中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080410

骨色骨鑲--數字顏色條件化之骨牌鑲入問題探討

學校名稱：高雄市三民區十全國民小學

作者：	指導老師：
小五 許筠婕	宋雅筠
小五 林孟妍	楊惟婷
小五 姜家豐	
小五 江尚祐	

關鍵詞：骨牌、總和、聯立方程式

摘要

本研究源自書中《彩色骨牌》遊戲：一副骨牌 28 張，用七種不同顏色表示數字 0~6，同時在 7 × 8 矩形中以顏色次數加總提示每行、每列共 15 個總和關係，最後依提示計算出各顏色代表的數字，並用 28 張骨牌重現之。研究成果如下：

一、 聯立方程式能有效解決數字顏色條件化的計算，同時也可從遊戲設計者的觀點掌握，了解已知總和條件的設定應避免給予兩組以上的相似聯立方程式。

二、 彩色骨牌鑲入唯一解作法應事先排除會造成多重複鑲入方法的條件，如避免出現 2×2 方格內對角線數字相同。

三、 自創新式彩色骨牌數學問題，可藉由中央和 k 值與四核心矩形總和 S 值的關係：(骨牌總點數 ＋k) ÷ 4 = S，去推算規則、找到一般化的結果，且變化性可無限延伸。

壹、 研究動機

我們在《哈佛給學生做的 1001 個思維遊戲》一書中看到《彩色骨牌》此數學問題。以圖 1 為例說明遊戲規則：在此 7×8 矩形中，上方八列數字依序是 19、23、21、20、20、20、23、22 和右側七行數字分別是 21、36、14、24、22、29、22，圖中七種顏色各表示 0~6 某一個數字，遊戲目標要鑲入 28 張骨牌，使其骨牌點數滿足每一行列的總和條件設定。全部題目共 35 關，題目隨著題數增加而有不同已知條件的佈題類型變化，如下圖 2 所示。

圖 1：彩色骨牌題目示例

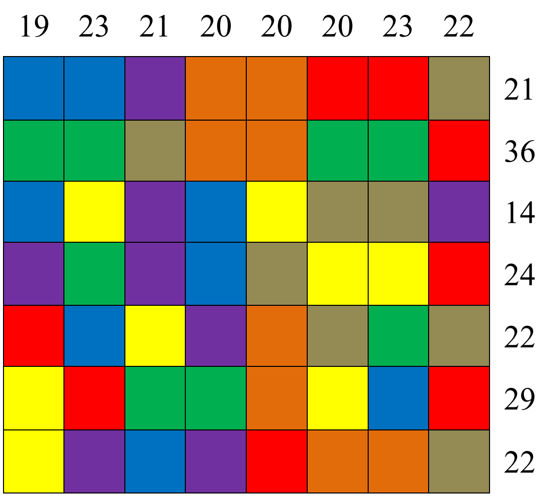
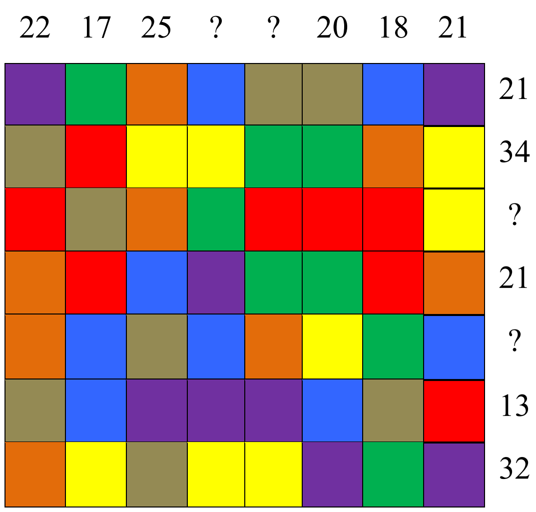


圖 2：已知條件漸少，問號替代總和之彩色骨牌示例



我們覺得很好奇，以圖 2 為例，明明少了 4 個總和提示，為什麼仍可以順利解題？本遊

戲除了在有限條件下要找出七種顏色各表示的數字外，還要找到適切的骨牌鑲入方式，題目又會因問號的出現而更複雜化，所以我們該怎麼做才能有系統找到解答呢？這學期數學課第九單元「怎樣列式」介紹以未知數列算式找關係、計算問題的代數概念，正好可運用此策略於彩色骨牌的解題上，於是，二話不說，我們動手嘗試。

貳、 研究目的

一、探討顏色代數化的解題有效策略。

二、探索彩色骨牌題目設計的數學原理。

三、應用彩色骨牌問題的數學原理，探究重新改變問題條件後其對應的數學意義。

參、 名詞定義

一、為代數解題，以英文字母命名各顏色：Y 表示黃色、B 表示藍色、R 表示紅色、G 表示綠色、P 表示紫色、Q 表示橘色、Br 表示棕色。

二、唯一性：具有唯一一個符合條件而可鑲入骨牌的排法位置。

三、逐步刪除法：扣除不可能相連的骨牌位置，再依其他相連可能性作骨牌鑲入的排法。

四、已知總和條件：7×8 彩色骨牌題目裡，每行或每列已揭示的骨牌總和。如下圖 3 所示，題目上方標示 22、17、25、20、18、21，和右側標示 21、34、21、13、32 即為本題的已知總和條件，且已知總和條件有 11 個。

圖 3：彩色骨牌圖例

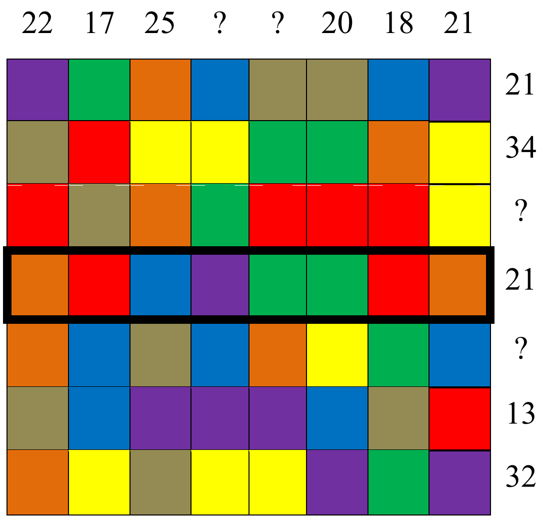
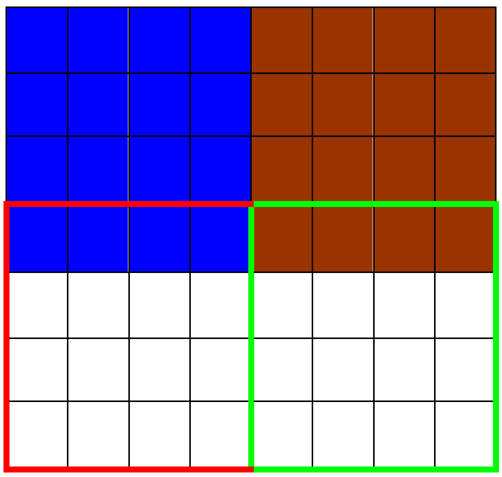


圖 4：四核心矩形示例說明



五、中央和：指 7 × 8 彩色骨牌中間橫排的總和，以 k 代稱。以此為中線可區分成上下兩個 3×8 的矩形。以上圖 3 為例說明，總和 k 值 21 是中央和(黑色框線表示之)。

六、四核心矩形已知總和條件(以上圖 4 為例示範)：以中央和為切分線，將 7 × 8 矩形區

分成四個總和皆相同的 4×4 正方形(藍 4×4 正方形、棕 4×4 正方形、紅框 4×4 正方形、綠框 4×4 正方形)，此為新式彩色骨牌的四核心矩形已知總和條件。假設四核心矩形總和為 S 值，四核心矩形最大總和簡稱 S’max、四核心矩形最小總和簡稱 S’min。

肆、 研究器材

骨牌、方格紙、彩色筆。

伍、 前導研究

一、文獻探討

若單就彩色骨牌的鑲入問題，我們發現多明諾骨牌(Domino)也曾探究過骨牌鑲入問題，孫文先 (2015)和褚冠宏、高健哲(2015)皆以「唯一性」作為骨牌鑲入的首要解題步驟，由這兩篇資料中，我們整理出啟發本研究的想法：**可以從「逐步刪除法」和「唯一性」找出骨牌鑲入的作法**。首先要找到判別 28 張骨牌的鑲入順序，以表 2 為例，56 個數字要配對成表 1 中 28 張不同的骨牌，先從「逐步刪除法」做思考。表 3 左上角$\boxed{3\ 6}$一定會有一組正解，故圖中任何一處不能再鑲入骨牌$\boxed{3\ 6}$，因此只有左下方只有$\boxed{3\ 0}$可考慮；因「逐步刪除法」的推論可知右上方不能鑲入$\boxed{3\ 6}$和$\boxed{3\ 0}$，所以$\boxed{3\ 3}$是唯一可選擇鑲入的第一張骨牌(藍色框所示)；因$\boxed{3\ 3}$骨牌鑲入確定後，右上角則只有$\boxed{4\ 4}$可選擇鑲入，此為第二張唯一性骨牌(綠色框所示)。

表 1：28 張骨牌示例圖

0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	2
1	2	3	4	5	6	2
2	2	2	2	3	3	3
3	4	5	6	3	4	5
3	4	4	4	5	5	6
6	4	5	6	5	6	6

表 2：缺乏骨牌鑲入的矩形

3	6	2	0	0	4	4
6	5	5	1	5	2	3
6	1	1	5	0	6	3
2	2	2	0	0	1	0
2	1	1	4	3	5	5
4	3	6	4	4	2	2
4	5	0	5	3	3	4
1	6	3	0	1	6	6

表 3：利用「唯一性」和「逐步刪除法」示例骨牌鑲入的作法

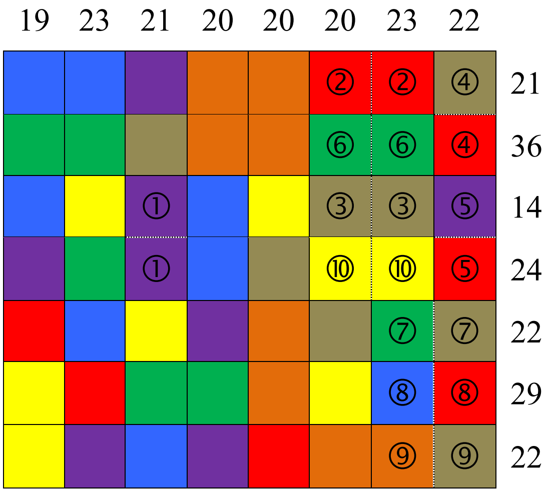
3	6	2	0	0	4	4
6	5	5	1	5	2	3
6	1	1	5	0	6	3
2	2	2	0	0	1	0
2	1	1	4	3	5	5
4	3	6	4	4	2	2
4	5	0	5	3	3	4
1	6	3	0	1	6	6

二、重新架構

然而，對照本研究中的問題情境，彩色骨牌問題以顏色取代以往傳統的數字提示，所以必須重新架構如何轉換問題情境的策略，才能幫助我們在複雜中撥雲見日：

(一) 依照多明諾骨牌鑲入策略的思維套入新問題，從原本已知條件的**數字**，改變成已知條件的**顏色**，我們轉換從顏色的對應關係著手進行彩色骨牌鑲入的順序找尋。七種顏色各表示 0~6 等七個數字，每一個顏色都必須配對到七個不同的顏色，雖然問題情境不同，但仍可觀察顏色的「唯一性」和「逐步刪除法」找出骨牌鑲入。

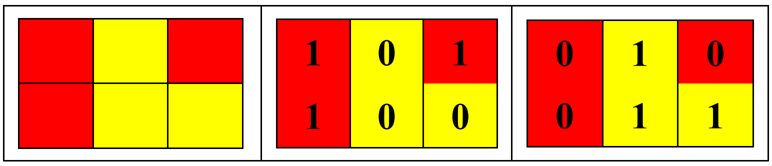
圖 5：彩色骨牌之骨牌鑲入示例



1. 「唯一性」：紫色兩色相連只有一個位置可鑲入，即為①①；紅色兩色相連只有一個位置可鑲入，即為②②；咖啡色兩色相連只有一個位置可鑲入，即為③③。
2. 「逐步刪除法」：因為②②位置確定，紅色+咖啡色的位置(④④)成唯一性；因為④④位置確定，紅色+紫色的位置(⑤⑤)成唯一性；因為⑤⑤位置確定，綠色兩色相連(⑥⑥)成唯一性；因為⑥⑥位置確定，紅色+咖啡色已配對，所以綠色+咖啡色(⑦⑦)成唯一性；因為⑦⑦位置確定，紅色+咖啡色已配對，所以紅色+藍色(⑧⑧)成唯一性；因為⑧⑧位置確定，咖啡色+橘色(⑨⑨)成唯一性；因為③③位置確定，黃色兩色相連(⑩⑩)成唯一性。

(二) 再者，多明諾骨牌的鑲入示例都是唯一種配對方法，但彩色骨牌的鑲入方式也是唯一種配對嗎？我們假設骨牌使用 0 0、0 1、1 1 此三張點數最小的骨牌，若問題情境僅用顏色提示，則實際可做出兩種不同的骨牌鑲入情形，如下表 4 所示。

表 4：2 × 3 問題情境中 3 張骨牌可能出現的兩種數字解答

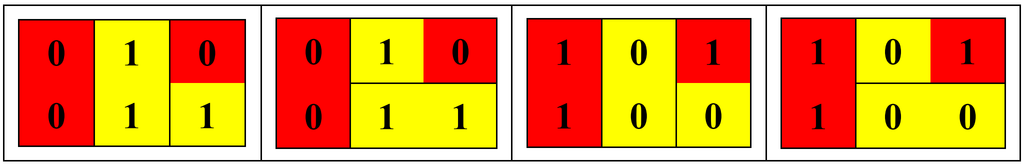


我們可知，彩色骨牌解題分兩個層次，一是骨牌鑲入問題、二是顏色各表示的數字。多明諾骨牌相關研究只能幫助我們了解骨牌鑲入的策略，對於如何確定各顏色所代表的數字一無所獲。**重要的是，此也會因顏色對應到不同數字的影響，而導致骨牌鑲入的選擇順序並非唯一的一種排法**。

(三) 另外，以本書所揭示的 35 關題目與解答，骨牌鑲入的排法都是唯一解，**所以從文獻中我們衍生出新的問題--彩色骨牌如何設計而能夠做出鑲入的唯一解**？從上述討論中我們能發現，在 2 × 2 的方格內，若對角線的數字相同，則骨牌的鑲入

排法非唯一種（可以直橫交換），如下表 5 所示。

表 5：2 × 3 問題情境中 3 張骨牌先後鑲入的四種可能解答

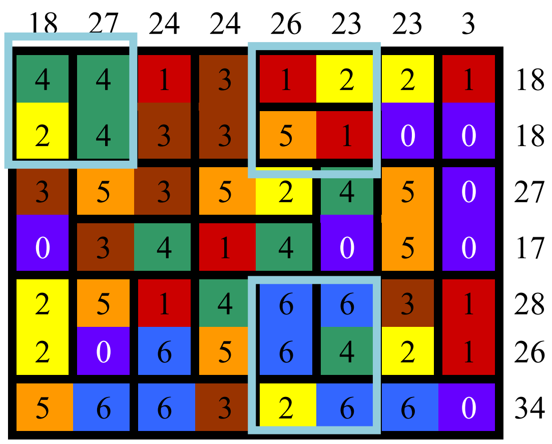


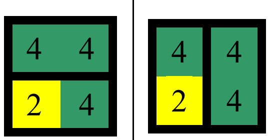
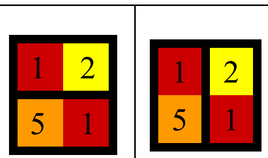
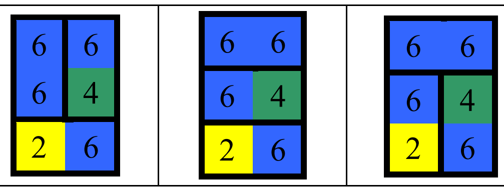
三、試探研究

在先前的文獻探討，我們了解到相關文獻中無法告訴我們，關於彩色骨牌的鑲入唯一解判別方法和數字顏色條件化計算問題，因此，我們開始針對此兩點問題先初步試探，以為正式研究預做準備。

(一) 骨牌鑲入有非唯一解之排法：當骨牌鑲入後位置符合以下條件，可以判別其鑲入方式並非唯一解(如下表 6)。我們重新檢視 35 題彩色骨牌，每一道解答中骨牌鑲入方式皆無符合下述 2x2 方格內數字特性，所以書中 35 題彩色骨牌的骨牌鑲入都只有一種作法，我們也推測此 35 題彩色骨牌的鑲入唯一解，皆是經過事前特殊設計、安排的鑲入特例。

表 6：骨牌鑲入探討分析



		
在 2x2 方格內若出現三個一樣的數字和一個不一樣的數字，則鑲入排法非唯一種。(可以直橫交換)	在 2x2 方格內若出現某一對角數字相同，則鑲入排法非唯一種。(可以直橫向交換)	第一張圖是能直橫向交換的骨牌 2×2 方格，當它直橫向交換後，會與第三張骨牌 $\boxed{2\ 6}$ 再形成一個可直橫向交換的 2×2 方格【中間的圖】，此時 $\boxed{4\ 6}$ 及 $\boxed{2\ 6}$ 便能再次進行直橫向交換【如第二、三張圖】。

(二) 從骨牌鑲入的排法思考，彩色骨牌題目設計的關鍵？我們縮小研究的範圍，假設骨牌數字從 0~6 的範圍縮小為 0~1，此時骨牌從原本的 28 張變成只有 $\boxed{0\ 0}$、$\boxed{0\ 1}$、$\boxed{1\ 1}$這三張骨牌，第一步我們先了解三張骨牌可排成 2 × 3 矩形後再進行探討。

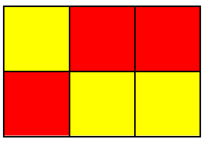
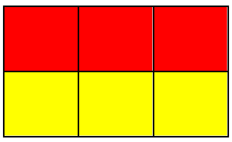
1.三張骨牌排法有 A、B 兩種，先討論 A 排法，將其三張骨牌依序鑲入，鑲入配對的總數為：(3 × 2 × 1) × 2 = 12。但 A 排法皆出現鑲入的非一解(在 2 × 2 的方格內對角線的數字相同，橘框線表示之)，所以並不適用於彩色骨牌的題目設計。

表 7：3 張骨牌數字填入的鑲入方法

A 排法	0 1 0 0 1 1	0 1 1 0 1 0	1 0 0 1 0 1	1 0 1 1 0 0	1 1 0 1 0 0	1 0 0 1 1 0
	0 1 0 1 1 0	1 1 0 0 1 0	0 0 1 1 0 1	1 0 1 0 0 1	0 0 1 0 1 1	0 1 1 0 0 1
B 排法	0 1 0 0 1 1	0 1 1 0 1 0	1 0 0 1 0 1	1 0 1 1 0 0	1 1 0 1 0 0	1 0 0 1 1 0
	0 1 1 1 0 0	1 1 1 0 0 0	0 0 0 1 1 1	1 0 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1	0 1 1 0 0 1

2.B 排法雖有 4 組(以粗紅、藍框線表示之) 鑲入的唯一解作法，但粗藍框線類型旋轉後與粗紅框線類型相同，所以視為同一組，因此實際只有 2 組唯一解的骨牌鑲入作法。然而，我們重新將此 2 組唯一解鑲入類型轉換成彩色骨牌的題目討論時，卻發現只有一組可成功，於是我們可知**<u>骨牌鑲入的排法確實會影響彩色骨牌題目的設計</u>**，因此 2 × 3 矩形因只有 1 組唯一解鑲入類型，可實作性低，較不適宜列入彩色骨牌的遊戲範疇裡。

表 8：2 × 3 彩色骨牌題目設計

0 1 1 1 0 0 1 1 1  2 1	1 1 1 0 0 0 1 1 1  3 0
唯一解鑲入方法	無法用「逐步刪除法」和「唯一性」找出骨牌鑲入的順序

3.顏色條件化的彩色骨牌問題情境，除了骨牌鑲入的探討外，還有需計算顏色所表示的數字。以表 8 條件而論，橫排 2 個紅色和 1 個黃色總和等於 2，這讓我們聯想到，能使用代數解聯立方程式的策略幫助我們計算彩色骨牌的問題。

$$\begin{cases} 2R + 1Y = 2 \ldots\ldots ① \\ 1R + 2Y = 1 \ldots\ldots ② \end{cases}$$

① – ② ⇨ R – Y = 1 代入①

∵ 骨牌點數只有 0、1 ∴ R = 1，Y = 0

(三) 綜合試探研究的結果可知，彩色骨牌問題的骨牌鑲入設計必須經過事前的設計，才可以有唯一解的鑲入順序，我們能利用「逐步刪除法」和「唯一性」找出正確骨牌的鑲入方法；彩色骨牌中各顏色表所示的數字，我們可用聯立方程式的作法幫助我們計算出答案。

陸、 研究過程與內容

研究目的一：探討顏色代數化的解題有效策略。

一、 由佈題方式分析此 35 關，可分成六種類型：

(一) 類型一：1~10 關共有 15 個總和已知條件。

(二) 類型二：11~15 關有 11 個總和已知條件(題目中有 4 個總和未知，以？表示之)，且已知總和條件的給取位置皆相同。

(三) 類型三：16~20 關有 9 個總和已知條件(題目中有 6 個總和未知)，且已知總和條件的給取位置皆相同。

(四) 類型四：21~25 關只有 7 個總和已知條件(題目中有 8 個總和未知)，且已知總和條件的給取位置皆位於同一側。

(五) 類型五：26~28 關只有 7 個總和已知條件(題目中有 8 個總和未知)，但已知總和條件的給取位置不太相同(？位置和 21~25 關不同)。

(六) 類型六：29~35 關的總和已知條件各有不同，最少出現 5 個總和已知條件(題目中有 10 個以下總和未知) ，且已知總和條件的給取位置並非相同。

二、 類型一$\boxed{\text{題目沒有問號}}$的彩色骨牌填數計算及鑲入，以下圖 6、表 9 示例。

(一) 以右側 7 個總和已知條件列出 7 個方程式，並計算出其顏色相對應的數字。

圖 6：彩色骨牌題目示例(無問號)

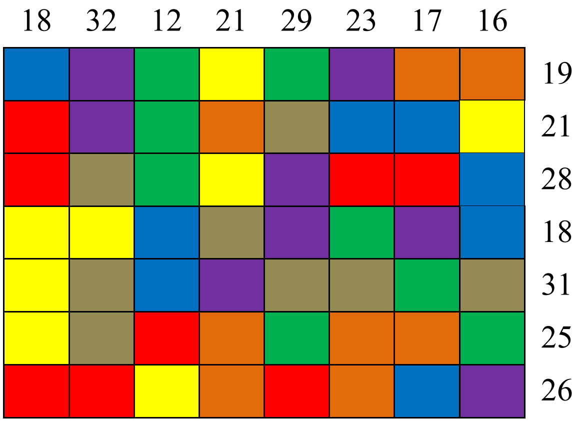


表 9：顏色符號化的列式關係

B	P	G	Y	Q	Br	R	和	式
1	2	2	1	2	0	0	19	①
2	1	1	1	1	1	1	21	②
1	1	1	1	0	1	3	28	③
2	2	1	2	0	1	0	18	④
1	1	1	1	0	4	0	31	⑤
0	0	2	1	3	1	1	25	⑥
1	1	0	1	2	0	3	26	⑦

1. 2×⑤ − ④ ⇨ G + 7Br = 44

   ∵ 數字受骨牌點數的條件限制，介於 0~6　∴ Br = 6，G = 2

2. 2×③ − ④⇨ G + Br + 6R = 38

   將 Br = 6，G = 2 代入得到 6R = 30　∴ R = 5

3. 2×② − ① ⇨ 3B + Y + 2Br + 2R= 23

   將 Br = 6，R = 5 代入得到 3B + Y = 1

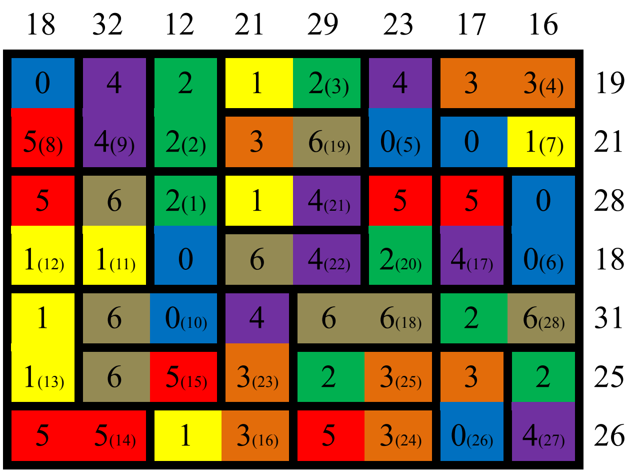
   ∴ B = 0，Y = 1

4. 將 B = 0，Y = 1，G = 2，R = 5，Br = 6 代入⑦得到 P + 2Q = 10

   ∵ 只剩數字 3、4 未知　∴ 代入本式可知，P = 4，Q = 3。

(二) 骨牌鑲入策略說明：

表 10：彩色骨牌題目示例(鑲入方法)



註：括號內的數字表示骨牌鑲入順序。

(1)0 2(唯一性)→ (2)2 2(唯一性)→ (3)1 2(唯一性)→ (4)3 3(逐步刪除法)→ (5)0 4(唯一性)→ (6)0 0(唯一性)→ (7)0 1(唯一性)→ (8)0 5(逐步刪除法)→ (9)4 4(唯一性)→ (10)0 6(逐步刪除法)→ (11)1 6(逐步刪除法)→ (12)1 5(唯一性)→ (13)1 1(唯一性)→ (14)5 5(唯一性)→ (15)5 6(唯一性)→ (16)1 3(唯一性)→ (17)4 5(逐步刪除法)→ (18)6 6(唯一性)→ (19)3 6(唯一性)→ (20)2 5(唯一性)→ (21)1 4(唯一性)→ (22)4 6(唯一性)→ (23)3 4(唯一性)→ (24)3 5(唯一性)→ (25)2 3(唯一性)→ (26)0 3(唯一性)→ (27)2 4(唯一性)→ (28)2 6(唯一性)

三、類型二**題目有 4 個問號**的彩色骨牌填數計算及鑲入，以下圖 7、表 11 示例。

(一) 從 11 個已知總和條件列出 7 個方程式，我們選取總和皆為 19、30、極端最大總和 32、最小總和 13、17，再計算出其顏色相對應的數字。

圖 7：彩色骨牌題目示例(4 個問號)

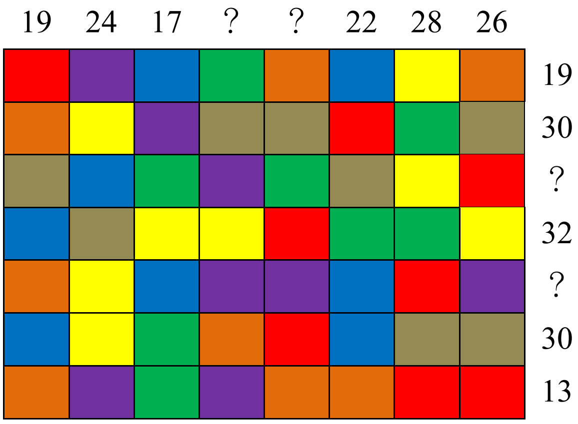


表 11：顏色符號化的列式關係

B	P	G	Y	Q	Br	R	和	式
2	0	0	0	3	1	1	19	①
2	1	1	1	2	0	1	19	②
1	0	2	3	0	1	1	32	③
0	1	1	1	1	3	1	30	④
2	0	1	1	1	2	1	30	⑤
0	2	1	0	3	0	2	13	⑥
2	1	3	1	0	0	0	17	⑦

1. ⑤ − ④⇨ $2B - P - Br = 0$，$P + Br = 2B$
2. ② − ④⇨ $2B + Q - 3Br = -11$，$2B = 3Br - Q - 11$

   將 $P + Br = 2B$ 代入可得 $P + Br = 3Br - Q - 11$，$P + Q + 11 = 2Br$

   ∵ 數字受骨牌點數的條件限制，介於 0~6， $P + Q \in Z^{+}$

   ∴ $Br = 6$，$P + Q$ 有兩種可能

   當 $P = 1$，$Q = 0$ 或當 $P = 0$，$Q = 1$

   將 $P = 1$，$Q = 0$ 或 $P = 0$，$Q = 1$ 代入 $P + Br = 2B$ 可知 $P = 0$，$Q = 1$ 為正解

   另再將 $P = 0$，$Br = 6$ 代入 $P + Br = 2B$ 可得 $B = 3$
3. ② − ①⇨ $P + G + Y - Q - Br = 0$，$P + G + Y = Q + Br$

   將 $P = 0$，$Q = 1$，$Br = 6$ 代入可得 $0 + G + Y = 1 + 6$，$G + Y = 7$

   $G + Y$ 有兩種可能

   當 $G = 2$，$Y = 5$ 或當 $G = 5$，$Y = 2$

   因剩餘 R 可知 $R = 4$
4. 將 $P = 0$，$Q = 1$，$B = 3$，$R = 4$，$Br = 6$ 代入⑥$2P + 1G + 3Q + 2R = 13$，

   ∵ $G = 13 - (0 + 3 + 8) = 2$

   ∴ $Y = 5$

(二) 骨牌鑲入策略說明：

表 12：彩色骨牌題目示例(鑲入方法)

19	24	17	14	18	22	28	26	
4	0(7)	3	2	1(14)	3	5	1(25)	19
1	5	0(8)	6	6(13)	4(21)	2	6(24)	30
6(27)	3(26)	2	0	2	6	5(22)	4	28
3	6(28)	5(23)	5(15)	4(17)	2	2(9)	5(12)	32
1	5	3	0	0(4)	3	4	0	16
3(20)	5(18)	2(19)	1	4(5)	3	6(10)	6(11)	30
1	0(16)	2	0(6)	1	1(1)	4	4(2)	13

註：括號內的數字表示骨牌鑲入順序。

(1)1 1(唯一性)→ (2)4 4(唯一性)→ (3)3 3(唯一性)→ (4)0 0((唯一性)→ (5)1 4(唯一性)→ (6)0 2(唯一性)→ (7)0 4(逐步刪除法)→ (8)0 3(逐步刪除法)→ (9)2 2(唯一性)→ (10)4 6(逐步刪除法)→ (11)0 6(唯一性)→ (12)4 5(唯一性)→ (13)6 6(逐步刪除法)→ (14)1 2(唯一性)→ (15)0 5(逐步刪除法)→ (16)0 1(唯一性)→ (17)2 4(唯一性)→ (18)5 5(逐步刪除法)→ (19)2 3(唯一性)→ (20)1 3(唯一性)→ (21)3 4(唯一性)→ (22)5 6(唯一性)→ (23)2 5(逐步刪除法)→ (24)2 6(逐步刪除法)→ (25)1 5(唯一性)→ (26)3 5(逐步刪除法)→ (27)1 6(唯一性)→ (28)3 6(唯一性)

四、類型四**題目有 8 個問號**的彩色骨牌填數計算及鑲入，以下圖 8、表 13 示例。

(一) 以右側 7 個總和已知條件列出 7 個方程式，並計算出其顏色相對應的數字。

圖 8：彩色骨牌題目示例(8 個問號)

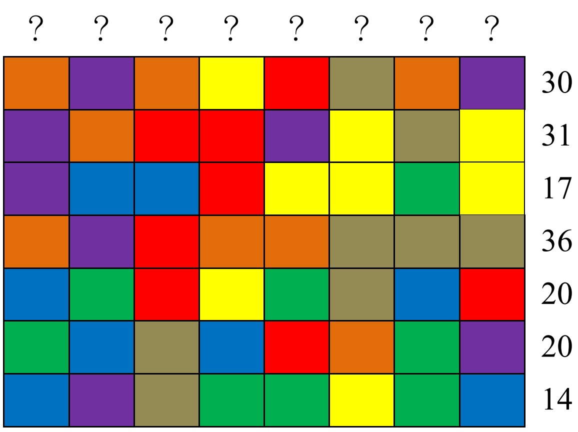


表 13：顏色符號化的列式關係

B	P	G	Y	Q	Br	R	和	式
0	2	0	1	3	1	1	30	①
0	2	0	2	1	1	2	31	②
2	1	1	3	0	0	1	17	③
0	1	0	0	3	3	1	36	④
2	0	2	1	0	1	2	20	⑤
2	1	2	0	1	1	1	20	⑥
2	1	3	1	0	1	0	14	⑦

1. 2×④－② ⇨ $5Q + 5Br - 2Y = 41$，$5Q + 5Br = 41 + 2Y$

   ∵ 數字受骨牌點數的條件限制，介於 0~6

   ∴ $Q + Br = (41 + 2Y) \div 5$ 需整除，$Y = 2$

2. ②－① ⇨ $Y - 2Q + R = 1$，將 $Y = 2$ 代入可得 $R - 2Q = -1$

   ∵ $R \neq Q$ 且 $Q \neq 2$

   ∴ 可知 $Q = 3$，$R = 5$

3. ⑦－⑥ ⇨ $G + Y - Q - R = -6$，$G + Y = Q + R - 6$

   將 $Y = 2$，$Q = 3$，$R = 5$ 代入可得 $G = 0$

4. ⑦－⑤ ⇨ P＋G－2R＝-6

將 G＝0，R＝5 代入可得 P＝4

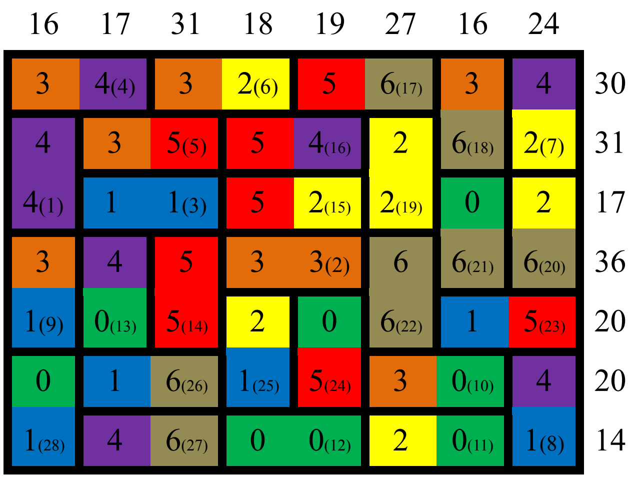
5. ⑥－③ ⇨ G－3Y＋Q＋Br＝3

將 G＝0，Y＝2，Q＝3 代入可得 Br＝6

可知最後一數 B＝1

(二) 骨牌鑲入策略說明：

表 14：彩色骨牌題目示例(鑲入方法)



註：括號內的數字表示骨牌鑲入順序。

(1)4 4(唯一性)→ (2)3 3(唯一性)→ (3)1 1(唯一性)→ (4)3 4((唯一性)→ (5)3 5(唯一性)→ (6)2 3(唯一性)→ (7)2 4(逐步刪除法)→ (8)1 4(逐步刪除法)→ (9)1 3(逐步刪除法)→ (10)0 3(逐步刪除法)→ (11)0 2(唯一性)→ (12)0 0(逐步刪除法)→ (13)0 4(逐步刪除法)→ (14)5 5(唯一性)→ (15)2 5(逐步刪除法)→ (16)4 5(唯一性)→ (17)5 6(唯一性)→ (18)3 6(唯一性)→ (19)2 2(唯一性)→ (20)2 6(逐步刪除法)→ (21)0 6(唯一性)→ (22)6 6(唯一性)→ (23)1 5(唯一性)→ (24)0 5(逐步刪除法)→ (25)1 2(唯一性)→ (26)1 6(逐步刪除法)→ (27)4 6(唯一性)→ (28)0 1(唯一性)

五、類型六**題目有 10 個問號**的彩色骨牌填數計算及鑲入，以下圖 9、表 15 示例。

(一) 利用唯一的 5 個總和已知條件列出 5 個方程式，並計算出其顏色相對應的數字。

圖 9：彩色骨牌題目示例(10 個問號)

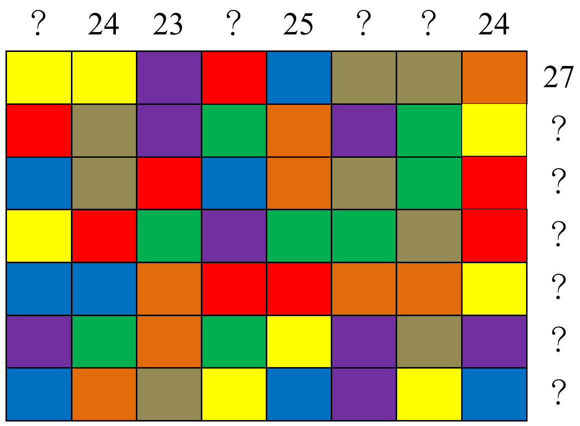


表 15：顏色符號化的列式關係

B	P	G	Y	Q	Br	R	和	式
1	0	1	1	1	2	1	24	①
0	2	1	0	2	1	1	23	②
2	0	1	1	2	0	1	25	③
1	1	0	2	1	0	2	24	④
1	1	0	2	1	2	1	27	⑤

1. ⑤－④ ⇨ 2Br－R＝3，2Br＝3＋R

∵ 數字受骨牌點數的條件限制，介於 0~6

∴ 有兩種可能⇨當 R＝1，Br＝2 或當 R＝5，Br＝4

2. ⑤－① ⇨ P－G＋Y＝3，P＋Y－3＝G

3. 2×④－③ ⇨ 2P＋3Y＋3R－G＝23

將 P＋Y－3＝G 代入得到 2P＋3Y＋3R－(P＋Y－3)＝23⇨ P＋2Y＋3R＝20

∵ 可知 R≠1 ，R＝5，由此可知 Br＝4

∴ P＋2Y＝5，關係有兩種可能⇨當 Y＝1，P＝3 或當 Y＝2，P＝1

4. 將 P＋Y－3＝G 代入此兩種可能⇨當 Y＝1，P＝3 或當 Y＝2，P＝1

可知 Y＝2，P＝1 方可成立　可得 G＝0，Q＝6　可知最後一數 B＝3

(二) 骨牌鑲入策略說明：

表 16：彩色骨牌題目示例(鑲入方法)

19	24	23	16	25	17	20	24	
2	2(1)	1	5	3(24)	4	4(23)	6	27
5	4(27)	1(26)	0	6	1(19)	0	2(18)	19
3	4(28)	5	3(25)	6	4	0(22)	5	30
2	5(7)	0(12)	1	0(20)	0(21)	4	5(6)	17
3	3(2)	6	5(5)	5	6(8)	6(17)	2	36
1	0(4)	6(10)	0	2(11)	1	4(14)	1(16)	15
3	6(3)	4	2(9)	3	1(13)	2	3(15)	24

註：括號內的數字表示骨牌鑲入順序。

(1)$\boxed{2\ 2}$(唯一性)→(2)$\boxed{3\ 3}$(唯一性)→(3)$\boxed{3\ 6}$(逐步刪除法) →(4)$\boxed{0\ 1}$(唯一性) → (5)$\boxed{1\ 5}$(逐步刪除法)→ (6)$\boxed{5\ 5}$(逐步刪除法)→ (7)$\boxed{2\ 5}$(逐步刪除法)→ (8)$\boxed{5\ 6}$(逐步刪除法)→ (9)$\boxed{2\ 4}$(逐步刪除法)→ (10)$\boxed{6\ 6}$逐步刪除法)→ (11)$\boxed{0\ 2}$(唯一性)→ (12)$\boxed{0\ 5}$(唯一性)→ (13)$\boxed{1\ 3}$(唯一性)→ (14)$\boxed{1\ 4}$(唯一性)→ (15)$\boxed{2\ 3}$(唯一性)→ (16)$\boxed{1\ 2}$(唯一性)→ (17)$\boxed{4\ 6}$(唯一性)→ (18)$\boxed{2\ 6}$(逐步刪除法)→ (19)$\boxed{1\ 6}$(逐步刪除法)→ (20)$\boxed{0\ 6}$(逐步刪除法)→ (21)$\boxed{0\ 4}$(唯一性)→ (22)$\boxed{0\ 0}$(唯一性)→ (23)$\boxed{4\ 4}$(唯一性)→ (24)$\boxed{3\ 5}$(唯一性)→ (25)$\boxed{0\ 3}$(唯一性)→ (26)$\boxed{1\ 1}$(唯一性)→ (27)$\boxed{4\ 5}$逐步刪除法)→ (28)$\boxed{3\ 4}$(唯一性)

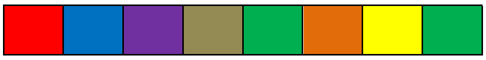
六、根據不同已知條件的彩色骨牌填數解題，我們發現：

(一) 原彩色骨牌題目需要解出 7 個未知的顏色各代表什麼數字，雖然解七元一次方程式需要 7 個聯立方程式才能得到唯一解的作答，但因骨牌點數限制了計算的範圍(數字介於 0~6)，所以有時解題並非皆需使用 7 個聯立方程式才可得知各顏色所表示的數字，可使用不等個聯立方程式計算出顏色所代表的數字。這也說明了為什麼當彩色骨牌各行列總和出現問號時，表面看似侷限了解題的線索，實則不影響解題。

(二) 彩色骨牌有效解題 7 個聯立方程式而找出 7 個未知數的策略有：

1. 若某一行或某一列的已知總和條件涵括 7 個不同顏色，即可套用快速解法策略 I ：**已知總和條件－全部點數和(0+1+2+3+4+5+6)＝ 多餘一色之數**。

圖 10：快速解法策略 I 示範使用



24

原式 $= R + B + P + 2G + Q + Y + Br = 24$

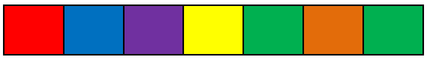
$\because\ R + B + P + G + Q + Y + Br = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

$\therefore$ 將上式代回原式 $= (R + B + P + G + Q + Y + Br) + \mathbf{G} = 24$

於是可知 $G = 24 - 21 = 3$

2. 若某一行或某一列的已知總和條件涵括 6 個不同顏色，即可套用快速解法策略 II ：**多餘一色之數 ＋ 全部點數和(0+1+2+3+4+5+6) =已知總和條件 ＋ 未知第 7 色之數(多餘一色之數－未知第 7 色之數 ＝ 已知總和條件－21)**。

圖 11：快速解法策略 II 示範使用



24

原式 $= R + B + P + 2G + Q + Y = 24$

$\because\ R + B + P + G + Q + Y + Br = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

$\therefore$ 將上式代回原式 $= (R + B + P + G + Q + Y + \mathbf{Br}) + G = 24 + \mathbf{Br}$

於是可知 $21 + G = 24 + Br$，經整理後可得 $G - Br = 3$

3. 若解聯立方程式後找出兩數之差為 1，可知此兩數是連續數關係，透過表列法可逐步理解 7 種顏色之間的數字大小關係，便可推知各顏色所表示的數字。例：已知 $Q - R = 1$；$R - P = 3$；$Br - R = -2$；$Q - G = -1$，可推測

Y/B	>	G	>	Q	>	R	>	Y/B	>	Br	>	P
未知								未知				

4. 若有 7 個以上的總和已知條件，以盡量列出相同總和的方程式較佳，因為解聯立方程式的過程中可較快得到數群之間的關係。
5. 若有 7 個以上的總和已知條件，以盡量列出極端總和(例：最大總和或最小總和)的方程式較佳，因為計算聯立方程式的過程中可較快預測出各顏色的大小關係和可能性。
6. 善用骨牌數字有其範圍性的特徵，先列出各數字之間的可能關係後，再逐一代入方程式中討論，可縮小預測或嘗試的時間與次數。

研究目的二：探索彩色骨牌題目設計的數學原理。

一、第 35 題的佈題，可讓玩家藉由 5 個已知條件即可計算出各顏色所表示的顏色，我們好奇，已知條件的安排是否事前經過安排才可以達到順利解題的目的，於是我們接續研究已知條件的設計是否有其數學原理。

(一) 根據我們觀察 31~35 題的佈題方式而推測，當未知條件越多(即問號越多)，已知條件的設定似乎有其規則性，此設定的原則可能包含：

1. 至少有 2 個相同的已知條件總和。
2. 每個已知條件總和所提示的該行或該列中，至少包含 5 個不同顏色。
3. 已知條件總和所提示的每一行或每一列中，至少都有 1 個重複的顏色。

(二) 從 35 題挑選有 15 個已知總和條件的彩色骨牌進行假設分析 5 個已知總和條件選取的設計原則：

圖 12：彩色骨牌題目示例(無問號)

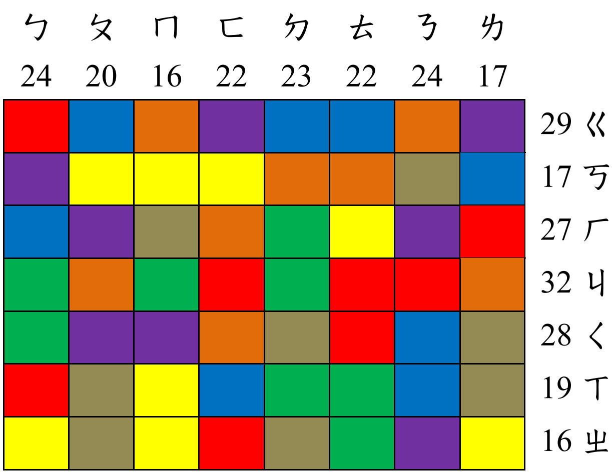
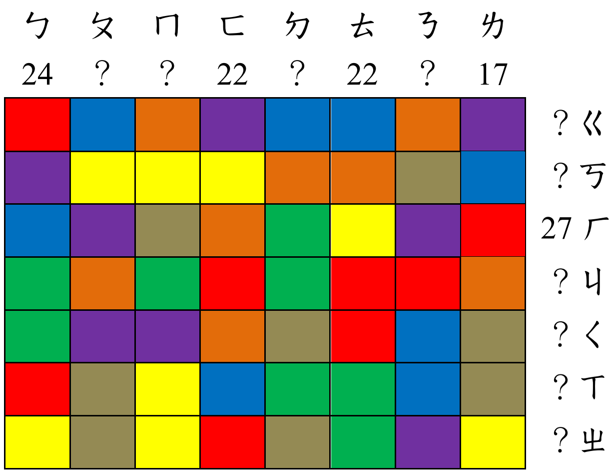


圖 13：彩色骨牌題目調整後示例(10 個問號)



1. 隨意選取五列已知總和條件且符合上述所觀察到的假設問號設計原則，以列出五則方程式。

表 17：五項已知條件方程式

B	P	G	Y	Q	Br	R	和	式
1	1	2	1	0	0	2	24	①
1	1	0	1	2	0	2	22	②
1	0	2	1	1	0	2	22	③
1	1	0	1	1	2	1	17	④
1	2	1	1	1	1	1	27	⑤

(1) 利用快速解題策略 II 代入⑤⇨ Br+ 21 = 17 + G，Br – G = -4

(2) 利用快速解題策略 I 代入⑤⇨ P+ 21 = 27，P = 6

(3) ① – ③ ⇨ P – Q = 2，Q = 4

(4) ① – ② ⇨ 2G – 2Q = 2，G – Q = 1，G = 5，也可知 Br = 1

(5) ③ – ④⇨ 2G – P – 2Br + R = 5，2G + R = 5 + 2Br + P

將 P = 6、G = 5、Br = 1 代入可得 10 + R = 5 + 2 + 6，R = 3

(6) 根據上述關係列出各顏色之間的數字大小關係(表 18)：顏色 Y 和顏色 B 在此五個已知提示中無法確定知道所表示的數字，因為只能找出兩色之間的關係，但卻不能得到唯一解。

表 18：已知五色之間的大小關係

P	G	Q	R	**Y/B**	Br	**Y/B**
6	5	4	3	**2**	1	**0**

2. 由本例子可知，已知總和條件的安排是經過事前的精心安排，否則容易在越少已知總和條件的提示下(尤其是只有 5 個已知總和條件)，發生所得的解答非唯一解之情形。

(三) 我們比較第 35 題和本題的 5 個已知總和條件，我們以列式來討論兩題之間的出題關聯性：

表 19：兩題 5 個已知總和條件比較

改變設計之 5 個已知總和條件方程式

B	P	G	Y	Q	Br	R	和	式
1	1	2	1	0	0	2	24	①
1	1	0	1	2	0	2	22	②
1	0	2	1	1	0	2	22	③
1	1	0	1	1	2	1	17	④
1	2	1	1	1	1	1	27	⑤

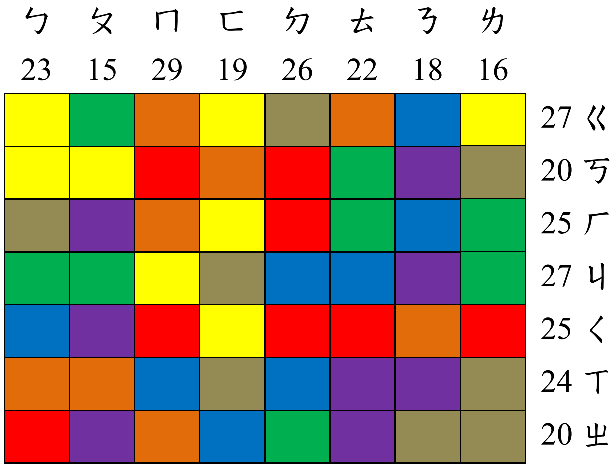
第 35 題 5 個已知總和條件方程式

B	P	G	Y	Q	Br	R	和	式
1	0	1	1	1	2	1	24	①
0	2	1	0	2	1	1	23	②
2	0	1	1	2	0	1	25	③
1	1	0	2	1	0	2	24	④
1	1	0	2	1	2	1	27	⑤

以顏色 B 和顏色 Y 而言，此 5 個方程式是相似方程式，對此 2 色是無意義的，所以無法得知 2 色所表示的數字，因此我們可得知一個重要的發現：**兩顏色不可在 5 個已知條件的關係中重複出現相同條件**。

二、我們從研究目的一的研究發現可知，一道彩色骨牌可能只透過 4 個已知條件可得知 7 種顏色所表示的數字，而 1~35 關題目中，最少已知條件的給予是 5 個總和(第 35 題)，我們進一步變化問題條件，根據原題目去改變已知條件而減少至給予 4 個總和已知條件，接續了解彩色骨牌背後數學問題設計原理。我們先從原 35 題庫挑選一則有 15 個已知總和條件的彩色骨牌進行分析：

圖 14：彩色骨牌題目示例(無問號)



(一) 從 15 個已知條件逐步刪除只剩 4 個已知條件，掌握要素應包含上述三個條件。

1. 本題中有 3 組總和是相同(ㄍㄐ總和 27、ㄏㄑ總和 25、ㄎㄓ總和 20)。
2. 本題中，每一行列中有包含 5 個以上的顏色線索者有：ㄅ(總和 23)、ㄊ(總和 22)、ㄍ(總和 27)、ㄎ(總和 20)、ㄏ(總和 25)、ㄐ(總和 27)、ㄑ(總和 25)、ㄓ(總和 20)。
3. 挑選 4 個已知條件須包含重複顏色，配對情形有兩種：總和相同搭配總和相同(如：27-27-25-25；27-27-20-20；25-25-20-20)、總和相同搭配兩個不同總和(如：27-27-25(ㄏ)-20(ㄎ)；27-27-23-22)，全部組數有 42 組。計算方式如下：

   任意選取 4 數：$(8 \times 7 \times 6 \times 5) \div (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 70$

   應扣除無配對相同總和之選取：$(2 \times 2 \times 2 \times 2) + (3 \times 2 \times 2 \times 1) = 28$

   任意選取 4 數 – 應扣除無配對相同總和之選取 $= 70 - 28 = 42$

(二) 4 個已知條件並非都能計算出與原題目答案相同之 7 個顏色各表示的數字(見下表 20)，由此可知：

1. 已知條件(即已知總和位置)的設計並非是隨意安排，否則容易造成線索不足

而非唯一解的可能。

2. **兩顏色不可在 4 個已知條件的關係中重複出現相同條件(如紅色框畫記，表示兩顏色的數字可互相替代)。**

表 20：4 種已知條件配對可能與各顏色關係表示

已知條件配對	B	P	G	Y	Q	Br	R	已知條件配對	B	P	G	Y	Q	Br	R
3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1	2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1
2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1	G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0	2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0	G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4	G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1	2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1
3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0	2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1	2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1
Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1	2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4

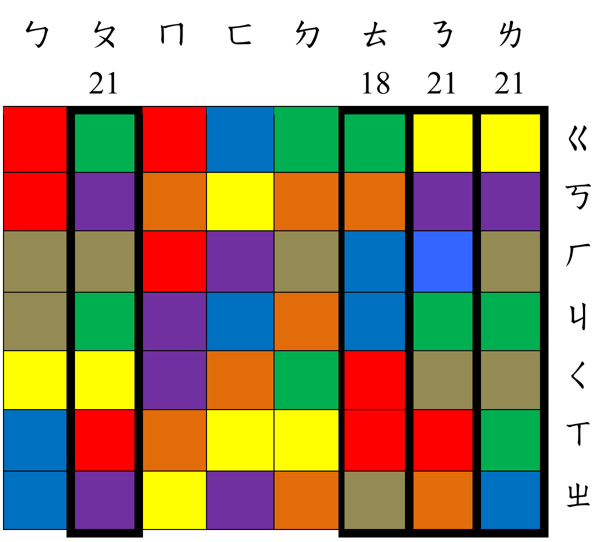
B⇔Q

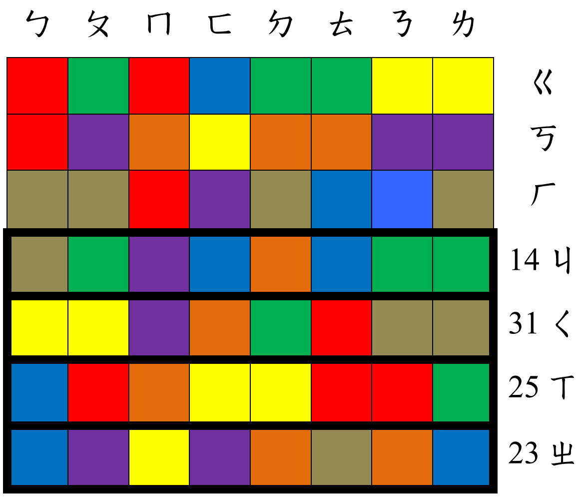
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1	2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4	2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0	2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0	2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0 P⇔Br	1	2	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0	2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0	2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4	2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0 B⇔Q	1	1	0	4	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1	2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1
2G+Q+B+2P+R=22	1	2	2	0	1	0	1	G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0	2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1	Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1
Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0	G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2	2Y+G+Q+Br+P+2R=20	0	1	1	2	1	1	2
Y+2G+Q+Br+B+P+R=25	1	1	2	1	1	1	1	3Y+G+2Q+Br+B=27	1	0	1	3	2	1	0
Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0 B⇔Q	1	1	0	4	Y+3G+Br+2B+P=27	2	1	3	1	0	1	0
2Y+G+Q+Br+B+R=23	1	0	1	2	1	1	1	Y+Q+B+P+4R=25	1	1	0	1	1	0	4
G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1	G+Q+2Br+B+2P+R=20	1	2	1	0	1	2	1

(三) 我們重新修正已知總和條件的設定，增加『**兩顏色不可在已知條件的關係中重複出現相同條件，無論給予多少個已知條件，都只列出此兩顏色的相似方程式，唯一能知道此兩色數字之間的相依關係，無法確定兩色所表示之數字**』。

三、由上述研究可知，若 4 個已知總和條件的給予沒有涉及相似方程式的條件限制，則可順利解出 7 種顏色各自所表示的顏色，那麼深入探討若減少至 $\boxed{\text{3 個已知條件總和}}$，其解題結果的數學意義。

表 21：3 種已知條件配對可能與各顏色關係表示





- 每個已知條件總和所提示的該行或該列中，至少包含 5 個不同顏色 ⇨ㄆ、ㄊ、ㄋ、ㄌ、ㄐ、ㄑ、ㄒ、ㄓ等八個方程式出現 5 種以上(含 5 種)不同的顏色。
- 至少有 2 個相同的已知條件總和 ⇨ ㄆ、ㄋ、ㄌ總和條件皆為 21，但**ㄋ出現 7 個不同顏色，而 7 種顏色總和 21，此為無意義方程式**，所以 2 相同已知總和條件選擇為ㄆ+ㄌ。
- 已知條件總和所提示的每一行或每一列中，至少都有 1 個重複的顏色。
- 兩顏色不可在已知條件的關係中重複出現相同條件。

ㄆ + ㄌ +(ㄊ、ㄐ、ㄑ、ㄒ、ㄓ)之配對情形		B	P	G	Y	Q	Br	R
ㄆ-ㄌ-ㄊ	2P + 2G + Y + Br + R = 21(ㄆ)	0	2	2	1	0	1	1
	B + P + 2G + Y + 2Br = 21(ㄌ)	1	1	2	1	0	2	0
	2B + G + Q + Br + 2R = 18(ㄊ)	2	0	1	0	1	1	2
答案	有兩種可能解答	0	1	2	6	3	5	4
		2	3	0	6	1	5	4
ㄆ-ㄌ-ㄐ	2P + 2G + Y + Br + R = 21(ㄆ)	0	2	2	1	0	1	1
	B + P + 2G + Y + 2Br = 21(ㄌ)	1	1	2	1	0	2	0
	2B + P + 3G + Q + Br = 14(ㄐ)	2	1	3	0	1	1	0
答案	條件不足，聯立方程式計算後只可得知 Y+Br≧10							
ㄆ-ㄌ-ㄑ	2P + 2G + Y + Br + R = 21(ㄆ)	0	2	2	1	0	1	1
	B + P + 2G + Y + 2Br = 21(ㄌ)	1	1	2	1	0	2	0
	P + G + 2Y + Q + 2Br + R=31(ㄑ)	0	1	1	2	1	2	1
答案	條件不足，聯立方程式計算後只可得知 Y+Br≧10							
ㄆ-ㄌ-ㄒ	2P + 2G + Y + Br + R = 21(ㄆ)	0	2	2	1	0	1	1
	B + P + 2G + Y + 2Br = 21(ㄌ)	1	1	2	1	0	2	0
	B + G + 2Y + Q + 3R = 25(ㄒ)	1	0	1	2	1	0	3
答案	條件不足，聯立方程式計算後只可得知 P≦4							
ㄆ-ㄌ-ㄓ	2P + 2G + Y + Br + R = 21(ㄆ)	0	2	2	1	0	1	1

	$B+P+2G+Y+2Br=21$(ㄌ)	1	1	2	1	0	2	0
	$2B+2P+Y+2Q+Br=23$	2	2	0	1	2	1	0
答案	條件不足，聯立方程式計算後只可得知 R 必為偶數							

(一) 由上表可知，若彩色骨牌題目只有給予三個已知總和條件，無論是否有達到已知條件的出題原則，仍會受限於條件的線索不足，而造成多組解答或無法確切計算出各顏色所表示的數字。

(二) 我們可知：在符合已知總和條件出題原則的前提下，一道彩色骨牌題目最少需給予四個以上的已知總和條件，才可使玩家順利完成解題。

研究目的三：應用彩色骨牌的數學原理，探究重新改變問題條件後其對應的數學意義。

一、已知全部 28 張骨牌總和 168，我們假設 7×8 矩形中每一行、每一列的總和皆相同，此彩色骨牌遊戲條件設定是可行。

圖 15：每行每列總和相同之彩色骨牌示例

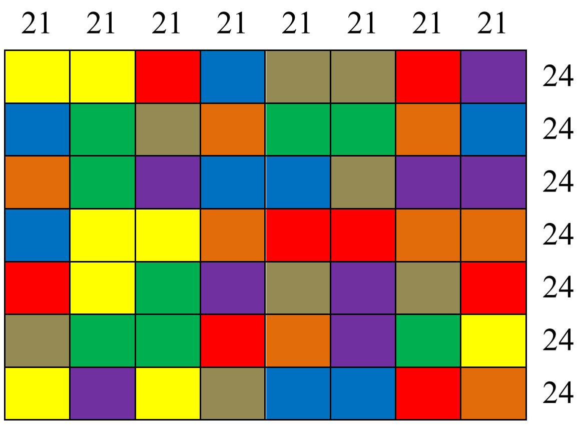


圖 16：每行每列總和相同之彩色骨牌解答示例

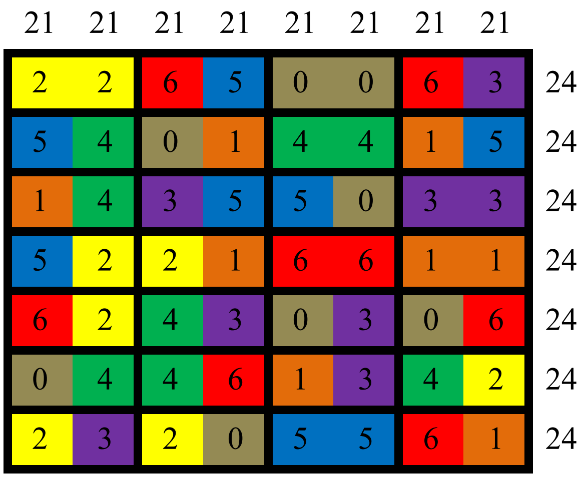


表 22：七項已知條件方程式

B	P	G	Y	Q	Br	R	和	式
1	1	0	2	0	2	2	24	①
2	0	3	0	2	1	0	24	②
2	3	1	0	1	1	0	24	③
1	0	0	2	3	0	2	24	④
0	2	1	1	0	2	2	24	⑤
0	1	3	1	1	1	1	24	⑥
2	1	0	2	1	1	1	24	⑦

由快速策略可知⑥⇨$24 + B = 21 + 2G$ ⇨ $3 + B = 2G$

③ − ② ⇨ $3P - 2G - Q = 0$ ⇨ $3P = 2G + Q$ ⇨$3P = 3 + B + Q$

⑦ − ⑥ ⇨ $Y + 2B = 3G$，將⑥帶入本式可得 ⇨ $Y + 2 \times (2G - 3) = 3G$

$G = 6 - Y$，代入⑥ ⇨ $3 + B = 2 \times (6 - Y)$，$B + 2Y = 9$

可得知關係有兩種可能⇨當 $Y = 2$，$B = 5$ 或當 $Y = 4$，$B = 1$

⑦ − ① ⇨ $B + Q - Br - R = 0$⇨$B + Q = Br + R$　∵ $G = 2$ 或 4

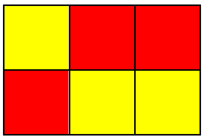
代入 $3P = 3 + B + Q$，知 $P = 3$，$G = 4$，$Y = 2$，$B = 5$， $Q = 1$

再代入 $B + Q = Br + R$⇨當 $Br = 0$，$R = 6$ 或當 $Br = 6$，$R = 0$

將數字關係代入④ ⇨ $Br = 0$，$R = 6$

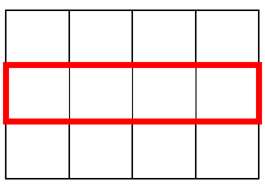
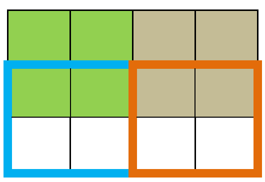
二、改變彩色骨牌問題條件，我們融合魔方陣的概念，自行設計一套新的彩色骨牌遊戲。因為從探索研究中可知，當骨牌點數只有 0~1，骨牌只會出現$\boxed{0\ 0}$、$\boxed{0\ 1}$、$\boxed{1\ 1}$此三張，如果轉換為彩色骨牌的題目，我們發現 2 × 3 矩形可藉由中央和區分成兩個 2 × 2 正方形，且此兩個 2 × 2 正方形的總和皆相同。

表 23：2 × 3 新式彩色骨牌問題定義

0 1 1 1 0 0 1 1 1  2 1	1 0 0 1 0 1 ←中央和=1	↓2 × 2 正方形總和=2 1 0　　1 0 0 1　　0 1 0 1　　0 1

如果當骨牌點數只有 0~2，骨牌會出現$\boxed{0\ 0}$、$\boxed{0\ 1}$、$\boxed{0\ 2}$、$\boxed{1\ 1}$、$\boxed{1\ 2}$、$\boxed{2\ 2}$等六張，可排成一個 3 × 4 矩形，中央和可區分成四個 2 × 2 正方形(簡稱此四個 2 × 2 正方形為四核心矩形，如下表 24 所示)。我們假設四核心矩形的總和皆相同是新式彩色骨牌問題條件之前提，繼續探討新問題情境的數學意義。

表 24：3 × 4 新式彩色骨牌問題定義

	
紅色粗線表示中央和	四核心矩形

(一)新式彩色骨牌問題遊戲規則：視未知數的顏色個數給予已知總和條件(六個未知數顏色，則給予六個已知總和條件)，但已知條件必須包含中央和與四核心矩形總和此五個總和。透過計算找出各顏色所表示的數字和骨牌鑲入方法。

(二)設定 3×4 矩形中央和的數字，已知六張骨牌總點數和為若中央和為 12，因考慮四核心矩形總和皆相同，假設中央和 0，四核心矩形總和⇨$12 \div 4 = 3$。

1. 中央和若為 1，計算四核心矩形總和算式 $= (12+1) \div 4$，無法使四核心矩形總和相同。
2. 我們可得知：若四核心矩形總和皆相同，中央和需為 4 的倍數。
3. 以新式 3×4 彩色骨牌為例，當中央數與四核心矩形總和的關係如下：

   當中央和=0，$12 \div 4 = 3$

   當中央和=4，$(12+4) \div 4 = 4$

   當中央和=8，$(12+8) \div 4 = 5$
4. 實際操作 3×4 矩形發現，只有中央和 4、四核心矩形總和 4 方可順利排出，但以彩色骨牌遊戲設計原理而論,若將 3×4 矩形轉換為數字顏色條件化的問題情境，當已知總和條件只有四核心矩形總和與中央和時，因重複出現相似方程式緣故，所以 3×4 矩形無法成為新式彩色骨牌遊戲題目。

圖 17：3×4 彩色骨牌題目

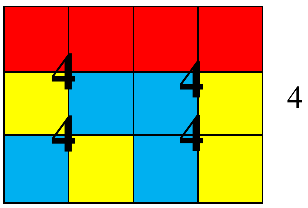


圖 18：3×4 彩色骨牌解答

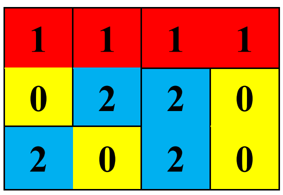


表 25：3×4 新式彩色骨牌題目限制

R	Y	B	和	式
2	1	1	4	①
0	2	2	4	②

由①可知，$R \neq 2$

由②可知，$R \neq 0$ $\therefore R = 1$

但此兩式對 Y、B 而言是相似方程式，所以 3×4 矩形無法做出新式彩色骨牌的題目設計

(三)我們繼而探討骨牌點數 0~3、0~4、0~5、0~6、0~N 等條件下，新式彩色骨牌遊戲題目設計的奧秘，並將研究結果紀錄於下表 26、表 27：

表 26：新式彩色骨牌研究結果彙整

骨牌點數可用範圍	可用張數	骨牌總點數	圍成矩形類型	四核心矩形類型	中央和 k 值 (間隔 4)	四核心矩形總和 S 值	成功總數
0~3	10	30	4 × 5	2 × 3	2~10	8~10	3
0~4	15	60	5 × 6	3 × 3	0~24	15~21	7
0~5	21	105	6 × 7	3 × 4	3~27	27~33	7
0~6	28	168	7 × 8	4 × 4	0~48	42~54	13
0~7	36	252	8 × 9	5 × 6	0~56	63~77	15
…	…	…	…	…	…	…	…
0~N	註 1	註 2	(N+1)×(N+2)	註 3	註 4	註 5	註 6

註 1：$(N + 1) \times (N + 2) \div 2$

註 2：$N \times (N + 1) \times (N + 2) \div 2$

註 3：❶若 N 為偶數，四核心矩形必為正方形，正方形邊長關係 $= (N + 2) \div 2$

❷若 N 為奇數，四核心矩形必為長方形，短邊$=(N + 1) \div 2$；長邊$=(N + 1) \div 2 + 1$

註 4：**❶若 $N \times (N + 1) \times (N + 2) \div 2$ 為偶數<u>且 N 也為偶數</u>，此值必為 4 的倍數**

k 值屬於在一個範圍內等差 4 的數列，其 k 值範圍 $0 \leqq k1\sim kn \leqq N \times (N + 2)$

當 $k1 = 0$　(表示第一個中央和)

$k2 = 4$　(表示第二個中央和)

$k3 = 8$　(表示第三個中央和)

…

$kn = N \times (N + 2)$　(表示第 n 個中央和)

❷若 $N \times (N + 1) \times (N + 2) \div 2$ 為偶數<u>但 N 卻為奇數</u>，且此值為 4 的倍數時

k 值屬於在一個範圍內等差 4 的數列，其 k 值範圍 $0 \leqq k1\sim kn \leqq N \times (N + 1)$

當 $k1 = 0$　(表示第一個中央和)

$k2 = 4$　(表示第二個中央和)

$k3 = 8$　(表示第三個中央和)

…

$kn = N \times (N + 1)$　(表示第 n 個中央和)

❸若 $N \times (N + 1) \times (N + 2) \div 2$ 為偶數<u>但 N 卻為奇數</u>，且此值不為 4 的倍數時

或若 $N \times (N + 1) \times (N + 2) \div 2$ 為奇數<u>且 N 也為奇數</u>，且此值不為 4 的倍數時

k 值屬於在一個範圍內等差 4 的數列，其 k 值範圍 $0 \leqq k1\sim kn \leqq N \times (N + 1)$

當 k1 = a　　(表示第一個中央和)

k2 = a + 4 (表示第二個中央和)

k3 = a + 8 (表示第三個中央和)

…

kn = a + (n − 1) × 4 < N × (N + 1)　(表示第 n 個中央和)

註 5：S = (骨牌總點數 + k) ÷ 4

∵ k 值有其範圍性　∴ S 值相對也有範圍性

❶若(N + 1) × (N + 2) ÷ 2 為偶數且為 4 的倍數(但 N≠3)

S’ min = N × (N + 1) × (N + 2) ÷ 8

S’ max = N × (N + 1) × (N + 2) ÷ 8 + (kn ÷ 4)

N × (N + 1) × (N + 2) ÷ 8 ≦ S ≦ N × (N + 1) × (N + 2) ÷ 8 + (kn ÷ 4)

❷若(N + 1) × (N + 2) ÷ 2 為奇數

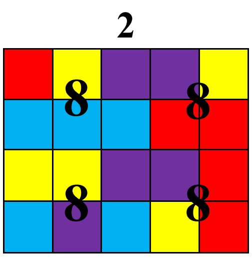
S’ min = 〔N × (N + 1) × (N + 2) + a〕÷ 4

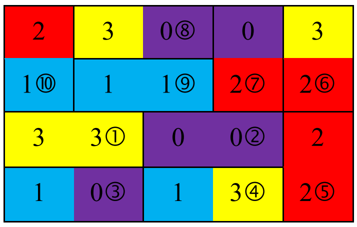
S’ max = 〔N × (N + 1) × (N + 2) + kn〕÷ 4

〔N × (N + 1) × (N + 2) + a〕÷ 4 ≦ S ≦〔N × (N + 1) × (N + 2) + kn〕÷ 4

註 6：S’max − S’min + 1

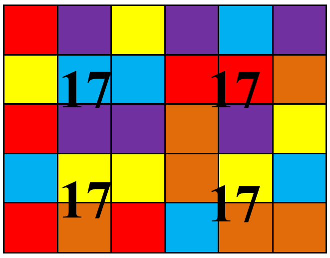
表 27：新式彩色骨牌題目與解題示例

<table>
<tr><th>點數範圍</th><th>彩色骨牌題目</th><th>彩色骨牌解答</th><th>新式彩色骨牌題目解答</th></tr>
<tr>
<td>0~3</td>
<td>

已知四核心矩形總和 9
中央和 = 6</td>
<td>

鑲入順序：$\boxed{3\ 3}$(唯一性)→
$\boxed{0\ 0}$(唯一性)→ $\boxed{1\ 0}$(唯一性)→
$\boxed{1\ 3}$(唯一性)→ $\boxed{2\ 5}$(唯一性)→
$\boxed{2\ 3}$(唯一性)→ $\boxed{0\ 2}$(唯一性)→
$\boxed{0\ 3}$(唯一性)→ $\boxed{1\ 1}$(唯一性)→
$\boxed{1\ 2}$(唯一性)</td>
<td>
<table>
<tr><th>R</th><th>Y</th><th>B</th><th>P</th><th>和</th><th>式</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>8</td><td>①</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>8</td><td>②</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>8</td><td>③</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>④</td></tr>
</table>
④ ⇨B + P = 1，P =1–B
③–①⇨R + P = 2B
將④代入上式⇨R+1=3B
∵ 點數介於 0~3
∴ B=1，R=2
③ − ②⇨2R=Y+B，Y=3
剩餘一色 P=0</td>
</tr>
</table>

0~4



8

已知四核心矩形總和 17
中央和 ＝8

3	1(14)	0	1(15)	4	1(6)
0	4	4(1)	3	3(2)	2(7)
3(13)	1	1(3)	2	1(5)	0
4	0	0(4)	2(10)	0	4(8)
3(12)	2	3(11)	4	2	2(9)

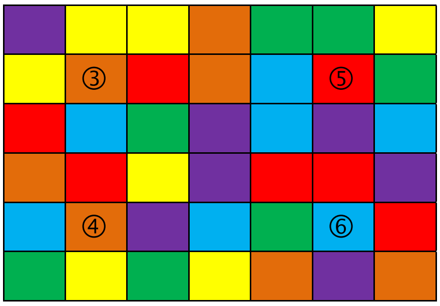
鑲入順序：(1) $\boxed{4\ \ 4}$ (唯一性)→(2) $\boxed{3\ \ 3}$ (唯一性)→(3) $\boxed{1\ \ 1}$ (唯一性)→(4) $\boxed{0\ \ 0}$ (唯一性)→(5) $\boxed{2\ \ 1}$ (逐步刪除法)→(6) $\boxed{1\ \ 4}$ (逐步刪除法)→(7) $\boxed{0\ \ 2}$ (唯一性)→(8) $\boxed{0\ \ 4}$ (逐步刪除法)→(9) $\boxed{2\ \ 2}$ (唯一性)→(10) $\boxed{2\ \ 4}$ (逐步刪除法)→(11) $\boxed{2\ \ 3}$ (唯一性) →(12) $\boxed{3\ \ 4}$ (唯一性) →(13) $\boxed{0\ \ 3}$ (唯一性) →(14) $\boxed{1\ \ 3}$ (唯一性) →(15) $\boxed{0\ \ 1}$ (唯一性)

R	Y	B	P	Q	和	式
2	2	2	3	0	17	①
3	2	1	2	1	17	②
2	1	1	3	2	17	③
0	2	2	1	4	17	④
1	1	0	3	1	8	⑤

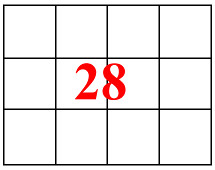
①－③⇨Y+B－2Q=0，Y+B=2Q
①－④⇨2R+2P=4Q，R+P=2Q
由上兩式可知 Y+B= R+P
∵ 點數介於 0~4 ∴ Q=2
Y+B、R+P 四數互為 1+3；0+4
②－③⇨R+Y =P+Q，R+Y=P+2
可知 P≠0、4，P=1 或 3 代入⑤
R+Y+3P+2=8，R+Y+3P=6，P=1
當 P=1，R=3 再代入⑤
3+Y+3+2=8

0~5

7



21

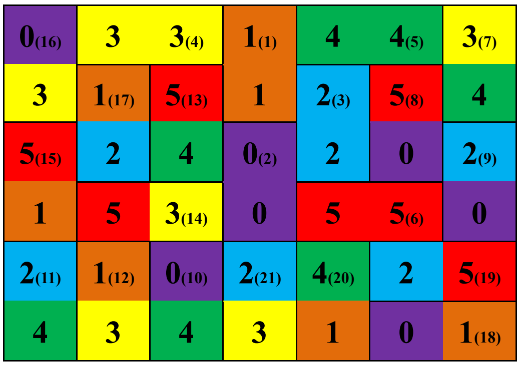
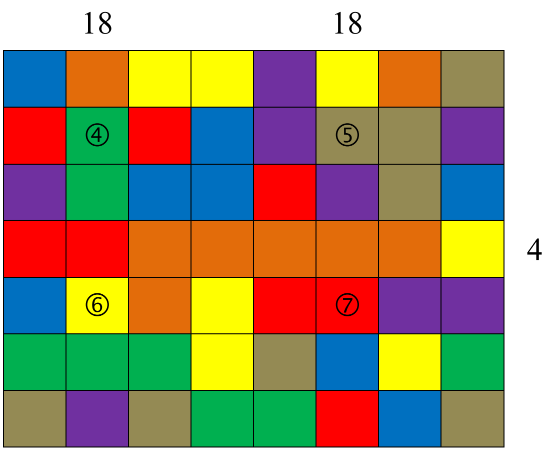
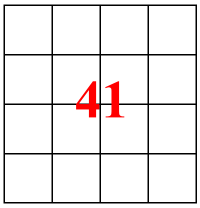


已知四核心矩形總和 28
中央和 ＝7
第六個已知總和條件 21

①：2Q＋B＋Y＋2P＝7
②：2Q＋2R＋G＋B＋Y＝21
③：3Q＋2R＋G＋3Y＋B＋2P＝28
④：2Q＋R＋2G＋3Y＋2B＋2P＝28
⑤：2Q＋R＋3G＋Y＋3B＋2P＝28
⑥：2Q＋3R＋G＋Y＋2B＋3P =28

補充說明：我們以中央和 7，四核心矩形總和 28 之創意彩色骨牌為例說明代數策略：為滿足 6 個顏色，故給 6 個已知總和條件，已知條件的給予，除了四核心矩形總和與中央和等 5 個已知條件之外，尚再給 1 個總和條件提示。

1. ②－① ⇨ 2R＋G－2P =14，R－P＝(14－G) ÷ 2，可知 G 必為偶數
∵ 顏色介於 0~5
若 G＝0，R－P＝7，此算式不成立
若 G＝2，R－P＝6，此算式不成立
若 G＝4，R－P＝5，此算式成立 ∴ R＝5，P＝0
2. ⑤－④ ⇨ G－2Y＋B =0，G＋B＝2Y，將 G＝4 代入⇨4＋B＝2Y
∵ B＋4 必為偶數
∴ B＝2，Y＝3，剩餘最後一色 Q＝1

0~5 骨牌鑲入 順序	 (1)$\boxed{1\ 1}$(唯一性)→(2)$\boxed{0\ 0}$(唯一性)→(3)$\boxed{2\ 2}$(唯一性)→(4)$\boxed{3\ 3}$(唯一性) → (5)$\boxed{4\ 4}$(唯一性)→ (6)$\boxed{5\ 5}$(唯一性)→ (7)$\boxed{3\ 4}$(唯一性)→ (8)$\boxed{0\ 5}$(唯一性)→ (9)$\boxed{0\ 2}$(唯一性)→ (10)$\boxed{0\ 4}$(逐步刪除法)→ (11)$\boxed{2\ 4}$(逐步刪除法)→ (12)$\boxed{1\ 3}$(唯一性)→ (13)$\boxed{4\ 5}$(逐步刪除法)→ (14)$\boxed{3\ 5}$(唯一性)→ (15)$\boxed{1\ 5}$(唯一性)→ (16)$\boxed{0\ 3}$(唯一性)→ (17)$\boxed{1\ 2}$(唯一性)→ (18)$\boxed{0\ 1}$(逐步刪除法)→ (19)$\boxed{2\ 5}$(唯一性)→ (20)$\boxed{1\ 4}$(逐步刪除法)→ (21)$\boxed{2\ 3}$(唯一性)
0~6	  已知四核心矩形總和 41 中央和 ＝4 其餘兩個已知總和條件各為 18
	我們以中央和 4，四核心矩形總和 41 之創意彩色骨牌為例說明代數策略：為滿足 7 個顏色，故給 7 個已知總和條件，已知條件的給予，除了四核心矩形總和與中央和等 5 個已知條件之外，尚再給 2 個總和相同的提示。 ①：3G + Q + R + Y + P = 18 ②：Q + 2R + P + Y + Br + B = 18 ③：5Q + 2R + Y = 4 ④：2G + Q + 2R + 2Y + P + 4B = (168－4) ÷ 4 = 41 ⑤：Q + R + Y + 4Br + B + 4P = (168－4) ÷ 4 = 41 ⑥：4G + Q + 3Y + 2Br + P + B = (168－4) ÷ 4 = 41 ⑦：2G + 3R + Y + 2P + 2Br +2B = (168－4) ÷ 4 = 41 1. ∵ 顏色介於 0~6，從④可知，Q 必為 0⇨2R + Y = 4 能滿足此條件，R、Y 之間的關係可能有 0、4；1、2；2、0 但已知 Q = 0 ∴ 可知 R、Y 兩數必為 1 和 2。 2. 利用快速解題策略 II 代入⑤⇨ 21 + 3Br + 3P = 41 + G 3Br + 3P = 20 + G，Br + P = (20 + G) ÷ 3 ∵ 顏色介於 0~6，G 只能為 1 和 4，但 R、Y 兩數必為 1 和 2，可知 G = 4 ∴ 可知 Br + P = 8

<table>
<tr><td></td><td>
3. ④ − ① ⇨ $R-G+Y+4B=23$
將 $G=4$、$R+Y=3$ 代入⇨$3-4+4B=23$，$4B=24$，可知 $B=6$
4. 將已知數字代入① ⇨ $2\times4+0+2\times(R+Y)+P+4\times6=41$
$P=41-(16+2\times3+24)=3$，由此可知 $Br=5$
5. 將已知數字代入⑥ ⇨ $4\times4+3Y+2\times5+3+6=41$
$3Y=41-16-10-3-6=6$，由此可知 $Y=2$，$R=1$
</td></tr>
<tr><td>0~6
骨牌鑲入
順序</td><td>
<table>
<tr><td>26</td><td>18</td><td>18</td><td>22</td><td>17</td><td>18</td><td>21</td><td>28</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>0(15)</td><td>2</td><td>2(22)</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td><td>5(7)</td><td>20</td></tr>
<tr><td>1(16)</td><td>4</td><td>1(3)</td><td>6</td><td>3(21)</td><td>5(5)</td><td>5</td><td>3</td><td>28</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4(14)</td><td>6</td><td>6(27)</td><td>1(26)</td><td>3(25)</td><td>5(6)</td><td>6(8)</td><td>34</td></tr>
<tr><td>1(2)</td><td>1</td><td>0</td><td>0(28)</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2(20)</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6(10)</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>1(1)</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>18</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4(17)</td><td>4(18)</td><td>2(4)</td><td>5</td><td>6(23)</td><td>2(24)</td><td>4(19)</td><td>31</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3(11)</td><td>5</td><td>4(12)</td><td>4</td><td>1(13)</td><td>6(9)</td><td>5</td><td>33</td></tr>
</table>
(1)$\boxed{1\ 5}$(唯一性)→(2)$\boxed{1\ 1}$(唯一性)→(3)$\boxed{1\ 2}$(唯一性)→(4)$\boxed{2\ 2}$(唯一性) → (5)$\boxed{2\ 5}$(唯一性)→ (6)$\boxed{5\ 5}$(唯一性)→ (7)$\boxed{0\ 5}$(唯一性)→ (8)$\boxed{3\ 6}$(唯一性)→ (9)$\boxed{5\ 6}$(唯一性)→ (10)$\boxed{4\ 6}$(逐步刪除法)→ (11)$\boxed{3\ 5}$(唯一性)→ (12)$\boxed{4\ 5}$(逐步刪除法)→ (13)$\boxed{1\ 4}$(唯一性)→ (14)$\boxed{4\ 4}$(逐步刪除法)→ (15)$\boxed{0\ 6}$(唯一性)→ (16)$\boxed{1\ 3}$(唯一性)→ (17)$\boxed{2\ 4}$(逐步刪除法)→ (18)$\boxed{0\ 4}$(唯一性)→ (19)$\boxed{3\ 4}$(逐步刪除法)→ (20)$\boxed{0\ 2}$(唯一性)→ (21)$\boxed{3\ 3}$(逐步刪除法)→ (22)$\boxed{2\ 6}$(逐步刪除法)→ (23)$\boxed{1\ 6}$(逐步刪除法)→ (24)$\boxed{2\ 3}$(唯一性)→ (25)$\boxed{0\ 3}$(逐步刪除法)→ (26)$\boxed{0\ 1}$(逐步刪除法)→ (27)$\boxed{6\ 6}$(逐步刪除法) → (28)$\boxed{0\ 0}$(唯一性)
</td></tr>
</table>

(四) 新式彩色骨牌問題設計討論與發現：

1. 可使用的骨牌張數越少，所形成的新式彩色骨牌題庫數也就較少，這可說明為什麼原彩色骨牌問題以 28 張骨牌作為佈題的情境條件，原因在於骨牌張數的多寡(或點數配對情形的多寡)可使題目較具變化性，也較有發展性空間。
2. 新式彩色骨牌最低問題情境條件：使用點數 0~3 共 10 張骨牌所圍成 4 × 5 矩形，題庫基本模組有三組。
3. 新式彩色骨牌問題中，可由中央和 k 值去推算四核心矩形總和的範圍條件，其兩者關係可用：(骨牌總點數 + k) ÷ 4 來判別與計算。
4. 新式彩色骨牌的已知條件要視問題情境中顏色未知數出現的個數給予適配性提示，若有 6 個未知點數的顏色佈題，已知總和條件至少要提示 6 個，以此類推。且已知總和條件必須包括中央和與四核心矩形總和。

5. 新式彩色骨牌問題的設計可無限延伸，只要藉由骨牌點數 0~N 的命題，就可試算出<u>骨牌可用張數</u>、<u>全部骨牌總點數</u>、<u>能圍成之彩色骨牌矩形類型</u>、<u>**相對應的四核心矩形類型**</u>、<u>**中央和 k 值**</u>、<u>**四核心矩形總和 S 值**</u>和<u>**題庫數**</u>。

(五) 改變彩色骨牌的遊戲規則，利用中央和的設定，將原矩形區分成 4 個核心矩形總和皆相同的條件提示，在只給予固定已知總和條件下，顏色代數化的命題方式更需要多方觀察數群之間的關係，難度較高，也能增加玩家的挑戰興趣，不失為一個具創意改變的作法。

柒、 研究結論

一、彩色骨牌代數解題有效策略有三：

(一) 若某一行或某一列的已知總和條件涵括 7 個不同顏色，即可套用快速解法策略Ⅰ：**已知總和條件－全部點數和(0+1+2+3+4+5+6) = 多餘一色之數**。

(二) 若某一行或某一列的已知總和條件涵括 6 個不同顏色，即可套用快速解法策略Ⅱ：**多餘一色之數 + 全部點數和(0+1+2+3+4+5+6) =已知總和條件 + 未知第 7 色之數(多餘一色之數－未知第 7 色之數 = 已知總和條件－21)**。

(三) 若解聯立方程式後找出兩數之差為 1，可知此兩數是連續數關係，透過表列法可逐步理解 7 種顏色之間的數字大小關係，便可推知各顏色所表示的數字。

二、彩色骨牌已知總和條件的給定，有其數學原理：

(一) 一道彩色骨牌題目至少需給予 4 個已知總和條件，才能有足夠的線索計算出各顏色所表示的數字。

(二) 兩顏色不可在已知條件的關係中重複出現相同條件，無論給予多少個已知條件，都只列出此兩顏色的相似方程式，唯一能知道此兩色數字之間的相依關係，無法確定兩色所表示之數字。

(三) 當未知條件越多(即問號越多)，已知條件的設定有其規則性，此設定的原則包含：

1. 至少有 2 個相同的已知條件總和。
2. 每個已知條件總和所提示的該行或該列中，至少包含 5 個不同顏色。
3. 已知條件總和所提示的每一行或每一列中，至少都有 1 個重複的顏色。

三、彩色骨牌的鑲入方式需避免可重複鑲入特性(如：在 2×2 方格內若出現三個一樣的數

字和一個不一樣的數字，則鑲入排法非唯一解)，研究發現原 35 題彩色骨牌的排法皆是唯一解鑲入方式。

四、若在骨牌點數 0~3、0~4、0~5、0~6、0~N 等條件下，所構成的新式彩色骨牌問題設計原理，其中央和 k 值和四核心矩形總和 S 值有蘊藏規則性：

(一) 中央和 K 值規律性：

1. **若 $N \times (N+1) \times (N+2) \div 2$ 為偶數且 N 也為偶數**，此值必為 4 的倍數。

k 值屬於在一個範圍內等差 4 的數列，其 **k 值範圍 $0 \leqq k1 \sim kn \leqq N \times (N+2)$**

則 $k1 = 0$ (表示第一個中央和)，**$kn = N \times (N+2)$** (表示第 n 個中央和)

2. **若 $N \times (N+1) \times (N+2) \div 2$ 為偶數但 N 卻為奇數**，且此值為 4 的倍數。

k 值屬於在一個範圍內等差 4 的數列，其 **k 值範圍 $0 \leqq k1 \sim kn \leqq N \times (N+1)$**

則 $k1 = 0$ (表示第一個中央和)，**$kn = N \times (N+1)$** (表示第 n 個中央和)

3. **若 $N \times (N+1) \times (N+2) \div 2$ 為偶數但 N 卻為奇數**，且此值不為 4 的倍數；或，

若 $N \times (N+1) \times (N+2) \div 2$ 為奇數且 N 也為奇數，且此值不為 4 的倍數。

k 值屬於在一個範圍內等差 4 的數列，其 **k 值範圍 $0 \leqq k1 \sim kn \leqq N \times (N+1)$**

則當 $k1 = a$ (表示第一個中央和)

$kn = a + (n-1) \times 4 < N \times (N+1)$ (表示第 n 個中央和)。

(二) 中央和 k 值和四核心矩形總和 S 值的數學關係：

$S = (\text{骨牌總點數} + k) \div 4$

$\because$ k 值有其範圍性 $\therefore$ S 值相對也有範圍性

1. 若$(N+1) \times (N+2) \div 2$ 為偶數且為 4 的倍數(但 $N \neq 3$)

$S'\min = N \times (N+1) \times (N+2) \div 8$

$S'\max = N \times (N+1) \times (N+2) \div 8 + (kn \div 4)$

$N \times (N+1) \times (N+2) \div 8 \leqq S \leqq N \times (N+1) \times (N+2) \div 8 + (kn \div 4)$

2. 若$(N+1) \times (N+2) \div 2$ 為奇數

$S'\min = \left[N \times (N+1) \times (N+2) + a \right] \div 4$

$S'\max = \left[N \times (N+1) \times (N+2) + kn \right] \div 4$

$\left[N \times (N+1) \times (N+2) + a \right] \div 4 \leqq S \leqq \left[N \times (N+1) \times (N+2) + kn \right] \div 4$

捌、 展望

彩色骨牌需經兩個部分才能順利完成，第一是計算出顏色所代指的數字，第二則完成 28 張骨牌的鑲入，其解題過程比以往多明諾骨牌再多了一個解題步驟，所以相對不容易而更具挑戰性。在研究末，我們跳脫 7×8 矩形條件的框架，設計了一套新式彩色骨牌問題情境，針對總和設定做重新定義，嘗試體驗擔任遊戲設計者的足智多謀，進而歸納出新式彩色骨牌矩形所拼組的總和皆有其範圍的一般化結果。下一階段我們將翻轉新式彩色骨牌問題情境，改採用從 28 張骨牌中進行有目的性的挑選，探討在各式不同矩形條件下中央和 k 值與四核心矩形總和 S 值的關係，再透過歸納、整理的方式，找到符合數學性的一般化解釋方法，以期擴展彩色骨牌問題的多元樣貌，我們持續施工中，敬請期待！

玖、 參考資料

一、洪銘澤(譯)(2015)。蒂姆・戴多普羅斯著。**哈佛給學生做的 1001 個思維遊戲**(The ultimate 1001 puzzle book)。新北市：禾風車。

二、孫文先 (2015)。多明諾(Domino)骨牌遊戲。*科學研習，54(4)*，29-37。

三、褚冠宏、高健哲(2015)。多明諾骨牌。載於 http://www.shs.edu.tw/works/essay/2015/03/2015033016100014.pdf

【評語】080410

1. 此參展作品乃探討彩色骨牌在條件設定下應如何鑲入的問題，主題有趣。

2. 作者能針對相關文獻進行探討並獲得啟發，很棒。

3. 作者運用了多元一次聯立方程組,加上唯一性與逐步刪除法的觀察,給出完整有效的骨牌鑲入策略，值得鼓勵。

4. 作者延伸成果並融合魔方陣的概念，自創新式彩色骨牌遊戲；探討骨牌點數 0~3、0~4、0~5、0~6、0~N 等條件下，可藉由中央和 k 值與四核心矩形總和 S 值的關係，去推算規則、找到一般化的結果和題庫數，值得肯定。

作品海報

摘要

本研究源自《彩色骨牌》遊戲：一副骨牌 28 張，用七種不同顏色表示數字 0~6，同時在 7 × 8 矩形中以顏色次數加總提示每行、每列共 15 個總和關係，最後依提示計算出各顏色代表的數字，並用 28 張骨牌重現。研究成果如下：

一、 聯立方程式能有效解決數字顏色條件化的計算，同時也可從遊戲設計者的觀點掌握，了解已知總和條件的設定應避免給予兩組以上的相似聯立方程式。

二、 彩色骨牌鑲入唯一解作法應事先排除會造成重複鑲入方法的條件，如避免出現 2×2 方格內對角線數字相同。

三、 自創新式彩色骨牌數學問題，可藉由中央和 k 值與四核心矩形總和 S 值的關係：(骨牌總點數 + k) ÷ 4 = S，去推算規則、找到一般化的結果，且變化性可無限延伸。

壹、研究動機

在《哈佛給學生做的 1001 個思維遊戲》一書中看到『彩色骨牌』這個數學問題。以下圖 1 為例說明遊戲規則：在此 7×8 矩形，上方八列數字依序是 19、23、21、20、20、20、23、22 和右側七行數字分別是 21、36、14、24、22、29、22，圖中每一種顏色各表示 0~6 的某一個數字，遊戲目標要鑲入 28 張骨牌，使其骨牌點數滿足每一行列的總和條件設定(如下圖 1)。全部題目共 35 關，題目隨著題數增加而有不同已知條件的佈題類型變化，如下圖 2 所示。

圖 1：彩色骨牌題目示例

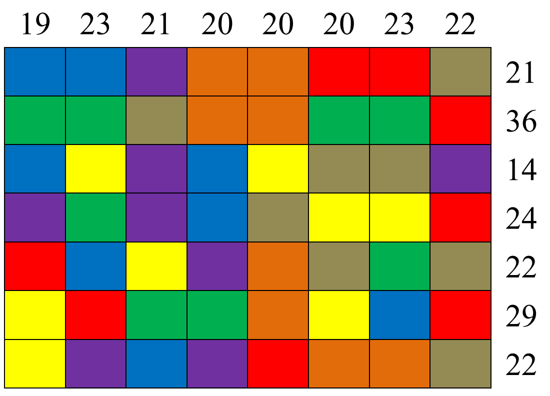
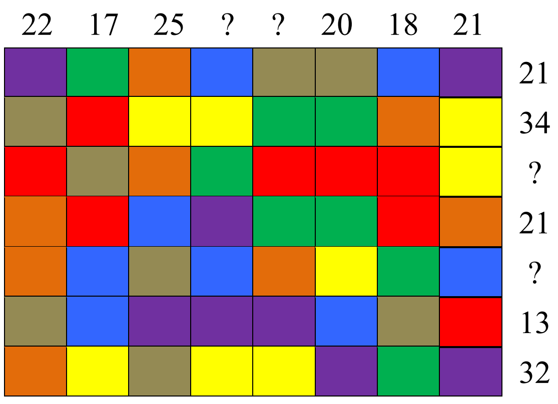


圖 2：已知條件漸少，問號替代總和之彩色骨牌示例



我們覺得很好奇，以圖 2 為例，明明少了 4 個總和提示，為什麼仍可以順利解題？本遊戲除了在有限條件下要找出七種顏色各表示的數字外，還要找到適切的骨牌鑲入方式，題目又會因問號的出現而更複雜，所以我們該怎麼做才能有系統找到解答呢？這學期數學課第九單元「怎樣列式」介紹以未知數列算式找關係的代數概念，正好可運用此策略於彩色骨牌的解題上，於是，二話不說，我們動手嘗試。

貳、研究目的

一、 探討顏色代數化的解題有效策略。

二、 探索彩色骨牌題目設計的數學原理。

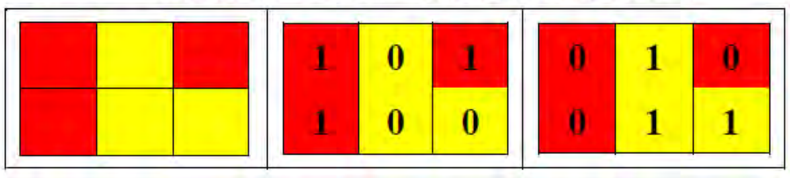
三、 應用彩色骨牌問題的數學原理，探究重新改變問題條件後其對應的數學意義。

參、前導研究

一、 若單就彩色骨牌的鑲入問題，我們發現多明諾骨牌(Domino)也曾探究過骨牌鑲入問題，孫文先 (2015)和褚冠宏、高健哲(2015)皆以「唯一性」作為骨牌鑲入的首要解題步驟，由這兩篇資料中，我們整理出啟發本研究的想法：**可以從「逐步刪除法」和「唯一性」找出骨牌鑲入的作法**。依照多明諾骨牌鑲入策略的思維套入新問題，從原本已知條件的**數字**，改變成已知條件的**顏色**，我們轉換從顏色的對應關係著手進行彩色骨牌鑲入的順序找尋。七種顏色各表示 0~6 等七個數字，每一個顏色都必須配對到七個不同的顏色，雖然問題情境不同，但仍可觀察顏色的「唯一性」和「逐步刪除法」找出骨牌鑲入。

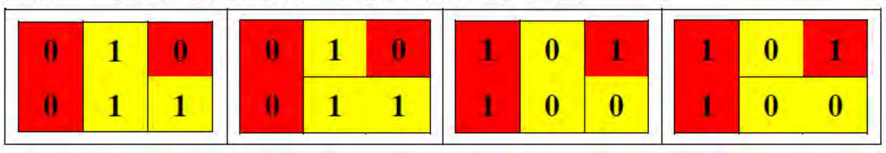
二、 多明諾骨牌的鑲入示例都是唯一種配對方法，但彩色骨牌的鑲入方式也是唯一種配對嗎？我們假設骨牌使用 $\boxed{0\,0}$、$\boxed{0\,1}$、$\boxed{1\,1}$此三張點數最小的骨牌，若問題情境僅用顏色提示，則實際可做出兩種不同的骨牌鑲入情形，如下表 1 所示。可知，彩色骨牌解題分兩個層次，一是骨牌鑲入問題、二是顏色各表示的數字。多明諾骨牌相關研究只能幫助我們了解骨牌鑲入的策略，對於如何確定各顏色所代表的數字一無所獲。**重要的是，此也會因顏色對應到不同數字的影響，而導致骨牌鑲入的選擇順序並非唯一的一種排法**。

表 1：2 × 3 問題情境中 3 張骨牌可能出現的兩種數字解答



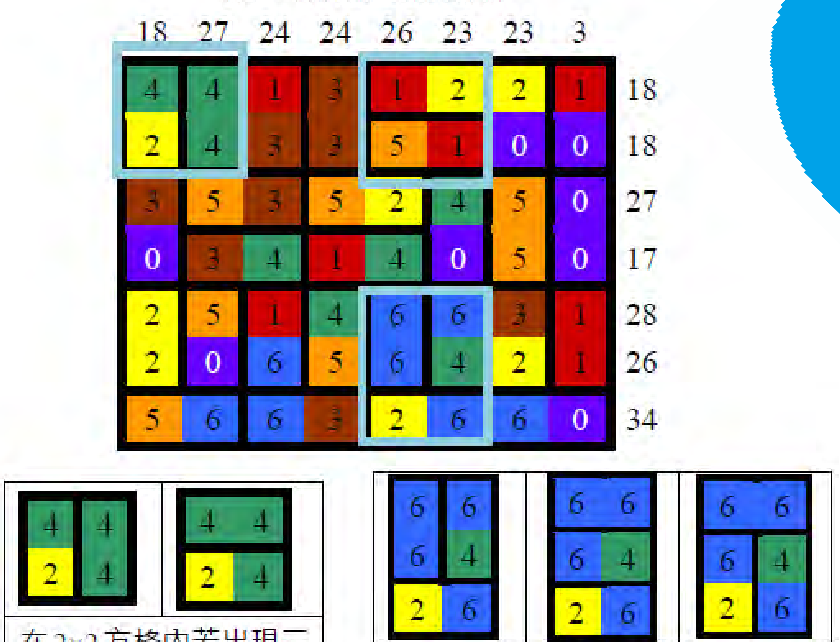
三、 本書 35 關題目與解答，骨牌鑲入的排法都是唯一解，**所以從文獻中我們衍生出新的問題--彩色骨牌如何設計而能夠做出鑲入的唯一解**？我們發現，在 2 × 2 的方格內，若對角線的數字相同，則骨牌的鑲入排法非唯一種 (可以直橫交換) ，如下表 2 所示。

表 2：2 × 3 問題情境中 3 張骨牌先後鑲入的四種可能解答



四、 骨牌鑲入有非唯一解之排法：當骨牌鑲入後位置符合以下條件，可以判別其鑲入方式並非唯一解(下表 3)。

表3：骨牌鑲入探討分析

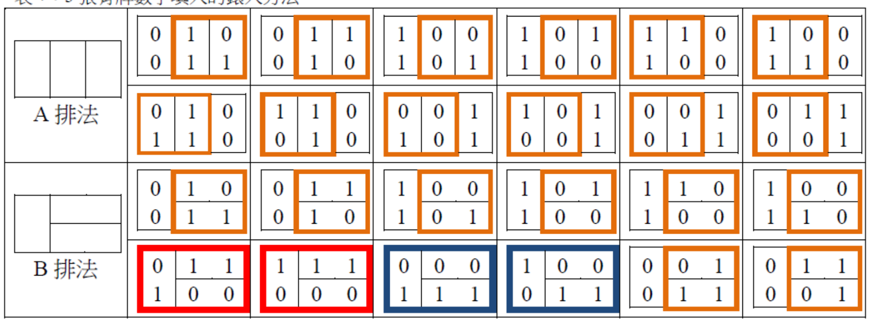


在 2×2 方格內若出現三個一樣的數字和一個不一樣的數字，則鑲入排法非唯一種。(可以直橫交換)

第一張圖是能直橫向交換的骨牌 2×2 方格，當它直橫向交換後，會與第三張骨牌$\boxed{2\,6}$再形成一個可直橫向交換的 2×2 方格【中間的圖】，此時$\boxed{4\,6}$及$\boxed{2\,6}$便能再次進行直橫向交換

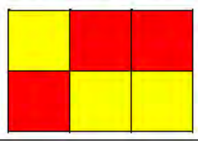
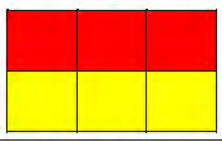
五、 假設骨牌數字從 0~6 縮小為 0~1，此時骨牌從原本 28 張變成只有$\boxed{0\,0}$、$\boxed{0\,1}$、$\boxed{1\,1}$這三張骨牌，我們先了解三張骨牌可排成 2 × 3 矩形後再進行探討。三張骨牌排法有 A、B 兩種，先討論 A 排法，鑲入配對的總數為：(3 × 2 × 1) × 2 = 12。但 A 排法皆出現鑲入非唯一解(在 2 × 2 的方格內對角線的數字相同，橘框線表示之)，所以並不適用於彩色骨牌的題目設計。

表 4：3 張骨牌數字填入的鑲入方法



六、 B 排法雖有 4 組(以粗紅、藍框線表示之) 鑲入的唯一解作法，但粗藍框線類型旋轉後與粗紅框線類型相同，所以視為同一組，因此實際只有 2 組唯一解的骨牌鑲入作法。然而，我們重新將此 2 組唯一解鑲入類型轉換成彩色骨牌的題目討論時，卻發現只有一組可成功，於是我們可知**骨牌鑲入的排法確實會影響彩色骨牌題目的設計**，因此 2 × 3 矩形因只有 1 組唯一解鑲入類型，可實作性低，較不適宜列入彩色骨牌的遊戲範疇裡。

表5：2 × 3 彩色骨牌題目設計

0 1 1 1 0 0 1 1 1  2 1	1 1 1 0 0 0 1 1 1  3 0
唯一解鑲入方法	無法用「逐步刪除法」和「唯一性」找出骨牌鑲入的順序

七、 顏色條件化的彩色骨牌問題情境，除了骨牌鑲入的探討外，還有需計算顏色所表示的數字。以表 8 條件而論，橫排 2 個紅色和 1 個黃色總和等於 2，這讓我們聯想到，能使用代數解聯立方程式的策略幫助我們計算彩色骨牌的問題。

$$\begin{cases} 2R + 1Y = 2 \;\ldots\ldots ① \\ 1R + 2Y = 1 \;\ldots\ldots ② \end{cases}$$

① – ② ⇨ R – Y = 1 代入①

∵ 骨牌點數只有 0、1 ∴ R = 1，Y = 0

肆、研究過程與內容

研究目的一：探討顏色代數化的解題有效策略。

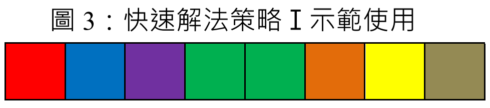
一、 根據不同已知條件的彩色骨牌填數解題，我們發現：

(一) 原彩色骨牌題目需解出 7 個未知的顏色各代表什麼數字，雖然解七元一次方程式需要 7 個聯立方程式才能得到唯一解的作答，但因骨牌點數限制了計算的範圍(數字介於 0 ~ 6)，所以有時解題並非皆需使用 7 個聯立方程式才可得知各顏色所表示的數字。這也說明了為什麼當彩色骨牌各行列總和出現問號時，表面看似侷限了解題的線索，實則不影響解題。

(二) 彩色骨牌解聯立方程式而找出 7 個未知數的有效策略有：

1. 若某一行或某一列的已知總和條件涵蓋 7 個不同顏色，即可套用快速解法策略 I ：**已知總和條件–全部點數和 (0+1+2+3+4+5+6) = 多餘一色之數**。

圖 3：快速解法策略 I 示範使用



24

原式 = R + B + P + 2G + Q + Y + Br = 24

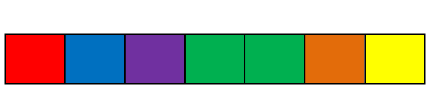
∵ R + B + P + G + Q + Y + Br = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21

∴ 將上式代回原式 = (R + B + P + G + Q + Y + Br)+ **G** = 24

於是可知 G = 24–21 = 3

2. 若某一行或某一列的已知總和條件涵蓋 6 個不同顏色，即可套用快速解法策略 II ：**多餘一色之數 ＋ 全部點數和 (0+1+2+3+4+5+6) =已知總和條件 ＋ 未知第 7 色之數(多餘一色之數–未知第 7 色之數 ＝ 已知總和條件–21)**。

圖 4：快速解法策略 II 示範使用



24

原式 = R + B + P + 2G + Q + Y = 24

∵ R + B + P + G + Q + Y + Br = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21

∴ 將上式代回= (R + B + P + G + Q + Y + **Br**)+ G = 24 + **Br**

3. 解聯立方程式後找出兩數之差為 1，可知此兩數是連續數關係，透過表列法可逐步理解 7 種顏色之間的數字大小關係，便可推知各顏色所表示的數字。例：已知 Q–R = 1；R–P = 3；Br–R = -2；Q–G = -1，可推測：

Y/B(未知) ＞ G ＞ Q ＞ R ＞ Y/B(未知) ＞ Br ＞ P

4. 若有 7 個以上的總和已知條件，以盡量列出相同總和的方程式較佳，因為解聯立方程式的過程中可較快得到數群之間的關係。

5. 若有 7 個以上的總和已知條件，以盡量列出極端總和(例：最大總和或最小總和)的方程式較佳，因為計算聯立方程式的過程中可較快預測出各顏色的大小關係和可能性。

研究目的二：探索彩色骨牌題目設計的數學原理。

一、 第 35 題的佈題，可藉由 5 個已知條件即可計算出各顏色所表示的顏色，我們好奇已知條件的安排是否事前經過安排才可以達到順利解題目的，於是我們接續研究已知條件的設計是否有其數學原理。

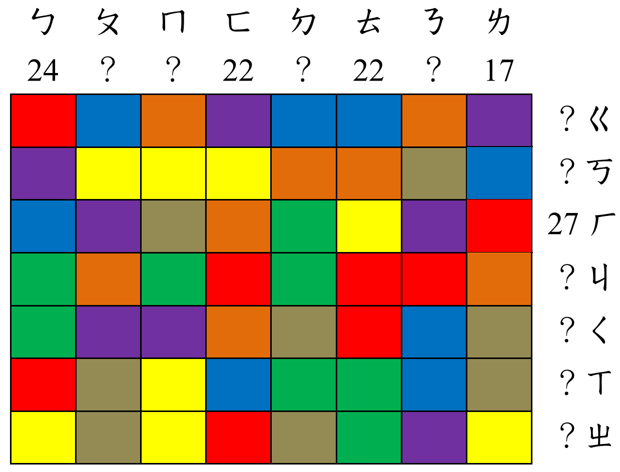
(一) 根據觀察 31~35 題的佈題方式而推測，當未知條件越多(即問號越多)，已知條件的設定似乎有其規則性，此設定的原則可能包含：

1. **至少有 2 個相同的已知條件總和。**
2. **每個已知條件總和提示的該行或該列中，至少包含 5 個不同顏色。**
3. **已知條件總和所提示每行或每列中，至少都有 1 個重複的顏色。**

(二) 從 35 題挑選有 15 個已知總和條件的彩色骨牌進行假設分析 5 個已知總和條件選取的設計原則：

1. 隨意選取五列已知總和條件且符合上述所觀察到的假設問號設計原則，以列出五則方程式。

圖 5：彩色骨牌題目調整後示例(10 個問號)



根據上述關係列出各顏色之間的數字大小關係：顏色 Y 和顏色 B 在此五個已知提示中無法確定知道所表示的數字，因為只能找出兩色之間的關係，但卻不能得到唯一解。

P	G	Q	R	Y/B	Br	Y/B
6	5	4	3	2	1	0

2. 我們比較第 35 題和本題的 5 個已知總和條件，我們以表列法的列式來討論兩題之間的出題關聯性：

B	P	G	Y	Q	Br	R	和	式
1	1	2	1	0	0	2	24	①
1	1	0	1	2	0	2	22	②
1	0	2	1	1	0	2	22	③
1	1	0	1	1	2	1	17	④
1	2	1	1	1	1	1	27	⑤

改變設計之 5 個已知總和條件方程式

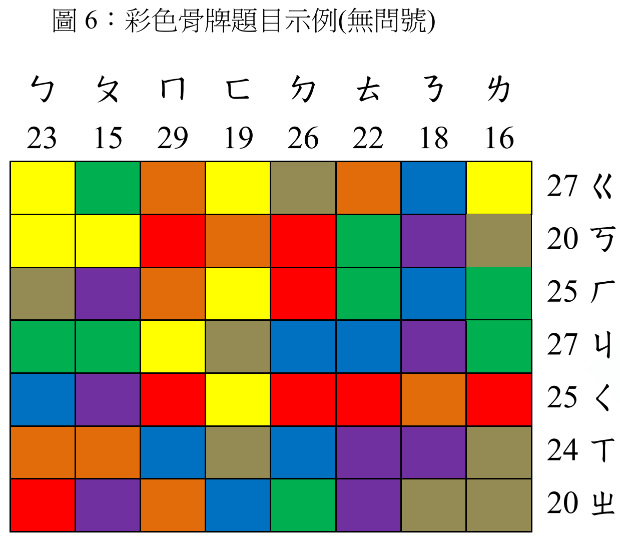
B	P	G	Y	Q	Br	R	和	式
1	0	1	1	1	2	1	24	①
0	2	1	0	2	1	1	23	②
2	0	1	1	2	0	1	25	③
1	1	0	2	1	0	2	24	④
1	1	0	2	1	2	1	27	⑤

第 35 題 5 個已知總和條件方程式

以顏色 B 和顏色 Y 而言，此 5 個方程式是相似方程式，對此 2 色是無意義的，所以無法得知 2 色表示的數字，因此我們可得知一個重要發現：兩顏色不可在 5 個已知條件的關係中重複出現相同條件。

二、 從研究目的一可知，彩色骨牌可能只透過 4 個已知條件可得知 7 種顏色所表示的數字，而 1~35 關題目中，最少已知條件的給予是 5 個總和(第 35 題)，我們進一步變化問題條件，根據原題目去改變已知條件而減少至給予 4 個總和已知條件，接續了解彩色骨牌背後數學問題設計原理。

圖 6：彩色骨牌題目示例(無問號)



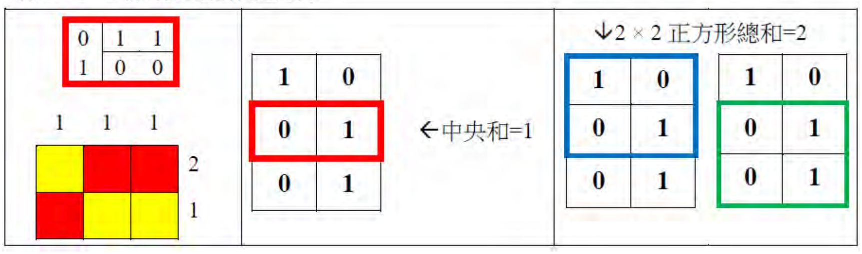
(一) 從 15 個已知條件逐步刪除只剩 4 個已知條件，掌握要素應包含上述三個條件。

(二) 4 個已知條件並非都能計算出與原題目答案相同之 7 個顏色各表示的數字，由此可知：我們重新修正已知總和條件的設定，增加『**兩顏色不可在已知條件的關係中重複出現相同條件，無論給予多少個已知條件，都只列出此兩顏色的相似方程式，唯一能知道此兩色數字之間的相依關係，無法確定兩色所表示之數字**』。

研究目的三：應用彩色骨牌的數學原理，探究重新改變問題條件後其對應的數學意義。

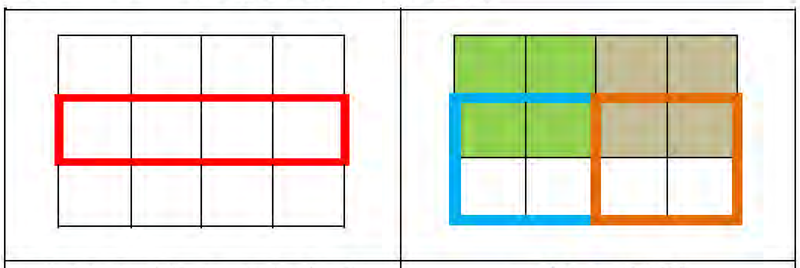
一、 改變彩色骨牌問題條件，我們融合魔方陣的概念，自行設計一套新式的彩色骨牌遊戲。因為從試探研究中可知，當骨牌點數只有 0~1，骨牌只會出現 $\boxed{0\,0}$、$\boxed{0\,1}$、$\boxed{1\,1}$ 此三張，如果轉換為彩色骨牌的題目，我們發現 2×3 矩形可藉由中央和區分成兩個 2×2 正方形，且此兩個 2×2 正方形的總和皆相同。

表 6：2 × 3 新式彩色骨牌問題定義



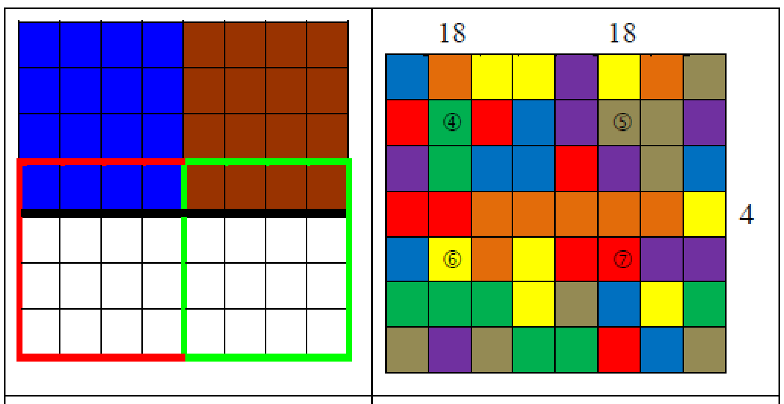
(一) 如果當骨牌點數只有 0~2，骨牌會出現 $\boxed{0\,0}$、$\boxed{0\,1}$、$\boxed{0\,2}$、$\boxed{1\,1}$、$\boxed{1\,2}$、$\boxed{2\,2}$ 等六張，可排成一個 3×4 矩形，中央和可區分成四個 2×2 正方形(簡稱此四個 2×2 正方形為四核心矩形，如下表 7 所示)。我們假設四核心矩形的總和皆相同是新式彩色骨牌問題條件之前提，繼續探討新問題情境的數學意義。

表 7：3 × 4 新式彩色骨牌問題定義



紅色粗線表示中央和	四核心矩形

(二) 新式彩色骨牌問題遊戲規則：視未知數的顏色個數給予已知總和條件(六個未知數顏色，則給予六個已知總和條件)，但已知條件必須包含中央和與四核心矩形總和此五個總和。透過計算找出各顏色所表示的數字和骨牌鑲入方法。



四個 4×4 正方形總和相同	4×4 正方形總和 43

1. 設定中央和的數字，若中央和為 0，4×4 正方形總和 $168\div4=42$。
2. 若中央和 1，4×4 正方形總和 $(168-1)\div4+(1\div2)$，我們發現無法使四個 4×4 正方形總和相同。
3. 我們可得知：若四個 4×4 正方形總和皆相同，中央和需為 4 的倍數。
4. 創新彩色骨牌題庫類型如下表所示：

表 8：新式彩色骨牌 7×8 題庫類型

中央和	4×4 正方形總和	中央和	4×4 正方形總和
0	42	28	49
4	43	32	50
8	44	36	51
12	45	40	52
16	46	44	53
20	47	48	54
24	48		

(三) 我們繼而探討骨牌點數 0~3、0~4、0~5、0~6、0~N 等條件下，新式彩色骨牌遊戲題目設計的奧秘，並將研究結果紀錄於下表 9：

表 9 ：新式彩色骨牌研究結果彙整

骨牌點數可用範圍	可用張數	骨牌總點數	圍成矩形類型	四核心矩形類型	中央和 k 值(間隔 4)	四核心矩形總和 S 值	成功總數
0~3	10	30	4 × 5	2 × 3	2~10	8~10	3
0~4	15	60	5 × 6	3 × 3	4.8.16.20	16.17.19.20	4
0~5	21	105	6 × 7	3 × 4	3~27	27~33	7
0~6	28	168	7 × 8	4 × 4	0~48	42~54	13
0~7	36	252	8 × 9	4 × 5	0~56	63~77	15
…	…	…	…	…	…	…	…
0~N	註 1	註 2	(N+1)×(N+2)	註 3	註 4	註 5	註 6

註 1：$(N+1)\times(N+2)\div2$

註 2：$N\times(N+1)\times(N+2)\div2$

註 3：❶若 N 為偶數，四核心矩形必為正方形，正方形邊長關係 $=(N+2)\div2$
❷若 N 為奇數，四核心矩形必為長方形，短邊$=(N+1)\div2$；長邊$=(N+1)\div2+1$

註 4：❶**若 $N\times(N+1)\times(N+2)\div2$ 為偶數且 N 也為偶數，此值必為 4 的倍數**，k 值屬於在一個範圍內等差 4 的數列，其 k 值範圍 $0\leqq k1\sim kn\leqq N\times(N+2)$，**$kn=N\times(N+2)$ (表示第 n 個中央和)**
❷**若 $N\times(N+1)\times(N+2)\div2$ 為偶數但 N 卻為奇數，且此值為 4 的倍數時**，k 值屬於在一個範圍內等差 4 的數列，其 k 值範圍 $0\leqq k1\sim kn\leqq N\times(N+1)$，**$kn=N\times(N+1)$ (表示第 n 個中央和)**
❸**若 $N\times(N+1)\times(N+2)\div2$ 為偶數但 N 卻為奇數，且此值不為 4 的倍數時或若 $N\times(N+1)\times(N+2)\div2$ 為奇數且 N 也為奇數，且此值不為 4 的倍數時**，k 值屬於在一個範圍內等差 4 的數列，其 k 值範圍 $0\leqq k1\sim kn\leqq N\times(N+1)$，**$kn=a+(n-1)\times4<N\times(N+1)$ (表示第 n 個中央和)**

註 5：❶若$(N+1)\times(N+2)\div2$ 為偶數且為 4 的倍數(但 $N\neq3$)，$N\times(N+1)\times(N+2)\div8\leqq S\leqq N\times(N+1)\times(N+2)\div8+(kn\div4)$
❷若$(N+1)\times(N+2)\div2$ 為奇數，〔$N\times(N+1)\times(N+2)+a$〕$\div4\leqq S\leqq$〔$N\times(N+1)\times(N+2)+kn$〕$\div4$

註 6：S’max–S’min + 1

伍、研究結論

一、 彩色骨牌代數解題有效策略有二：

(一) 若某一行或某一列的已知總和條件涵括 7 個不同顏色，即可套用快速解法策略 I ：**已知總和條件–全部點數和(0+1+2+3+4+5+6) = 多餘一色之數**。

(二) 若某一行或某一列的已知總和條件涵括 6 個不同顏色，即可套用快速解法策略 II ：**多餘一色之數 ＋ 全部點數和(0+1+2+3+4+5+6) =已知總和條件 ＋ 未知第 7 色之數(多餘一色之數–未知第 7 色之數 = 已知總和條件–21)**。

二、 彩色骨牌已知總和條件的給定，有其數學原理：

(一) 一道彩色骨牌可以至少給予 3 個已知總和條件，得以計算出各顏色所表示的數字。

(二) 兩顏色不可在已知條件關係中重複出現相同條件，無論給予多少個已知條件，都只列出此兩顏色的相似方程式，唯一能知道此兩色數字之間的相依關係，無法確定兩色所表示之數字。

三、 彩色骨牌的鑲入方式需避免可重複鑲入特性(如：在 2×2 方格內若出現三個一樣的數字和一個不一樣的數字，則鑲入排法非唯一種。)，原 35 題彩色骨牌的排列皆是唯一鑲入方式。

陸、展望

在研究末，我們跳脫 7×8 矩形條件的框架，設計了一套新式彩色骨牌問題情境，針對總和設定做重新定義，嘗試體驗擔任遊戲設計者的足智多謀，進而歸納出新式彩色骨牌矩形所拼組的總和皆有其範圍的一般化結果。下一階段我們將翻轉新式彩色骨牌問題情境，改採用從 28 張骨牌中進行有目的性的挑選，探討在各式不同矩形條件下中央和 k 值與四核心矩形總和 S 值的關係，再透過歸納、整理的方式，找到符合數學性的一般化解釋方法，以期擴展彩色骨牌問題的多元樣貌，我們持續施工中，敬請期待！

參考資料

一、洪銘澤(譯)(2015)。蒂姆・戴多普羅斯著。**哈佛給學生做的 1001 個思維遊戲**(The ultimate 1001 puzzle book)。新北市：禾風車。
二、孫文先 (2015)。多明諾(Domino)骨牌遊戲。*科學研習*，*54(4)*，29-37。
三、褚冠宏、高健哲(2015)。多明諾骨牌。載於 http://www.shs.edu.tw/works/essay/2015/03/2015033016100l4.pdf