

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 物理科

030112

液鏡－利用液體旋轉製作可變焦透鏡

學校名稱：臺中市私立明道高級中學

作者： 國二 詹挹辰 國二 林彥杰 國二 蕭皓淳	指導老師： 王聖豪 許義宏
---	-----------------------------

關鍵詞：透鏡、旋轉、流體力學

摘要

我們藉由液體在旋轉的透明載具內會產生一中心向下凹陷的形狀，去製作一可變透鏡效果。完成後開始量測角速率，探討在旋轉時曲面曲率半徑；接著改變轉速時，角速率的不同，使的漩渦弧度也因轉速增加跟著變大，並算出轉速與弧度的對應關係。

為了要了解旋轉透鏡效益為何，我們利用物理課本中所學幾何光學，將已知條件代入，並利用電腦分析曲率半徑，得到透鏡與放大倍率的對應關係。

最後發現且隨著角速率越大，燒杯內液體面中心凹陷處曲率半徑會越來越小；且當轉速越快時，利用高斯成像公式所計算得到的結果與真實量測得到的結果較為接近，其液體形狀也應較接近一般透鏡形狀。

壹、研究動機

在國一生物課中，我們到實驗室利用顯微鏡觀察微細胞。使用光學顯微鏡最重要就是對準焦距、調整目鏡和物鏡用以確定倍率大小。其中的目鏡是利用凹透鏡原理，要使放大倍率增加時，除了可以旋轉物鏡還可調整目鏡的長度來增加倍率。

但通常增加的倍率是固定的，且在大倍率時，對焦過程經常會因為讓物鏡太過接近樣品，而壓迫蓋玻片。因此我們就在思考：**有沒有辦法不用調透鏡高低而曲率會改變的物品？**

於是我們上網找資料，與老師討論後，發現一種叫做「水透鏡」的東西，其原理很簡單，將水裝入有凹槽的透光物質（如寶特瓶底）中，便很像一透鏡（如右圖）。從「水透鏡」中我們想到，若要能夠按照需求改變曲率，則必須要使用非固體，水即為一非常好的材料。但「水透鏡」依舊局限於容器形狀，若要換曲率，還是必須要更換容器。



圖表 1 塑膠盒裝水做成的水透鏡

在一次偶然情況下，隊員將裝水半滿的保特瓶拿在手中旋轉，製造出「水龍捲風」，觀察到旋轉時中間的凹洞。我們發現這種旋轉後產生的曲面其實是拋物面，因此設計了一系列研究，探討旋轉與弧面的關係。

貳、 研究目的

- 一、 找出反射面鏡面焦距與轉速的關係
- 二、 找出透鏡放大率與轉速的關係
- 三、 推導出透鏡焦距與反射面鏡焦距的關係

參、 研究設備及器材

一、 研究設備與器材

〈一〉量測裝置		
項目	數量	用途說明
光電計時器 (含光電閘 2 個)	1 組	量測轉速使用
高速攝影機	1 組	照液體表層弧度
類單眼相機	1 組	側照液體表層曲線
〈二〉數據分析		
項目	數量	用途說明
筆電 ● ASUS UL50V ● Micrisoft Surface Pro4	2 台	處理數據
〈三〉實驗裝置		
項目	數量	用途說明
透明壓克力杯	1 個	裝載液體
旋轉載台 (內含：馬達、壓克力底座)	1 組	使壓克力杯轉動

〈四〉輔助器材

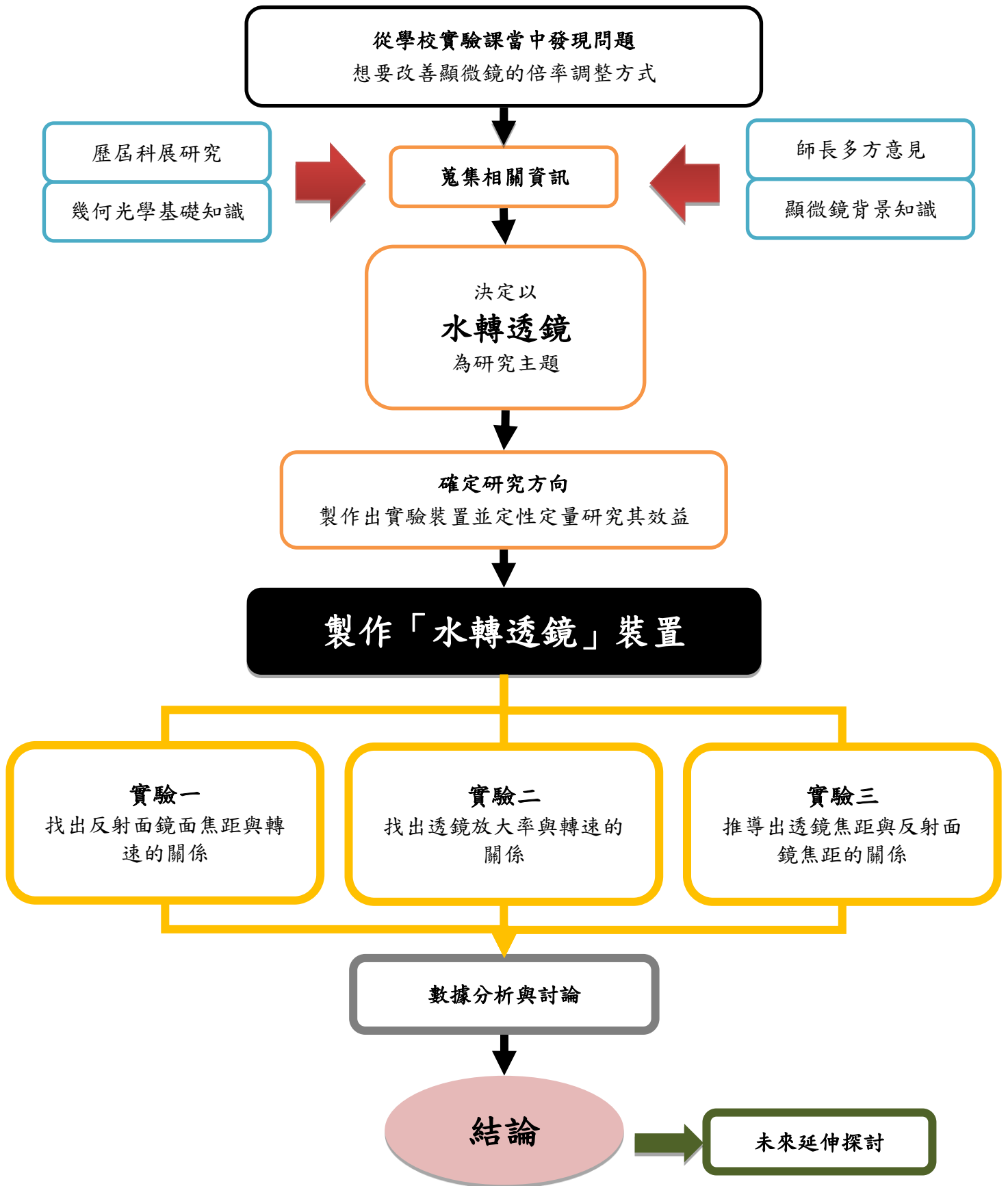
項目	數量	項目	數量
台糖大豆沙拉油	800ml	水平儀	1支
自來水	800ml	黑色紙板(8開)	4張
支架	3組	腳架	3支

二、實驗裝置架設圖



肆、研究過程與方法

一、研究流程圖



二、 文獻探討：顯微鏡結構

顯微鏡主要利用物鏡和目鏡，來放大所要觀察的微小物體，可依照不同的設計來觀察不同情況下所要觀察的物體，大致上可分成：明視野、暗視野、微分干涉差；依樣品的不同可分為：反射式、透射式；依光源的不同還可分為：螢光顯微鏡、共聚焦顯微鏡……等等。

物鏡的設計基本上皆有固定的放大倍率，且因倍率的增加，長度也隨之增長，物鏡被放置在物鏡轉換台上，依照放大需求轉動轉盤，轉換物鏡時，其焦距不變，只要在任一物鏡下對好焦距，旋轉到其他物鏡時，焦距不會改變。

但實際操作時，轉動物鏡時經常還需要再次對焦，鏡頭會更加接近蓋玻片，因而導致物鏡與蓋玻片接觸，因此

我們想製作一種顯微鏡，可以**調整曲率去對應不同高度**（如同傻瓜相機自動對焦一般），而非現在一般的光學顯微鏡固定焦距而改變高度。

三、 文獻探討：可塑形的透鏡—水透鏡原理

而若想要曲率可以調整，則需要改變透鏡材料，因為一般透鏡皆利用玻璃製作，製作完成之後形狀無法變更，因此若將材料改為液體，並裝在下凹或上凹形狀的透明框架（如玻璃），亦有放大、縮小效果，即為「水透鏡」（如圖）。

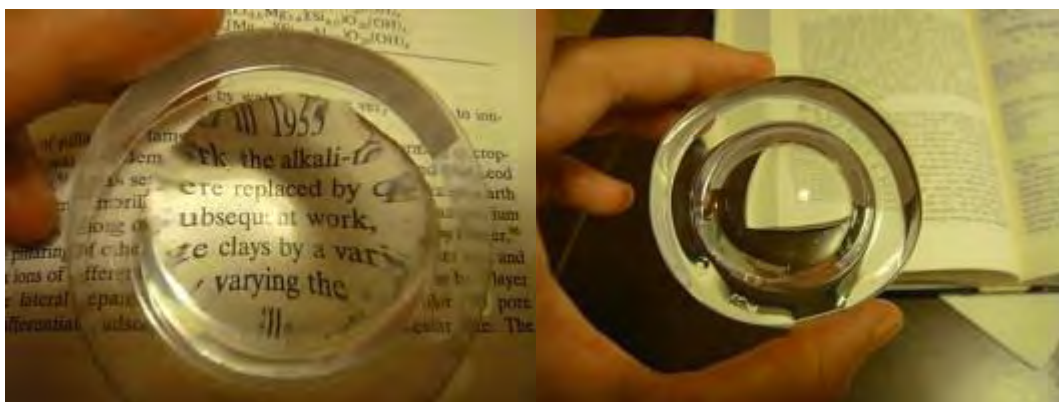


圖 2 水透鏡示意圖。左圖為凸水透鏡，又為凹水透鏡。

但水透鏡亦需要放在固定的框架當中，無法自由控制其形狀，與我們預期的「自由控制形狀」不符。因此我們思考：水要如何讓他有一曲面行為，並且可控制？最終在一

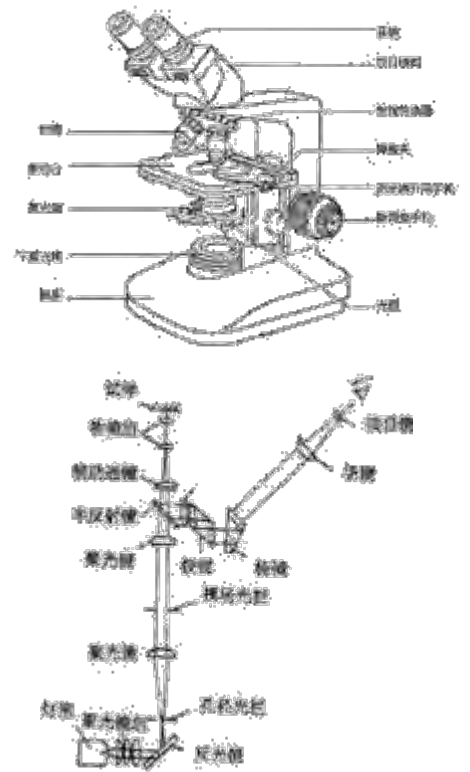


圖 1 顯微鏡構造示意圖。

次隊員玩水壺的過程中發現，當水壺轉動時，壺中的水面是一曲面！且轉動的越快，曲面凹陷的越大，這不就是我們要的結果嗎？因此我們決定以「水轉透鏡」作為我們研究的主題。

四、理論推導：折射定律的推導

要驗證水轉透鏡效果，並需要使用到課程中光的折射部分原理。如圖所示，當一束較粗的光線從介質 1 進入介質 2 中，設介質 1 中之光速為 v_1 、介質 2 中之光速為 v_2 、入射角為 θ_1 、折射角為 θ_2 。若經秒 Δt ，光束前端從 $A\bar{B}$ 前進到 $C\bar{D}$ ，在此期間，A 點光線在介質 2 中行進到 C 點，故

$\overline{AC} = v_2\Delta t$ ；此期間 B 點光線在介質 1 中行進到 D 點，故

$\overline{BD} = v_1\Delta t$ ，由圖可得：

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD} \sin \theta_1}{\overline{AD} \sin \theta_2}$$

將速度與時間代入可得：

$$\frac{v_1\Delta t}{v_2\Delta t} = \frac{\overline{AD} \sin \theta_1}{\overline{AD} \sin \theta_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

由此可得當光從介質 1 進入介質 2 中時，其速度、角度與各材質絕對折射率間的關係，此即為司乃爾定律： $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ 。而本次實驗中，物體放置燒杯下方，內部液體為水，水的折射率為 1.3330、玻璃折射率為 1.458、大豆油折射率為 1.47510。

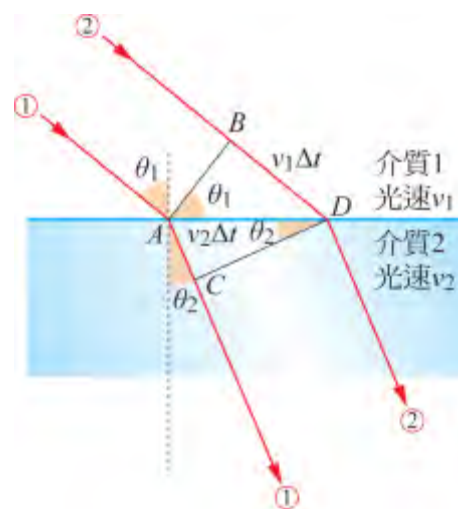


圖 3 一束較粗的光線從介質 1 進入介質 2 中，設介質 1 中之光速為 v_1 、介質 2 中之光速為 v_2 、入射角為 θ_1 、折射角為 θ_2 。

五、理論推導：本實驗透鏡成像公式與放大率公式

由圖四可知，當物體成像時，兩條光線可決定像位置，其中靶紙(物)放置與燒杯最底處，由紅色光線可發現物距 p 為 \overline{OB} ，像距 q 為 \overline{OA} ；其中物高為 \overline{BD} ，像高為 \overline{AC} 。

由兩三角形 ΔOAC 與 ΔOBD 可發現物高與像高有以下關係：

$$\overline{BD} = \overline{OB} \tan \theta_1 = p \tan \theta_1$$

$$\overline{AC} = \overline{OA} \tan \theta_2 = q \tan \theta_2$$

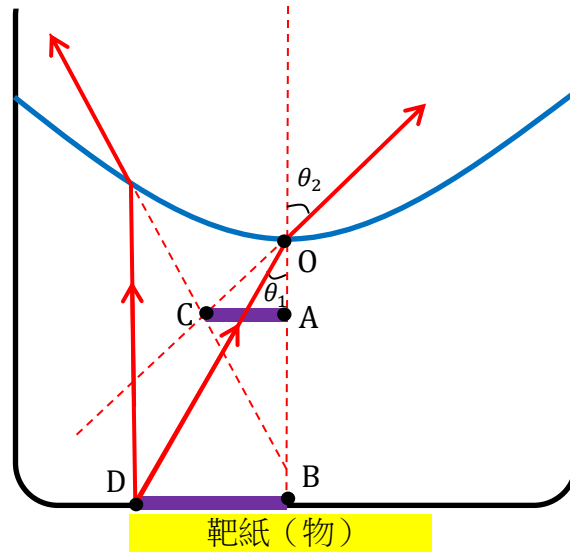


圖 4 本實驗透鏡成像示意圖。

由放大率 m 的定義可知：

$$m = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{q \tan \theta_2}{p \tan \theta_1}$$

而當角度很小時（即近軸光線）， $\tan \theta_1 \approx \sin \theta_1$ 、 $\tan \theta_2 \approx \sin \theta_2$

$$m = \frac{q \tan \theta_2}{p \tan \theta_1} \approx \frac{q \sin \theta_2}{p \sin \theta_1}$$

而由折射定律可得到折射率與入射、折射角的關係：

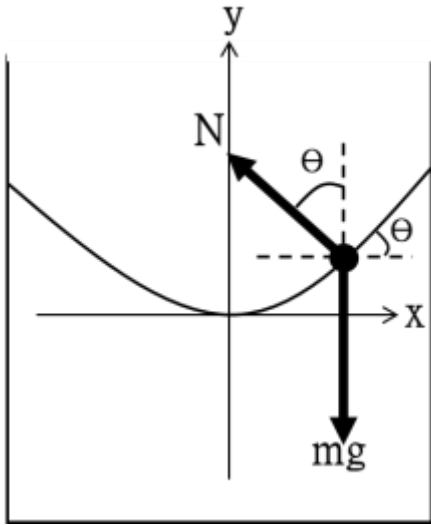
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

因此將可得到放大率的關係：

$$m = \frac{q}{p} \frac{n_2}{n_1} = \frac{qn_1}{pn_2}$$

在本實驗當中，可將觀測物放置杯底，如此便可測得量測物至透鏡之距離（即為物距）；並再由正上方觀測旋轉前後成像差距測得放大率，再帶入放大率公式得到像距。

六、理論推導：等速率旋轉中的液面方程式



當一個盛有液體、半徑為 R 的圓柱形容器殼，若圓柱體的對稱軸以角速度 ω 等速穩定轉動時，設 x 軸為水平方向， y 軸為垂直方向，液體表面任一點 $P(x, y)$ 的切線方向與水平面的夾角為 θ ， θ 滿足下列式：

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{\omega^2 x}{g}$$

則將 dx 移項並對兩邊積分可得

$$\int dy = \int \frac{\omega^2}{g} x dx \Rightarrow y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$$

故可知等速率旋轉的液面為確實為一拋物面。

七、單一凸球面折射

當光線由介質 1 進入介質 2(空氣)時：

$$\theta_i = \delta + \alpha$$

$$\theta_r = \delta - \beta$$

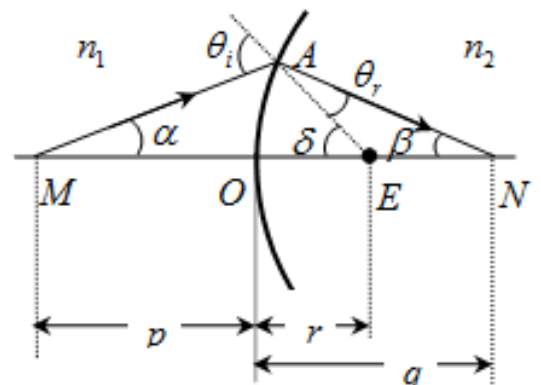
由折射定律可知

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$$

當光線為近軸光線時，所有的角度均甚小，則可得到

$$n_1(\delta + \alpha) = n_2(\delta - \beta)$$

$$\therefore \frac{n_1}{n_2} = \frac{\delta + \beta}{\delta - \alpha} = \frac{\frac{\widehat{OA}}{r} + \frac{\widehat{OA}}{q}}{\frac{\widehat{OA}}{r} - \frac{\widehat{OA}}{p}} = \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{q}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}$$



$$\Rightarrow \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

因此，當我們光線由水射向空氣時，式子為： $\frac{1.333}{p} + \frac{1}{q} = \frac{-0.333}{r}$ ，其中 p 為負值

而由油射向空氣時，方程式可寫為： $\frac{1.4751}{p} + \frac{1}{q} = \frac{-0.4751}{r}$ ，其中 p 為負值

八、實驗設計與規劃

(一) 載台的設計

1、預期效果一：讓燒杯旋轉，且可以射光束透過去下方

想法設計—利用果汁機的底盤馬達當底座，並在上方放架子

遭遇困難—因為底座太輕且轉軸太細，導致燒杯旋轉時產生晃動

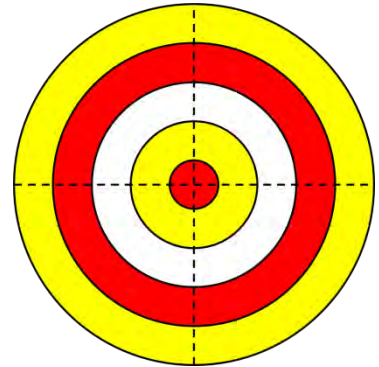
修改設計—改用轉動實驗的底座為載台，並外加皮帶、馬達帶動燒杯轉動

2、預期效果二：由正上方鉛直射下一道雷射光，藉此可看光點的偏移

想法設計—利用支架架設一只雷射筆並固定

遭遇困難—光線尋找不易且難以觀察

修改設計—改製作靶紙至於壓克力杯下方，並於上方、旁邊架設攝影機觀察



伍、 研究數據與結果

我們改變兩種液體—水與油，並固定載體內液體體積為 800ml，將轉速按照不同電壓分為 6 個檔位。改變不同檔位，利用光電計時器量測旋轉半圈所需要時間，藉此求得角速度大小；當角速度大小固定時，表示轉速穩定，此時再利用高速攝影機拍照與攝影。下表格為不同電壓下，未放入液體與放入液體時，轉速與角速度的關係。

表格 1 未放液體時，輸入電壓與轉速的關係。

輸入電壓(V)	5	5.5	6	6.5	7	7.5
週期1(s)	0.621	0.544	0.501	0.446	0.424	0.391
週期2(s)	0.623	0.552	0.496	0.449	0.425	0.399
週期3(s)	0.619	0.555	0.499	0.451	0.421	0.388
週期4(s)	0.631	0.561	0.502	0.454	0.426	0.391
週期5(s)	0.626	0.549	0.498	0.458	0.415	0.392
週期6(s)	0.617	0.543	0.499	0.462	0.420	0.392
週期7(s)	0.625	0.552	0.502	0.463	0.423	0.391
週期8(s)	0.603	0.558	0.495	0.462	0.425	0.392
週期9(s)	0.618	0.546	0.502	0.460	0.425	0.392
週期10(s)	0.625	0.545	0.503	0.457	0.431	0.390
平均值(s)	0.621	0.551	0.500	0.456	0.424	0.392
頻率(rps)	1.611	1.817	2.001	2.192	2.361	2.552
角速度(rad/s)	5.061	5.707	6.287	6.886	7.418	8.018

放入液體後，因為質量變大，導致轉速降低。下表格為壓克力載體放入 800 毫升的水後，不同電壓下所測得的轉速：

表格 2 放入 800ML 的水，各檔位下的輸入電壓與轉速的關係。

檔位	水-1	水-2	水-3	水-4	水-5	水-6
輸入電壓(V)	5	5.5	6	6.5	7	7.5
週期1(s)	0.634	0.568	0.507	0.464	0.426	0.397
週期2(s)	0.631	0.568	0.517	0.467	0.429	0.403
週期3(s)	0.627	0.570	0.510	0.471	0.426	0.401
週期4(s)	0.623	0.569	0.609	0.472	0.427	0.405
週期5(s)	0.630	0.573	0.515	0.455	0.429	0.393
週期6(s)	0.626	0.576	0.517	0.460	0.431	0.401
週期7(s)	0.629	0.578	0.506	0.469	0.432	0.401
週期8(s)	0.630	0.563	0.514	0.468	0.419	0.403
週期9(s)	0.639	0.567	0.513	0.455	0.423	0.402
週期10(s)	0.641	0.570	0.514	0.460	0.425	0.403
平均值(s)	0.631	0.570	0.522	0.464	0.427	0.401
頻率(rps)	1.585	1.754	1.915	2.155	2.344	2.494
角速度(rad/s)	4.979	5.510	6.016	6.769	7.363	7.836

將液體改為大豆油，體積一樣為 800 毫升時，再以相同的電壓量測其轉速，其結果如下

表格所示：

表格 3 放入 800ML 的油，各電壓下轉速與角速度。

檔位	油-1	油-2	油-3	油-4	油-5	油-6
輸入電壓(V)	5	5.5	6	6.5	7	7.5
週期1(s)	0.664	0.610	0.533	0.492	0.442	0.420
週期2(s)	0.658	0.612	0.533	0.491	0.442	0.424
週期3(s)	0.669	0.600	0.536	0.465	0.433	0.424
週期4(s)	0.658	0.609	0.536	0.464	0.437	0.422
週期5(s)	0.674	0.611	0.536	0.483	0.438	0.424
週期6(s)	0.652	0.611	0.536	0.488	0.440	0.426
週期7(s)	0.674	0.614	0.537	0.487	0.443	0.423
週期8(s)	0.674	0.616	0.538	0.490	0.444	0.417
週期9(s)	0.664	0.617	0.538	0.491	0.442	0.425
週期10(s)	0.668	0.617	0.540	0.490	0.441	0.424
平均值(s)	0.666	0.612	0.536	0.484	0.440	0.423
頻率(rps)	1.503	1.635	1.865	2.066	2.272	2.365
角速度(rad/s)	4.721	5.136	5.858	6.490	7.137	7.429

在量測的同時，同時用相機側邊與正上方錄影並拍攝，最終使用 Track 軟體分析，可以得到各檔位的側視與俯視照片。利用軟體作圖型分析後，將其曲率半徑與放大率算出來，其結果如下表所示：

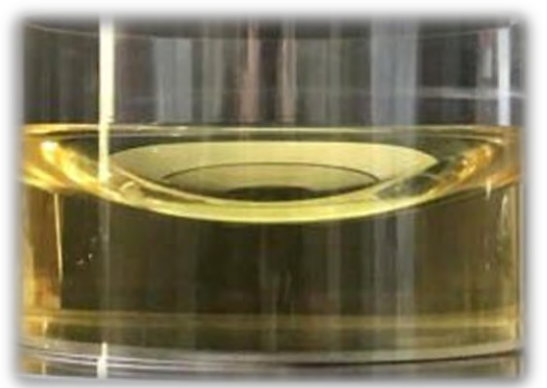












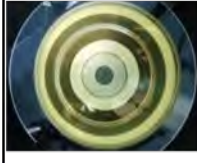
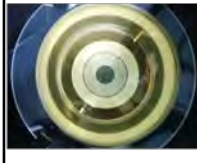


圖 5 油透鏡側向照片，藉由電腦軟體分析可測得曲率半徑

表格 4 各穩定轉速下，角速度大小與曲面鏡頂附近曲率半徑的關係與照片。

編號	靜止	檔位1(水 5V)	檔位2(水 5.5V)	檔位3(水 6V)	檔位4(水 6.5V)	檔位5(水 7V)	檔位6(水 7.5V)
照片							
角速度(rad/s)		4.979	5.510	6.016	6.769	7.363	7.836
曲率半徑(cm)		23.990	19.587	11.190	9.248	8.684	8.231
編號	靜止	檔位1(油 5V)	檔位2(油 5.5V)	檔位3(油 6V)	檔位4(油 6.5V)	檔位5(油 7V)	檔位6(油 7.5V)
照片							
角速度(rad/s)		4.721	5.136	5.858	6.490	7.137	7.429
曲率半徑(cm)		17.496	12.419	9.128	8.258	7.906	7.564

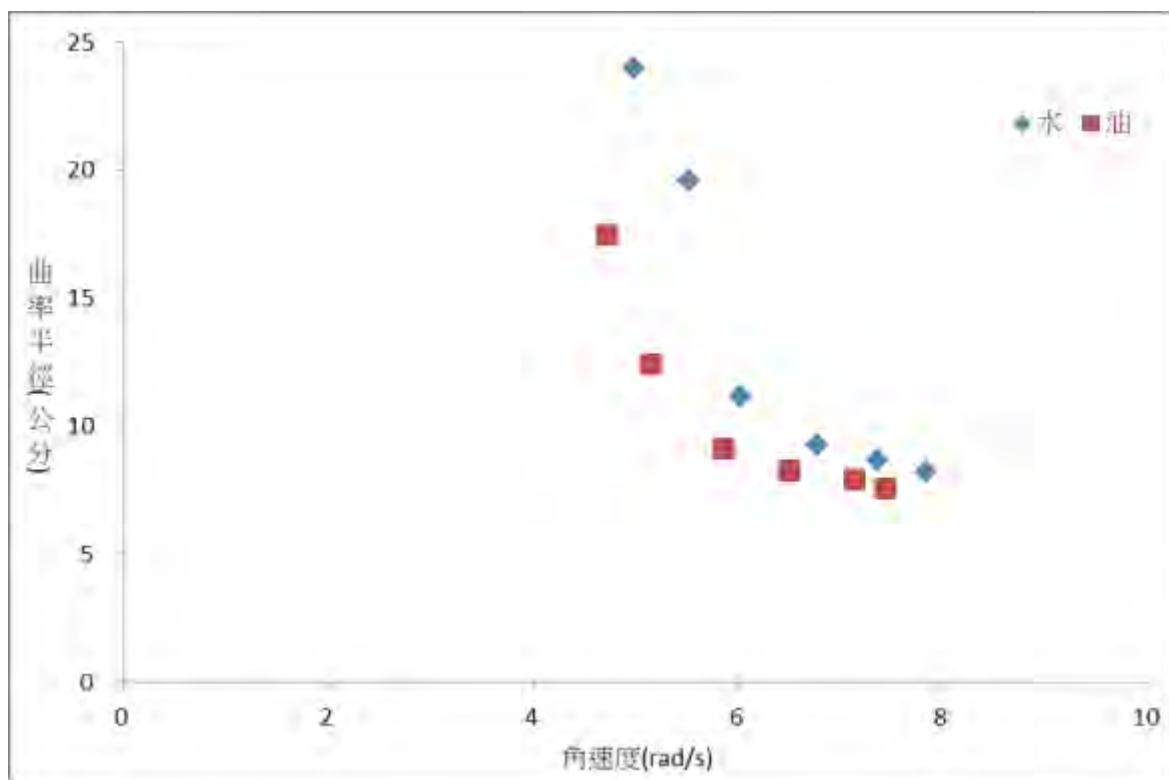
表格 5 各穩定轉速下，角速度大小與放大率的關係與照片。

編號	靜止	檔位1(水 5V)	檔位2(水 5.5V)	檔位3(水 6V)	檔位4(水 6.5V)	檔位5(水 7V)	檔位6(水 7.5V)
照片							
角速度(rad/s)		4.979	5.510	6.016	6.769	7.363	7.836
放大率(俯視)		91.27%	89.95%	88.10%	86.24%	84.26%	83.33%
編號	靜止	檔位1(油 5V)	檔位2(油 5.5V)	檔位3(油 6V)	檔位4(油 6.5V)	檔位5(油 7V)	檔位6(油 7.5V)
照片							
角速度(rad/s)		4.721	5.136	5.858	6.490	7.137	7.429
放大率(俯視)		89.15%	88.89%	86.77%	84.39%	81.61%	81.35%

陸、 討論與分析

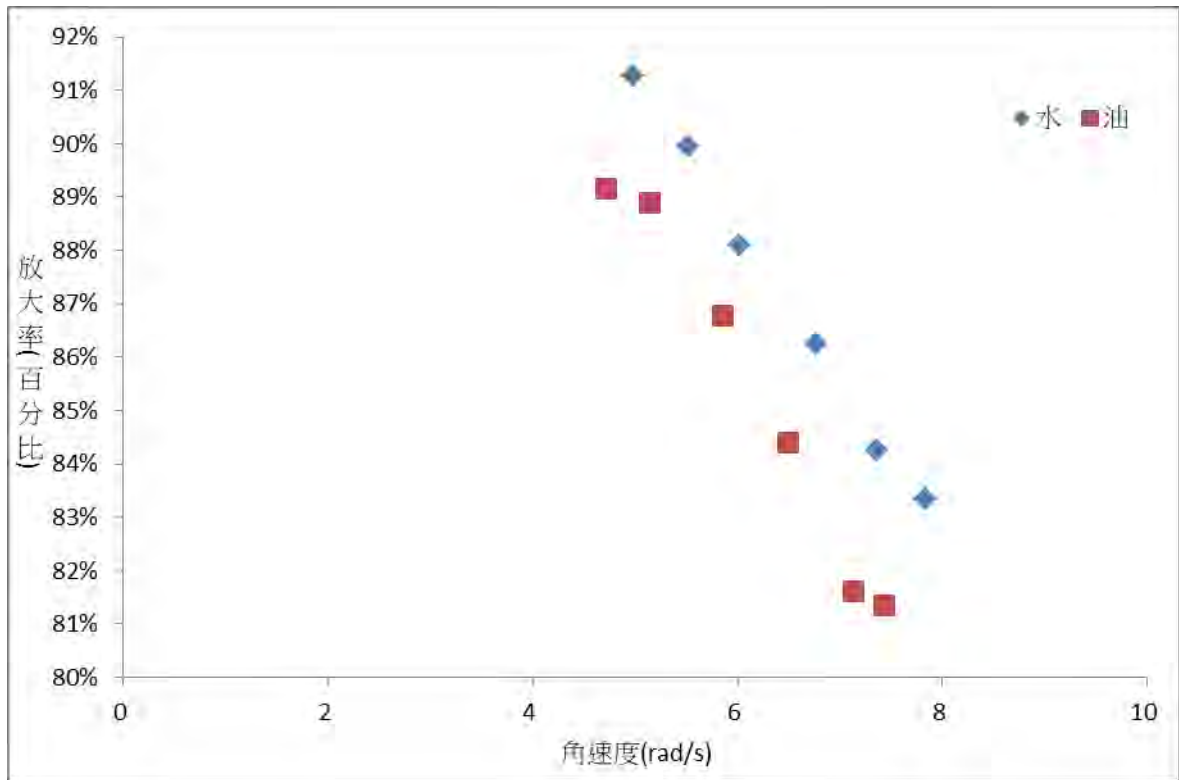
一、找出反射面鏡面焦距與轉速的關係

我們將所得到的水、油的角速度大小與鏡頂附近曲率半徑做圖分析如下圖所示。



由表可知，當角速度越大時，曲率半徑會越來越小；而透鏡的焦距與曲率半徑有關，因此焦距也會改變。由液面方程式可知曲率半徑會與角速度平方成反比亦可由圖表得知。

二、找出透鏡放大率與轉速的關係



將放大率與角速度作圖分析可以發現，也會較速度越大，放大率會越小，即凹透鏡的效果會越好。

三、推導出透鏡焦距與反射面鏡焦距的關係

溶液材料為分別為水與食用油，比較在學校所學的幾何光學理論與造鏡者公式是否吻合。如圖 右圖所示，圖中上方為壓克力載體，下方底座置放靶紙，且壓克力底部厚度極短，因此忽略其影響；而鏡心處凹陷厚度遠小於鏡心至底座距離 h ，因此我們將其視為一薄平凹透鏡。

由實驗數據可測得此液鏡的放大率，並以 h 為物距，帶入放大率公式可測得像距，但因靶紙周遭的介質為食用油或水，而油的折射率為 1.47510、空氣折射率近似為 1、水的折射率為 1.3330，因此可得：

$$m = \frac{qn_1}{pn_2} \Rightarrow q = \frac{pmn_2}{n_1}$$

而由單一球面鏡折射可知：

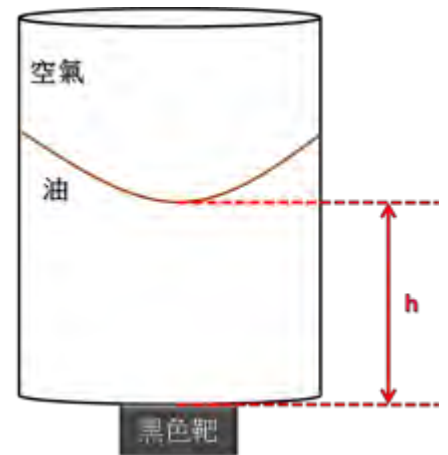


圖 6 油轉透鏡示意圖。圖中上方為壓克力載體，下方為黑色靶，且壓克力底部厚度極短，因此忽略其影響；因此我們將其視為一薄平凹透鏡。

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{n_2 - n_1}{2f} \Rightarrow f = \frac{n_2 - n_1}{2\left(\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q}\right)}$$

可將此凹透鏡的「放大率焦距」算出，本實驗的「放大率焦距」焦距為如下表顯示。

檔位	水-1	水-2	水-3	水-4	水-5	水-6
角速度(rad/s)	9.958	11.019	12.032	13.538	14.725	15.673
曲率半徑(修正)	23.990	19.587	11.190	9.248	8.684	8.231
物距h(cm)	5.386	5.029	3.812	3.495	2.980	2.891
放大率(俯視)	91.3%	89.9%	88.1%	86.2%	84.3%	83.3%
像距(cm)	3.687	3.394	2.519	2.261	1.884	1.807
放大率焦距(cm)	14.065	11.241	7.046	5.473	3.985	3.611

檔位	油-1	油-2	油-3	油-4	油-5	油-6
角速度(rad/s)	9.441	10.272	11.716	12.979	14.273	14.857
曲率半徑(修正)	17.496	12.419	9.128	8.258	7.906	7.564
物距h(cm)	4.446	4.275	3.648	3.420	2.850	2.280
放大率(俯視)	89.2%	88.9%	86.8%	84.4%	81.6%	81.3%
像距(cm)	2.687	2.576	2.146	1.957	1.577	1.257
放大率焦距(cm)	11.770	11.015	7.708	5.956	4.075	3.203

將曲率半徑帶入後取一半，即可獲得「球面近似焦距」，如下表所示。當光線近似主軸時（近軸光線），曲率半徑的一半即為反射面焦距。

檔位	水-1	水-2	水-3	水-4	水-5	水-6
曲率半徑(修正)	23.990	19.587	11.190	9.248	8.684	8.231
球面近似焦距(cm)	11.995	9.794	5.595	4.624	4.342	4.116

檔位	油-1	油-2	油-3	油-4	油-5	油-6
曲率半徑(修正)	17.496	12.419	9.128	8.258	7.906	7.564
球面近似焦距(cm)	8.748	6.210	4.564	4.129	3.953	3.782

我們將兩組焦距放在一起比較可看到下表格：

檔位	水-1	水-2	水-3	水-4	水-5	水-6
角速度(rad/s)	9.958	11.019	12.032	13.538	14.725	15.673
放大率焦距(cm)	14.065	11.241	7.046	5.473	3.985	3.611
球面近似焦距(cm)	11.995	9.794	5.595	4.624	4.342	4.116

檔位	油-1	油-2	油-3	油-4	油-5	油-6
角速度(rad/s)	9.441	10.272	11.716	12.979	14.273	14.857
放大率焦距(cm)	11.770	11.015	7.708	5.956	4.075	3.203
球面近似焦距(cm)	8.748	6.210	4.564	4.129	3.953	3.782

由表格可以發現，兩者的焦距不盡相同，但由放大率求出來的焦距在一開始時會比球面近似焦距大，原因我們推測是因為放大率焦距是介質為液體中的透鏡焦距，而球面近似其實透鏡所在介質為空氣；而當角速度越快，曲率半徑越小，此時非近軸光線，會有球面像差需考慮。

柒、 結論

- 一、 利用壓克力載台旋轉帶動內部液體產生漩渦的方式確實可以擁有與透鏡相同的效果。且隨著角速率越大，燒杯內液體面中心凹陷處曲率半徑會越來越小，而透鏡的焦距與曲率半徑有關，因此焦距也會越來越小。
- 二、 放大率求出來的焦距在一開始時會比球面近似焦距大，推測是因為放大率焦距是介質為液體中的透鏡焦距，而球面近似其實透鏡所在介質為空氣；而當角速度越快，曲率半徑越小，此時非近軸光線，會有球面像差需考慮。

捌、 未來展望

本實驗只要能夠改善在器材上擾動與方向問題，我們認為此實驗極具發展性。因此在未來我們會繼續朝以下方面繼續研究：

- 增加更多組轉速間隔（即檔位），以求得精確轉速與曲率半徑關係。
- 轉換不同黏稠度液體，了解不同黏稠度與曲率半徑關係。
- 改變容器底部形狀（如利用口徑大試管），讓形狀趨向凹凸透鏡，以研究旋轉流體透鏡在凹凸透鏡的成像性質。
- 製作多層液體透鏡，以期許能製成如同菲涅耳透鏡般效果。
- 研究在無重力情況下旋轉流體透鏡性質。

玖、 參考文獻

- 一、水透鏡製作與介紹。取自：「zfang 的小玩意」<http://zfang.tc.edu.tw/574.html>
- 二、Harris Benson(1996)原著；朱達勇等譯。普通物理學。學銘圖書。
- 三、水透鏡資料：http://kingdarling.blogspot.tw/2012/12/blog-post_565.html
- 四、Greivenkamp, p.14; Hecht §6.1
- 五、高涌泉。選修物理(上)。龍騰文化事業股份有限公司。
- 六、Greivenkamp, John E. (2004). *Field Guide to Geometrical Optics. SPIE Field Guides vol. FG01.*

【評語】 030112

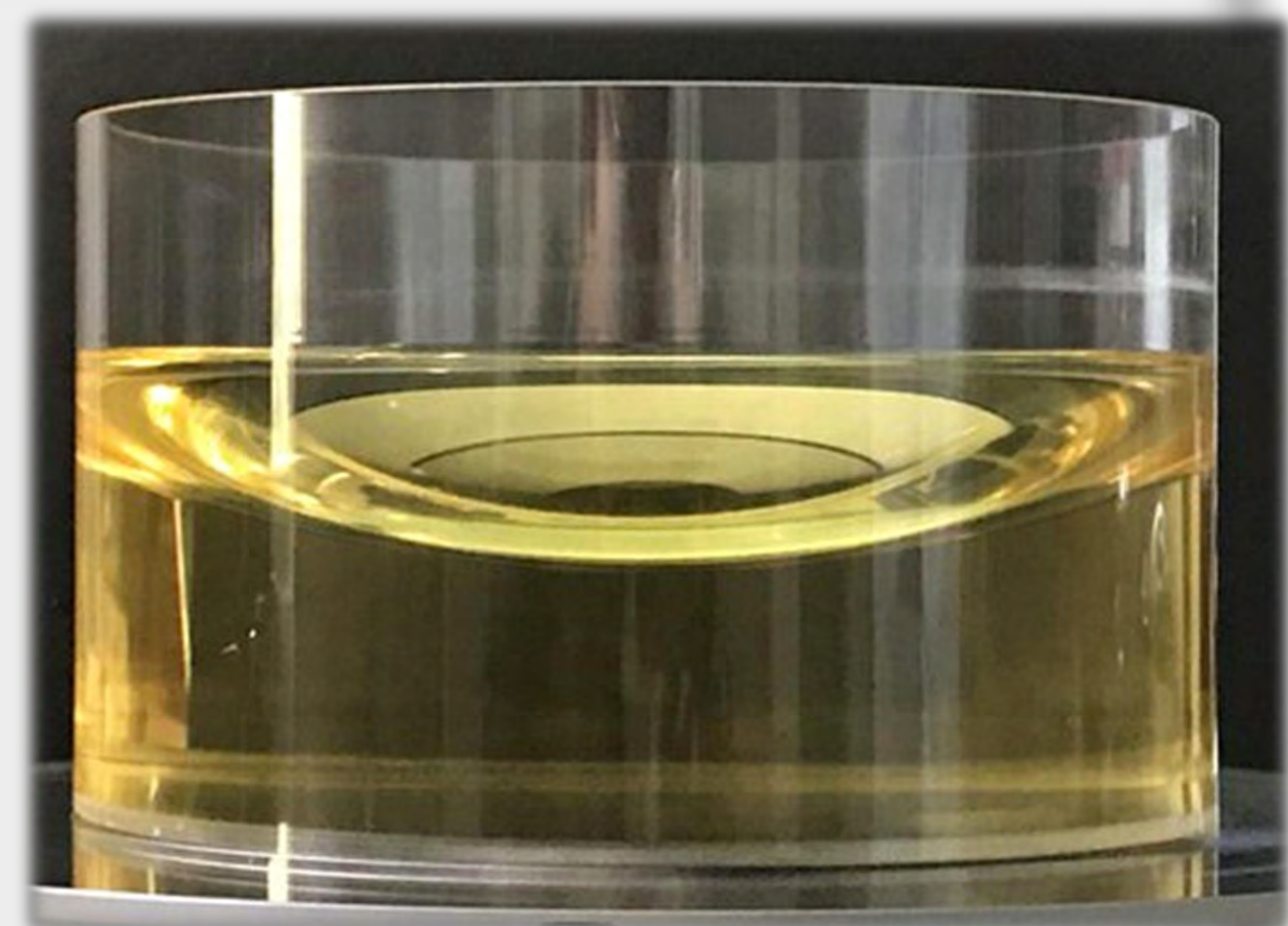
本作品類似於在維基百科可找到的"Liquid mirror telescope"。利用旋轉的液面形成凹透鏡，並藉由轉速的改變調整焦距，實驗上若能確定"近軸"光的範圍，並探討球面像差，則更能凸顯作品的優點，較不致流於單調。

若事先能詳察相關文獻，當可形成更具創意與新穎性的作品。

壹、摘要

藉由液體在旋轉的透明載具內會產生一中心向下凹陷的曲面形狀，去製作一可變透鏡效果；並利用光電計時器、攝影器材與影片分析軟體將此載具的角速率、曲面的曲率半徑與成像放大率測出。將結果引用物理課本內的光學公式並與文獻資料比較，去探討較旋轉角速率與曲面半徑、放大率的關係。

數據分析顯示隨著角速率越大，燒杯內液體面中心凹陷處曲率半徑會越來越小；且當轉速 越快時，利用高斯成像公式所計算得到的結果與真實量測得到的結果較為接近，靠近鏡頂處的液體形狀也較接近一般透鏡形狀。



貳、研究動機

在生物課做實驗時，我們利用**光學顯微鏡**觀察微小事物，而其中最難的步驟就是在大倍率時，找到樣品與調整物鏡對焦，過程經常會因為讓物鏡太過接近樣品，而接觸至蓋玻片。因此我們就在思考：**有沒有辦法不用調透鏡高低而曲率會改變的物品？**

於是我們上網找資料，與老師討論後，發現一種叫做「水透鏡」的東西（如右圖）。從「水透鏡」中我們想到，若要能夠按照需求改變曲率，則必須要使用**流體**。而在一次偶然情況下，隊員將裝水半滿的保特瓶拿在手中旋轉製造出「水龍捲風」的效果，觀察到**旋轉時中間的凹陷曲面與透鏡效果類似**。經由文獻，我們發現這種旋轉後產生的曲面其實是拋物面，因此設計了一系列研究，探討旋轉與凹陷曲面的關係。

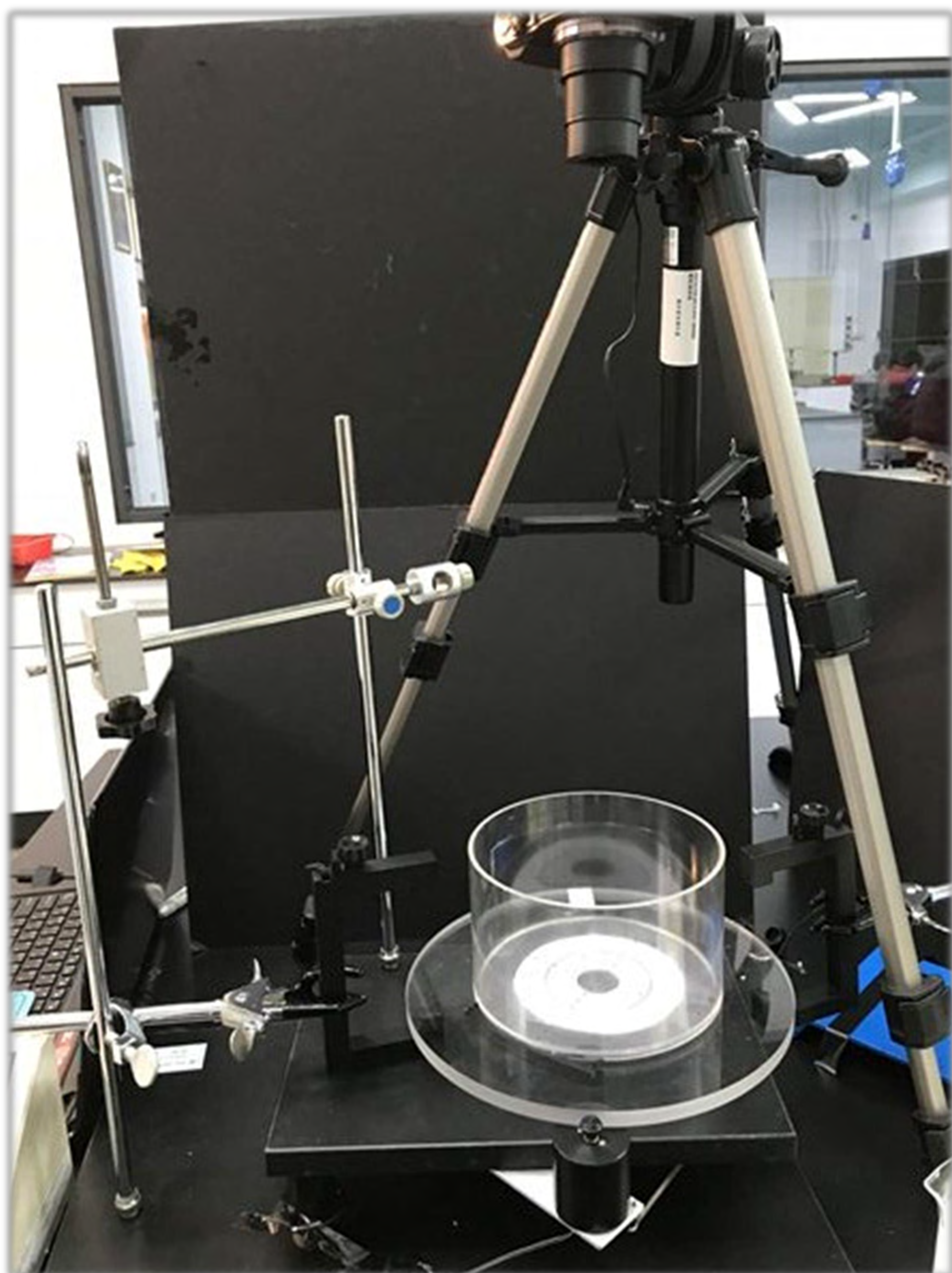


參、研究目的

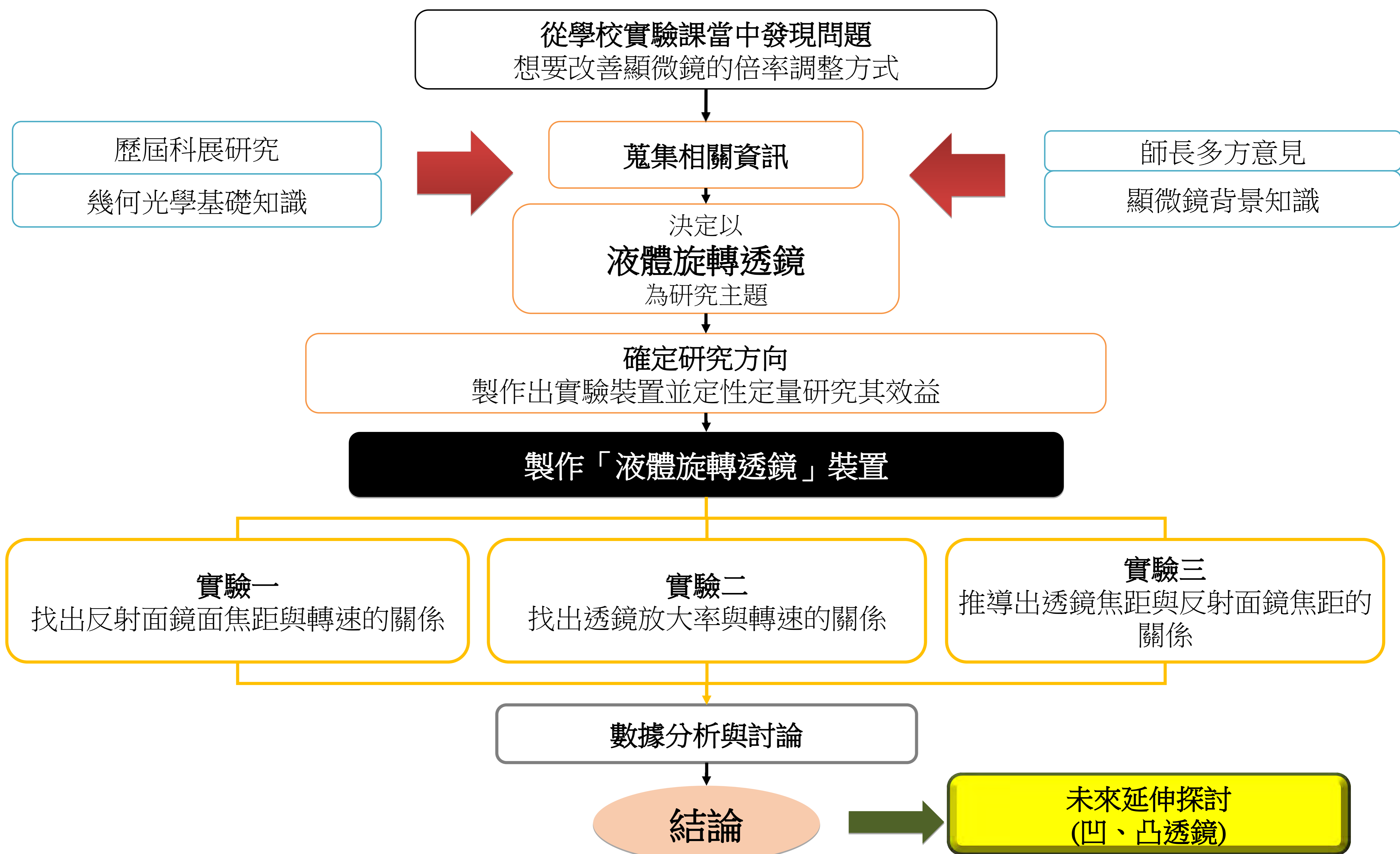
- 一.找出反射面鏡面焦距與轉速的關係
- 二.找出透鏡放大率與轉速的關係
- 三.推導出透鏡焦距與反射面鏡焦距的關係

肆、研究裝置與器材

〈一〉量測裝置		
項目	數量	用途說明
光電計時器 (含光電閘2個)	1組	量測轉速使用
高速攝影機	1組	照液體表層弧度
類單眼相機	1組	側照液體表層曲線
〈二〉數據分析		
項目	數量	用途說明
筆電 .ASUS UL50V .Microsoft Surface Pro4	2台	處理數據
〈三〉實驗裝置		
項目	數量	用途說明
透明壓克力杯	1個	裝載液體
旋轉載台 (內含：馬達、壓克力底座)	1組	使壓克力杯轉動



伍、研究過程與方法



陸、理論推導：本實驗透鏡成像公式與放大率公式

當物體成像時，兩條光線可決定像位置，其中靶紙(物)放置與燒杯最底處，由紅色光線可發現物距 p 為 \overline{OB} ，像距 q 為 \overline{OA} ；其中物高為 \overline{BD} ，像高為 \overline{AC} 。

而當角度很小時（即近軸光線）， $\tan \theta_1 \approx \sin \theta_1$ 、 $\tan \theta_2 \approx \sin \theta_2$

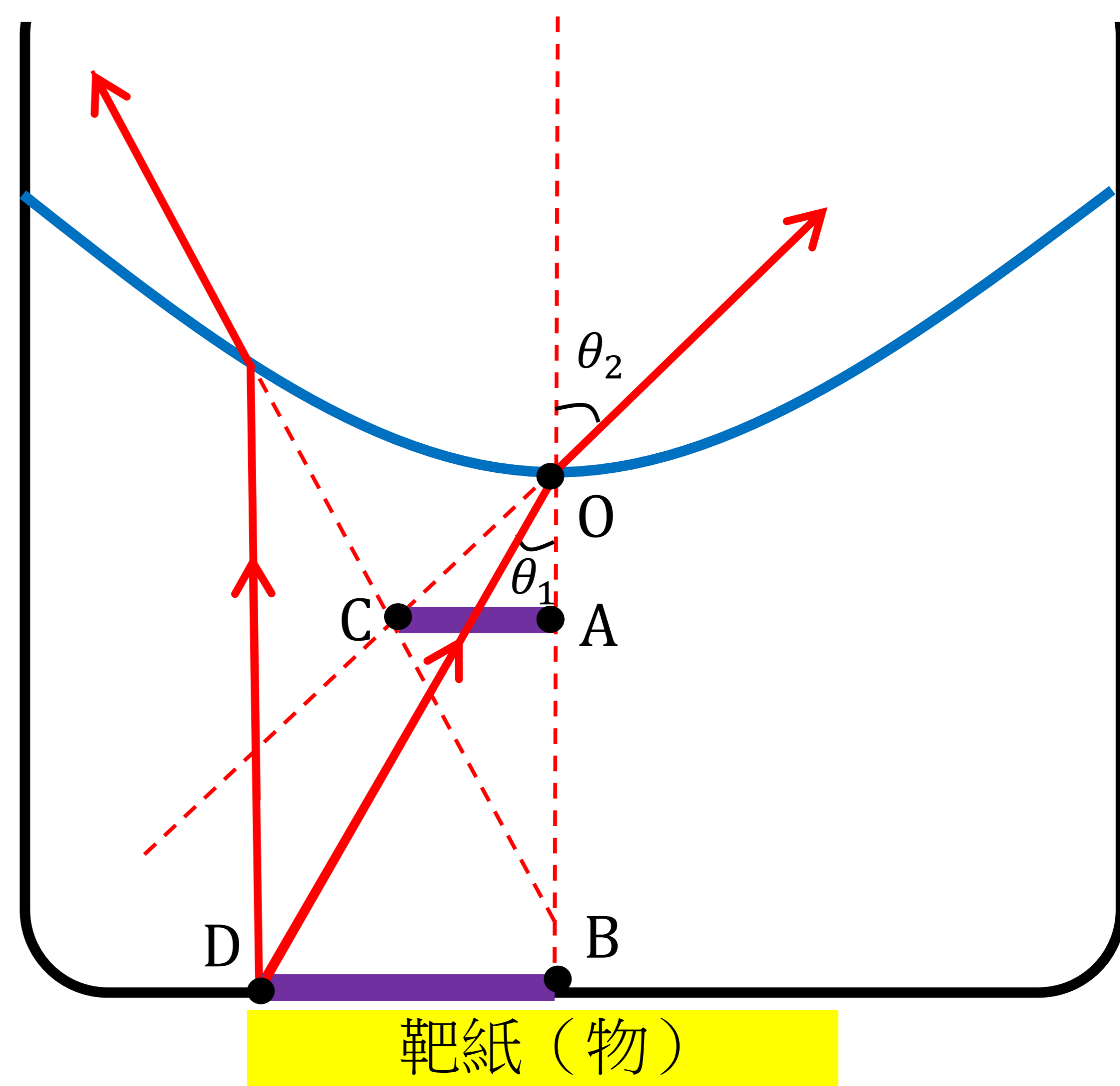
$$m = \frac{q \tan \theta_2}{p \tan \theta_1} \approx \frac{q \sin \theta_2}{p \sin \theta_1}$$

而由折射定率可得到折射率與入射、折射角的關係：

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

因此將可得到放大率的關係：

$$m = \frac{q}{p} = \frac{qn_1}{pn_2}$$



柒、理論推導：單一凸球面折射

當光線由介質1進入介質2(空氣)時：

$$\theta_i = \delta + \alpha$$

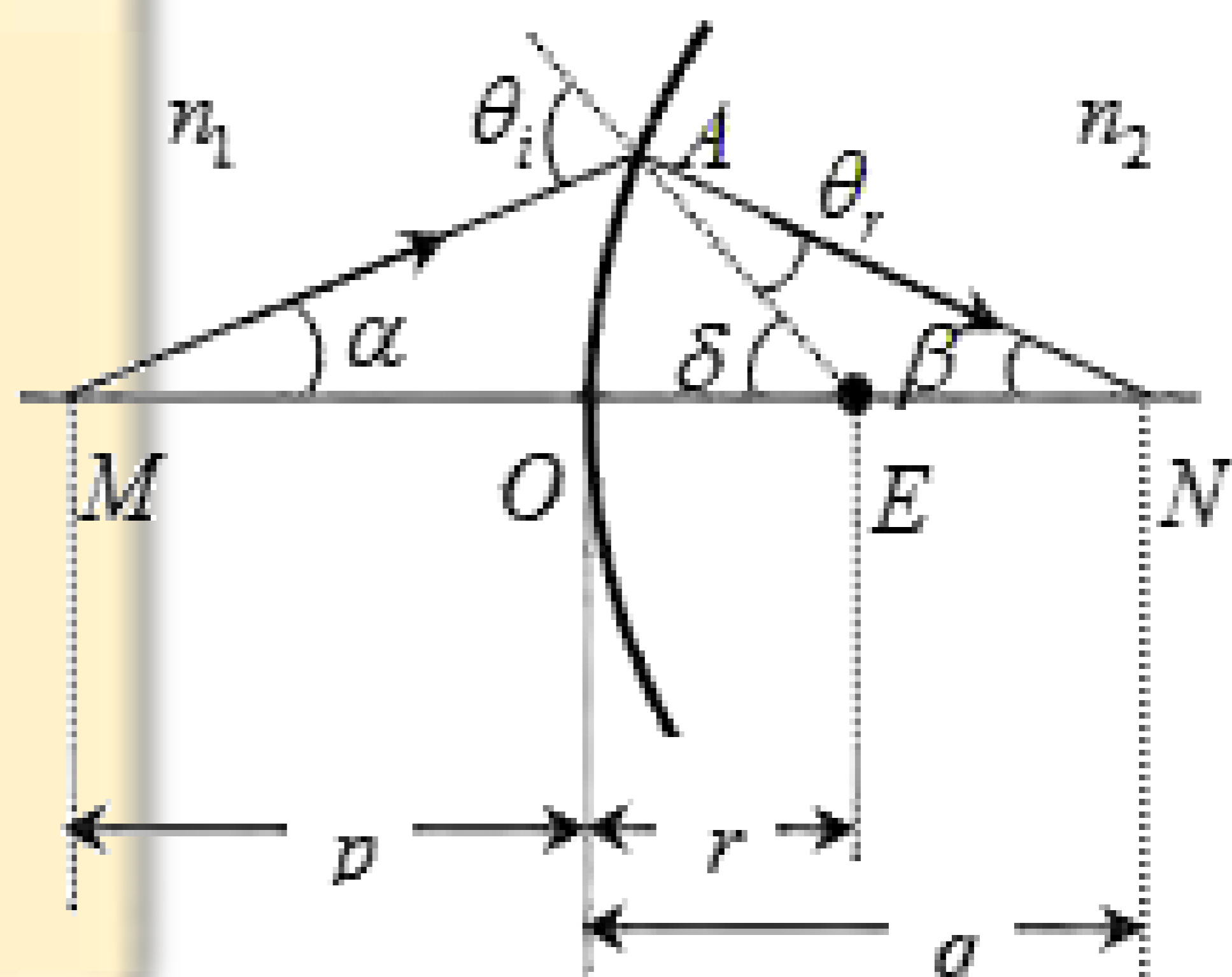
$$\theta_r = \delta - \beta$$

當光線為近軸光線時，所有的角度均甚小，則可得到

$$n_1(\delta + \alpha) = n_2(\delta - \beta)$$

$$\therefore \frac{n_1}{n_2} = \frac{\delta + \beta}{\delta - \alpha} = \frac{\frac{\widehat{OA}}{r} + \frac{\widehat{OA}}{q}}{\frac{\widehat{OA}}{r} - \frac{\widehat{OA}}{p}} = \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{q}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$



捌、數據與討論

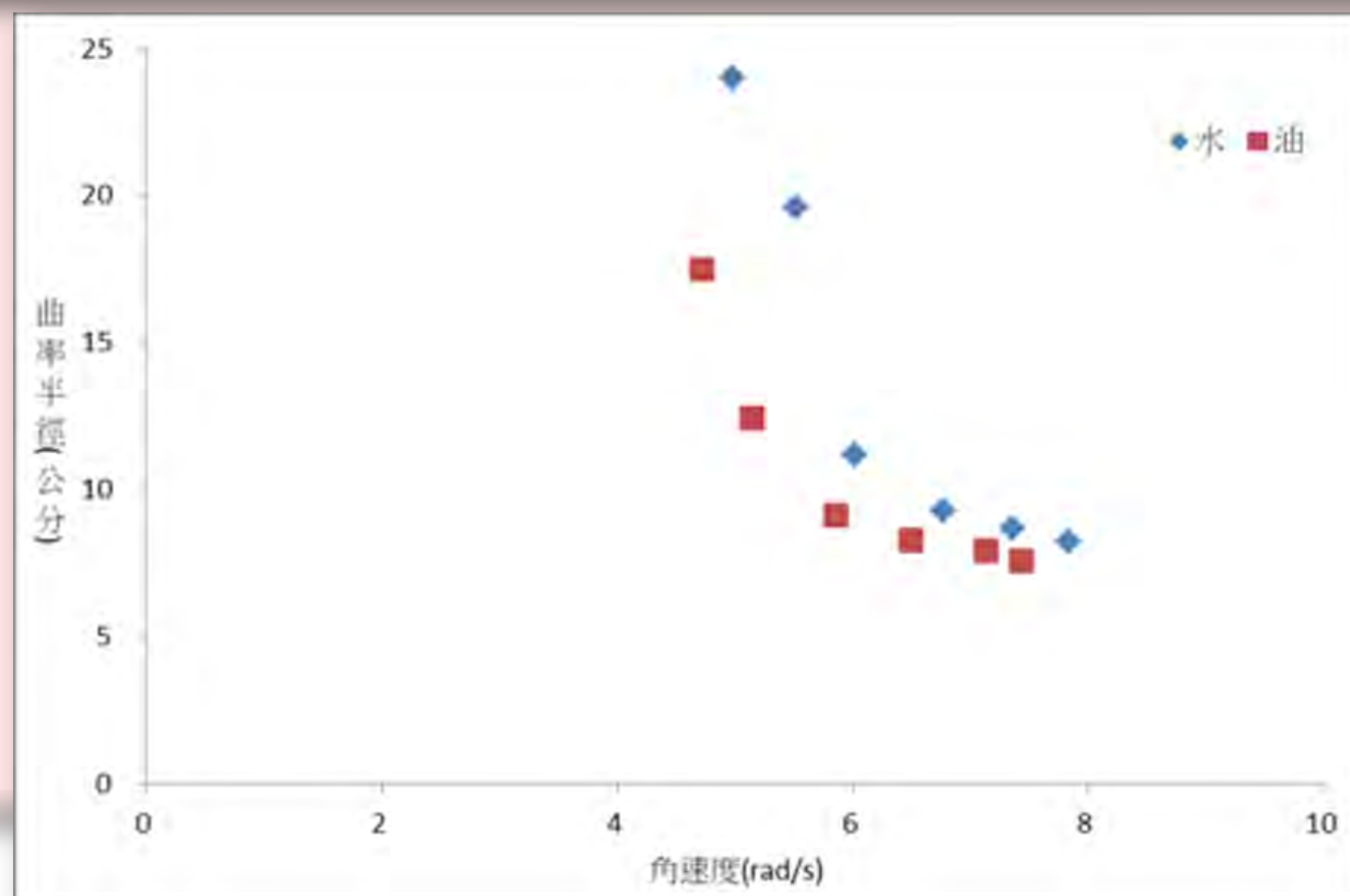
實驗一、找出反射面鏡面焦距與轉速的關係

編號	靜止	檔位1(水_5V)	檔位2(水_5.5V)	檔位3(水_6V)	檔位4(水_6.5V)	檔位5(水_7V)	檔位6(水_7.5V)
照片							
角速度(rad/s)		9.958	11.019	12.032	13.538	14.725	15.673
曲率半徑(cm)		23.990	19.587	11.190	9.248	8.684	8.231

編號	靜止	檔位1(油_5V)	檔位2(油_5.5V)	檔位3(油_6V)	檔位4(油_6.5V)	檔位5(油_7V)	檔位6(油_7.5V)
照片							
角速度(rad/s)		9.441	10.272	11.716	12.979	14.273	14.857
曲率半徑(cm)		17.496	12.419	9.128	8.258	7.906	7.564

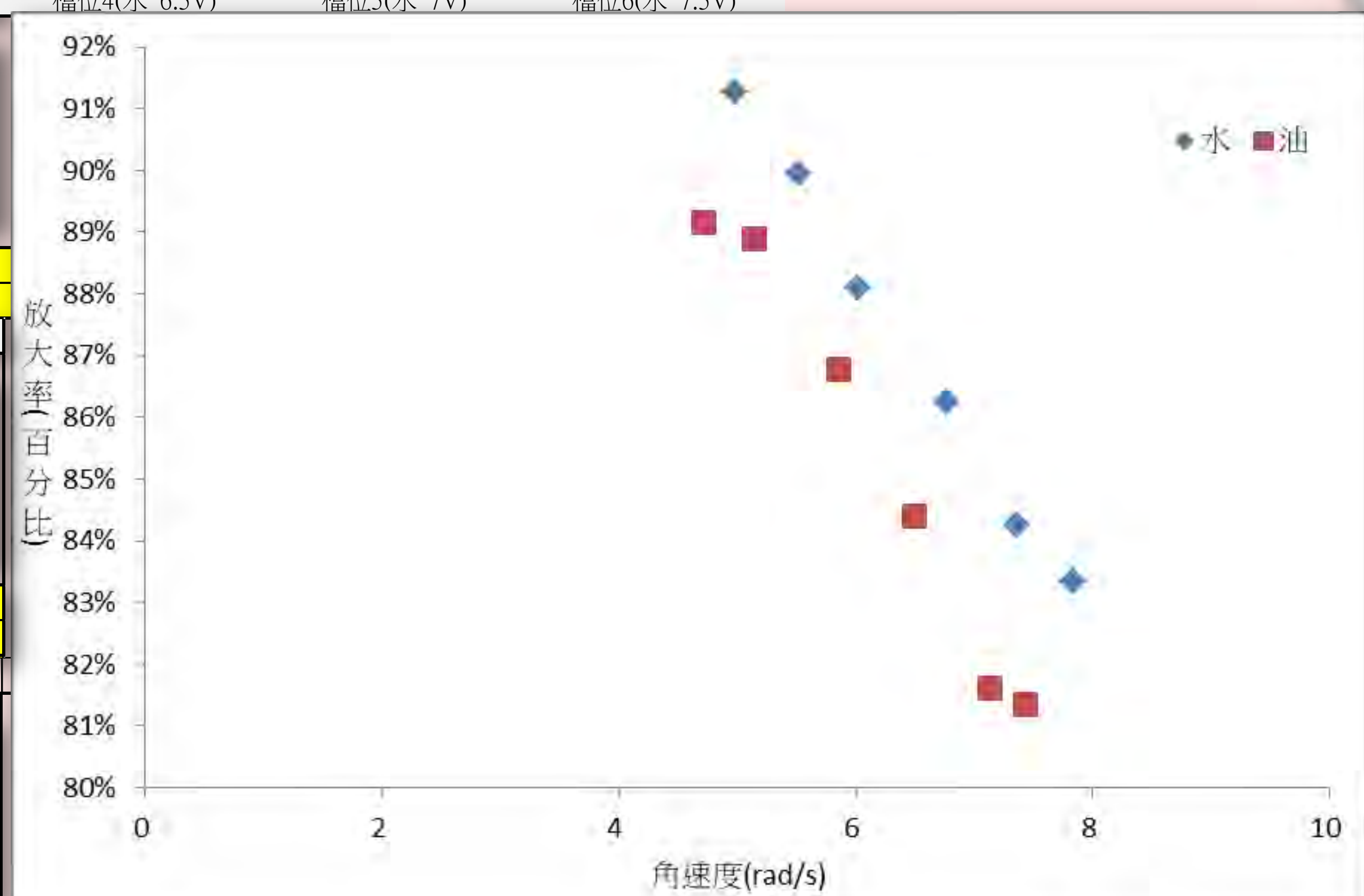
由數據與實驗圖可發現

- 當轉速越快時，其曲率半徑會越來越小，及凹陷程度越大。
- 由液面方程式可知曲率半徑會與角速度平方成反比亦可由圖表得知。
- 當轉速大於6 (rad/s)時，其曲率半徑變化較為不明顯，推測與容器直徑有關。



實驗二、找出透鏡放大率與轉速的關係

編號	靜止	檔位1(水_5V)	檔位2(水_5.5V)	檔位3(水_6V)	檔位4(水_6.5V)	檔位5(水_7V)	檔位6(水_7.5V)
照片							
角速度(rad/s)		9.958	11.019	12.032	13.538	14.725	15.673
放大率(俯視)		91.27%	89.95%	88.10%	86.24%	84.26%	83.33%
放大率(側視)		88.10%	86.24%	84.26%	83.33%		
編號 <th>靜止</th> <th>檔位1(油_5V)</th> <th>檔位2(油_5.5V)</th> <th>檔位3(油_6V)</th> <th>檔位4(油_6.5V)</th> <th>檔位5(油_7V)</th> <th>檔位6(油_7.5V)</th>	靜止	檔位1(油_5V)	檔位2(油_5.5V)	檔位3(油_6V)	檔位4(油_6.5V)	檔位5(油_7V)	檔位6(油_7.5V)
照片							
角速度(rad/s)		9.441	10.272	11.716	12.979	14.273	14.857
放大率(俯視)		89.15%	88.89%	86.77%	84.39%	81.61%	81.35%
放大率(側視)		86.77%	84.39%	81.61%	81.35%		



由數據與實驗圖可發現轉速越快時，放大率越小，即成像越縮越小。

- 從關係圖裡可推測，放大率的成因也受折射率的影響，當轉速相同時，折射率越大時，放大縮小的效應越明顯。

檔位	水-1	水-2	水-3	水-4	水-5	水-6
角速度(rad/s)	9.958	11.019	12.032	13.538	14.725	15.673
放大率焦距(cm)	14.065	11.241	7.046	5.473	3.985	3.611
球面近似焦距(cm)	11.995	9.794	5.595	4.624	4.342	4.116

實驗三、推導出透鏡焦距與反射面鏡焦距的關係

檔位	水-1	水-2	水-3	水-4	檔位	油-1	油-2	油-3	油-4	油-5	油-6
角速度(rad/s)	9.958	11.019	12.032	13.538	角速度(rad/s)	9.441	10.272	11.716	12.979	14.273	14.857
放大率焦距(cm)	14.065	11.241	7.046	5.473	放大率焦距(cm)	11.770	11.015	7.708	5.956	4.075	3.203
球面近似焦距(cm)	11.995	9.794	5.595	4.624	球面近似焦距(cm)	8.748	6.210	4.564	4.129	3.953	3.782

由表格可以發現，兩者的焦距不盡相同，但由放大率求出來的焦距在一開始時會比球面近似焦距大，原因我們推測是因為放大率焦距是介質為液體中的透鏡焦距，而球面近似其實透鏡所在介質為空氣；而當角速度越快，曲率半徑越小，此時非近軸光線，會有球面像差需考慮。

玖、結論

- 利用壓克力載台旋轉帶動內部液體產生漩渦的方式確實可以擁有與透鏡相同的效果。且隨著角速率越大，燒杯內液體面中心凹陷處曲率半徑會越來越小，而透鏡的焦距與曲率半徑有關，因此焦距也會越來越小。
- 大率求出來的焦距在一開始時會比球面近似焦距大，推測是因為放大率焦距是介質為液體中的透鏡焦距，而球面近似其實透鏡所在介質為空氣；而當角速度越快，曲率半徑越小，此時非近軸光線，會有球面像差需考慮。