中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

最佳團隊合作獎

080411

圓來如此

學校名稱：臺南市安定區安定國民小學

作者：	指導老師：
小六　王維震	張容君
小六　王柏茵	林淑珍
小六　許喆凱	
小五　謝博庭	

關鍵詞：圓、弧線、扇形

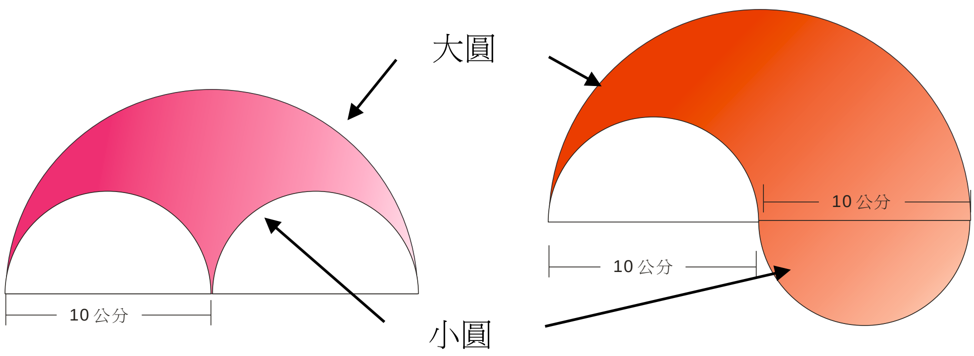
摘　要

數學課裡，解題「大半圓中有小半圓的弧長問題」時，我們發現不必逐一計算每一個小半圓的弧長，只需計算最大半圓的弧長即可。我們從計算「圓弧長」的題目中，探討如何在一個半圓中尋找一條曲線，這條曲線是其它弧線的組合，使其長度和與該半圓的弧長相等，不包含直徑或直線部份，此曲線有何規律性，最後我們獲得 3 種基本的規律，且第 3 種規律性可適用於任意角度分圓的一般情形。

壹、研究動機

數學課裡，學到「圓周長」的計算方法，在這單元裡我們遇到下列圖形的題目，在計算的過程中，觀察到一些有趣的現象，引發研究的興趣。題目如下：

一、求下列圖形的弧長：

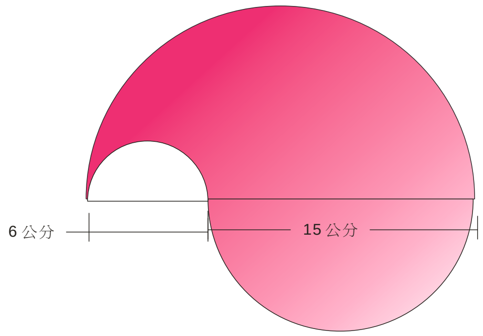


最大半圓弧長 ＝20 x 3.14 ÷2 = 31.4 (cm)

2 個小半圓弧長和 ＝（10 x 3.14 ÷2）x 2= 31.4 (cm)

我們發現：最大半圓弧長 ＝2 個小半圓弧長和

二、如果改變小圓的直徑，求下列紅色圖形的弧長：

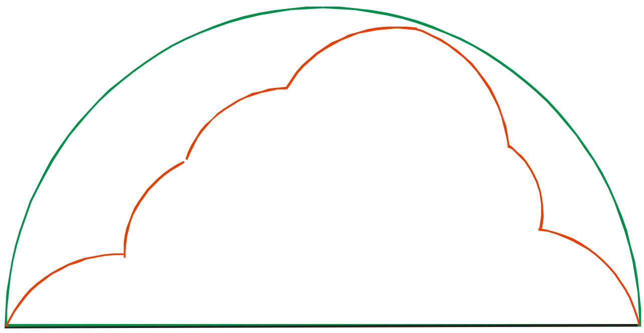


最大半圓弧長 ＝（6 + 15）x 3.14 ÷2 = 32.97 (cm)

小半圓弧長和 ＝6 x 3.14÷2 + 15 x 3.14÷2 = 32.97 (cm)

最大半圓弧長 =小半圓弧長和

當小圓的圓心落在大圓的直徑上時，計算紅色圖形的弧長，不必一一去計算小圓的弧長，只須計算最大圓弧長。而「小圓的圓心一定得落在大圓的直徑上嗎？」、如下圖所示，「是不是在一個最大半圓弧線內，可以找到一條小半圓弧線的組合，使這條小半圓弧線組合的長度會等於此最大半圓弧長？」這些問題引起我們的研究動機，我們嘗試尋求問題的解答，並從中尋找規律性。



貳、研究目的

探討扇形弧長的應用。對於「是不是在一個半圓內可以找到一條弧線，讓這條弧線的長度會等於此半圓弧長？」之問題，尋找解答並歸納規則，再利用規律性解決問題，從解決中發現數學的美麗，激發我們想像的空間。

參、研究問題

對於「是不是在一個半圓內可以找到一條弧線，讓這條弧線的長度會等於此半圓弧長？」，我們將問題分成下列六個部份逐一探討。

一、計算最大半圓內有 2 個小半圓之變化

二、計算最大半圓內有多個小半圓之變化

三、計算最大半圓內有不規則圖形之變化

四、計算最大半圓內有多個小弧長之變化

五、將半圓切割成很多段的扇形

六、切割扇形平行排列的重要性

肆、研究設備與器材

一、研究設備：數位相機、電腦、CorelDraw 軟體。

二、研究器材：方格紙、圓規、計算機、量角器、白紙、色紙、布尺、筆。

伍、研究過程與方法

首先，我們先以圓規在白紙或方格紙上，畫出我們所討論的圖形，再以紙筆或電子計算機算出弧長，然後比較結果、分析、歸納和整理小結論。

一、計算最大半圓內有 2 個小半圓之變化

(一) 同直徑小圓

1.

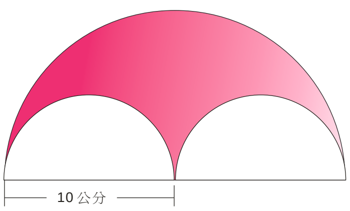


圖 1

2.

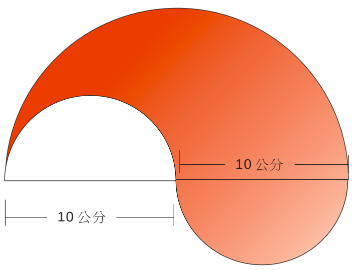


圖 2

3.

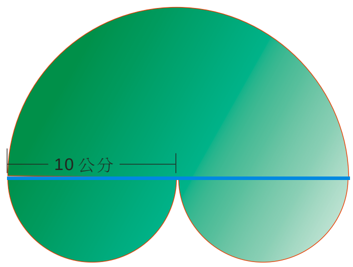


圖 3

圖 1、圖 2 和圖 3 中：最大半圓弧長 ＝（10 x 2）x 3.14÷2 = 31.4 (cm)

2 個小半圓弧長和 ＝ 10 x 3.14÷2 x 2 = 31.4 (cm)

最大半圓弧長 ＝ 2 個小半圓弧長和

(二) 不同直徑小圓

1.

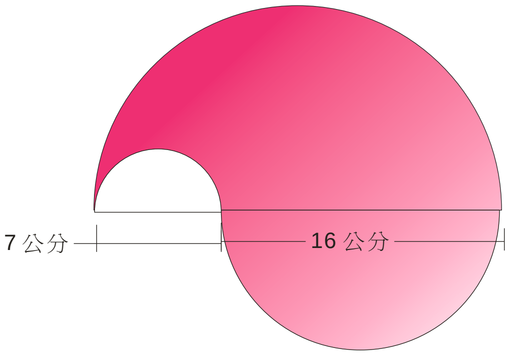


圖 4

2.

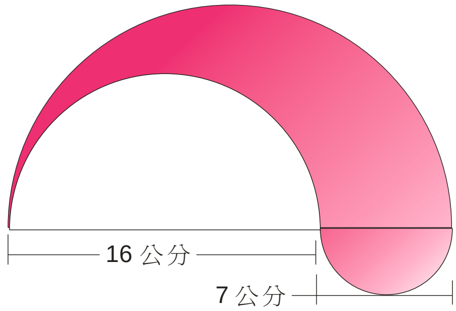


圖 5

圖 4 和圖 5 中：最大半圓弧長 = (7+16) x 3.14 ÷2 = 36.11(cm)

2 個小半圓弧長和 = 7 x 3.14÷2 + 16 x 3.14÷2 = 36.11 (cm)

最大半圓弧長 = 2 個小半圓弧長和

結論 1：最大半圓內有 2 個小半圓，小圓圓心落在大圓直徑上時，最大半圓的弧長等於 2 個小半圓的弧長和。

二、計算最大半圓內有多個小半圓之變化

(一) 同直徑小圓

1.

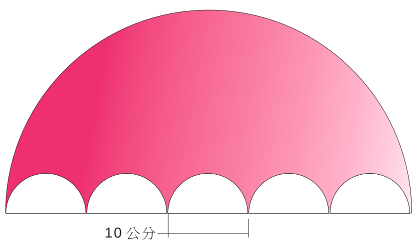


圖 6

2.

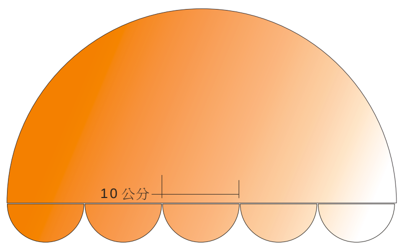


圖 7

3.

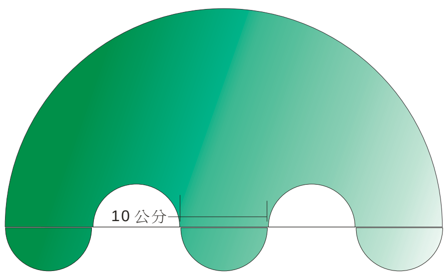


圖 8

4.

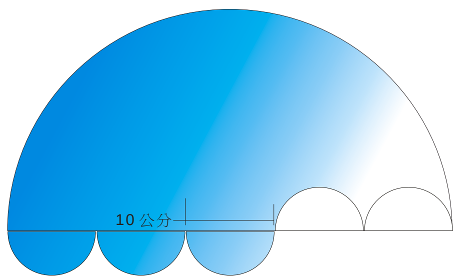


圖 9

圖 6、圖 7、圖 8 和圖 9 中：假設小半圓的直徑皆為 10 cm，最大半圓的直徑為 50 cm。最大半圓弧長 = 50 x 3.14 ÷2 = 78.5 (cm)

5 個小半圓弧長和 =（10 x 3.14 ÷2）x 5 = 78.5 (cm)

最大半圓弧長 = 多個同直徑小半圓之弧長和

結論 2-1：多個同直徑的小半圓，圓心落在最大半圓的直徑上，那麼多個同直徑小半圓的弧長和會等於最大半圓的弧長。

(二) 不同直徑小圓

1.

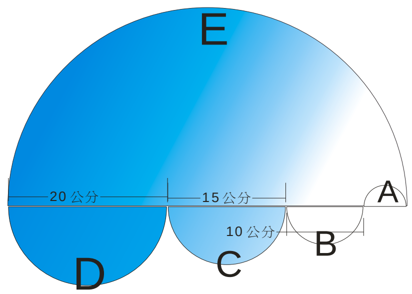


圖 10

2.

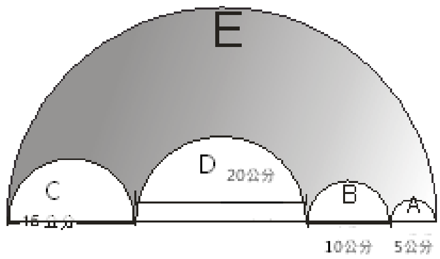


圖 11

圖 10 和圖 11 中：假設小半圓 A、B、C 和 D，直徑分別為 5 cm、10 cm、15 cm 和 20 cm，最大半圓 E 的直徑為 50 cm。

最大半圓 E 的弧長 = (5 + 10 + 15 + 20) x 3.14 ÷ 2 = 78.5 (cm)

不同直徑的小半圓 A、B、C 和 D 之弧長和

= (5 x 3.14÷2) + (10 x 3.14÷2) + (15 x 3.14÷2) + (20 x 3.14÷2) = 78.5 (cm)

最大半圓弧長 = 多個不同直徑的小半圓之弧長和

結論 2-2：多個不同直徑的小半圓，圓心落在最大半圓的直徑上，那麼多個不同直徑小半圓的弧長和會等於最大半圓的弧長。

綜合以上結果，最大半圓弧長會等於圓心在直徑上的小半圓之弧長和，如圖 12 所示。我們可以不必逐一計算每一個小半圓之弧長和，只要計算最大半圓弧長，就等於所有圓心在直徑上的小半圓之弧長和。

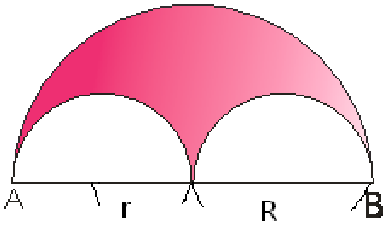


圖 12

假設最大半圓直徑 2 R，小半圓直徑 2 r，圓周率 3.14 = π ，如圖 12 所示。

最大半圓弧長 = 2 R x π ÷ 2 = π R

2 個小半圓弧長和 = (2 r x π ÷2) x 2= 2 π r = π R

最大半圓弧長 = 2 個小半圓弧長和

推論：將半圓換成整個圓，圖中的圓彼此相切(圖 13)，如此我們可以很輕易的判斷出如下的關係，不必再行計算。

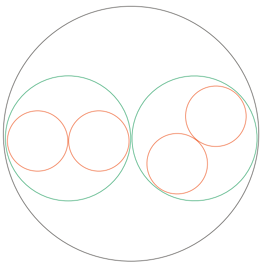


圖 13

2 個紅色小圓圓周長的和 = 1 個綠色中圓的圓周長

4 個紅色小圓圓周長的和 = 2 個綠色中圓圓周長的和 = 1 個黑色大圓的圓周長

結論 2-3：小圓的圓心均落在最大圓的直徑上時(圖 14)，不必計算，一眼即可看出，所有小圓的圓周和就是最大圓的周長。

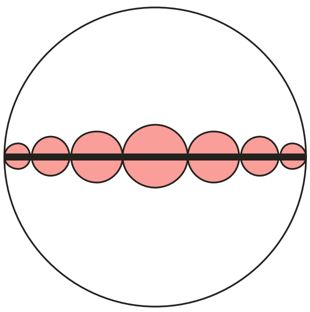


圖 14

三、計算最大半圓內有不規則圖形之變化

延伸另一個概念，以 C 線段為主線時，一旦有斜邊 A 和 B 產生，由三角形的關係式，任 2 邊之和必大於第 3 邊，如下圖 15 所示。我們很容易的判斷出，由 A、B 線段所構成的半圓弧長和必大於 C 線段的半圓弧長。

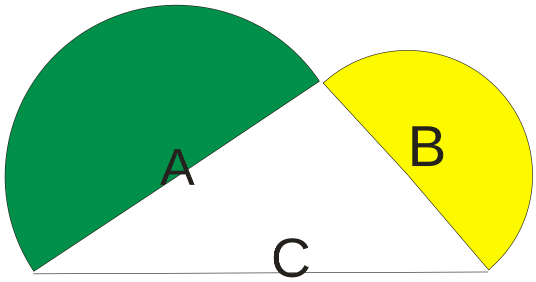


圖 15

結論 2-4：線段 A + B > C，2 邊同時乘上 π ，π x A+ π x B > π x C，其意義是由 A、B 線段所構成的半圓弧長和必大於 C 線段的半圓弧長。

依據前述的研究結果，計算大的半圓內有不規則弧長圖形的變化時，大的半圓弧長是不是等於大的半圓內之不規則弧長的總和。因此，我們在方格紙上畫出最大半圓(綠線部份)，利用生活中具有圓弧的東西，例如 CD 片，取一小段弧長作記號，以布尺量取該弧長長度，在大半圓內不斷重複畫出弧長，以首尾連接的方式畫在大半圓內，最後多少會出現餘弧線，只要對此餘弧線作記號，以布尺量取此長度即可(紅色部份)，算出所有紅色部份之和，與最大半圓弧線綠色部份作比較，如下圖 16 所示。

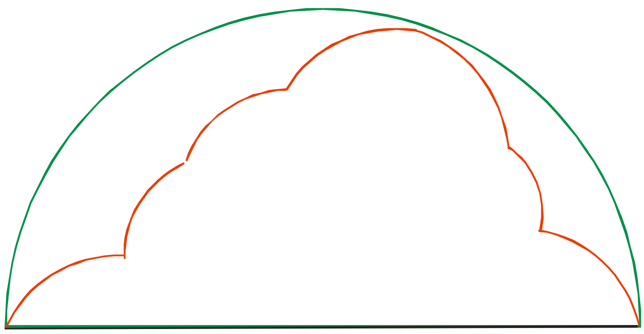


圖 16：比較紅色與綠色弧長

根據我們多次運算，發現紅色弧長總和，有時小於大半圓弧長，有時大於大半圓的弧長，沒有等於的情況，但是在計算的過程中，雖然有測量誤差的存在，數據卻顯示在此大半圓內，必有一條或更多條小弧長總和與最大半圓弧長相等。

結論 3：最大半圓內，必有一條以上的小弧長和與最大半圓弧長相等。

四、計算最大半圓內有多個小弧長之變化

(一) 同半徑弧長

以半徑 7.5cm 作 2 個小半圓，再以此半徑對 O 點作一圓弧 AB，則弧 CABD 和大半圓的弧長 CD 的關係是大於、小於還是等於 (圖 17)，意即如圖 18 中的紅色弧長(弧 CABD)和黑色弧長(弧 CD)的大小比較。

1.

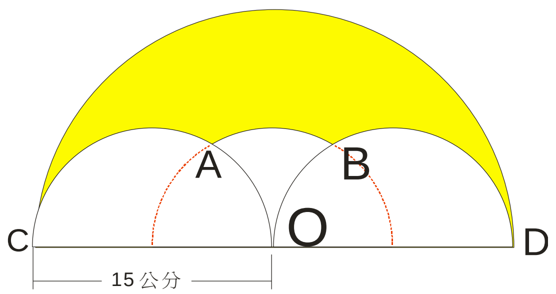


圖 17

2.

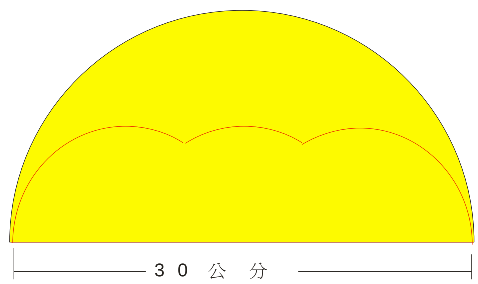


圖 18

利用量角器量取角 AOB 的角度 (60 度)，量弧 CA 所對圓心角的度數 (120 度)，再以所對全圓的比例算出部份的弧長，如下所示。

弧 CA 長 = 弧 BD 長

$= (120^\circ / 360^\circ) \times 15 \times 3.14 = 15.7$ (cm)

弧 AB 長 $= (60^\circ / 360^\circ) \times 15 \times 3.14 = 7.85$ (cm)

∴ 弧 CABD = 2 倍的弧 CA + 弧 AB

$= 15.7 \times 2 + 7.85 = 39.25$ (cm)

最大半圓弧長 $= 30 \times 3.14 \div 2 = 47.1$ (cm)

最大半圓弧長 ＞ 弧 CABD (39.25 cm)

仔細觀察圖形，不必計算就可以判斷（圖 19)，因為同半徑作圖，所以線段 CE、EA、AO、OB、BF 和 FD 都等長，三角形 OAE 和三角形 OBF 都是正三角形，三邊都等長，所以圖 17 中，弧 AB、弧 AO 和弧 BO 皆等長，都是同半徑的圓心角 60 度所對的圓弧長。

由圖 17 得知：弧 CABD (紅色弧) 必小於 2 個小半圓的弧長和

弧 CABD (紅色弧) ＜ 弧 CA＋弧 OA＋弧 OB＋弧 BD

即弧 CABD (紅色弧) 必小於最大半圓弧長 (圖 18 黑色弧)

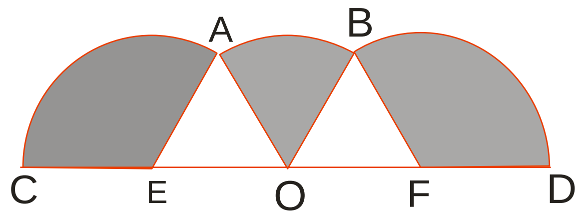


圖 19

結論 4-1：當以 2 個或 2 個以上的等半徑作圖(圖 20 藍色弧)，再以同半徑畫出紅線部份(圖 20)，形成頭尾連線是最大圓直徑的弧線圖形(圖 21 紅色弧)，則此紅色弧線長度必小於此弧的頭尾連線所形成最大半圓的弧長。

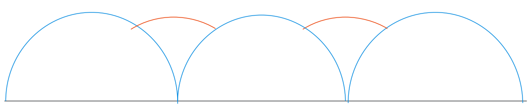


圖 20

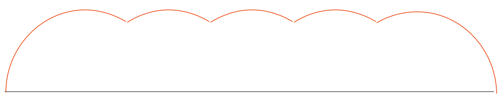


圖 21

(二)不同半徑弧長

線段 OE=OF，以任意長度 OC，對 O 點做弧 CD(圖 22)，我們繪製不同角度的 COD 於方格紙中，嘗試找出弧 ECDF 和以線段 OE 為半徑所作半圓弧長之間的關係(圖 22 線段 OC≠OA 或 OB)。在此，線段 OC、角 COD、角 CAE 都須以直尺、量角器實際量取，各依其所佔角度的比例算出弧長後再相加。

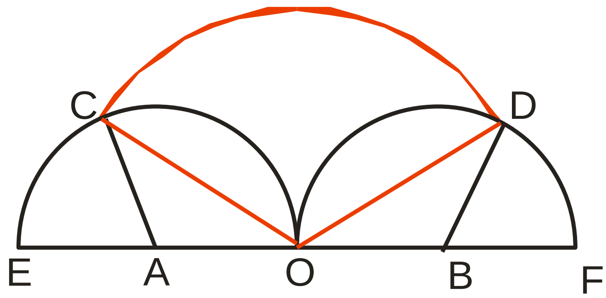


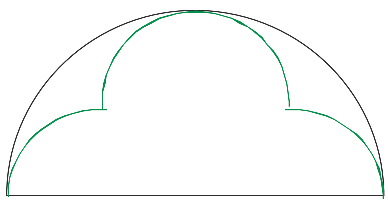
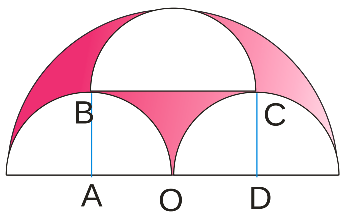
圖 22

研究結果顯示：弧 ECDF 一定會小於或接近於最大半圓弧長。仔細觀察圖 22，隨著角 COD 不斷的放大，半徑 OC 也不斷的加長，當 OC = OE 時，弧 ECDF 就是最大半圓弧長。

結論 4-2：由 O 點所展開的弧長和 (弧 EC＋弧 CD＋弧 DF) 必小於或等於最大半圓弧長，當 OC = OE 時，由 O 點展開的弧長會等於最大半圓弧長。

(三)同半徑弧長，半徑皆平行的組合

考慮平行底邊的情形，我們嘗試移動平行的位置，在圖 23 和圖 24 中，當平行底邊的線段到達 BC 時，經計算其綠色弧線長(圖 23 綠線部份)等於最大半圓弧長。仔細觀察圖 24 發現，在圖 25 中，長方形 ABCD 內部 2 個 1/4 圓弧長正好是上方半圓弧長。

1.  圖 23	2.  圖 24

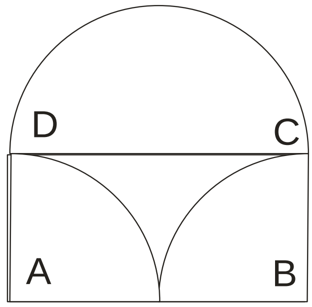
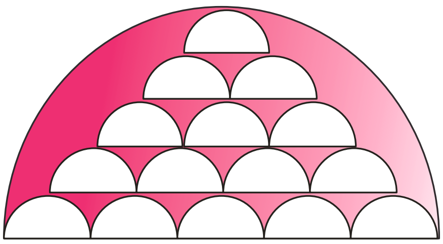
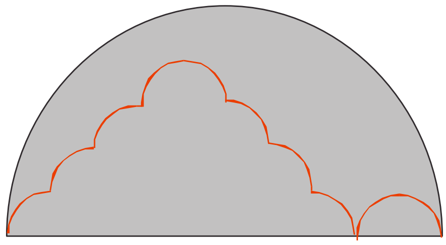


圖 25

在 2 個 1/4 圓的頂端之連線 DC 且該線必須平行底邊(DC//AB)的情形時(圖 25)，該線段 DC 所作之半圓弧長必等於 2 個 1/4 圓的弧長和，其同半徑弧長，半徑皆平行的組合如圖 26 所示，圖 26 最底端有 5 個小半圓，其所形成的弧長和等於最大半圓弧長，且將有無數條組合的弧線長與最大半圓的弧長相等。例如，其中一條組合的弧線長，如下圖 27 之橘色部分弧長=最大半圓弧長。

1.	2.
 圖 26	 圖 27

結論 4-3：同半徑弧長，半徑皆平行的組合(圖 26)，會有無數條組合的弧線長與最大半圓弧長相等。

(四)不同半徑弧長，半徑皆平行的組合

圖 28 中，有 A、B、C、D ，4 個不同半徑的半圓，但 B 和 D 同半徑，以 B、D 頂點連線可形成 E 半圓，因此半圓 A、B、E、D 所構成的弧長和等於最大半圓弧長，如圖 29 之紅色弧長所示。

1.

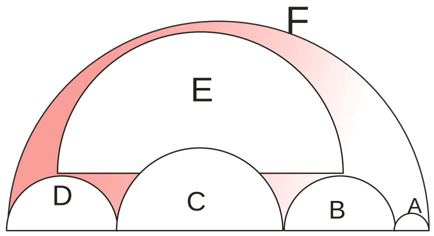


圖 28

2.

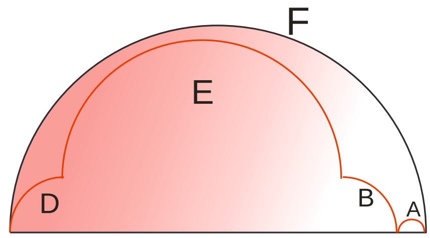


圖 29

紅弧線長 $= \frac{1}{2}\cdot(2\pi\cdot r_E) + \frac{1}{4}[2\pi(r_D + r_B)] + \frac{1}{2}(2\pi\cdot r_A)$

$$= \pi\cdot r_E + \pi\cdot\left(\frac{r_D+r_B}{2}\right) + \pi\cdot r_A$$

$$= \pi\left(r_E + \frac{r_D}{2} + \frac{r_B}{2} + r_A\right)$$

$$= \pi\cdot R_F$$

=最大半圓弧長

結論 4-4：不同半徑弧長，半徑皆平行的組合(圖 28)，所形成的弧線長等於最大半圓弧長。

(五)不同半徑弧長，半徑沒有平行的情況

沒有平行底邊，反而出現斜邊時，則會出現弧長 CABD 大於最大半圓弧長的情形，亦即弧長 CABD 必大於弧 CD。

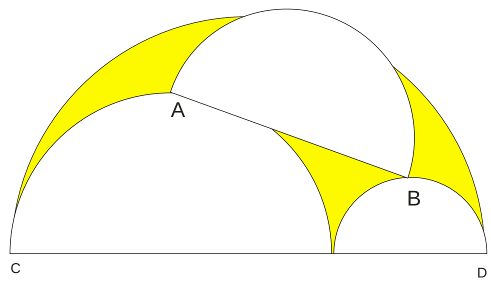
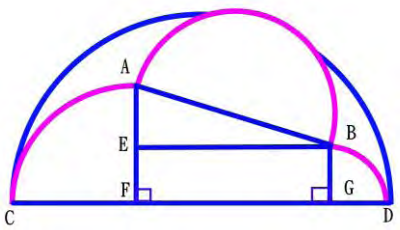


圖 30



藍弧線$=\pi\cdot R=\pi\cdot(\gamma_{CF}+\gamma_{GD})$

$=\pi\cdot(\overline{FG})=\pi\cdot(\overline{EB})$

$\because \overline{AB}>\overline{EB}$

$\therefore \pi\cdot\overline{AB}>\pi\cdot\overline{EB}$

粉弧線 ＞ 藍弧線

圖 30 中，如果不同半徑直接取頂端連線作一半圓，則所構成的弧線長 CABD 必大於弧 CD(最大半圓弧長)，這是因為出現斜邊，根據三角形任 2 邊之和必大於第 3 邊，參考圖 31，BC+CD>DB，因此它所構成的弧長(弧 ABCDE)必大底邊 AE 為直徑的半圓弧長(弧 AE)，雖然小圓弧線有交叉現象，弧 ABCDE 長仍必大於最大半圓弧 AE 長。

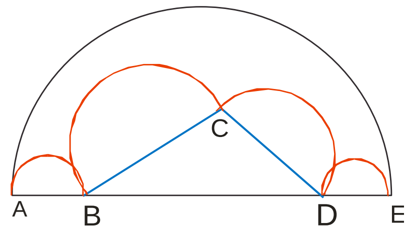


圖 31

$\because$ 黑色弧線$=\pi\cdot R=\pi\cdot\frac{1}{2}(r_{AB}+r_{DE}+r_{BD})$

紅色弧線$=\pi\cdot\frac{1}{2}(r_{AB}+r_{DE}+r_{BC}+r_{CD})$

又$r_{BC}+r_{CD}>r_{BD}$ （三角形 2 邊之和大於第 3 邊）

$\therefore$ 黑色弧線長<紅色弧線長

結論 4-5：不同半徑弧長，半徑沒有平行於底邊而出現斜邊時(圖 30)，所形成的弧線長大於最大半圓弧長。

五、將半圓切割成很多段的扇形

將半圓切割成多段的扇形，此扇形必須是通過圓心的圓心角所對的扇形，連接此扇形的弧線，如圖 32 所示，外圍綠色長方形的短邊為 X 半圓的直徑，將底部 X 半圓切成 1/4 圓 A 與 B，將 B 排成如下圖位置，圖中可以看出，1/4 圓 A 與 B 連接形成的弧長等於 X 半圓弧長，此時 1/4 圓 A 與 B 都有一邊平行於底邊。

1.

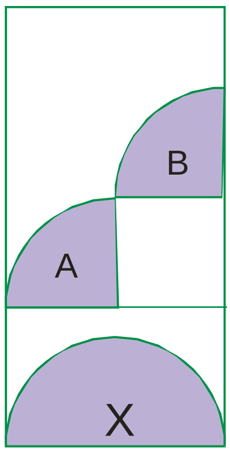


圖 32

2.

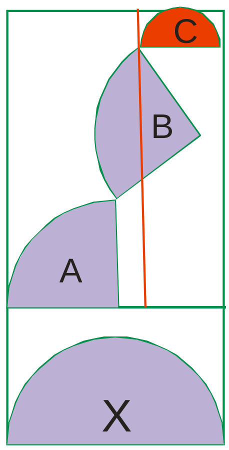


圖 33

3.

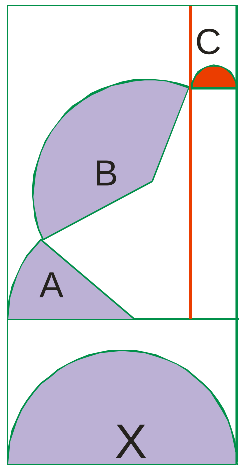


圖 34

若將 1/4 圓 B 排成不與底邊平行，出現傾斜的情形，如圖 33 所示，此時會多出一段線段 C，此線段可以再構成一個半圓 C，因多出半圓 C，由圖 33 即可判斷出扇形 A、B 和 C 連接所形成的弧長和必大於 X 半圓弧長。

圖 34 為 X 半圓被切成任意的 2 塊不等大小的扇形 A 和 B，切割的扇形 A 和 B 必須通過圓心，將扇形 B 傾斜排列，仍會出現 C，形成與圖 33 一樣的結果，如將圖 34 作對稱圖形，如圖 35 所示，則 ABCFED 連接所形成的弧長和必大於 2 個半圓 X、Y 的弧長和。

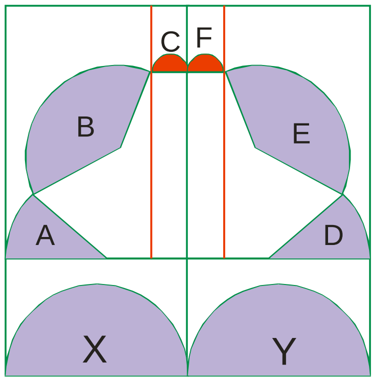


圖 35

結論 5：一個半圓分成 2 塊扇形，扇形有一邊皆平行於大半圓直徑的排列方式，連接扇形弧線長等於一個最大半圓弧長。

六、切割扇形平行排列的重要性

切割後的扇形，有一邊平行於底邊的排列方式很重要。我們使用電腦繪圖軟體 CorelDraw 畫圓、切割、複製、鏡像、移動和列印等功能，進一步來觀察驗證此結論。

1.

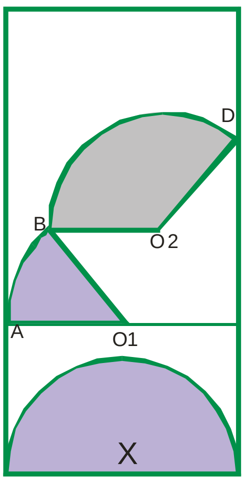


圖 36

2.

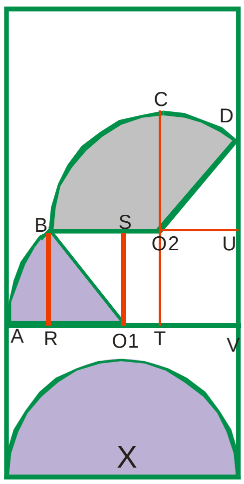


圖 37

圖 36 上半部份圖的扇形弧長是分割 X 半圓而來，切割的扇形必須通過圓心。在圖 37 中加上輔助線，線段 BO_2 // AO_1，角 AO_1B 的大小是任意的，線段 AR+線段 BO_2U=線段 AV，則此 2 個扇形連接的弧長和等於 X 半圓弧長，即扇形弧 AB +扇形弧 BCD=X 半圓弧長 (圖 37)。

$\because RO_1 = O_2U = TV$ (三角形 BRO_1=三角形 DUO_2)

線段 $AR+RO_1$=半徑 $AO_1=BO_2=O_1V=O_1T+TV$

$\therefore$線段 $AR=O_1T$ $(RO_1=O_2U=TV)$

線段 BU=RV AR+RV=直徑

結論 6：利用切圓所形成的 2 塊扇形，扇形必須切過其圓心，只要線段 $AO_1 // BO_2$，則 2 塊扇形連接的弧長 ABD 等於 X 半圓弧長。對扇形弧長 ABD 作鏡面對稱圖形，如圖 38 所示，則弧 ABDEF 長等於 2 個 X 半圓弧長。

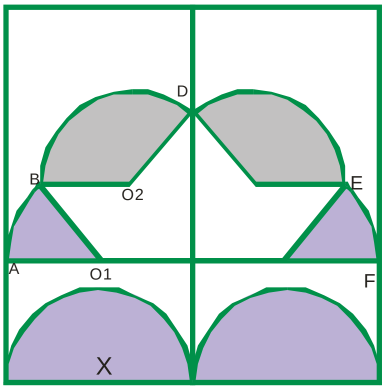


圖 38

將 X 半圓切割成三塊扇形，扇形必須切過其圓心，排列使線段 AO1//BO2//DO3，如圖 39 所示，此排列會出現紅色半圓，使上半部份圖的 4 個扇形所連接之弧線長大於一個 X 半圓弧長，所以一個半圓最多只能分成 2 塊扇形，使扇形的連接弧線長等於一個 X 半圓弧長。

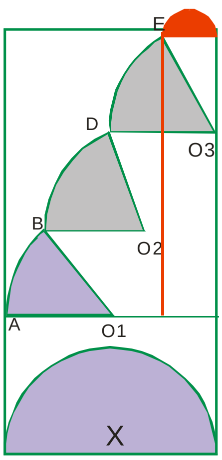


圖 39

陸、研究結果與討論

我們嘗試在一個半圓內尋找一條弧線，此一弧線可以是其他弧線所連接組成的，使得此連接的弧長和與半圓弧長相等。

一、直線的情況

當我們在方格紙上畫出一條直線 AB，在該線畫上若干個小圓，圓心落在該線段上，小半圓彼此成 180 度首尾相接，此線段是這些小圓的最大直徑和，如下圖 40 所示，則小半圓弧長總和會等於最大半圓弧長。

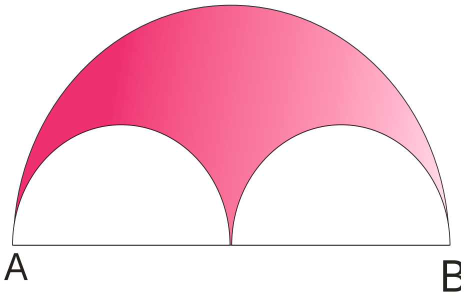


圖 40

二、斜邊的情況

如果出現斜邊時，由三角形的邊長關係，任二邊之和必大於第三邊，如下圖 41 所示，由線段 A 和線段 B 分別構成的半圓弧長之和必大於 C 線段的半圓弧長。當有斜邊出現時，弧 CABD 之弧長大於線段 CD 所形成的最大半圓弧長，如下圖 42 所示。

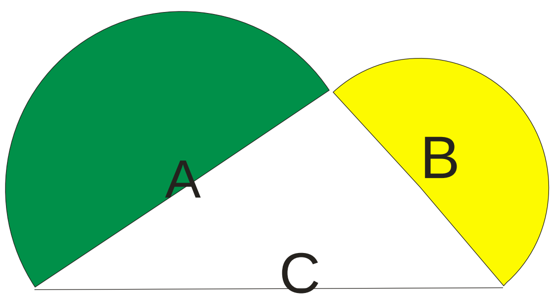


圖 41

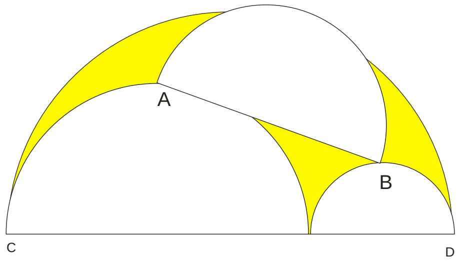


圖 42

三、在半圓內尋找一條弧線，此弧線長會與該半圓弧長相等，會發生在下列(一)、(二)和(三)的三種情況中，而在(四)的情形下則無法相等。

(一)不管小圓的半徑是否相同，只要他們的圓心落在最大半圓的直徑上，且彼此呈現首尾相接的情形，如圖 43 所示。

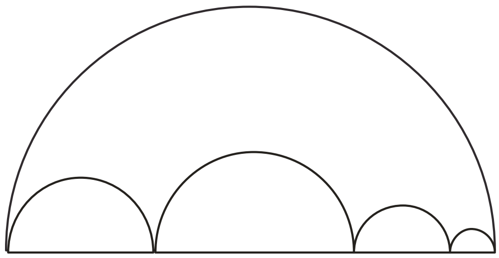


圖 43

(二)在大半圓中的小半圓中，有小半圓之圓心不在大半圓直徑上，而所有小半圓的直徑都相互平行，如下圖 44 所示。選取 2 個相同半徑的小圓，如 R 和 S，在其頂端的位置作線段 AB，新的弧之直徑 AB//CG，以線段 AB 作半圓 U，則小半圓 R、U、S、T 連接所形成的弧長 CABFG 必等於最大半圓 V 弧長。

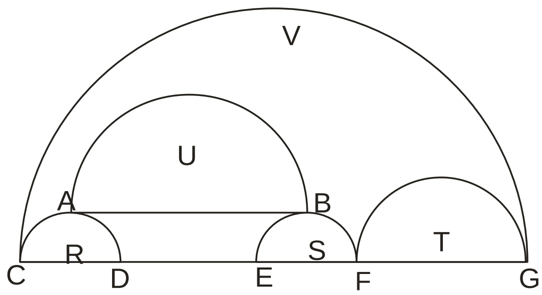


圖 44

(三)將大半圓中的小半圓切割成 2 塊扇形，扇形有一邊平行於底邊的排列方式很重要。亦即任意分圓成 2 塊扇形，扇形必須切過其圓心、平行移動使扇形的其中一邊平行於大半圓直徑，如圖 45 左半部分所示，將一半圓對其切成 2 塊扇形 ABC 與 BDG 後，使得線段 BG//AC，則此時扇形弧長和 ABD 等於線段 AO 所形成的半圓弧長。對左半部分以 DO 為對稱軸作對稱圖，如圖 45 所示，可知扇形弧長 ABDEF 與線段 AF 所構成的最大半圓弧長相等。

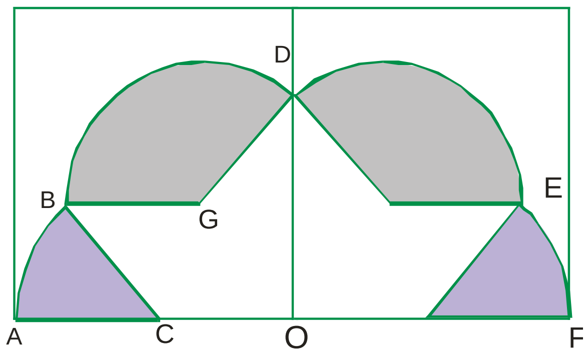


圖 45

(四)將大半圓中的小半圓切割成 3 塊以上之扇形，平行移動使扇形的其中一邊平行於大圓直徑的排列方式，會多出一線段可再畫出弧線，使所有連接扇形弧長的總和大於最大半圓弧長，如圖 39 所示，所以一個半圓最多只能分成 2 塊扇形，使扇形的連接弧線長等於一個最大半圓弧長。

四、規則可延伸到整個圓，如圖 46 所示，此時在直徑 AB 兩端所組成的小圓需構成一封閉曲線，所有小圓所形成的圓周長總和即為以 AB 為直徑所構成的最大圓之圓周長，亦即所有小圓的圓周長總和與最大圓的圓周長相等。

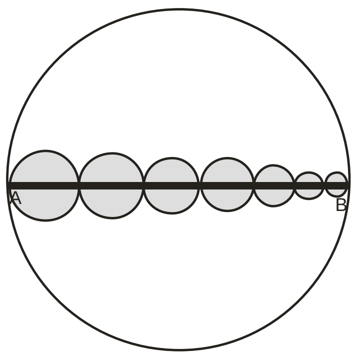


圖 46

柒、參考文獻

1.數學 (2016) (五下)－第三單元扇形。南一書局。

2.李老師 (2005)。哪一個圓周最長。成長園地一仁林文化 3 月號。

捌、研究過程記錄

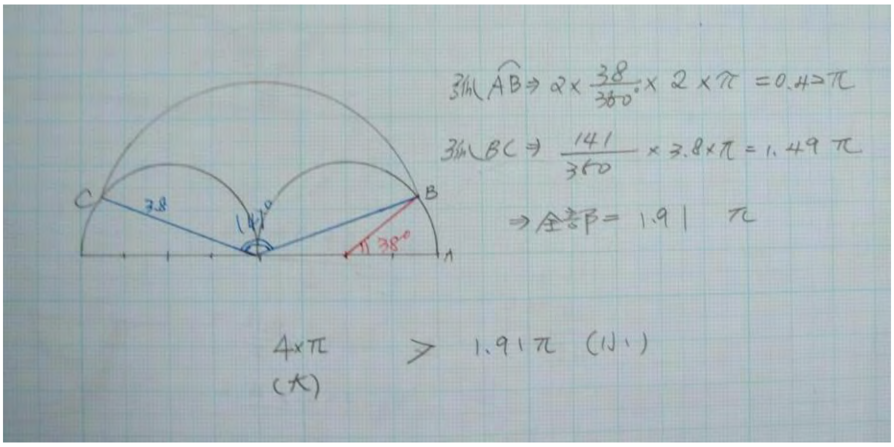


圖 47：38°和 141°度皆實際量取計算，所得最大半圓弧長 4π 大於 1.91π

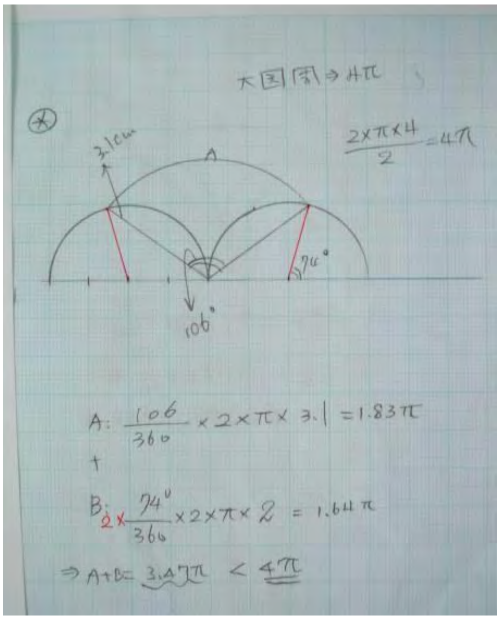


圖 48：中間扇形所對圓心角 106 度

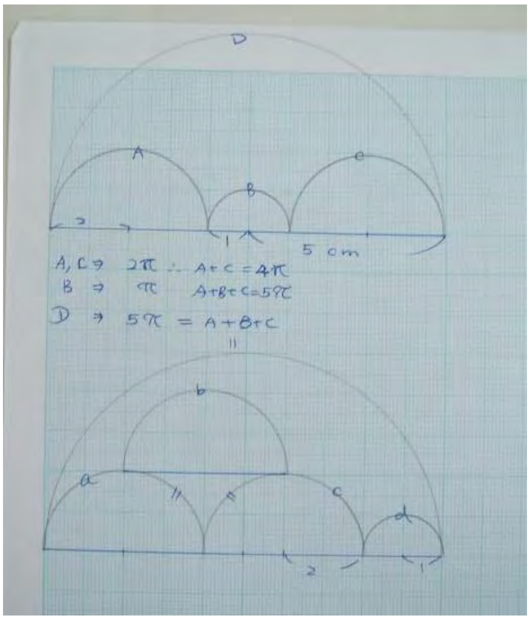


圖 49：小半圓的圓心不在直線上

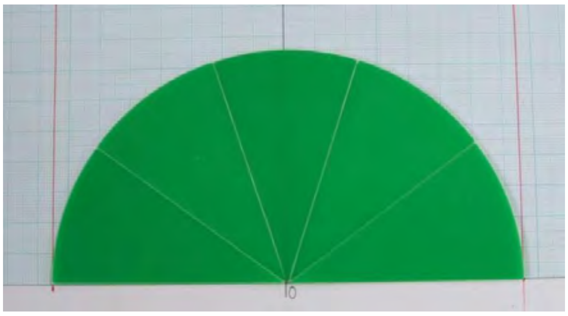


圖 50：切圓，兩邊紅線為最大直徑處

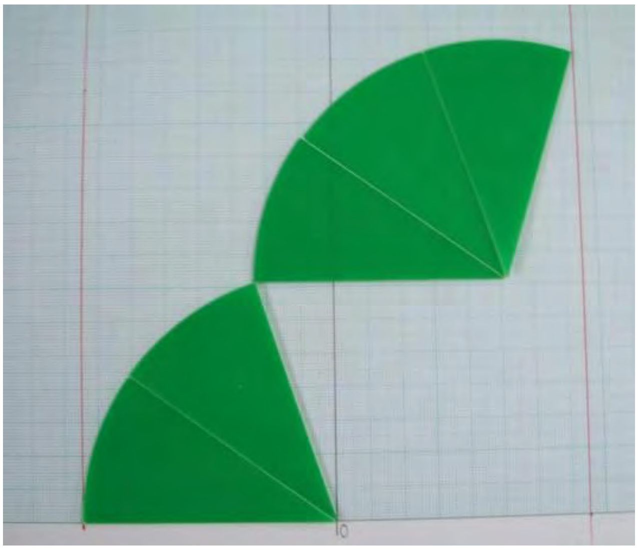


圖 51：半圓切割成 2 個扇形，皆有一邊平行於底邊的排列

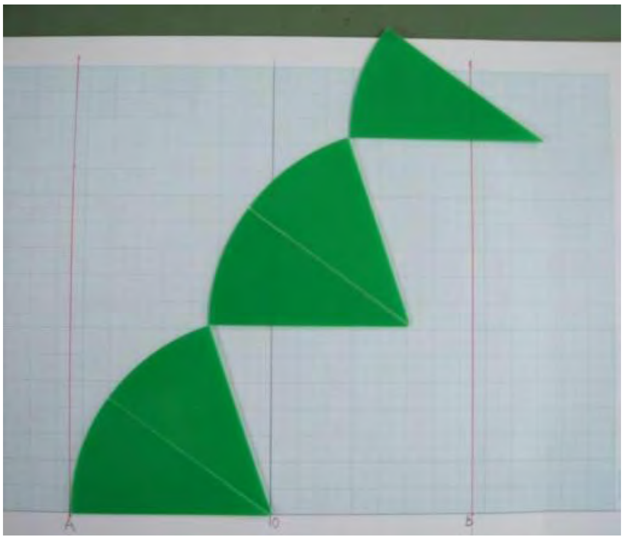


圖 52：不可切成 3 個以上的扇形

【評語】080411

1. 從數學課中的大半圓中有小半圓的弧長問題發想，探討如何在一個半圓中尋找一條曲線，使其長度和與該半圓的弧長相等，是一個有趣的問題並和當下教材做了很好的結合。

2. 將研究問題切割成六個部分，透過團隊合作，循序漸進地探討與解決，符合科學探究的精神。

3. 可能受限於主題之侷限性，使得研究成果在豐富度與深度略顯不足

作品海報

摘要

數學課裡，解題「大圓中有小圓的周長問題」時，我們發現不必逐一計算每一個小圓的周長，只需計算最外圈大圓的半圓周長即可。我們從計算「圓周長」的題目中，探討如何在一個半圓中尋找一條曲線，這條曲線是其它弧線的組合，使其長度和與該半圓的周長相等，不包含直徑或直線部份，此曲線有何規律性，最後我們獲得3種基本的規律，且第3種規律性可適用於任意角度分圓的一般情形。

壹、研究動機

數學課裡學到「圓周長」的計算方法，在這單元裡我們遇到下列圖形的題目，在計算的過程中，觀察到一些有趣的現象，引發研究的興趣。題目如下：

一、求下列圖形有顏色部分的圓周長：我們很容易的發現，2個小圓的半圓周長和=最大大圓的半圓周長

10 x2 x 3.14 ÷2= 31.4 cm

有顏色部分的圓周長

=2倍的小圓圓周長

=大圓的圓周長

= 2 x 31.4 = 62.8 cm

二、如果改變小圓的直徑，求下列圖形有顏色部分的圓周長：

小圓周部分：(6+15) x 3.14= 65.94cm

小半圓弧長65.94 cm÷2

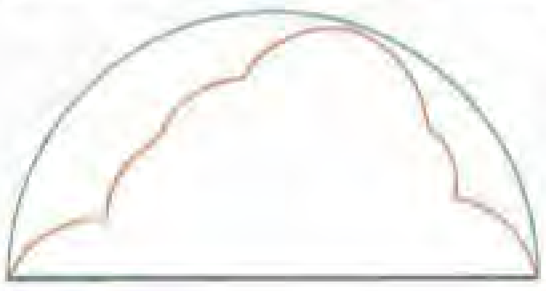
大圓周部分：21 x 3.14= 65.94cm

大半圓弧長65.94 cm÷2

小圓周的周長=大圓周的周長

小半圓弧長＝大半圓弧長

其實計算有顏色部分的圓周長，不必一一去計算小圓的圓周，只須計算最外最大的圓周長。此時小圓的圓心須落在大圓的直徑上，而「小圓的圓心一定得落在大圓的直徑上嗎？」、如下圖所示，「是不是在一個半圓內（綠色弧線）可以找到一條弧線（紅色弧線），讓這條弧線（紅色）的長度會等於此半圓（綠色）圓周長？」這些問題引起我們的研究動機，我們嘗試尋求問題的解答，並從中尋找規律性。



貳、研究目的

明確瞭解圓周長和扇形弧長的計算方式與應用。對於「是不是在一個半圓內可以找到一條弧線，讓這條弧線的長度會等於此半圓圓周長？」之問題，尋找解答並歸納規則，再利用規律性解決問題，從解決中發現數學的美麗，激發我們想像的空間。

參、研究問題

對於「是不是在一個半圓內可以找到一條弧線，讓這條弧線的長度會等於此半圓圓周長？」，我們將問題分成下列六個部份逐一探討。

一、計算大的半圓內有2個小的半圓之變化

二、計算大的半圓內有多個小的半圓之變化

三、計算大的半圓內有不規則的圖形之變化

四、計算大的半圓內有多個小的弧長之變化

五、將半圓切割成很多段的扇形

六、切割扇形平行排列的重要性

肆、研究設備與器材

一、研究設備：數位相機、電腦、CorelDraw軟體。

二、研究器材：方格紙、圓規、計算機、量角器、白紙、色紙、布尺、筆。

伍、研究過程與方法

首先，我們先以圓規在白紙或方格紙上，畫出我們所討論的圖形，再以紙筆或電子計算機算出圓周長，然後比較結果、分析、歸納和整理小結論。

一、計算大的半圓內有2個小的半圓之變化

(一) 同半徑小圓

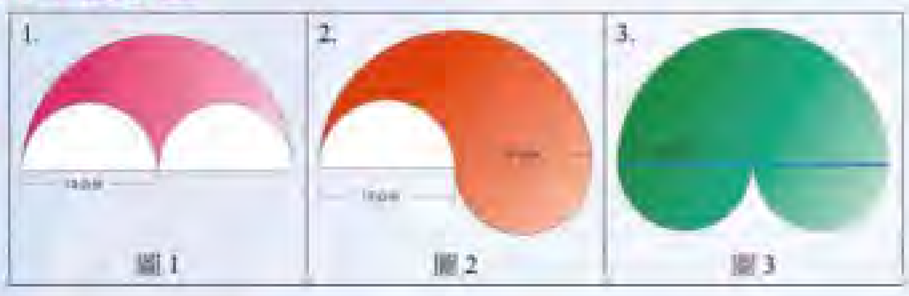


圖1　圖2　圖3

圖1、圖2和圖3結果如下：2個小的半圓之弧長和：

10 x 2 x 3.14÷2 =31.4(cm)

大的半圓之弧長：3.14x20÷2=31.4(cm)

2個小的半圓之弧長和=大的半圓之弧長

(二) 不同半徑小圓

圖4　圖5

圖4和圖5結果如下：2個小的半圓之弧長和：

（7+16）x π ÷2=11.5 π cm

大的半圓之弧長：23x π ÷2=11.5 π cm

2個小的半圓之弧長和=大的半圓之弧長

二、計算大的半圓內有多個小的半圓之變化

(一) 同半徑小圓

圖6　圖7　圖8　圖9

圖6、圖7、圖8和圖9結果如下：假設小的半圓直徑皆為10cm，大的半圓直徑為50cm，半徑為25cm。

小的半圓之弧長和：5x π x5=25 π cm

大的半圓之弧長：25x π =25 π cm

多個同徑小的半圓之弧長和=大的半圓之弧長

結論1：多個同半徑的小半圓，只要圓心落在大半圓的直徑上，那麼多個小半圓的圓弧長之和，會等於最外大的半圓之弧長。

(二) 不同半徑小圓

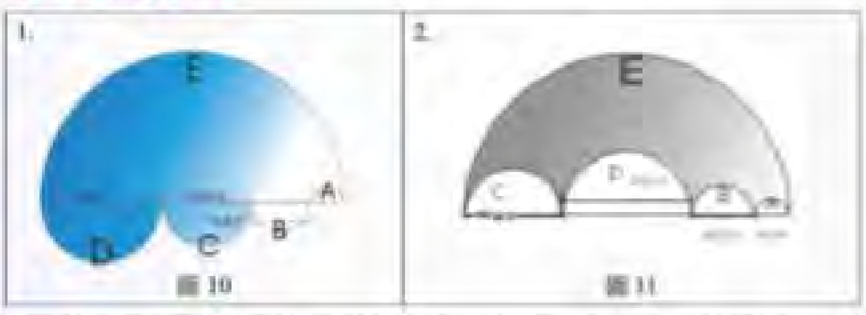


圖10　圖11

圖10和圖11結果如下：假設小的半圓A、B、C和D，直徑分別為5cm、10 cm、15 cm和20cm，大的半圓E直徑為50cm，半徑為25 cm。

小的半圓A、B、C和D之弧長和：

（2.5+5+7.5+10）x π =25 π cm

大的半圓E之弧長：25 π cm

多個不同徑的小半圓之弧長和=大的半圓之弧長

結論2：多個不同半徑的小半圓，圓心落在大半圓的直徑上，那麼多個不同半徑的小半圓之圓弧長總和，會等於最外大的半圓之弧長。

假設大的半圓半徑R，小的半圓半徑r，如圖12。

大的半圓之弧長：1/2x(2 π R)= π R

小的半圓之弧長和：2x1/2x(2 π r)=2 π r = π R

結論3：大的半圓之弧長會等於圓心在直徑上的小半圓之弧長和（圖12）。我們可以不必逐一計算每一個小的半圓之弧長和，只要計算大的半圓之弧長，就等於所有圓心在直徑上的小半圓之弧長和。

圖12

(三) 半圓換成圓

將半圓換成整個圓，圓中的圓彼此相切（圖13），如此我們可以很輕易的判斷出如下的關係，不必再行計算。2個紅色小圓圓周長的和

=1個綠色中圓的圓周長

4個紅色小圓圓周長的和

=2個綠色中圓圓周長的和

=1個黑色大圓的圓周長

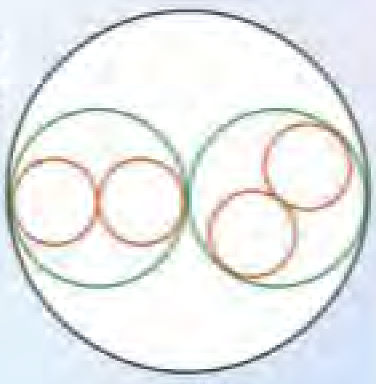


圖13

結論4：小圓的圓心均在最大圓的直徑上（圖14），不必計算，一眼即可看出，所有小圓的圓周和就是圖中最大圓的周長。

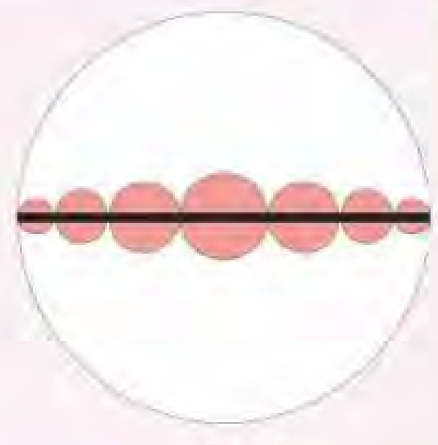


圖 14

(四) 例外的情形

延伸另一個概念，以C線段為主線時，一旦有斜邊A和B產生，由三角形的關係式，2邊之和必大於第3邊，如下圖15。我們很容易的判斷出，由A、B線段所構成的半圓圓周之和必大於C線段的半圓周長。

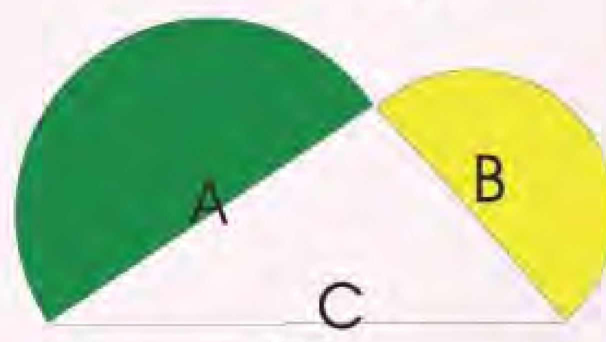


圖 15

結論5：線段A+B>C，2邊同時乘上π，πxA+πxB＞πxC，其意義是由A、B線段所構成的半圓圓周之和必大於C線段的半圓周長。

三、計算大的半圓內有不規則的圖形之變化

依據前述的研究結果，計算大的半圓內有不規則弧長圖形的變化時，大的半圓弧長是不是等於大的半圓內之不規則弧長的總和。因此，我們在方格紙上畫出最大半圓（綠線部份），利用生活中具有圓弧的東西，例如CD片，取一小段弧長作記號，以布尺量取該弧長長度，在大半圓內不斷重複畫出弧長，以首尾連接的方式畫在大半圓內，最後多少會出現餘弧線，只要對此餘弧線作記號，以布尺量取此長度即可（紅色部份），算出所有紅色部份之和，與最大半圓弧線，綠色部份作比較，如下圖16所示。

根據我們多次的運算，發現紅色弧長的總和，有時小於大半圓的弧長，有時大於大半圓的弧長，沒有等於的情況，但是在計算的過程中，雖然有測量誤差的存在，數據卻顯示出在此大半圓內，必有一條或更多條小弧長的總和與最大半圓的弧長相等。

圖 16：比較紅色與綠色弧長

四、計算大的半圓內有多個小的弧長之變化

(一) 同半徑弧長

以半徑7.5cm作2個小半圓，再以此半徑對O點作一圓弧AB，則弧CABD和大半圓的弧長CD的關係是大於、小於還是等於(圖17)，意即如圖18中的紅色弧長(弧CABD)和黑色弧長(弧CD)的大小比較。

圖 17

圖 18

利用量角器量取角AOB的角度 (60度)，量弧CA所對圓心角的度數（120度），再以所對全圓的比例算出部份的弧長，如下所示。

弧CA長 = 弧BD長

= (120 / 360) x 2 πr(r=半徑)

= (120 / 360) x 2 x 3.14 x 7. 5

=10πcm

弧AB長 = (60 / 360) x 2 x 3.14 x 7. 5

=2.5πcm

∴弧CABD = 2倍的弧CA+ 弧AB

= 12.5πcm

大的半圓弧長 = 15πcm大於(>)弧CABD(12.5πcm)

仔細觀察圖形，不必計算就可以判斷（圖19），因為同半徑作圖，所以線段CE=EA=AO=OB=BF=FD=7.5 cm，三角形OAE和三角形OBF都是正三角形，三邊都等長，所以圖17中，弧AB、弧AO和弧BO皆等長，都是同半徑的圓之60度所對的圓弧長。

上述結果得知：弧CABD(红色弧)必小於2個小圓的半圓周和

弧CABD(紅色弧)小於(<)弧CA+弧OA+弧OB+弧BD(圖17)

即弧CABD(紅色弧)必小於大圓的半圓周(圖18黑色弧)

結論6：當以2個或2個以上的等半徑作圓（圖20藍色弧），再以同半徑畫出紅線部份（圖20），形成頭尾連線是最大圓直徑的弧線圖形（圖21紅色弧），則此紅色弧線的長度必小於此弧的頭尾連線所形成最大 圓的半圓周長。

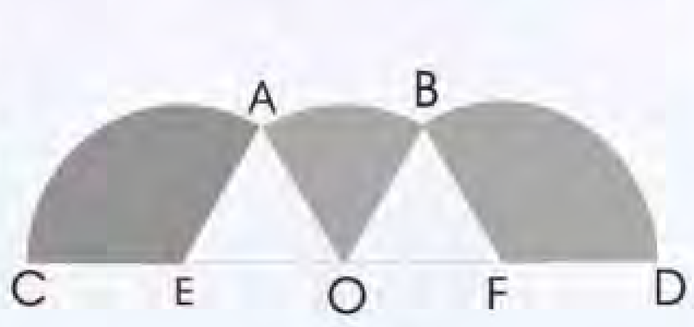


圖 19

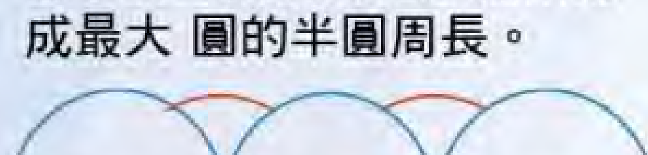


圖 20

圖 21

(二) 不同半徑弧長

線段OE=OF，以任意長度OC，對O點做弧CD（圖22），我們繪製不同角度的COD於方格紙中，嘗試找出弧ECDF和以線段OE為半徑所作半圓圓周之間的關係（圖22線段OC≠OA或OB）。在此，線段OC、角COD、角CAE都須以直尺、量角器實際量取，各依其所佔角度的比例算出弧長再相加。

研究結果顯示：弧ECDF一定會小於或接近於大圓的半圓周。仔細觀察圖22，隨著角COD不斷的放大，半徑OC也不斷的加長，當OC=OE時，弧ECDF就是最大圓的半圓周長。

結論7：由O點展開的弧長和（弧EC＋弧CD＋弧DF）必小於或等於大圓的半圓周長，當OC=OE時，由O點展開的弧長等於最大圓的半圓周長。

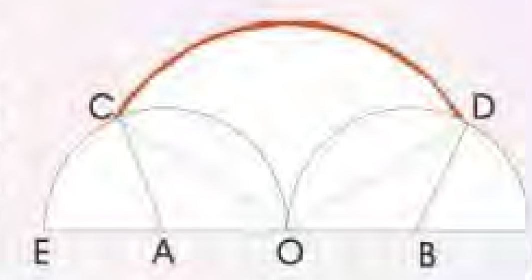


圖 22

(三) 同半徑弧長，半徑皆平行的組合

考慮平行底邊的情形，我們嘗試移動平行的位置，在圖23和圖24中，當平行底邊的線段到達BC時，經計算其綠色弧線長（圖23綠線部份）等於外圈大圓的半圓周長。仔細觀察圖24發現，在圖25中，長方形ABCD內部2個1/4圓周弧長正好是上方的1/2半圓。

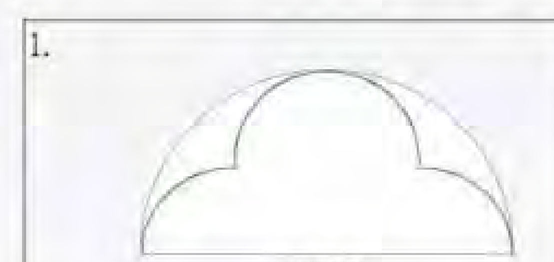


圖 23

圖 24

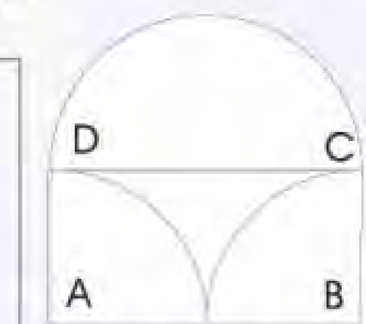


圖 25

在2個1/4圓的頂端的連線DC且該線必須平行底邊（DC//AB）的情形時（圖25），該線段DC所作之半圓圓周必等於2個1/4圓的圓周和，其同半徑弧長，半徑皆平行的組合如圖26所示，圖26最底端有5個小半圓構成，其所形成的半圓周長和=最外圈大圓的半圓周長，且將有無數條組合的弧線長與最外圈大圓的半圓周長相等。例如，其中一條組合的弧線長，如下圖27之橘色部分弧長=最外圈大圓的半圓周長。

圖 26

圖 27

結論8：同半徑弧長，半徑皆平行的組合（圖26），會有無數條組合的弧線長與最　外圈大圓的半圓周長相等。

(四) 不同半徑弧長，半徑皆平行的組合

圖28中，有A、B、C、D ，4個不同半徑的半圓，但B和D同半徑，以B、D頂點連線可形成E半圓，因此圓A、B、E、D所構成的弧長=最外圈大圓的半圓周長，如圖29之紅色弧長所示。

圖 28

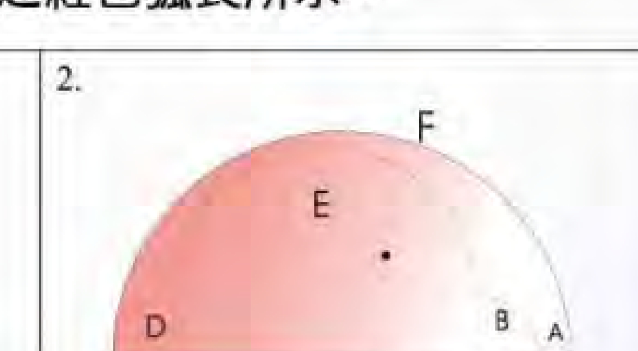


圖 29

$$紅弧線長 = \frac{1}{2}\cdot(2\pi\cdot r_E) + \frac{1}{4}[2\pi(r_D + r_B)] + \frac{1}{2}(2\pi\cdot r_A)$$

$$= \pi\cdot r_E + \pi\cdot\left(\frac{r_D+r_B}{2}\right) + \pi\cdot r_A$$

$$= \pi\left(r_E + \frac{r_D}{2} + \frac{r_B}{2} + r_A\right)$$

$$= \pi\cdot R_F$$

= 最外圈大圓的半圓周長（黑色弧線）

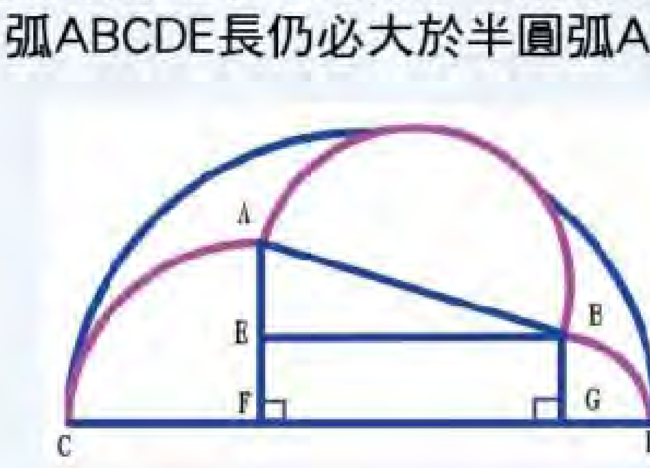
結論9：不同半徑弧長，半徑皆平行的組合（圖28），所形成的弧線長等於最外圈大圓的半圓周長。

(五) 不同半徑弧長，半徑沒有平行的情況

沒有平行底邊，反而出現斜邊時，則會出現弧長CABD大於最外圈大圓的半圓周長的情形，亦即弧長CABD必大於弧CD。

圖30中，如果不同半徑直接取頂端連線作一半圓，則所構成的弧線長CABD必大於弧CD（最外半圓周），這是因為出現斜邊，根據三角形2邊之和必大於第3邊，參考圖31，BC+CD>DB，因此它所構成的弧長（弧ABCDE）必大於底邊AE為直徑的半圓周長（弧AE），雖然小圓弧線有交叉現象，弧ABCDE長仍必大於半圓弧AE長。

圖 30



$$藍弧線 = \pi\cdot R = \pi\cdot(\gamma_{CF}+\gamma_{GD})$$

$$= \pi\cdot(\overline{FG}) = \pi\cdot(\overline{EB})$$

$$\because \overline{AB} > \overline{EB}$$

$$\therefore \pi\cdot\overline{AB} > \pi\cdot\overline{EB}$$

粉弧線 ＞ 藍弧線

結論10：不同半徑弧長，半徑沒有平行於底邊而出現斜邊時（圖30），所形成的弧線長大於最外圈大圓的半圓周長。

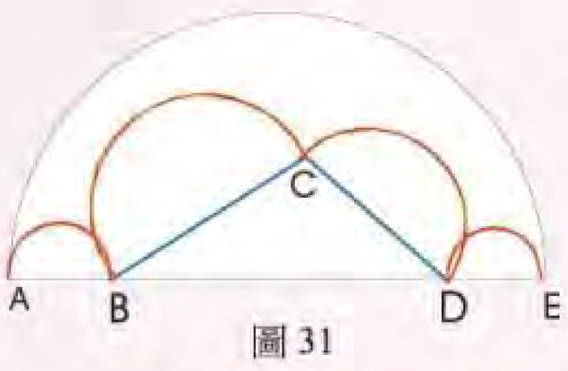


圖 31

$\because$ 黑色弧線 $=\pi\cdot R=\pi\cdot\frac{1}{2}(r_{AB}+r_{DE}+r_{BD})$

紅色弧線 $=\pi\cdot\frac{1}{2}(r_{AB}+r_{DE}+r_{BC}+r_{CD})$

又 $r_{BC}+r_{CD}>r_{BD}$（三角形2邊之和大於第3邊）

$\therefore$ 黑色弧線長<紅色弧線長

五、將半圓切割成很多段的扇形

嘗試將半圓切割成很多段的扇形，此扇形必須是通過圓心的圓心角所對的扇形，然後連接此扇形的弧線，如圖32所示，外圍綠色長方形的短邊為X半圓的直徑，將底部X半圓切成1/4個A與B，將B排成如下圖位置，由圖中可以看出，1/4圓A與B連接的弧長等於X的半圓周長，此時1/4圓A與B都有一邊平行於底邊。

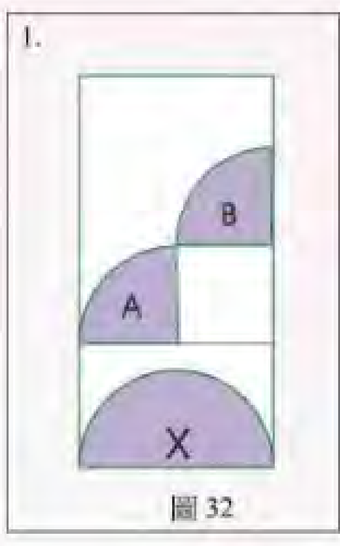


圖 32

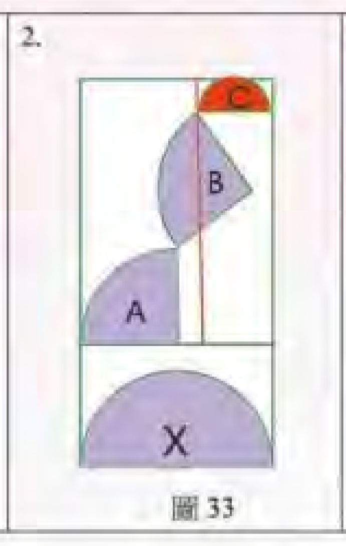


圖 33

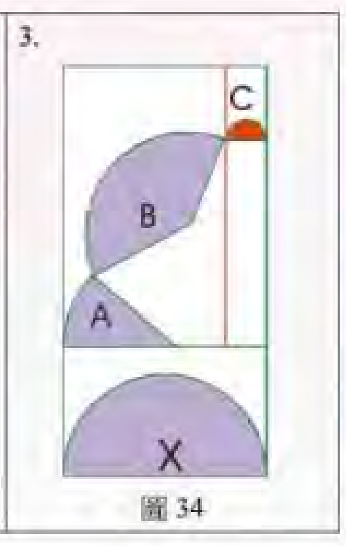


圖 34

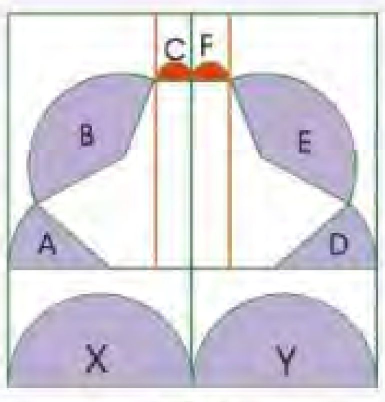


圖 35

若將1/4圓B排成不與底邊平行，出現傾斜的情形，如圖33所示，此時會多出一段線段C，此線段可以再構成一個半圓C，因多出半圓C，由圖33即可判斷出扇形A、B和C連接所構成的弧長必大於X半圓周長。

圖34為X半圓被切成任意的2塊不等大小的扇形A和B，切割的扇形A和B 必須通過圓心，將扇形B傾斜排列，仍會出現C，形成與圖33一樣的結果，如將圖34作對稱圖形，如圖35所示，則ABCFED的連接弧長必大於弧XY。

六、切割扇形平行排列的重要性

切割後的扇形，有一邊平行於底邊的排列方式很重要。我們使用電腦繪圖軟體CorelDraw畫圓、切割、複製、鏡像、移動和列印等功能，進一步來觀察驗證此結論。

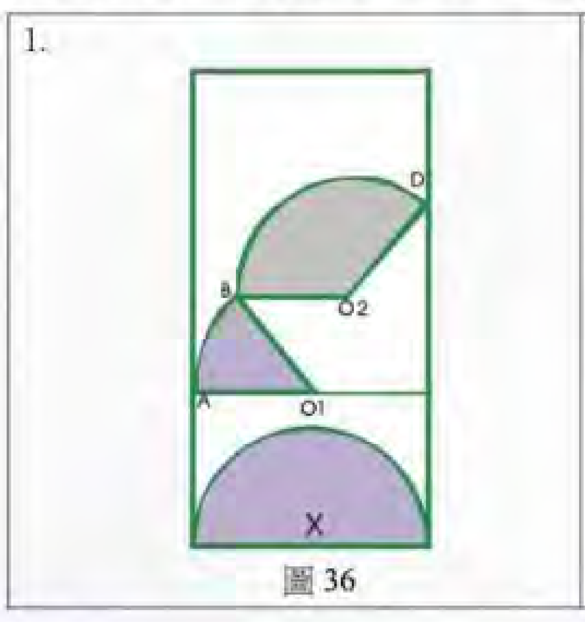


圖 36

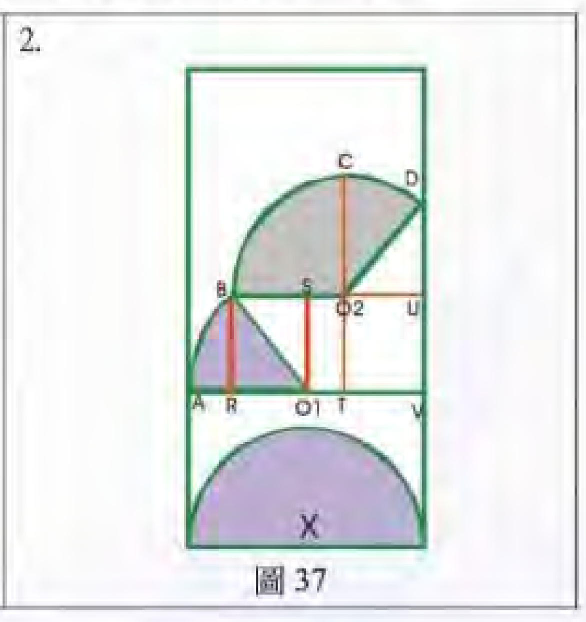


圖 37

圖36上半部份圖的扇形弧長是分割X半圓而來，切割的扇形必須通過圓心。在圖37中加上輔助線，線段BO2//AO1，角AO1B的大小是任意的，線段AR+線段BO2U=線段AV，則此2個扇形連接的弧長之和等於X半圓周長，即扇形弧AB +扇形弧BCD=X半圓周長。

$\because$ RO1=O2U=TV (三角形BRO1=三角形DUO2)

線段AR+RO1=半徑AO1=BO2=O1V=O1T+TV

$\therefore$ 線段AR=O1T (RO1=O2U=TV)

線段BU=RV AR+RV=直徑

結論11：利用切圓所形成的2塊扇形，扇形必須切過其圓心，只要線段AO1//BO2，則2塊扇形連接的弧長ABD等於X半圓周長。對扇形弧長ABD作鏡面對稱圖形，如圖38所示，則弧ABDEF長等於2個X半圓周長。

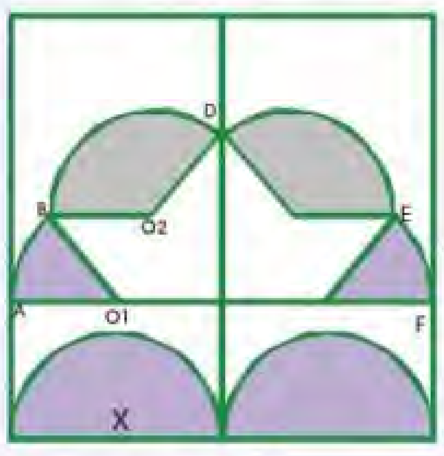


圖 38

將X半圓切割成三塊扇形，扇形必須切過其圓心，排列使線段AO1//BO2//DO3，如圖39所示，此排列會出現紅色半圓，使上半部份圖的4個扇形所連接之弧線長大於一個X半圓周長，所以一個半圓最多只能分成2塊扇形，使扇形的連接弧線長等於一個X半圓周長。

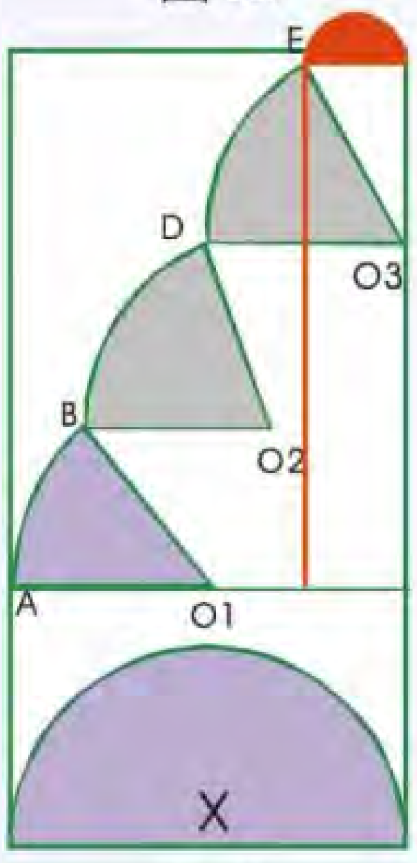


圖 39

陸、研究結果與討論

我們嘗試在一個半圓內尋找一條弧線，此一弧線可以是其他弧線所連接組成的，使得此連接的弧長與半圓的圓周長相等。

一、直線的情況

當我們在方格紙上畫出一條直線AB，在該線畫上若干個小圓，圓心落在該線段上，小半圓彼此成180度首尾相接，此線段是這些小圓的最大直徑和，如下圖40所示，則小半圓之圓弧長總和，會等於最外大的半圓之弧長。

圖 40

二、斜邊的情況

如果出現斜邊時，由三角形的邊長關係，二邊之和必大於第三邊，如下圖41所示，由線段A和線段B分別構成的半圓圓周之和必大於C線段的半圓周長。當有斜邊出現時，弧CABD之弧長大於線段CD所形成的最大半圓之弧長，如下圖42所示。

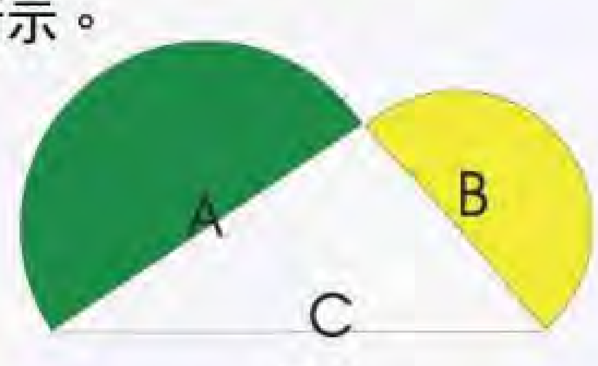


圖 41

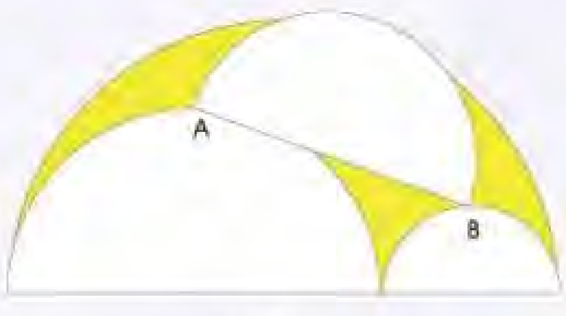


圖 42

三、在半圓內尋找一條弧線，此弧長會與該半圓之弧長相等，會發生在下列三種情況：

（一）不管小圓的半徑是否相同，只要他們的圓心落在最外半圓的直徑上，且彼此呈現首尾相接的情形，如圖43所示。

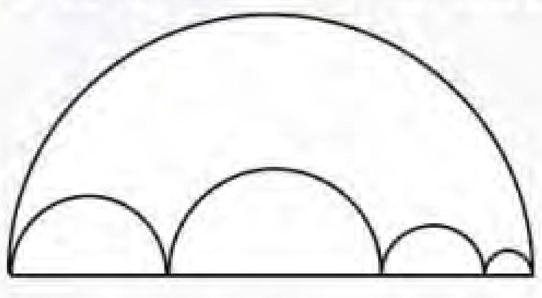


圖 43

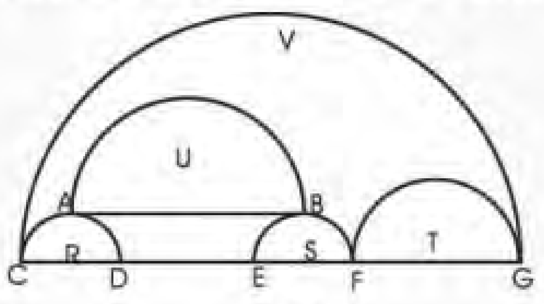


圖 44

（二）大半圓中的小半圓，圓心不在直線上，而小半圓的直徑必須相互平行，如下圖44所示。選取2個相同半徑的小圓如R、S，在其頂端的位置作線段AB，新的弧之直徑AB//CG，以線段AB作半圓U，則小圓R、U、S、T連接的弧長CABFG必等於最外大圓V的半圓周。

（三）將大半圓中的小半圓切割成2塊扇形，扇形有一邊平行於底邊的排列方式很重要。亦即任意分圓成2塊扇形，扇形必須切過其圓心、平行移動使扇形的其中一邊平行於大圓直徑，如圖45左半部分所示，將一半圓對其切成2塊扇形ABC與BDG後，使得線段BG//AC，則此時扇形弧長和ABD與線段AO所形成的半圓周等長。對左半部分以DO為對稱軸作對稱圖，如圖45所示，可知扇形弧長ABDEF與線段AF所構成的半圓周等長。

（四）將大半圓中的小半圓切割成3塊以上之扇形，平行移動使扇形的其中一邊平行於大圓直徑的排列方式，會多出一線段可再畫出弧線，使所有連接扇形弧長的總和大於最大半圓周，如圖39所示，所以一個半圓最多只能分成2塊扇形，使扇形的連接弧線長 等於一個半圓周長。

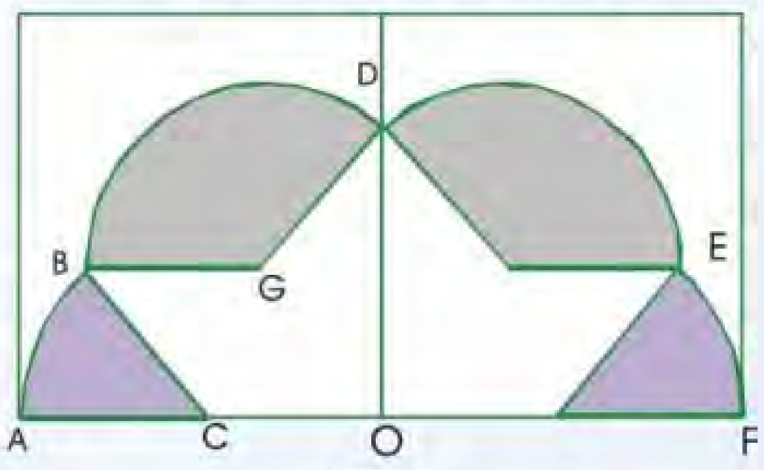


圖 45

四、規則可延伸到整個圓，如圖46所示，此時在直徑AB兩端所組成的小圓需構成一封閉曲線，所有小圓所形成的圓周長總和即為以AB為直徑所構成的圓周長，亦即所有小圓所形成的圓周長總和與最外圈大圓的周長相等。

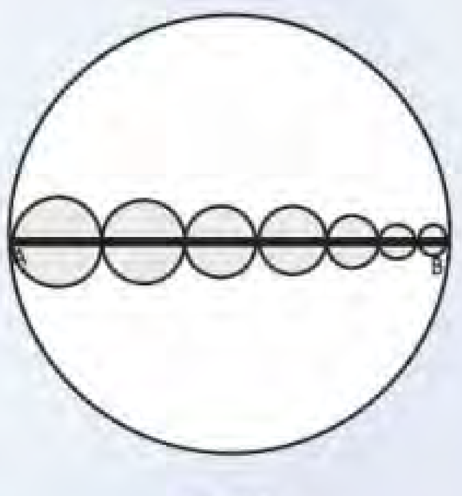


圖 46

柒、參考文獻

1、數學 (2016) (五下)－第三單元扇形。南一書局。

2、李老師 (2005)。哪一個圓周最長。成長園地－仁林文化3月號。