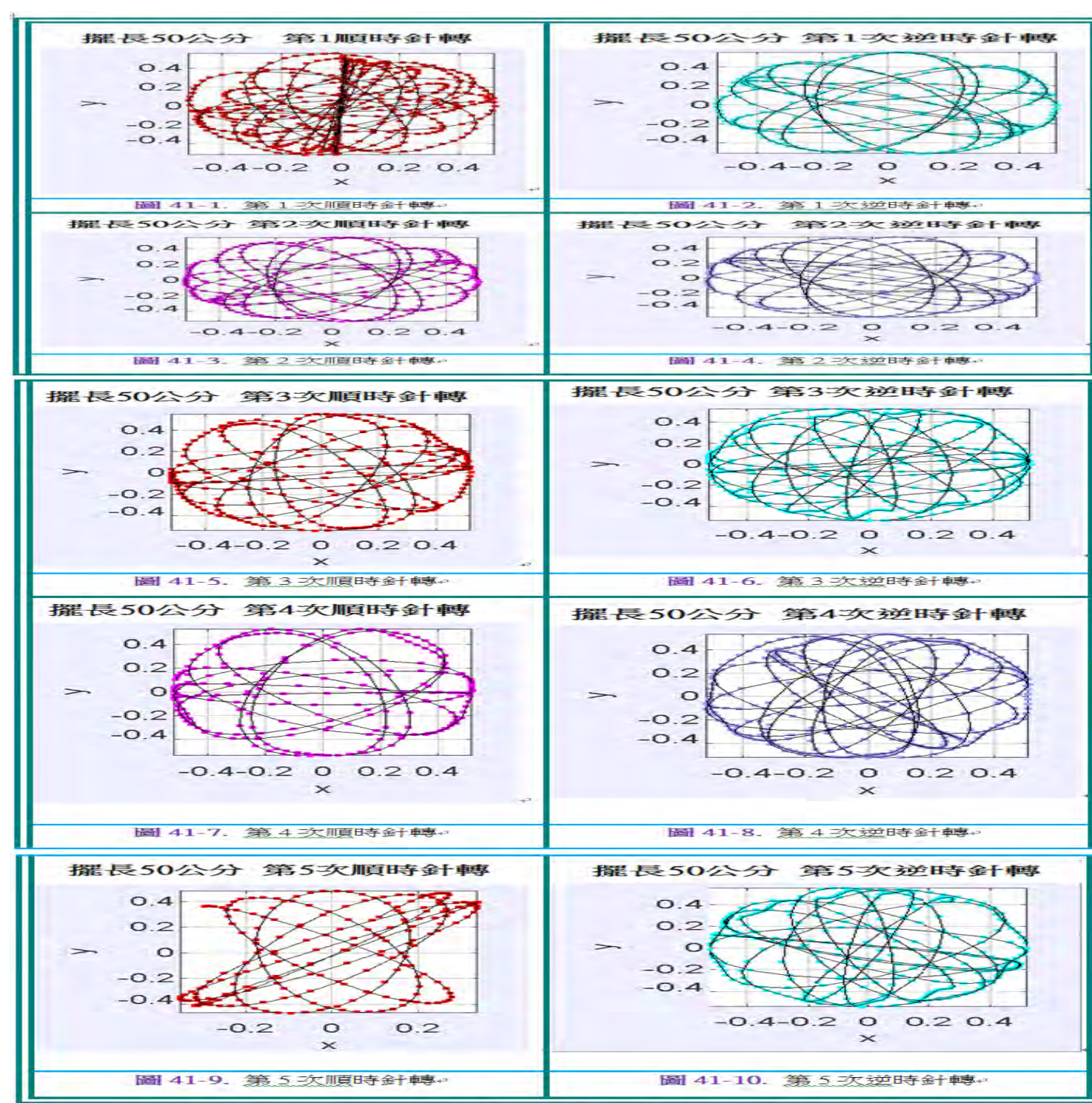


圖 41 擺長 50 公分 擺錘為塑膠球的平面投影運動軌跡分析

(三) 單擺擺錘的平面投影軌跡圖（圓形、橢圓、直線）中，發現有相似李薩如圖形；本組查找資料與歸類如圖43所示Lissajous figures 是由兩個互相垂直的正弦曲線或餘弦曲線在坐標平面上合成的曲線；也可以說，方向互相成直角的兩振動，重疊時所形成的位移圖形。

數學參數如圖 42

$$x(t) = a \cdot \sin(\omega t)$$

$$y(t) = b \cdot \sin(n\omega t + \phi)$$

a, b : x, y 的振幅
n : 擺動或振動的頻率比率 (n ≥ 1)
φ : 相位差 (0 ≤ φ ≤ π/2)

圖 42 李薩如 數學參數

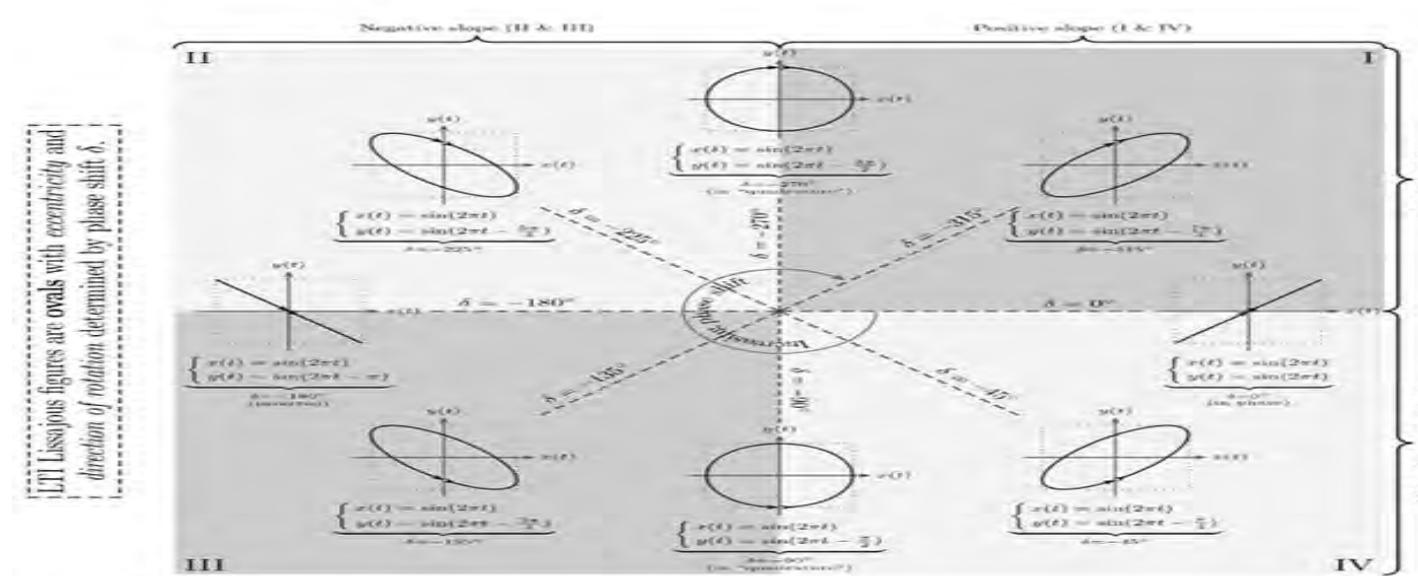


圖 43 李薩如圖

討論

- 李薩如圖實際上是兩個波同時在X軸和Y軸上疊加形成的。但是如果這兩個相互垂直的振動的週期（頻率）為任意值，那麼它們的合成運動就會比較複雜，而且軌跡是不穩定的。然而如果兩個振動的週期（頻率）成簡單的整數比，這樣就能合成一個穩定、封閉的曲線圖形，這就是李薩如圖。
- 由實驗三本組發現單擺擺錘平面投影軌跡從橢圓→圓→直線→橢圓→圓→直線的重覆運動這是李薩如圖。那橫桿端點除了X軸的振動應該還有Y軸的振動所以再做實驗四來證實是否推論正確。

(四) 實驗四 Tracker軟體分析推桿端點x, y軸向的振幅

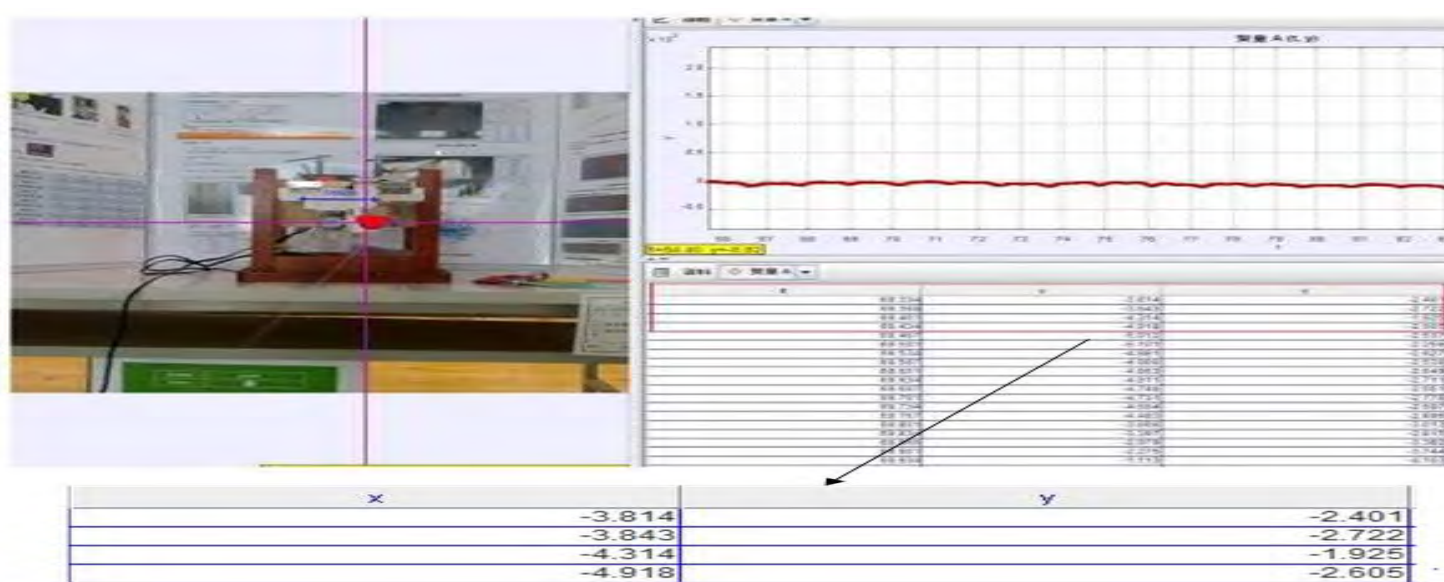


圖 44 擺長 36cm 時橫桿端點振幅分析

討論

實驗四發現在推桿端點x, y軸上有接近1公分的振幅讓本組了解單擺擺錘在平面投影的運動軌跡產生順轉逆旋轉現象瞬間 橫桿端點有X軸Y軸兩個方向的振動。

三、探討單擺的擺錘在平面投影產生順時針旋轉→逆時針時旋轉時 此現象發生時**橫桿的端點位置**

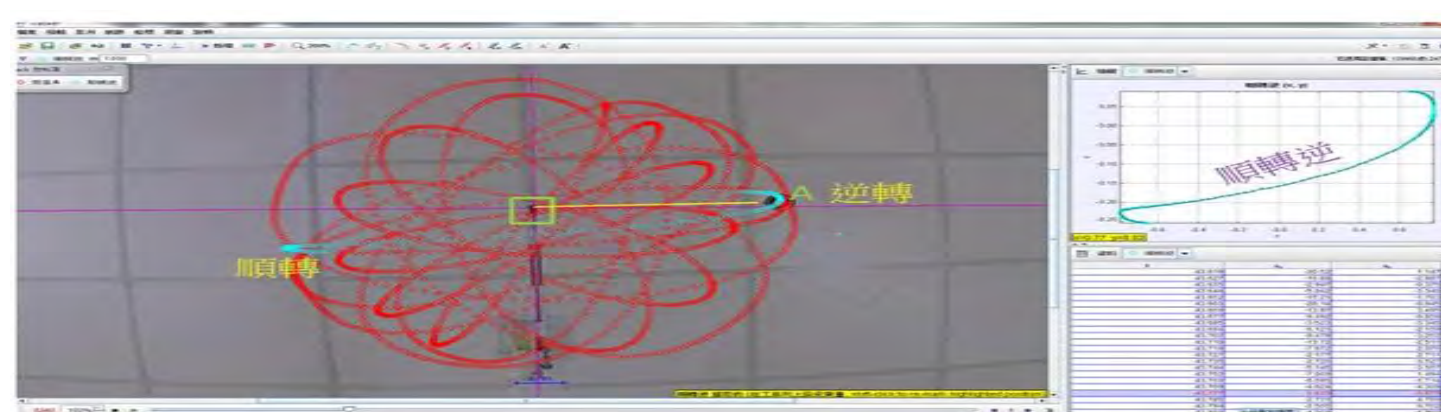


圖 45 順轉逆軌跡分析圖

如圖45，當擺錘由順轉逆時，在A點擺錘的**加速度最大**而推桿至往前的最遠端，而後開始往後拉動擺錘形成由順轉逆。如圖46



圖 46 當推桿至往前的最前端，而後開始往後拉動擺錘形成由順轉逆。

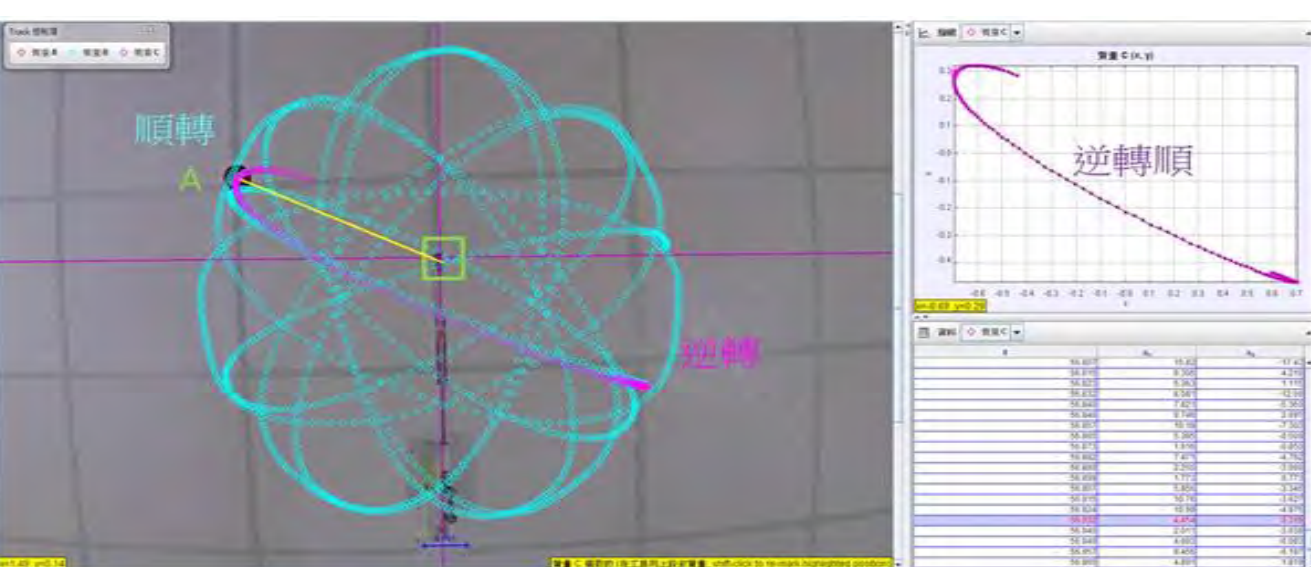


圖 47 逆轉順由下往上攝影的軌跡分析圖。

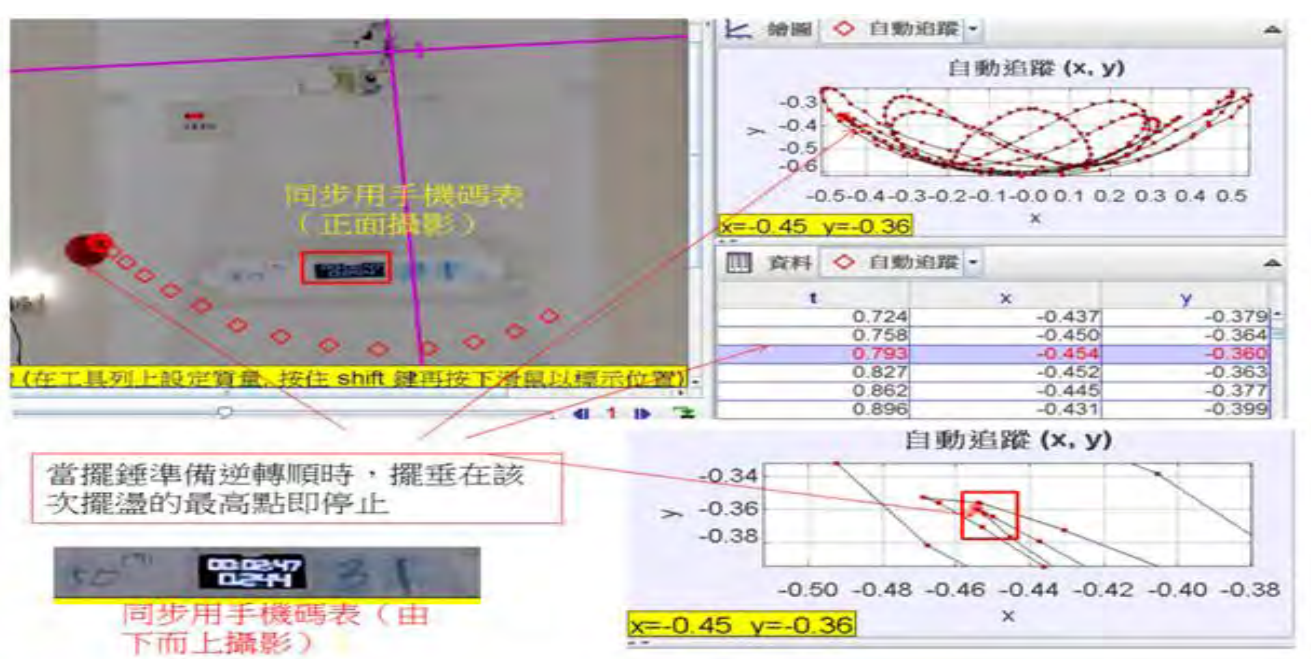


圖 48 逆轉順正面攝影的軌跡分析圖。

如圖48，當擺錘由逆轉順時，在A點擺錘的**加速度最大**，而推桿至往前的最遠端，而後開始往後拉動擺錘形成由逆轉順。

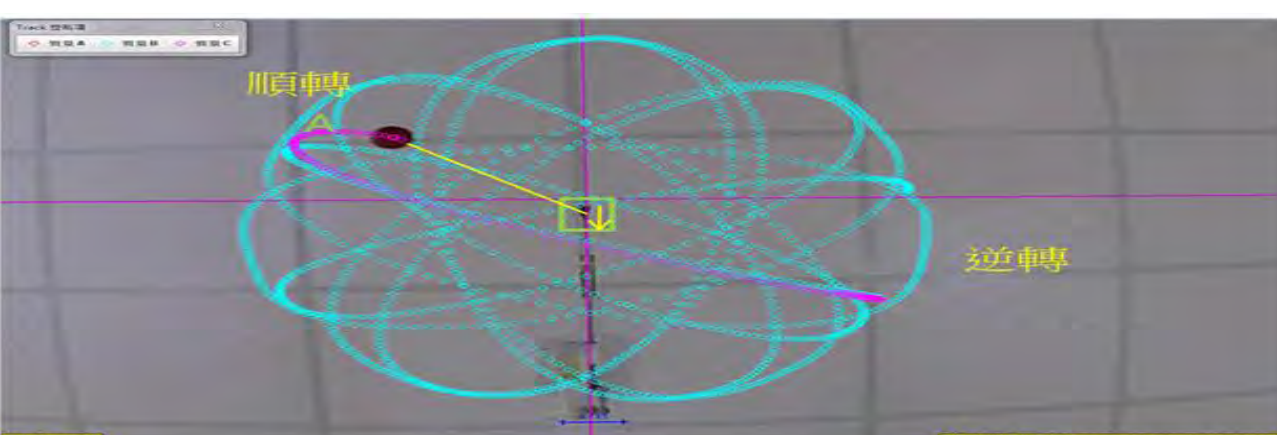
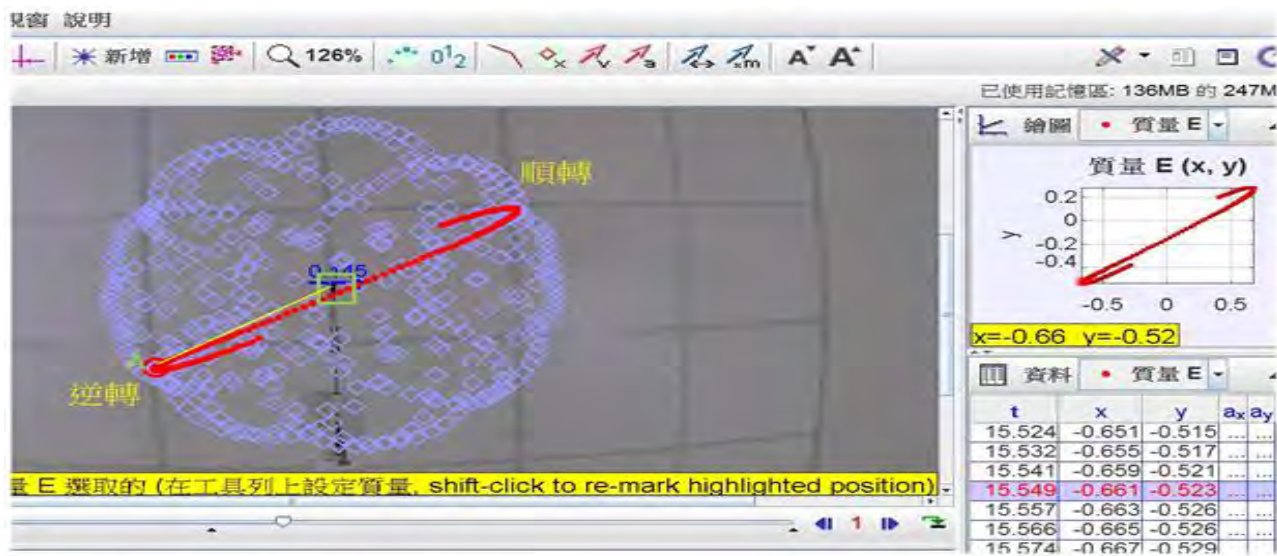


圖 49 順轉逆2軌跡分析圖。



如圖49，當擺錘由順轉逆時，在A點擺錘的**加速度最大**，而推桿至最近端，而後開始往前拉動擺錘形成由順轉逆。如圖50

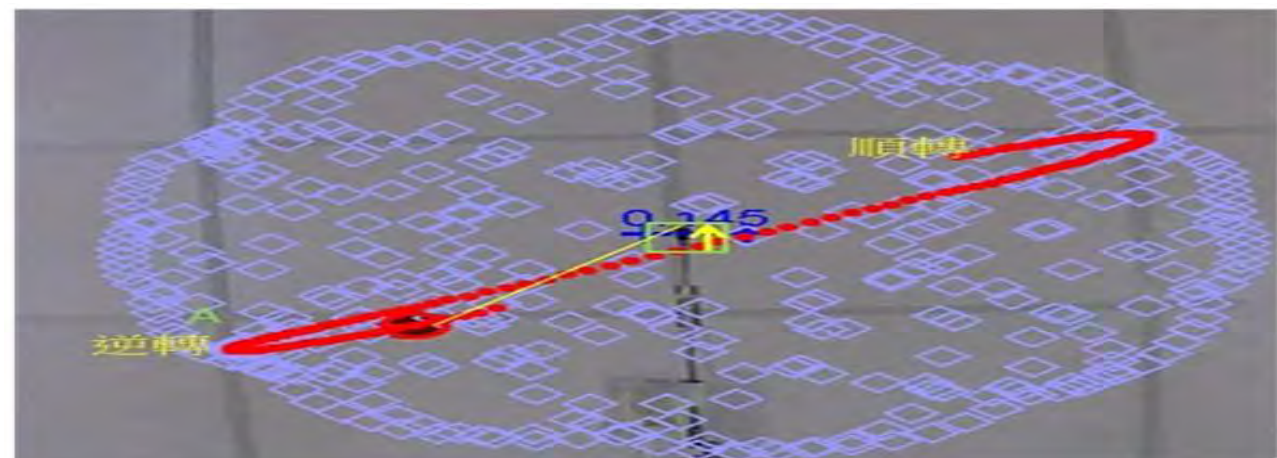


圖 50 當推桿至往前的最前端，而後開始往前拉動擺錘形成由順轉逆。

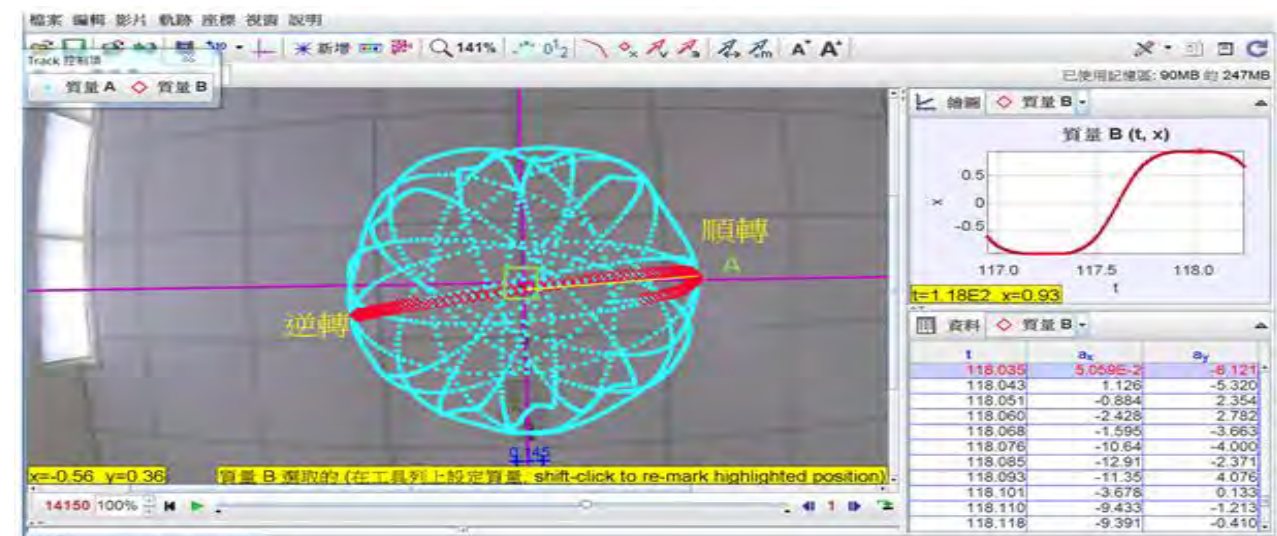


圖 51 順轉逆2軌跡分析圖。

如圖51，當擺錘由逆轉順時，在A點擺錘的**加速度最大**，而推桿至最近端，而後開始往前拉動擺錘形成由逆轉順。如圖52



圖 52 當推桿至往前的最前端，而後開始往前拉動擺錘形成由逆轉順。

討論

當單擺擺錘平面投影的運動軌跡發生順時針瞬間變逆時針旋轉時，推桿剛好在兩端即加速度最大時。如圖53

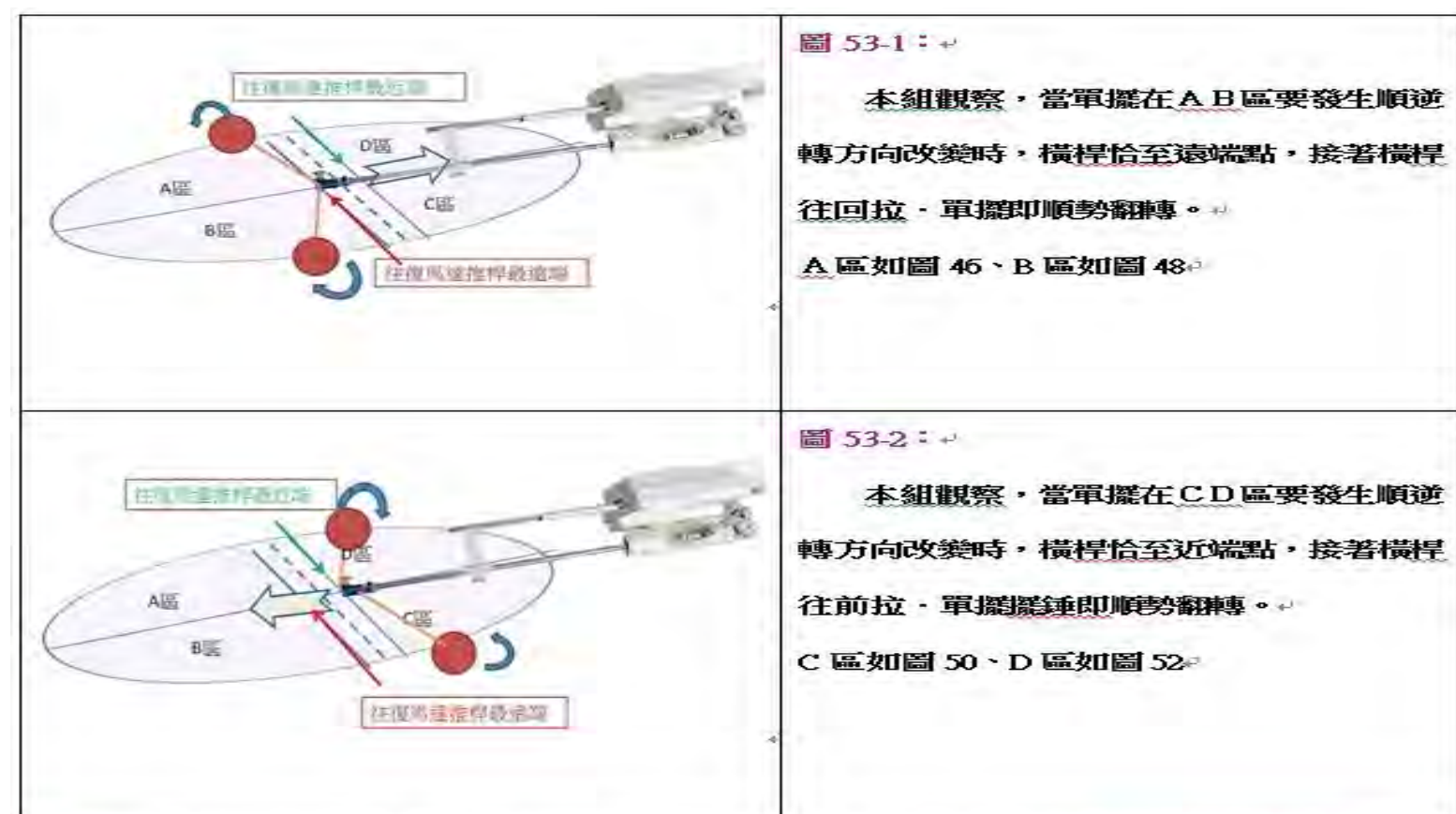


圖 53 擺錘在平面投影產生順時針旋轉→逆時針時旋轉時此現象發生時 橫桿的端點位置。

四、探討單擺的擺錘在平面投影有順時針旋轉→逆時針時旋轉的重複現象產生時；單擺實測自然週期與橫桿振動的週期之間的關係

實驗五 取四組擺長（9、16、36、64公分） Tacker觀察單擺的擺錘在平面投影相關週期、單擺週期與橫桿週期

表四 單擺的擺錘在平面投影發生順時針旋轉→逆時針旋轉的現象時，單擺實際週期與橫桿週期的關係表

擺長 (公分)	單擺實測週期 (秒)	橫桿週期 (秒)
9	0.603	0.602
16	0.809	0.806
36	1.209	1.207
64	1.621	1.618

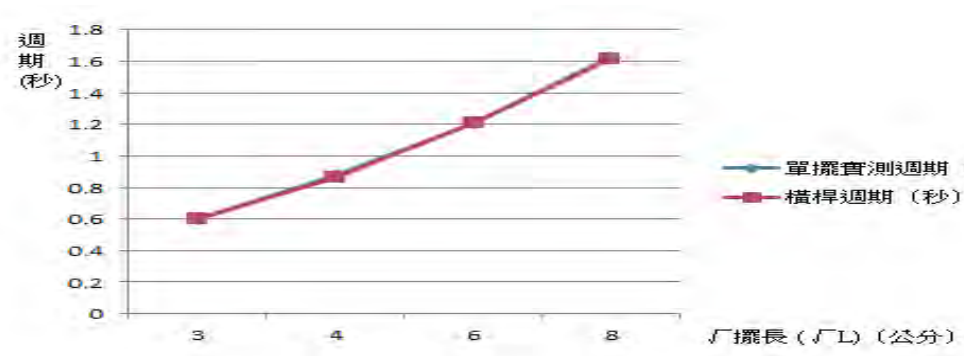


圖54單擺的擺錘在平面投影時發生順轉與逆轉現象單擺實際週期、橫桿週期的比較圖

表五 單擺實測週期減橫桿週期除以單擺理論週期之誤差百分比

擺長 (公分)	單擺實測週期減橫桿週期除以單擺理論週期之誤差百分比
9	0.16%
16	0.37%
36	0.16%
64	0.18%

各個擺長平均誤差百分比為 0.21%

討論

1. 本組發現單擺實測週期與橫桿週期非常接近時（即共振時），才會發生。
2. 單擺擺錘運動的平面投影，運動方向會瞬間改變（即順時針旋轉瞬間變逆時針旋轉）。
3. 單擺實際自然週期、橫桿週期，4個擺長的平均誤差，在Tacker追蹤分析後，如表五。擺長平均誤差百分比為0.21%

五、探討單擺的擺錘在平面投影從順時針旋轉→逆時針時旋轉→順時針旋轉的週期與單擺實測自然週期和橫桿週期的關係

表六 單擺擺長、橫桿週期、橫桿靜止的單擺實測週期、擺錘平面投影的運動方向會改變時的週期的整理表

單擺擺長 (公分)	9	16	36	64
橫桿靜止的單擺實測週期 (秒)	0.603	0.809	1.208	1.621
橫桿週期 (秒)	0.602	0.806	1.207	1.618
擺錘的週期 (秒)				
開始順轉→逆轉→順轉為週期 (秒)	7.275	41.693	74.829	108.829

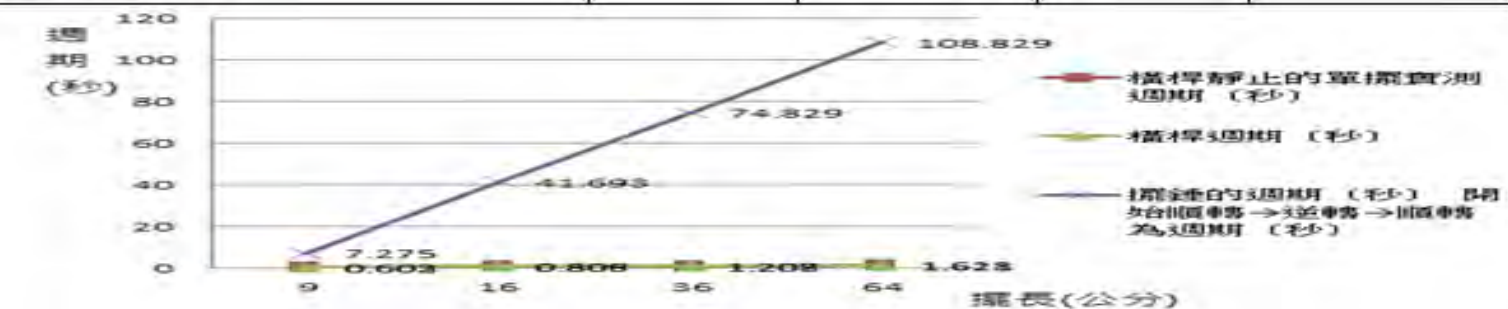


圖 55 擺錘的週期 [開始順轉→逆轉→順轉為週期 (秒)]、橫桿週期 (秒)、橫桿靜止的單擺實測週期 (秒) 三者比較圖。

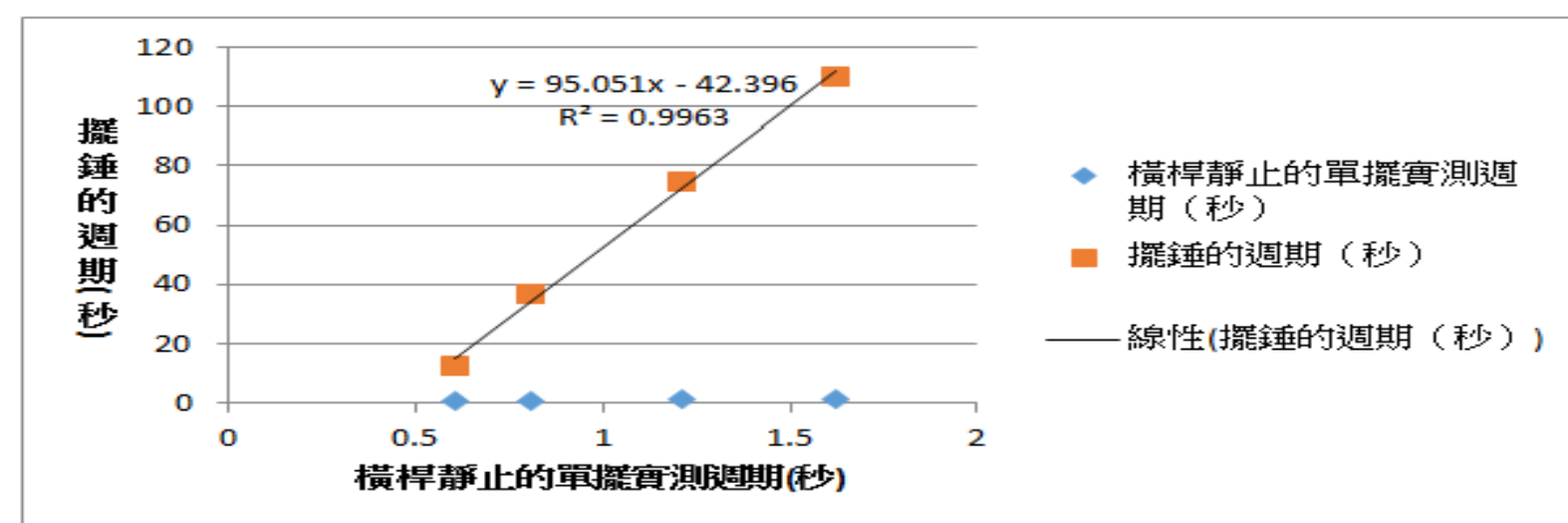


圖 56 橫桿靜止的單擺實測週期與擺錘的週期的線性回歸圖。

討論

1. 圖 55、56 發現擺錘的週期 [開始順轉→逆轉→順轉為週期 (秒)]、橫桿週期 (秒)、橫桿靜止的單擺實測週期 (秒) 三者為線性關係。
2. 本組發現擺錘平面投影的運動方向會改變時的週期是橫桿週期與橫桿靜止時單擺週期的幾十倍。
3. 當擺長越長時，擺錘的運動軌跡，越接近平面二維的運動。

陸、結論

- 一、單擺共振儀器在單擺的實測週期與推桿的週期很接近時（即共振時），擺錘運動的投影才會產生順逆時針交叉運動的現象。
- 二、當擺錘平面投影的運動軌跡從橢圓→圓→直線→橢圓→圓→直線的重複運動這就是李薩如圖。
- 三、當單擺擺錘運動軌跡的投影發生順時針瞬間變逆時針旋轉時，推桿的端點剛好就在兩端即加速度最大時。
- 四、推桿週期與單擺實測週期接近時（共振現象），單擺擺錘運動的投影運動方向會瞬間改變，即順時針旋轉瞬間變逆時針旋轉。
- 五、單擺的擺錘在平面投影從順時針旋轉→逆時針時旋轉→順時針旋轉的週期與單擺實測自然週期和橫桿週期的關係，三者為線性關係。

柒、參考資料

- 一、科學實驗王16：波動的特性
- 二、黃元正、楊勝斐、丘世禎、黃伯霖-物理實驗
- 三、YouTube • 簡諧運動【觀念】簡諧運動的應用：單擺週期公式
- 四、李忠義老師(2011/01/06) • 科學online共振 (Resonance)