

中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

佳作

080407

珠聯璧合-分析轉珠遊戲三消、五消的基礎樣式、
降階法及思考邏輯

學校名稱：彰化縣彰化市中山國民小學

作者： 小五 李孟哲 小五 梁元瑞 小五 吳俊廷	指導老師： 王志文 周秋萍
---	-----------------------------

關鍵詞：轉珠樣式、轉珠思考邏輯、降階法

摘要

本研究源自轉珠遊戲，剛開始參考第 54 屆高中組作品，接著使用「控制變因法」及「樹狀圖」，經歷了觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗的過程後得到：

- 一、「3 消」及「5 消」最短步數基礎樣式。
- 二、發現分界格的關係區域分類圖，並利用該圖找到最短步數起始珠的位置。
- 三、建立「3 消」及「5 消」達成 combo 的最短過程圖及路徑圖。
- 四、發現基礎樣式之間有包含關係，且具有階層關係。
- 五、建立降階表，將階層較低的樣式，使用降階法快速轉換為階層 0；階層較高的樣式，使用降階法逐步轉換為較低階層。
- 六、建立起始珠的判斷準則，以得到「3 消」及「5 消」任意組合的最短步數，並以此為基準串連更多的「3 消」及「5 消」。
- 七、建立轉珠思考邏輯。

壹、 研究動機

放學回家，完成功課之後，爸媽常讓我們使用平板來查詢資料或娛樂。看著解謎排行榜前幾名遊戲，情不自禁的下載遊玩，剛開始覺得這遊戲好難，怎麼玩都無法消除兩組以上的高分，跟平時玩的 Candy-Crush 相差好多。於是問了其他同學，大家一起討論，沒想到產生了高度興趣，於是提議可以一起去請教老師。

老師看了這個 App 遊戲後，說這個問題很不錯，恰巧結合高年級數學中「圖形對稱」、「圖形旋轉」、「找規律」的單元。於是就在老師的介紹下就開始了轉珠的研究，每週午休或早自修時間就成了我們練習與討論的時間，從簡單的圖形開始「找規律」。

貳、名詞解釋

一、3 消：指在過程中，完成三顆同顏色成一直線或一橫線而被消除的情況。如圖 2-1-1 藍珠和圖 2-1-1 綠珠。

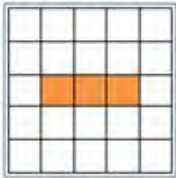


圖 2-1-1 「3 消」橫向一字型

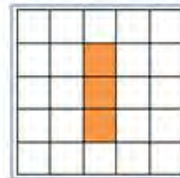


圖 2-1-2 「3 消」直向一字型

二、5 消：指在過程中，完成五顆同顏色組合成「T 型」、「十字形」和「L 型」而被消除的情況。如圖 2-2-1 藍珠所排列的形狀。



圖 2-2-1 「5 消」T 型、十字型及 L 型



圖 2-3-1 10combo 完成圖

三、combo：在一次移動中，完成「3 消」和「5 消」的總組數，1 組稱為 1combo。在 5x6 的盤面中，最多可完成 10 組「3 消」，稱為 10combo。如右上圖 2-3-1。

四、起始珠：指在遊戲過程中，被手指選上並開始移動的珠稱為「起始珠」。如圖 2-4-1 中白框的紫珠。



圖 2-4-1 起始珠(白框)

五、目標珠：指在盤面中不構成「3 消」的三顆同色珠或 5 消的五顆珠（如圖橘色格或水珠）。

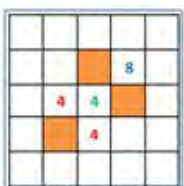


圖 2-5-1 「3 消」目標珠

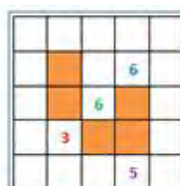


圖 2-5-2 「5 消」目標珠

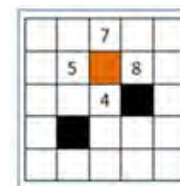


圖 2-6-1 分界格

六、分界格：指目標珠的周遭這四顆相鄰珠。

七、其他格：指分界格和目標珠以外的所有珠。也就是不與目標珠相鄰的其他所有珠。

八、屬性珠：
 水珠：🔵 火珠：🔴 木珠：🟢
 光珠：🟡 暗珠：🟣 心珠：🔴

九、最短步數：指「起始珠」與其他珠交換後，完成「3 消」或「5 消」的最少交換次數。

十、基礎樣式：指在 3x3 盤面中，去除對稱、旋轉後仍不同的圖形。「3 消基礎樣式」有九

種，「5 消基礎樣式」有九種。

十一、遊戲玩法與介紹：

(一)介紹：轉珠遊戲是在 5×6 的盤面中將 6 種 (5+1) 顏色的珠子重新作排列，藉由移動「起始珠」與其周遭四顆相鄰珠做位置的交換，重新整理盤面讓連成三顆一直線或多顆以上的珠子進行消除，每消除一組稱之為 1combo，消除的 combo 越多能得到的分數也就越高。

(二)遊戲方法：

- 1.先選定任意珠 (以暗珠為例)。白色框「暗珠」為起始珠，持續按住往下做連續交換，如圖 2-11-2-1。
- 2.藉由往下移動和「水珠」交換形成 1comb (3 消)，如圖 2-11-2-2。
- 3.再往下和「火珠」交換形成 2combo (3 消)，如圖 2-11-2-3。
- 4.繼續與其周遭四顆相鄰珠做位置的交換。
- 5.可將移動的位置畫成路徑，，如圖 2-11-2-4。
- 6.最後放開「起始珠」暗珠，完成這次移動。10combo (3 消)，如圖 2-11-2-5。



圖 2-11-2-1 選定起始珠 圖 2-11-2-2 向下交換 圖 2-11-2-3 向下交換第二次



圖 2-11-2-4 起始珠路徑圖

圖 2-11-5 完成 10combo

(三)消除方式說明：

這次我們主要探討的消除方式，除了原本的「3 消」，還另外探討「5 消」。在特殊情況下，我們得利用「5 消」來協助我們。正常消除 6 顆，需要兩組「3 消」才能消除。「5 消」是由兩組同色的「3 消」，在相連不分開的狀態下，利用「重複的一顆替代消失的第六顆」，來完成同時消除，如圖 2-11-3-1；但有些五顆相連仍無法畫出兩組三顆消除，便無法構成 5

消的條件。如圖 2-11-3-2。

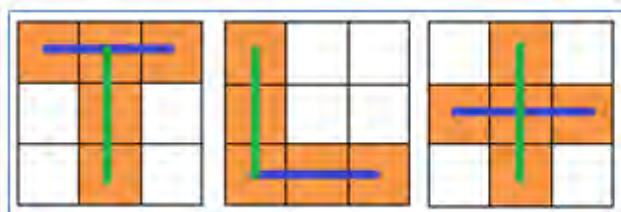


圖 2-11-3-1 能達成 5 消的情況

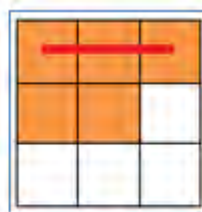


圖 2-11-3-2 不能達成 5 消的情況

參、 研究目的

- 一、 探討在 3×3 盤面中，「3 消」和「5 消」最短步數基礎樣式。
- 二、 探討在 3×3 盤面中，如何快速找到「3 消」及「5 消」最短步數起始珠的位置。
- 三、 尋找「3 消」及「5 消」完成 combo 的過程圖及路徑圖。
- 四、 探討「3 消」及「5 消」基礎樣式之間的關係。
- 五、 尋找「3 消」及「5 消」基礎樣式完成 combo 的簡易轉換方法。
- 六、 探討起始珠的判斷準則
- 七、 探討如何串接「3 消」及「5 消」的基礎樣式，以達成 3 消+3 消、3 消+5 消和 5 消+5 消之間的任意組合。
- 八、 探討如何規劃最佳路徑，以建立轉珠思考邏輯。

肆、 研究設備及器材

- 一、 模擬轉珠網頁(電腦 Windows 系統)，<http://louisalflame.github.io/TOSwebsite/drag.html>。
- 二、 轉珠大師 APP (手機 Android 系統)。
- 三、 路徑設計圖 (5×5 空白圖格多張)、鉛筆、螢光筆。桌上思考輔具。

伍、 研究過程與方法

一、研究 1：在 3×3 盤面，「3 消」基礎樣式的最短路徑及關係區域分類圖

一開始，為瞭解「3 消」基礎樣式的最短路徑與做法，按照 54 屆的作品模擬、構想並操

作 3×3 盤面的 9 組圖形，將每格的最短步數重新重現。同時也增加我們對規則的熟悉度。

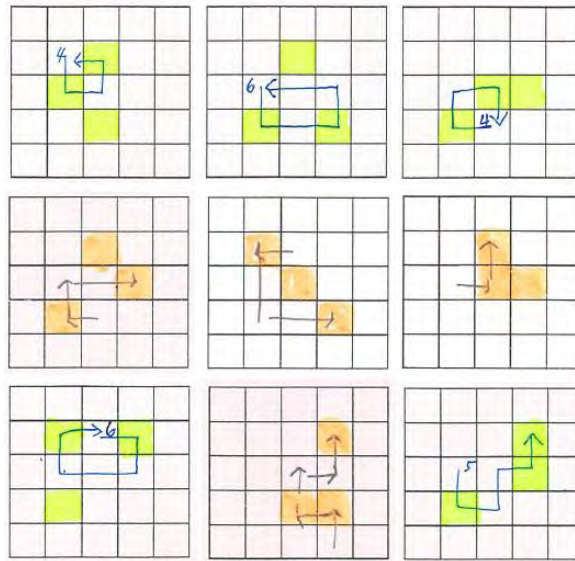


圖 5-1-1 模擬過往作品思考過程

我們發現可利用以下的步驟找出最短步數，以下以「Y 形」基礎樣式為例，如圖 5-1-2。

- (一)最短步數只存在於「目標珠」(橘色)上、下、左、右的「分界格」。
- (二)重複步驟(一)，可以將三個「目標珠」旁「分界格」的最短步數全部找出。
- (三)將已完成「目標珠」的最短步數合併為一張圖。
- (四)利用「其他格」出發必定會經過「分界格」的概念及
- (五)同一區域相鄰格的步數必定相差 1，直接推測從「其他格」出發的最短步數。



圖 5-1-2 推論每格最短步數過程 (3 消)

最後歸納出九種基礎樣式如圖 5-1-3。(與 54 屆科展結果類似，「2 型」略有不同)

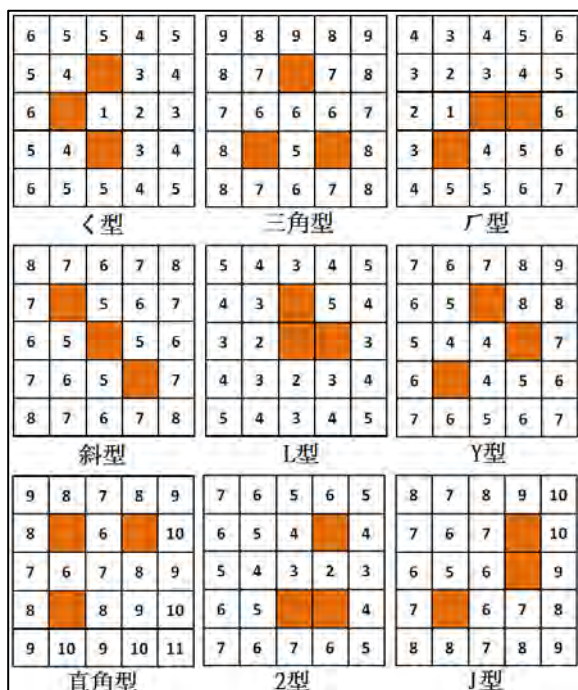


圖 5-1-3 「3 消」九種基礎樣式

進一步再將其分類，將經過相同「分界格」的路徑分組，可將基礎樣式進化成如圖 5-1-4。

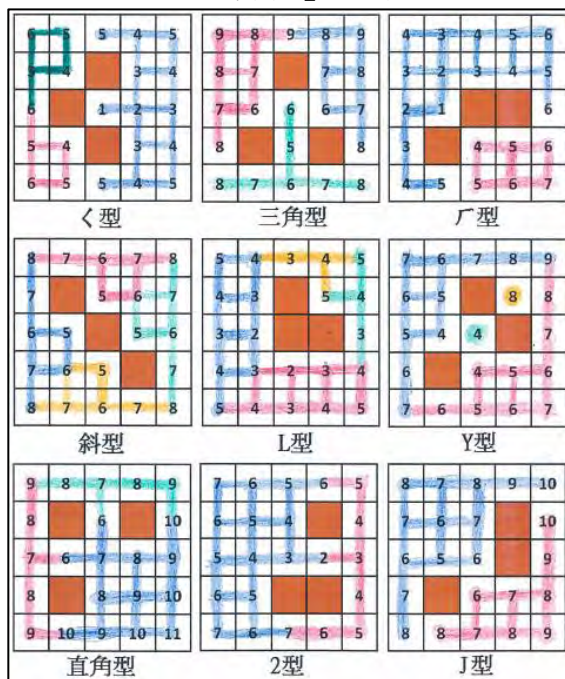


圖 5-1-4 「分界格」關係區域分類圖 (3 消)

模擬 I：沿著先前作品，得到「3 消基礎樣式」及「最短步數圖」。(同 54 屆科展)

發現 I：從「3 消」基礎樣式的「分界格」關係區域分類圖中，發現關係區域分類圖的每一格，都可找到和自己同色所屬的最短「分界格」，因此在建立轉珠思考邏輯中，只要記得

區域分類，就可直接找尋同區域中數字最小的「分界格」，並迅速將其變成直線型。

二、研究 2：探討在 3×3 盤面中，完成「3 消」基礎樣式的過程變化，並從中分類基礎樣式的階層關係

在進行研究 1 的過程中，我們同時發現到將基礎樣式轉到「一字型」時，會恰巧用到其他基礎樣式。於是我們根據研究 1 的結果，只要研究同區域中，數字最小的「分界格」，並將所有「基礎樣式」變成「一字型」的過程重新排列出來，以找出基礎樣式之間的關係。

在學校時，由於我們發現「3 消」的基礎樣式不斷重複的出現，但下課時間無法使用手機或電腦模擬時，就拿著自製的「思考基礎樣式輔具」不斷的重複排列，終於把所有的過程圖都排列出來。

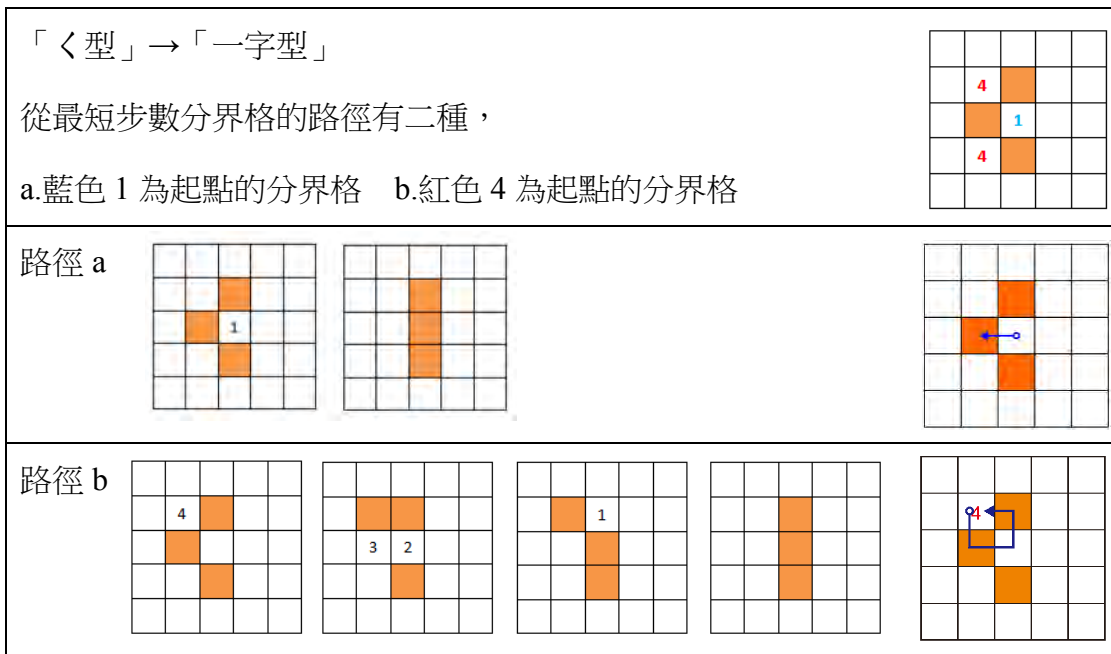
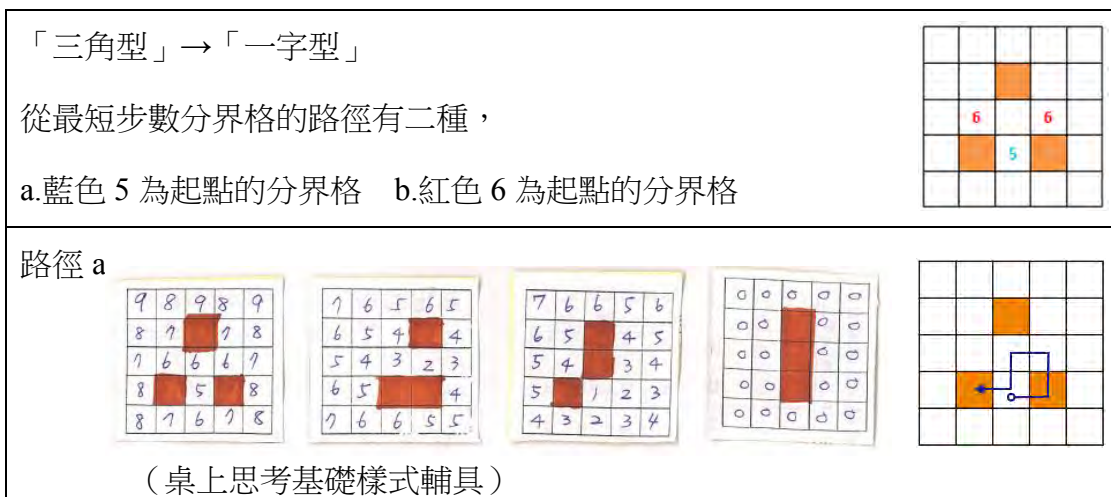


圖 5-2-1 「<型」→「一字型」珠子轉換過程圖與路徑圖



路徑 b

(桌上思考基礎樣式輔具)

圖 5-2-2 「三角型」→「一字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

「ㄈ型」→「一字型」

從最短步數分界格的路徑有二種，

a.藍色 4 為起點的分界格 b.紅色 1 為起點的分界格

路徑 a

路徑 b

圖 5-2-3 「ㄈ型」→「一字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

「斜型」→「一字型」

從最短步數分界格的路徑僅有一種，

a.紅色 5 為起點的分界格

路徑 a

圖 5-2-4 「斜型」→「一字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

「L型」→「一字型」

從最短步數分界格的路徑有兩種，

a.紅色 2 為起點的分界格 b.藍色 3 為起點的分界格

路徑 a

(桌上思考基礎樣式輔具)

路徑 b

(桌上思考基礎樣式輔具)

圖 5-2-5 「L 型」→「一字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

「Y 型」→「一字型」

從最短步數分界格的路徑有三種，

a. 綠色 4 為起點的分界格 b. 紅色 4 為起點的分界格

c. 藍色 8 為起點的分界格

路徑 a

(桌上思考基礎樣式輔具)

路徑 b

路徑 c

圖 5-2-6 「Y 型」→「一字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

「直角型」→「一字型」

從最短步數分界格的路徑有一種，

a.紅色 4 為起點的分界格

路徑 a

(桌上思考基礎樣式輔具)

圖 5-2-7 「直角型」→「一字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

「2 型」→「一字型」

從最短步數分界格的路徑有一種，

a.紅色 2 為起點的分界格

路徑 a

圖 5-2-8 「2 型」→「一字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

「J 型」→「一字型」

從最短步數分界格的路徑有二種，

a.紅色 5 為起點的分界格 b.藍色 6 為起點的分界格

路徑 a

路徑 b

圖 5-2-9 「J 型」→「一字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

發現 I：「3 消」基礎樣式有順序或階層關係，如圖 5-2-10。

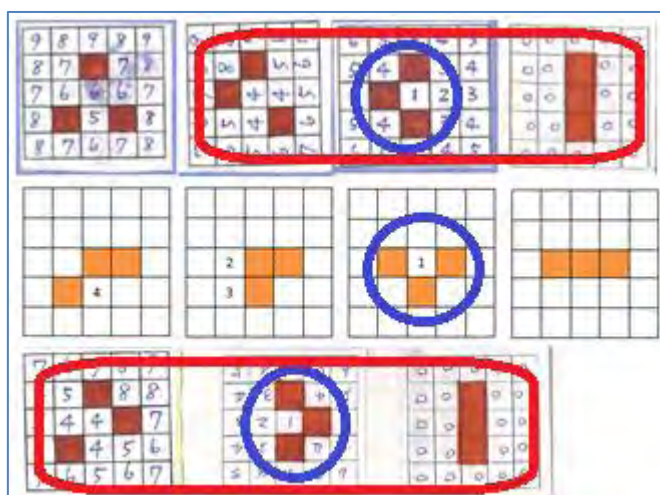


圖 5-2-10 基礎樣式關連與比較

其中「三角型」、「厂型」和「Y 型」在轉成一字型的過程中，都會先變成「<型」。更明顯的是「Y 型」的圖形變化，會被包含在「三角型」的圖形變化中，轉換的次序是「三角型」→「Y 型」→「<型」→「一字型」。因此我們推斷這些圖形可能有順序或階層上的關係。

三、研究 3：探討在 3×3 盤面中，「5 消」的基礎樣式（T 型消除、L 型消除、十字型消除）

接下來我們研究的主軸是製造轉珠遊戲中的強化珠，也就是「5 消」圖形（T 型消除、L 型消除、十字型消除）。在老師的指導下，利用「變因控制法」畫圖尋找 5 消基礎樣式。思考以下幾點：

(一)在九宮格中，將圖形分成三行。

(二)如果要把 5 顆珠子放進三行中（一行只有 3 格），會有以下情況。

$$5=3+2+0, 5=3+1+1, 5=2+2+1$$

(三)但是考慮到如果同一行內出現 3 顆，那表示在上一回合中，會變成「一字型」進行「3 消」。所以 $5=3+2+0$ ， $5=3+1+1$ 是不可能存在的，因此我們只需要討論 $5=2+2+1$ 。

(四)所以將三行重新排列會變成有三種情況 (1,2,2)，(2,1,2)，(2,2,1)。

(五)考慮第一種情況 (1,2,2)

1.第一行中出現一顆，那就會有左、中、右。三種情況。

2.第二行中出現兩顆，那會有左中、中右、左右，三種情況。

3.第三行中出現兩顆，也會有左中、中右、左右，三種情況。

老師有提示我們可以使用樹狀圖將所有結果一一呈現出來，就不會有遺漏的圖形。同時要注意不可有同一列內出現 3 顆，理由同前。以下圖 5-3-1 就是以 (1,2,2) 為例，使用樹狀圖尋找「5 消」基礎樣式。

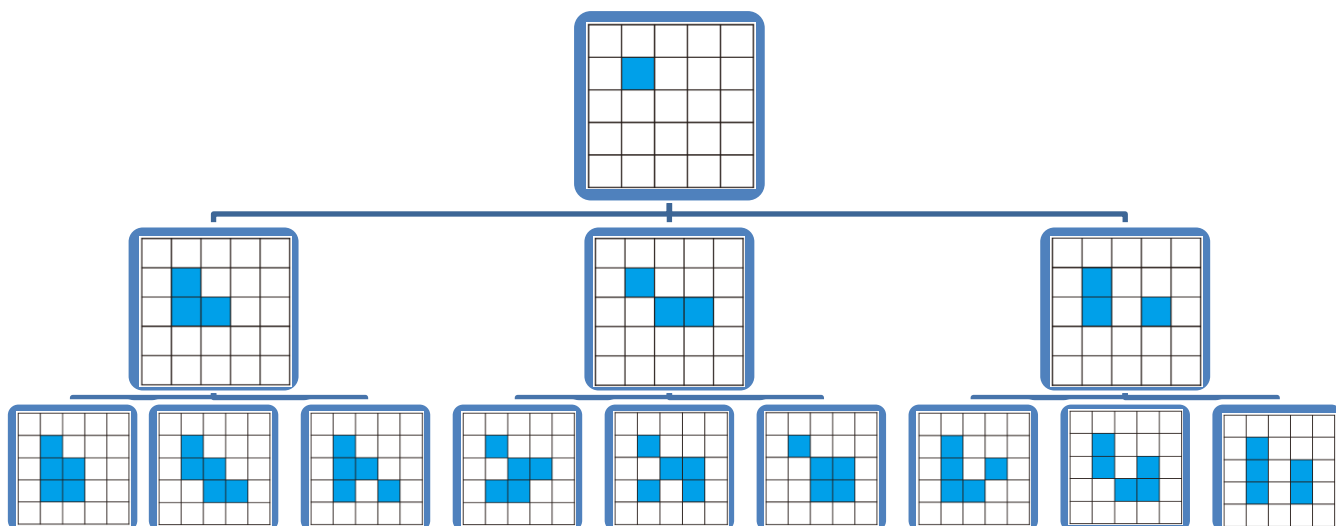


圖 5-3-1 以樹狀圖尋找「5 消」基礎樣式



圖 5-3-2 實際尋找「5 消」基礎樣式手稿

經過不斷的試驗，並刪除對稱、旋轉的圖形，如圖 5-3-2。

慢慢地整理出九種不重複的「5 消」基礎樣式。

利用研究 1 的「目標格」、「分界格」和「其他格」之間的關係，將最短步數找出，如圖 5-3-3。

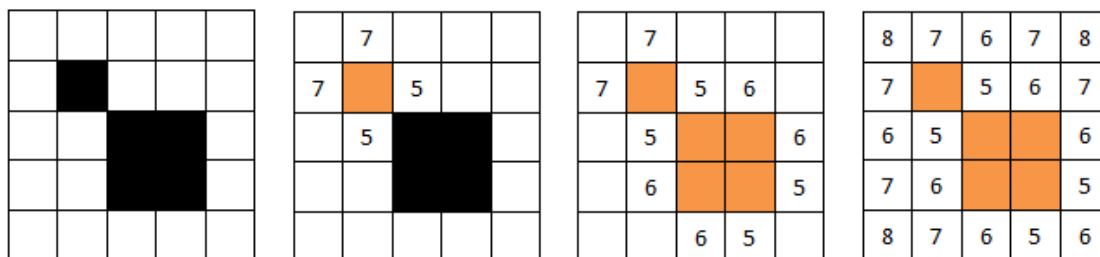


圖 5-3-3 推論每格最短步數過程 (5 消)

最後整理出「5 消」基礎樣式和最短步數，並且將每個樣式命名，如圖 5-3-4。

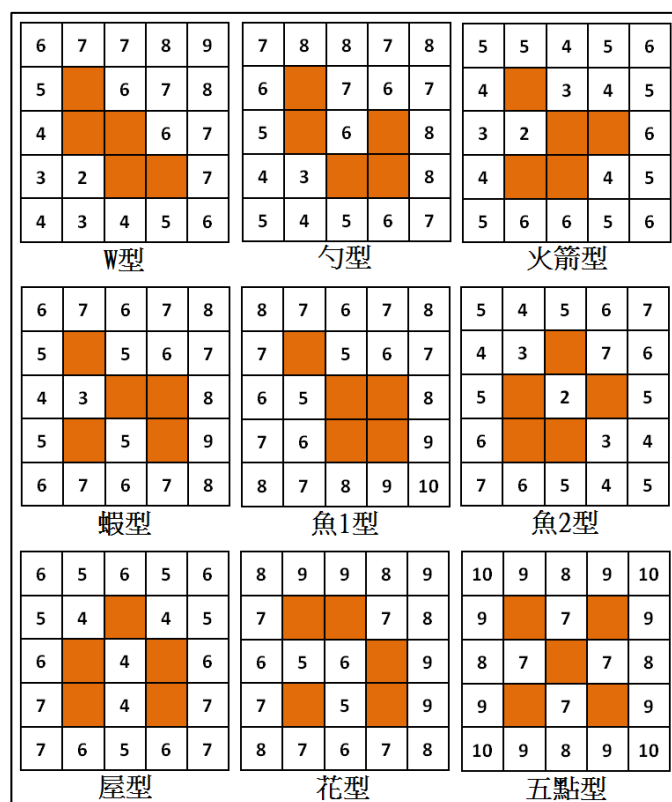


圖 5-3-4 「5 消」九種基礎樣式型 (3×3 範圍)

相同步驟，我們同時也將 5 消基礎樣式的最短步數區域圖畫出來，幫助在思考時能夠清楚知道可以從哪一個「分界格」進入，如圖 5-3-5。

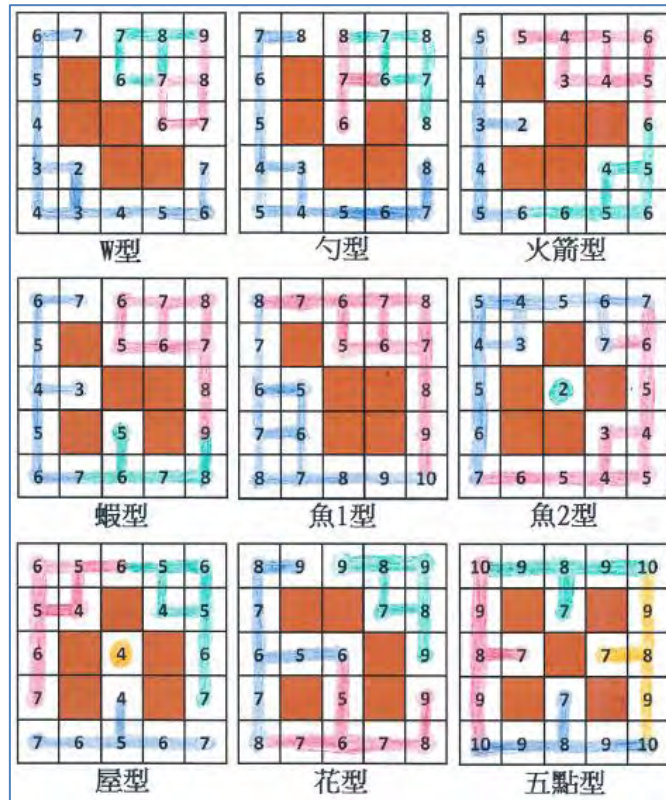


圖 5-3-5 「分界格」關係區域分類圖（5 消）

發現 I：「5 消」基礎樣式，共九種。

發現 II：九種「5 消」基礎樣式及最短步數

發現 III：「5 消」基礎樣式的「分界格」關係區域分類圖

四、研究 4：探討在 3×3 盤面中，完成「5 消」基礎樣式的過程變化，並從中分類基礎樣式的階層關係

根據研究 1、3 的結果，只要研究同區域中，數字最小的「分界格」，並將將所有「5 消」基礎樣式變成「T 型消除、L 型消除、十字型消除」的過程重新排列出來。

「W 型」→「T 型、L 型或十字型」

從最短步數分界格的路徑有二種，

a. 藍色 2 為起點的分界格 b. 紅色 6 為起點的分界格

路徑 a

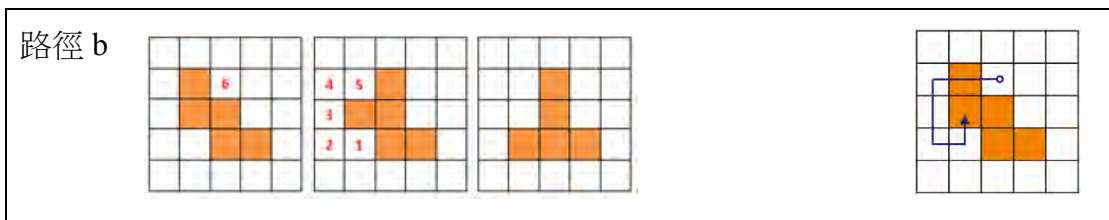


圖 5-4-1 「W 型」→「T 型、L 型或十字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

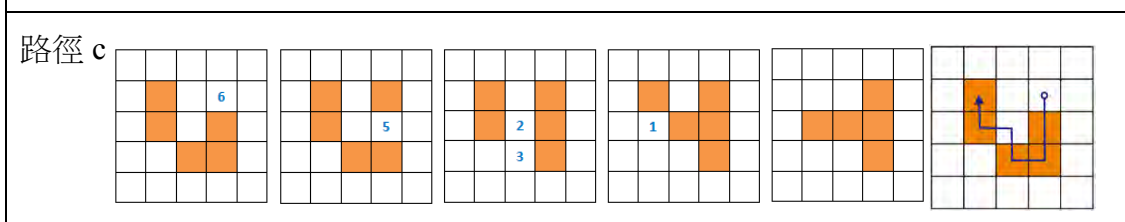
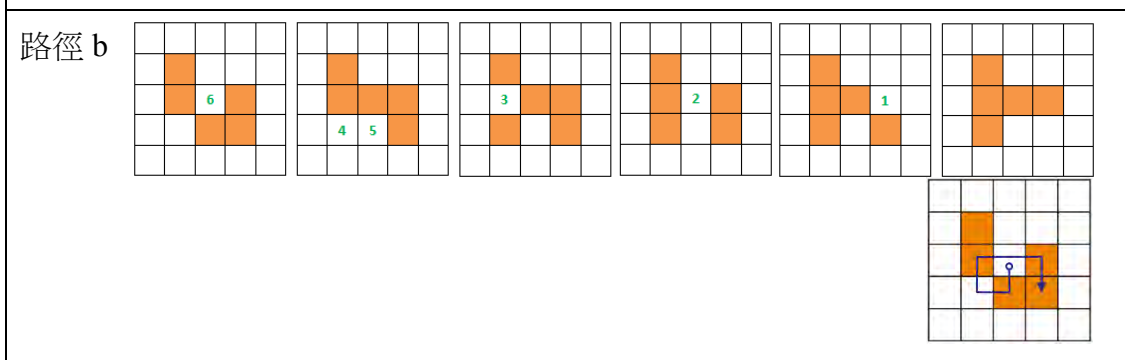
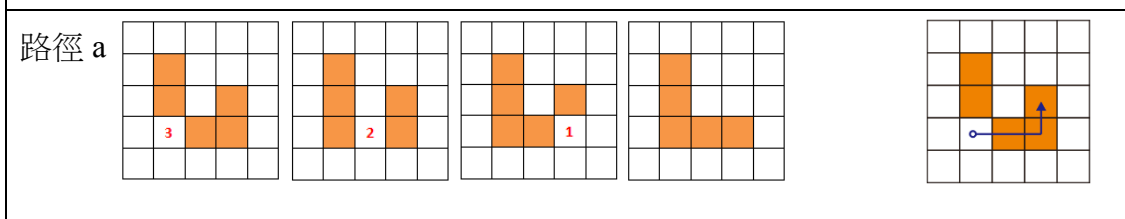
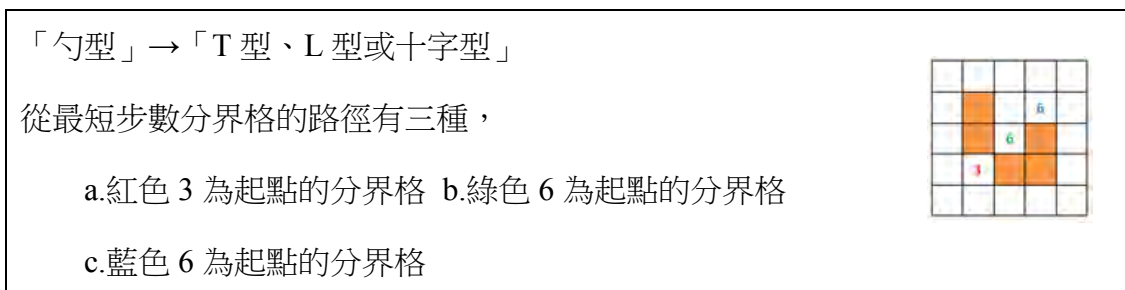
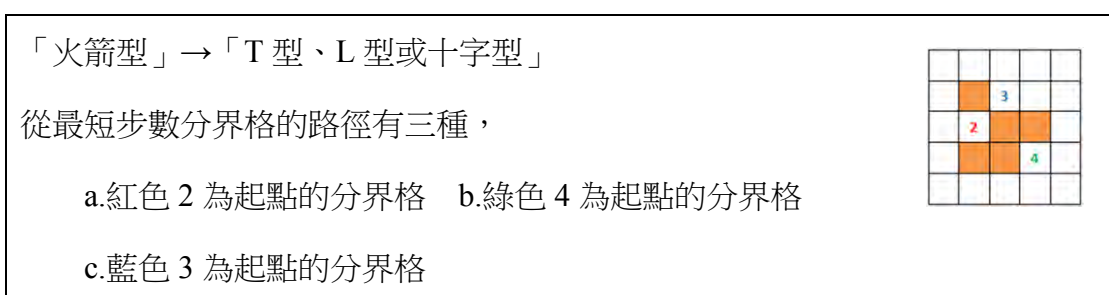


圖 5-4-2 「勺型」→「T 型、L 型或十字型」珠子轉換過程圖與路徑圖



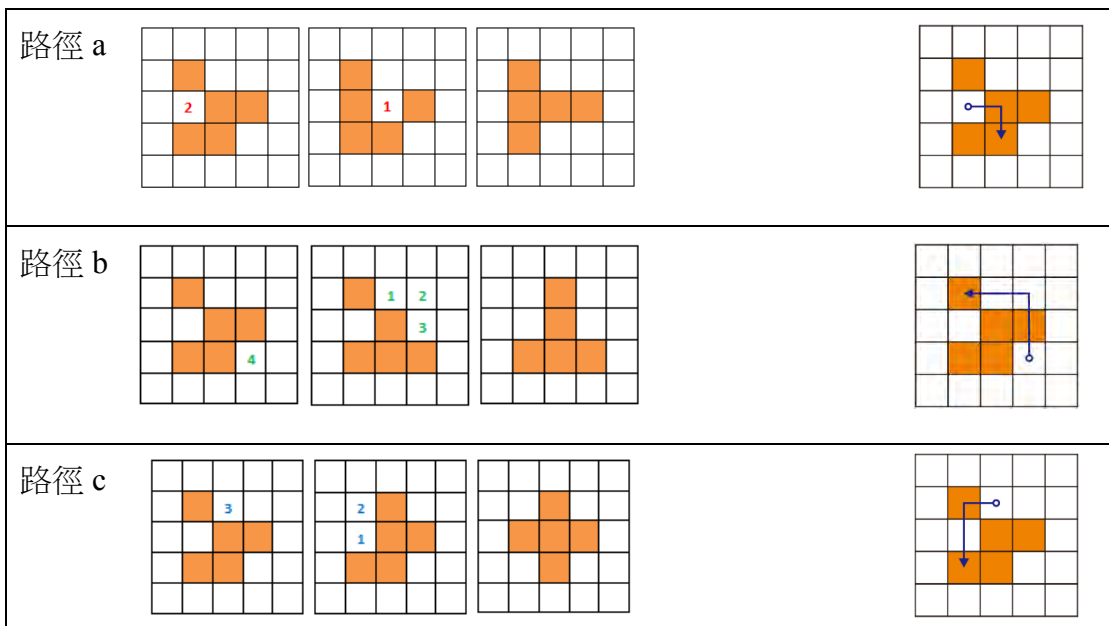


圖 5-4-3 「火箭型」→「T 型、L 型或十字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

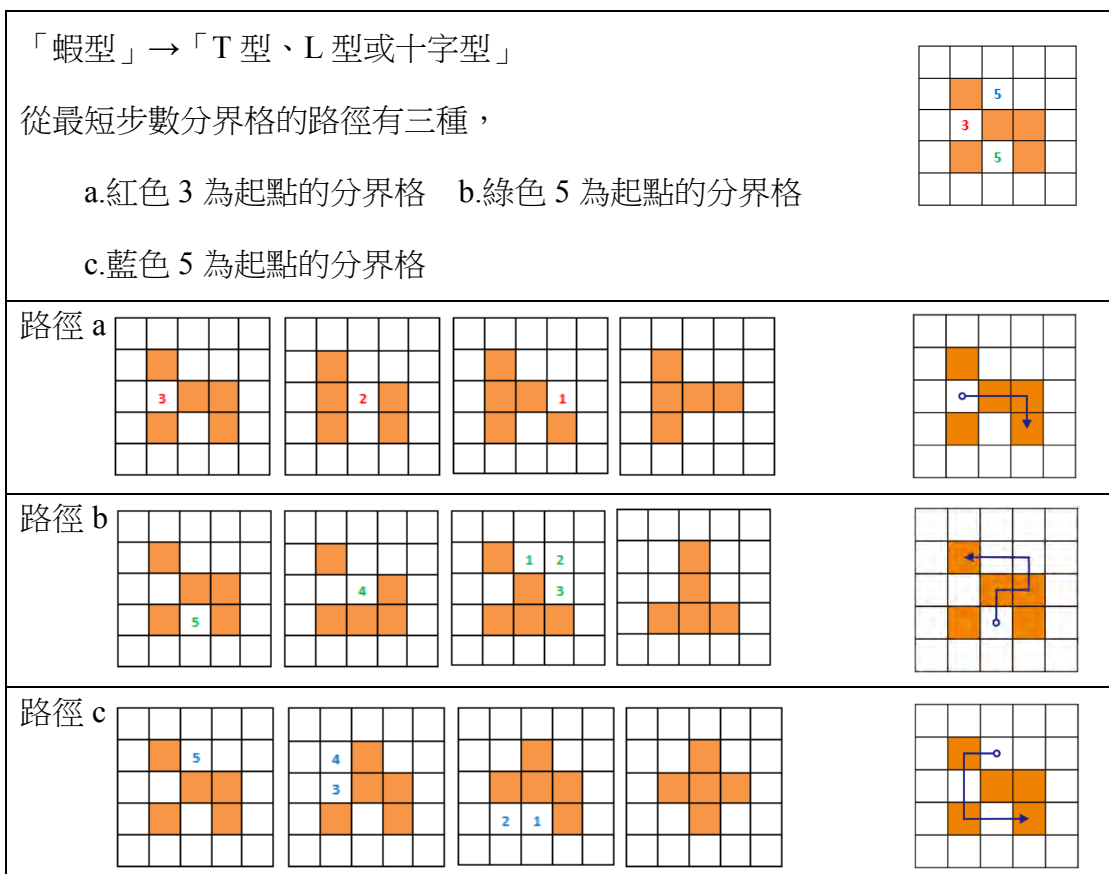
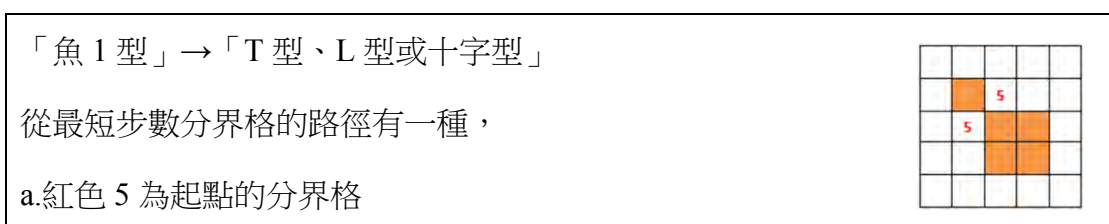


圖 5-4-4 「蝦型」→「T 型、L 型或十字型」珠子轉換過程圖與路徑圖



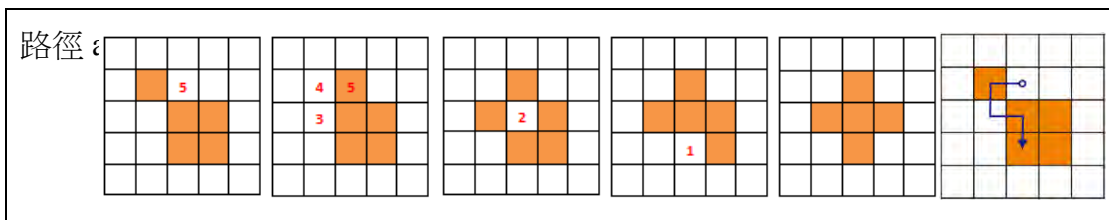


圖 5-4-5 「魚 1 型」 → 「T 型、L 型或十字型」 珠子轉換過程圖與路徑圖

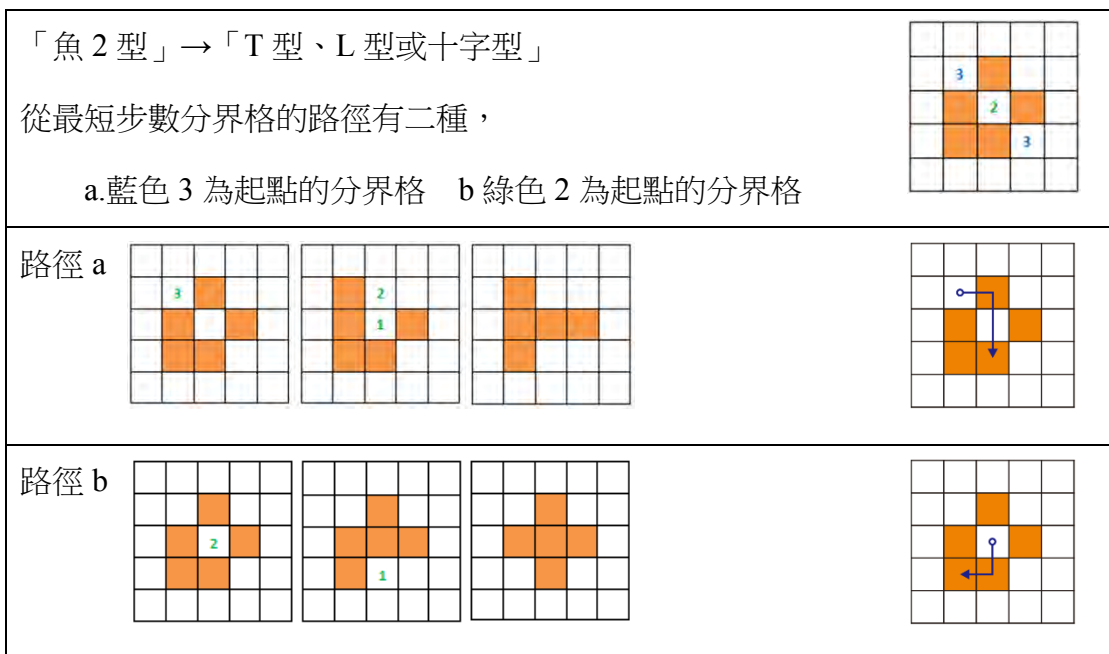
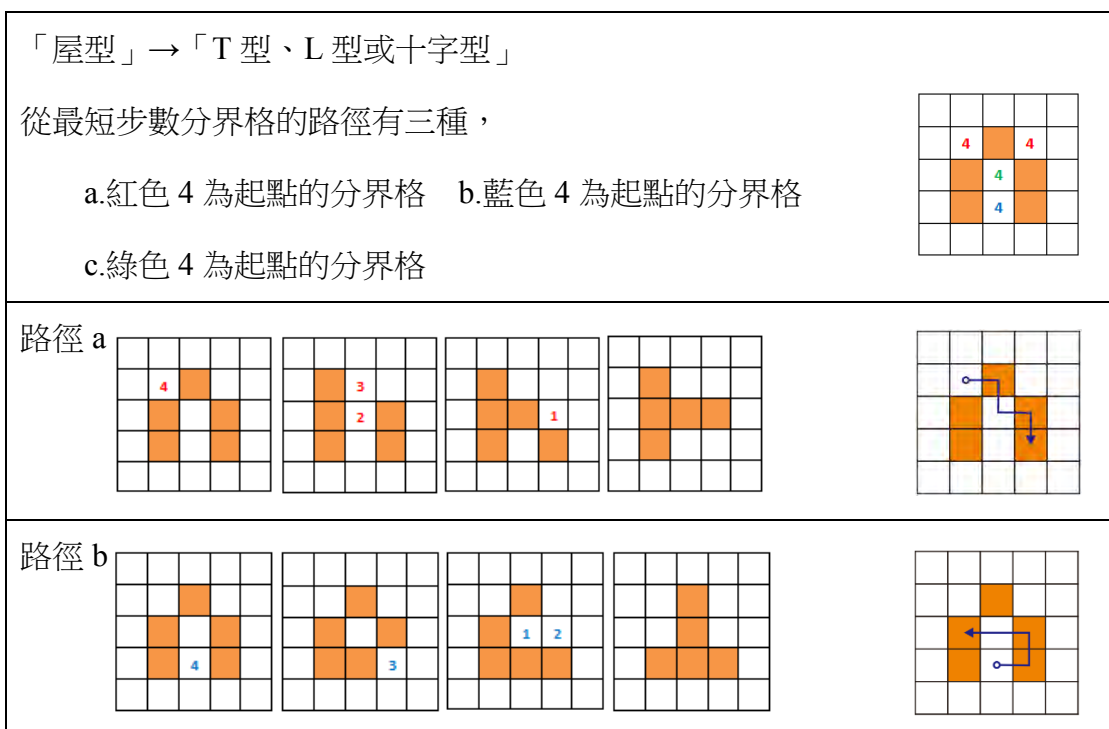


圖 5-4-6 「魚 2 型」 → 「T 型、L 型或十字型」 珠子轉換過程圖與路徑圖



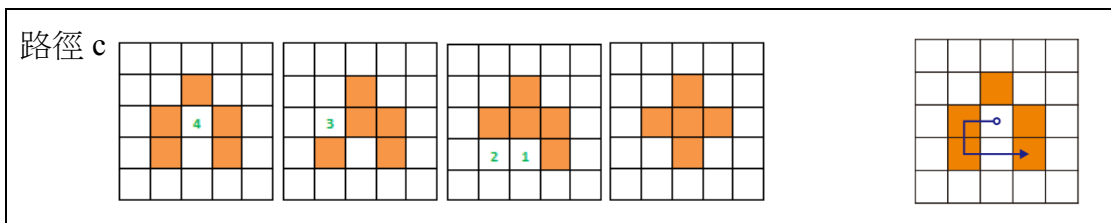


圖 5-4-7 「屋型」→「T 型、L 型或十字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

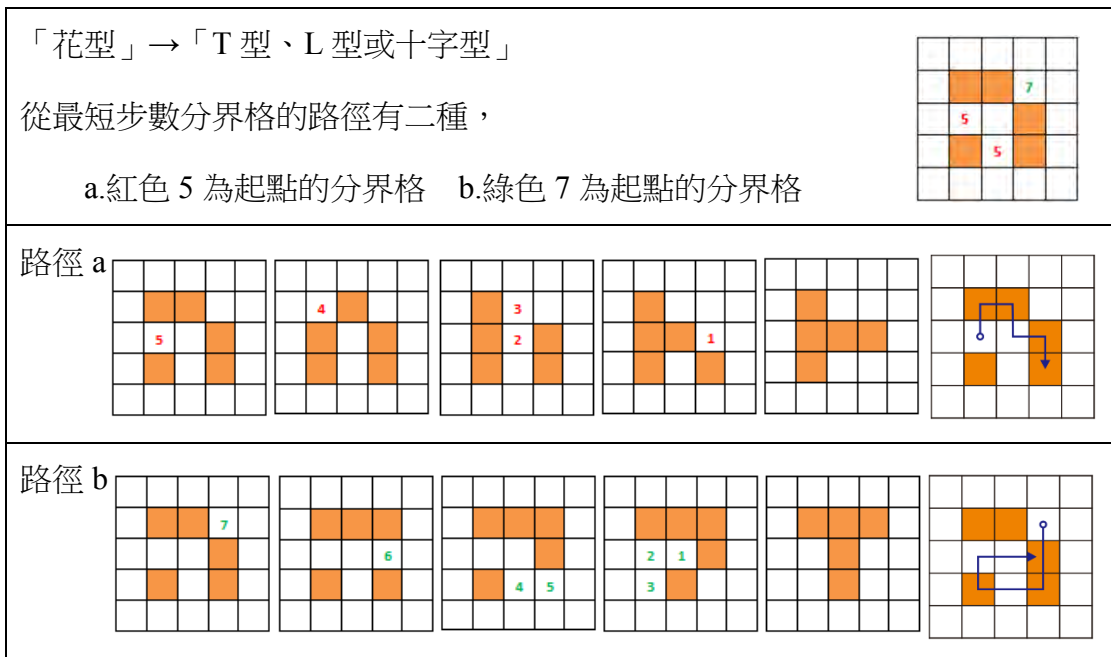


圖 5-4-8 「花型」→「T 型、L 型或十字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

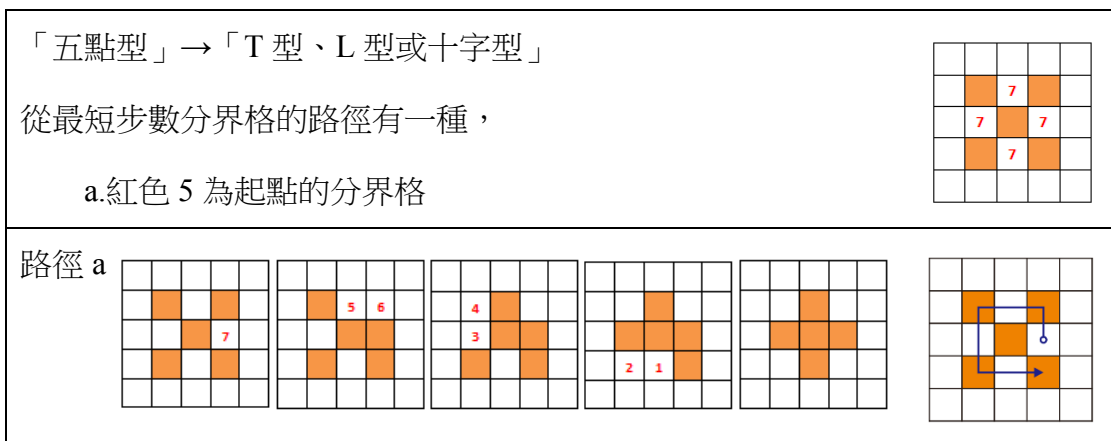


圖 5-4-9 「五點型」→「T 型、L 型或十字型」珠子轉換過程圖與路徑圖

發現 I：5 消基礎樣式有順序或階層的關係。例如圖 5-4-10。

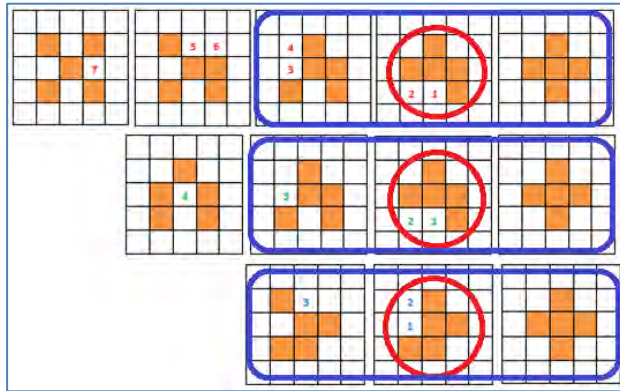


圖 5-4-10 基礎樣式關連與比較

其中「五點型」、「屋型」和「火箭型」在轉成十字型的過程中，都會先變成「水龍頭型」。更明顯的是，「火箭型」的圖形變化可以被包含在「屋型」和「五點型」的圖形變化中。因此我們推斷這些圖形可能有順序或階層上的關係。

陸、 研究結果

一、對於「3 消」，建立「基礎樣式隸屬圖」及「關係區域分類圖」

我們從研究 1 得知，「其他格」的路徑會往附近的「分界格」靠近，將其路徑歸類後，可以得到以下的區域劃分，相同顏色我們稱為同一區域，同一區域的路徑必會經過數字最小的「分界格」。

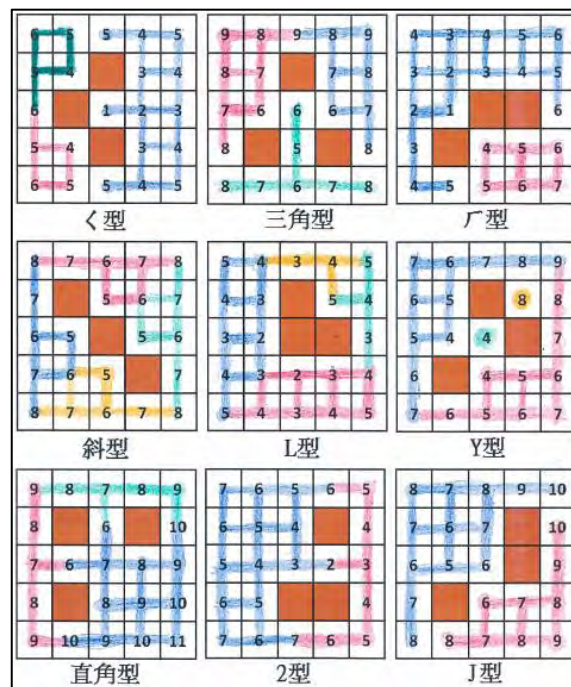


圖 6-1 分界格關係區域分類圖 (3x3)

因此我們可以利用關係區域分類圖，找到該路徑所屬的最短步數「分界格」。這在建立轉珠思考邏輯中，只要記得區域分類，並尋找同區域中「數字最小的分界格」就可以迅速將其變成直線型。

二、建立 3 消基礎樣式「階層關係圖」及「3 消降階法」

(一)、我們研究 3 消基礎樣式過程變化，我們發現可將圖形分類成以下結果

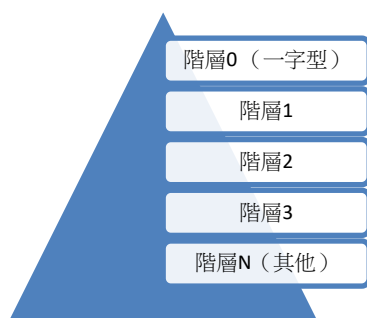


圖 6-2-1-1 階層關係圖

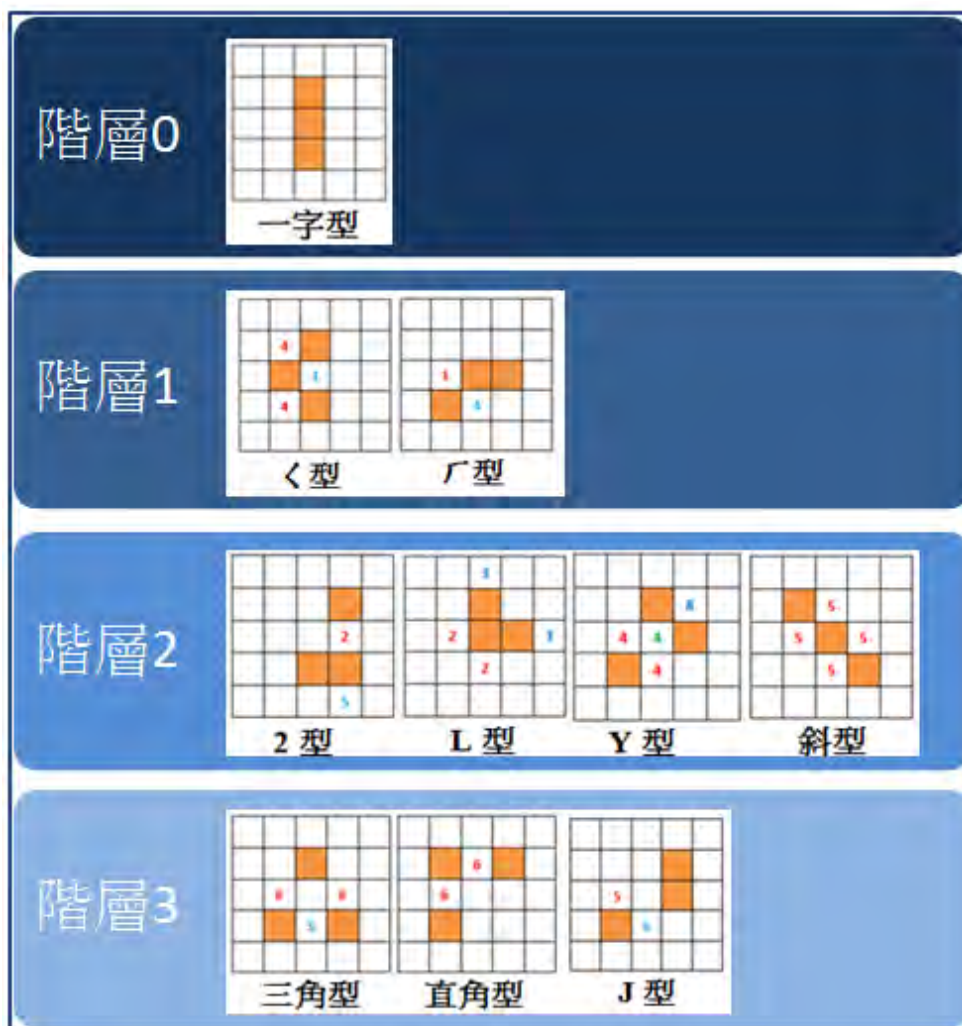


圖 6-2-1-2 「3 消」降階表

比較過研究 2「3 消」基礎樣式的過程圖之後，我們得到以下結果：

1. 「<型」和「厶型」最後都會出現在階層 0「一字型」的前一個圖，且其中皆有步數為 1 的分界格，因此我們把這二種樣式定義為「階層 1」。
2. 「2 型」、「Y 型」、「斜型」和「L 型」又出現於「<型」和「厶型」之前，因此我們將這四種樣式定義為「階層 2」。
3. 最後「三角型」、「直角型」和「J 型」都必須透過階層 2 的圖形轉換，因此我們將這三種樣式定義為「階層 3」
4. 而其他超過 3×3 盤面的樣式，我們都將其設定為「階層 N」。

(二)、3 消降階法

因此在建立轉珠思考邏輯中，我們只要查看「3 消降階表」，就可以迅速將階層低的樣式轉換為直線型完成 3 消。

三、對於「5 消」，建立「基礎樣式隸屬圖」及「關係區域分類圖」

研究 3 中，我們分析後得知「5 消」基礎樣式，須將五顆目標珠打散進入三行排列，會變成有三種情況 (1,2,2)，(2,1,2)，(2,2,1)。

1. 第一行中出現一顆，那就會有左、中、右。三種情況。
2. 第二行中出現兩顆，那會有左中、中右、左右，三種情況。
3. 第三行中出現兩顆，也會有左中、中右、左右，三種情況。

在經過樹狀圖有規律地推演，並刪除旋轉、對稱後的圖形。得到以下圖形，並將每格最短步數找出，整理過後如圖 6-3-1。

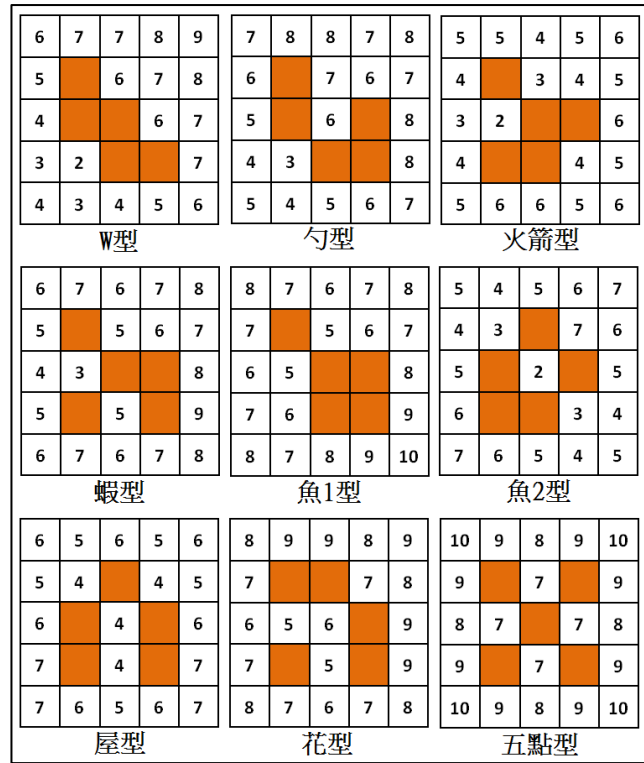


圖 6-3-1 「5 消」九種基礎樣式 (3×3)

同樣，利用其路徑關係圖，將其作區域分類。如圖 6-3-2。

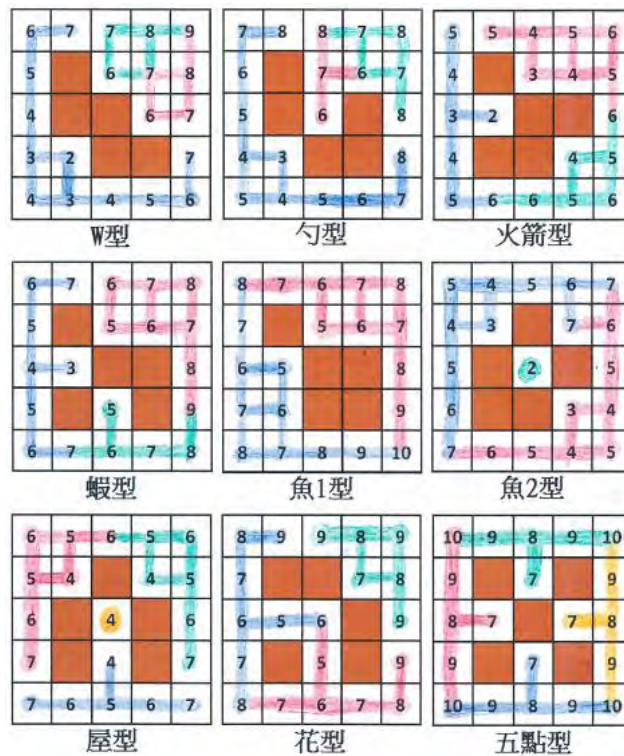


圖 6-3-2 分界格關係區域分類圖 (3×3)

四、建立 5 消基礎樣式「階層關係圖」及「5 消降階法」

(一) 建立 5 消基礎樣式「階層關係圖」

我們可從研究 4 中得知「5 消」基礎樣式過程變化，過程中我們發現圖形可能像「3

消」圖形有順序或階層上的關係。同時我們也發現，在研究 3 中使用「變因控制法」時，部分被我們刪除的圖形（無法出現在起始盤面中的圖形）又再度出現，而且這些圖形在「降階表」中扮演著相當重要的角色。

因此我們重新再將這些圖形歸類並重新命名。並將其納入「5 消降階表」之中，如圖 6-4-1-1。

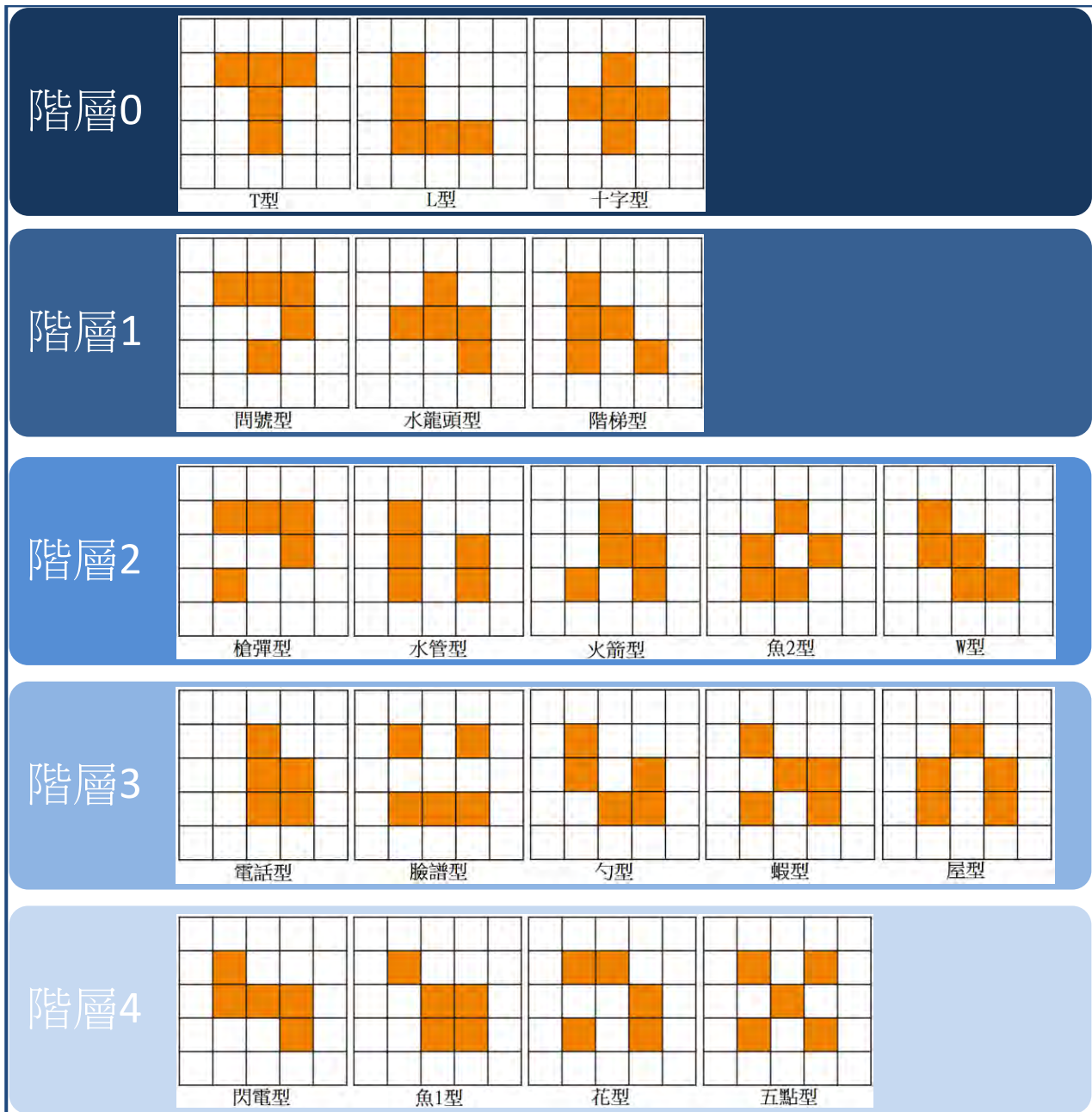


圖 6-4-1-1 「5 消」降階表

比較過研究 4 「5 消」基礎樣式的過程圖之後，我們得到以下結果：

1. 「問號型」、「水龍頭型」和「階梯型」最後都會出現在階層 0「T 字型」、「十字形」和「L 型」的前一個圖，因此我們將這三種樣式定義為「階層 1」。
2. 「槍彈型」、「水管型」、「火箭型」、「魚 2 型」和「W 型」又出現於階層 1 的圖形之前，因此我們將這五種樣式定義為「階層 2」。
3. 「電話型」、「臉譜型」、「勺型」、「蝦型」和「屋型」都必須透過階層 2 的圖形轉換，因此我們將這五種樣式定義為「階層 3」。
4. 最後「閃電型」、「魚 1 型」、「花型」和「五點型」都必須透過階層 3 的圖形轉換，因此我們將這四種樣式定義為「階層 4」。
5. 而其他超過 3×3 盤面的樣式我們都將其設定為階層 N。

(二)、5 消降階法

因此在建立轉珠思考邏輯中，我們只要查看「5 消降階表」，就可以迅速將階層低的樣式轉換為「T 字型」、「十字形」和「L 型」，以完成 5 消。

五、建立「3 消」和「5 消」組合的轉珠思考邏輯

1. 「轉珠前」，利用基礎樣式，先觀察可能組合的 3 消及 5 消基本盤面，如圖 6-5-1。(使用 3 消九種基礎樣式、5 消九種基礎樣式)
2. 思考**基礎樣式最短步數**（3 消基礎樣式最短步數、5 消九種基礎樣式最短步數），左下厂型（**火珠**）、L 型（**暗珠**）、三角型（**火珠**）、驚嘆號型（**暗珠**）、驚嘆號型（**光珠**）及魚 2 型（**木珠**），及最後疊珠（**水珠**）
3. 透過最短步數方向，篩選起始珠位置。
4. 組合思考路徑，利用**階層關係圖**選擇優先圖形
5. 利用「**分界格關係區域分類圖**」，盡量在同一區域中完成其他基礎樣式。
6. 利用「起手後 0-3 秒」將預先思考好的路線完成，圖 6-5-3。
7. 「起手後 3-5 秒」利用剩下盤面加上反應來完成剩餘盤面，圖 6-5-4。



圖 6-5-1 隨機盤面



圖 6-5-2 觀察可能組合基礎樣式



圖 6-5-3 思考路徑
(綠點為起點，紅點為終點)



圖 6-5-4 完成盤面
(達成 6 組 3 消、1 組 5 消)

柒、 討論

一、「目標珠」的最短步數，必定存在於「分界珠」？

命題：在 5x5 的盤面中，最短步數必存在於「目標珠」上、下、左、右的「分界珠 X」。

證明：（有關於這個證明我們有請教老師如何進行推論與證明，最後是使用反證法來證明。）

		X		
	X		X	
		X	A	B
		A	B	C
		B	C	D

圖 7-1-1 最短步數與分界珠關係圖

(一)提出假設：假設 X、A、B、C 和 D 隸屬於同區域。且最短步數不存在於「目標珠」上下左右的「分界格 X」中，如圖 7-1-1。因此可以得知，最短步數應該在盤面上 A、B、C、D 等其他位置。

(二)探討關係：由於 A、B、C 和 D 之間的關係應該為 $D=C+1$ 、 $C=B+1$ 、 $B=A+1$ ，並且其關係為 $D>C>B>A$ ，A 為其中最小的數字。

(三)思考討論：根據假設由於最短步數不存在於 X，表示 X 不可能小於 A，所以 X 只能大於或等於 A。

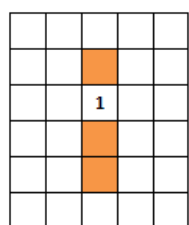
1.如果 $X=A$ ，那代表 X 和 A 無相關，也就是 X 和 A 隸屬不同的區域，所以路徑無法從 A 移動到 X，進而改變「目標珠」位置，矛盾；

2.如果 $X>A$ ，那代表最短路徑移動是先從 X 移動到 A，但如此一來移動的方向會越來越偏離「目標珠」，並且無法改變「目標珠」位置，矛盾。

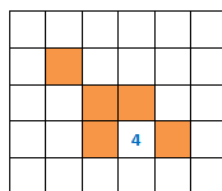
(四)完成證明：所以我們得知最短步數必存在於「目標珠」上下左右的「分界珠 X」。

二、3x3 以外盤面，最後是否都會依照「階層 N→階層 3→階層 2→階層 1→階層 0」的過程，完成消除的動作？

在探討《研究 1》及《研究 3》的過程中，部分圖形並不在我們設想範圍內，而這些圖形出現的主要原因是，我們在起手的第一步時，將「目標珠」往 3x3 以外的範圍移動，造成圖形結構變為 3x4 的圖形，這是我們一開始並沒有想到的。但也因為研究形狀變化的過程，讓我們額外發現 3x4 基礎樣式步數，並不一定會比 3x3 差。如 3 消中的「驚嘆號型」，如圖 7-2-1；5 消中的「爬型」，如圖 7-2-2。



7-2-1 驚嘆號型



7-2-2 爬型

但我們可以知道，如果圖形都在 3x3 範圍中，還有是有階級和次序之分的。在 3x3 過程圖中不會出現相同的兩張基礎樣式，假設出現相同的基礎樣式，則可以輕易發現步

數不是最短，會讓過程圖形持續循環，造成無法終結的情況，而形成矛盾。

所以 3x3 之中盤面，最後必定都會依照「階層 N→階層 3→階層 2→階層 1→階層 0」完成消除。而關於 3x4 基礎樣式的研究，我們發現由於 3x4 基礎樣式複雜度提高，基礎樣式的類別會更多，因此我們將其列為未來進一步研究的方向。

三、如何從 3 消、5 消分類區域圖中找出最短步數，起始珠的位置？

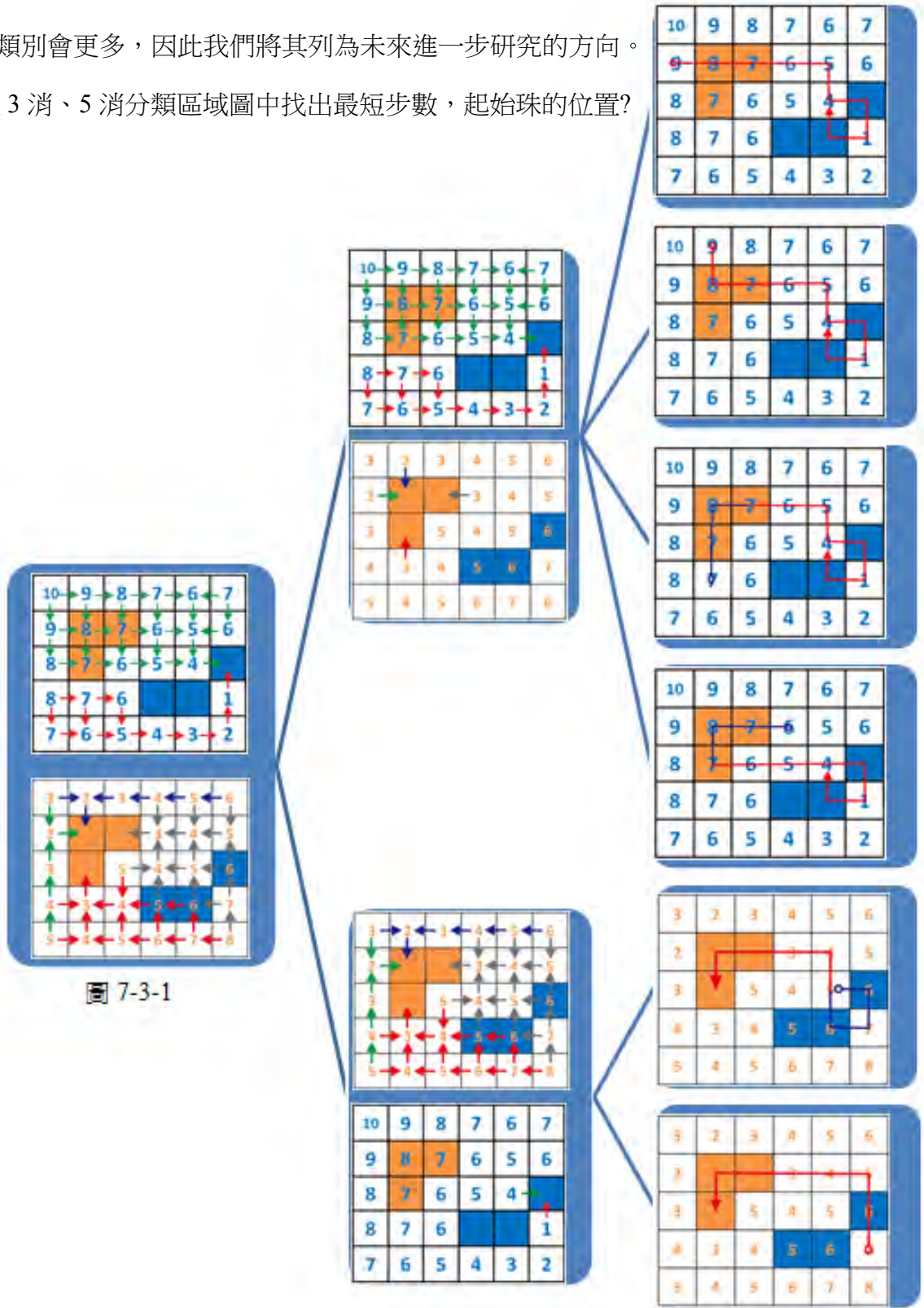


圖 7-3-1

圖 7-3-2

圖 7-3-3

關於起始珠位置的探討，我們可分 3 消+3 消、3 消+5 消和 5 消+5 消，共三種情形，以「3 消+3 消」為例，假設 5x6 盤面圖形中想先完成的兩個 3 消圖型是「L 型」和「厶型」，如何找到最理想的起始珠。我們想到的步驟如下。

(一)我們可以先找到 5x6 盤面，以「L 型」為主的「分界格的關係區域分類圖」以及和以「厶型」為主的「分界格的關係區域分類圖」，如前頁圖 7-3-1。

(二)分別將「L 型」和「厶型」的最小步數分界格找出，並比對另一張「最短步數基礎樣式」，如前頁圖 7-3-2。

(三)若先解「L 型」，可以發現共有 4 個區域的分界格可進入，因此發現四條路徑；若先解「厶型」，可以發現共有 2 個區域的分界格可進入，因此發現二條路徑；如前頁圖 7-3-3。

(四)觀察「L 型」的四條路徑，因為「厶型」正好在「L 型」的右下方，若將方向性加入考量，由於「灰色箭頭」和「紅色箭頭」進入的路徑會有方向回頭的問題。因此，比較適合的路徑是「藍色箭頭」及「綠色箭頭」的路徑，且兩種路徑的步數皆為 9 步。

(五)觀察「厶型」的二條路徑，因為「L 型」正好在「厶型」的左上方，若將方向性加入考量，由於「綠色箭頭」進入的路徑會有方向回頭的問題。因此，比較適合的路徑是「紅色箭頭」的路徑，且路徑的步數為 7 步。

(六)從討論一的結果得知，起始珠必定在於「最小分界格中」，並將方向考慮進去，並結合(四)、(五)的結果發現，從「厶型」(紅色箭頭)的最小分界格開始，可達成最短的步數 7 步，此為最好選擇。

(七)以(一)至(六)為基準，可以再連結第三個圖形，可以是「3 消」或「5 消」圖形，假設是「5 消」，便可以完成 3 消+3 消+5 消。

發現 I：最短路徑的判準要優先考量

- 1.不選用有方向回頭的路徑。
- 2.選用步數較少的路徑。

發現 II：考量到「圖形的有限性」及「時間限制」，每個預定要完成的圖形是需要比較靠近的，如果預定完成圖形越靠近，對於後面串聯 **combo** 的影響就會越小。

(備註：「圖形有限性」指的是 5x6 的盤面，最多只能完成 10 個 3 消 **combo**；

「時間限制」指的是轉珠時間只有 5 秒，以正常的轉珠速度而言能移動 50 步大概就已經接近極限。)

捌、 結論

本研究探討在 5x6 的轉珠隨機盤面中，針對 3x3 的簡易盤面進行「3 消」和「5 消」的最短步數及消除較多 **combo** 的探究，過程經歷了觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗，最後提出最短步數及較多 **combo** 的判斷準則。其中過程除了「3 消最短步數基礎樣式」參照 54 屆之外，其餘各點均是由我們發現、整理及歸納得出。綜合整個研究獲得主要的結論如下：

- 一、 我們學會了變因控制法、樹狀圖的應用。
- 二、 我會學會利用對稱、旋轉將重複的相同圖形刪除，歸納出 3 消九種基礎樣式、5 消九種基礎樣式。
- 三、 我們學會利用「桌上思考輔具」進行「思考實驗」。
- 四、 找到「3 消最短步數基礎樣式」。(與 54 屆類似)
- 五、 利用「控制變因法」及樹狀圖找出「5 消最短步數基礎樣式」。
- 六、 利用「最短步數基礎樣式」找到「分界格的關係區域分類圖」，進而利用「分界格的關係區域分類圖」快速找到最短步數起始珠的位置。
- 七、 藉由尋找最短步數，建立 3 消及 5 消達成 **combo** 的過程圖及路徑圖
- 八、 由過程圖發現基礎樣式之間具有包含關係，進而發現基礎樣式有階層關係。
- 九、 利用階層關係建立降階表，
 - (一)對於階層較低的基礎樣式，可使用降階法快速轉換為階層 0，完成 **combo**。
 - (二)對於階層較高的基礎樣式，可使用降階法逐步轉換為較低階層圖形，進而完成 **combo**。

- 十、 建立起始珠的判斷準則，以得到 3 消+3 消、3 消+5 消和 5 消+5 消的最短步數，並以此為基準，可以串連後續緊接著的 3 消或 5 消完成更多 combo 數。
- 十一、 建立「3 消」和「5 消」組合的轉珠思考邏輯。

玖、 參考資料與其他

- 一、 第 54 屆全國科展高中組，扭「轉」乾坤
- 二、 南一書局(2015)。國小數學學習領域第 9 冊第五單元線對稱圖形。臺南市：南一。
- 三、 南一書局(2015)。國小數學學習領域第 12 冊第二單元怎樣解題。臺南市：南一。
- 四、 數字拼圖，<http://oddest.nc.hcc.edu.tw/math161.htm>
- 五、 神魔之塔，<http://www.towerofsaviors.com/zh/tutorial>
- 六、 轉珠模擬軟體，<http://louisalflame.github.io/TOSwebsite/drag.html>

【評語】 080407

轉珠遊戲 Candy-Crush 是熱門的手機遊戲，也許”熱潮不退”到達老師”害怕”的地步，各種秘笈在網路上流傳，參展作品等於秘笈的一種。針對 5x6 盤面上的轉珠遊戲探討如何創造最多的”三消”與”五消”，一步步規劃出得分最多的路徑。從遊戲開始到探索研究，值得鼓勵；然而這一道問題註定沒有最佳解法，秘笈的優劣以參賽的得分與網路的排名為最佳驗證。

作品海報

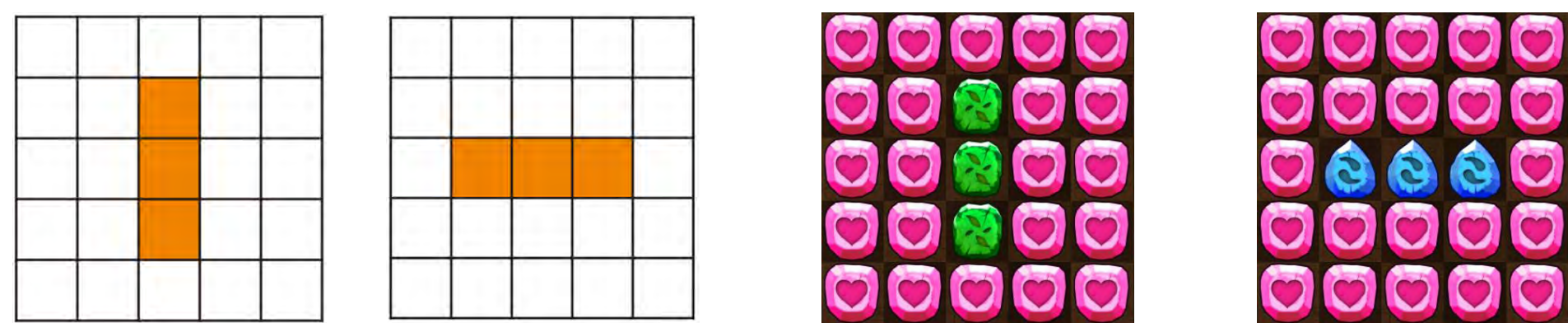
壹、研究動機

放學回家，完成功課之後，爸媽常讓我們使用平板來查詢資料或娛樂。看著解謎排行榜前幾名遊戲，情不自禁的下載遊玩，剛開始覺得這遊戲好難，怎麼玩都無法消除兩組以上的高分，跟平時玩的Candy-Crush相差好多。於是問了其他同學，大家一起討論，沒想到產生了高度興趣，於是提議可以一起去請教老師。

老師看了這個App遊戲後，說這個問題很不錯，恰巧結合高年級數學中「圖形對稱」、「圖形旋轉」、「找規律」的單元。於是就在老師的介紹下就開始了轉珠的研究，每週午休或早自修時間就成了我們練習與討論的時間，從簡單的圖形開始「找規律」。

貳、名詞解釋

一、3消：指在過程中，完成三顆同顏色成一直線或一橫線而被消除的情況。



二、5消：指在過程中，完成五顆同顏色組合成「T型」、「十字形」和「L型」而被消除的情況。

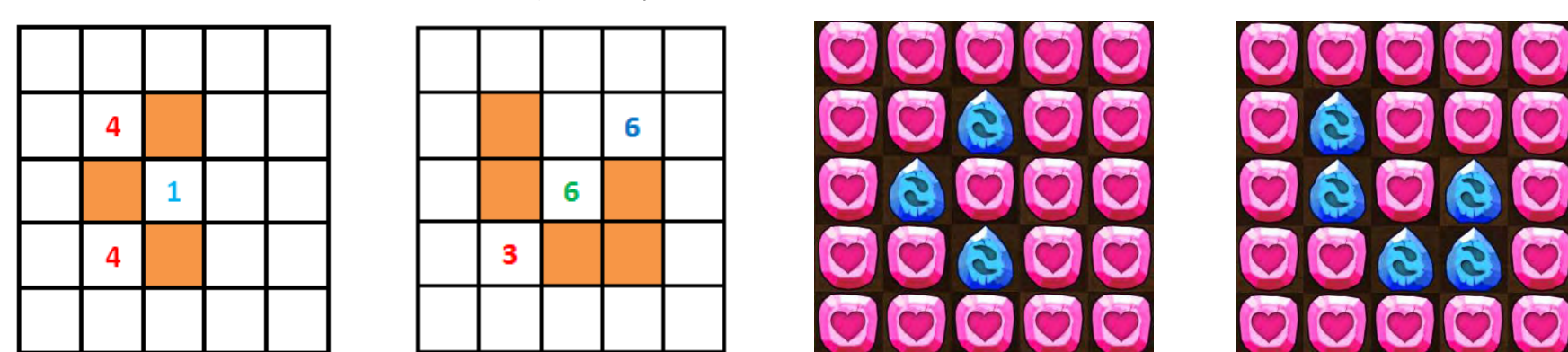


三、combo：在一次移動中，完成「3消」和「5消」的總組數，1組稱為1combo。在5x6的盤面中，最多可完成10組「3消」，稱為10combo。



四、起始珠：指在遊戲過程中，被手指選上並開始移動的珠稱為「起始珠」。

五、目標珠：指在盤面中不構成「3消」的三顆同色珠或5消的五顆珠。



六、分界格：指目標珠的周遭這四顆相鄰珠。



七、其他格：指分界格和目標珠以外的所有珠。也就是不與目標珠相鄰的其他所有珠。

八、屬性珠：

九、最短步數：指「起始珠」與其他珠交換後，完成「3消」或「5消」的最少交換次數。

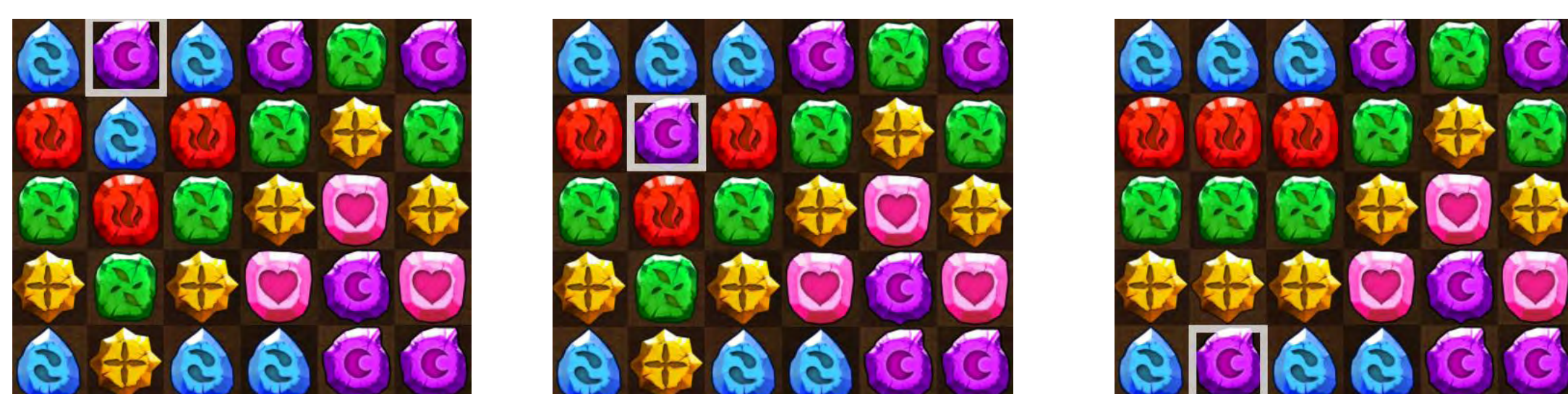
十、基礎樣式：指在3x3盤面中，去除對稱、旋轉後仍不同的圖形。

(「3消基礎樣式」有九種，「5消基礎樣式」有九種)

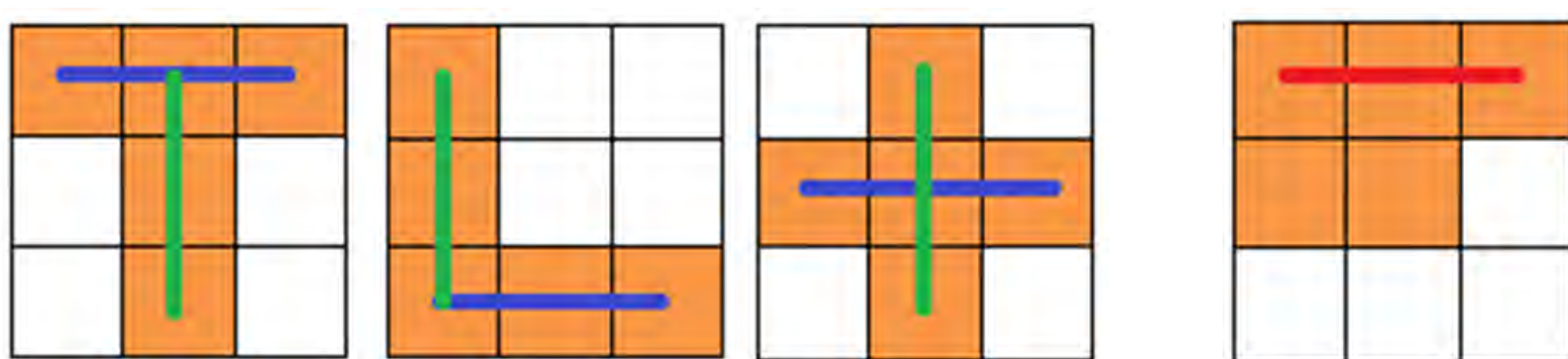
十一、遊戲玩法與介紹：

(一)介紹：轉珠遊戲是在5x6的盤面中將6種(5+1)顏色的珠子重新作排列，藉由移動「起始珠」與其周遭四顆相鄰珠做位置的交換，重新整理盤面讓連成三顆一直線或多顆以上的珠子進行消除，每消除一組稱之為1combo，消除的combo越多能得到的分數也就越高。

(二)遊戲方法：



(三)消除方式說明：



參、研究目的

- 一、探討3x3盤面，「3消」和「5消」最短步數基礎樣式。
- 二、探討3x3盤面，如何快速找到「3消」及「5消」最短步數起始珠的位置。
- 三、尋找「3消」及「5消」完成combo的過程圖及路徑圖。
- 四、探討「3消」及「5消」基礎樣式之間的關係。
- 五、尋找「3消」及「5消」基礎樣式消除簡易轉換方法。
- 六、探討起始珠的判斷準則
- 七、探討如何串接「3消」及「5消」的基礎樣式，以達成3消+3消、3消+5消和5消+5消之間的任意組合。
- 八、探討如何規劃最佳路徑，以建立轉珠思考邏輯。

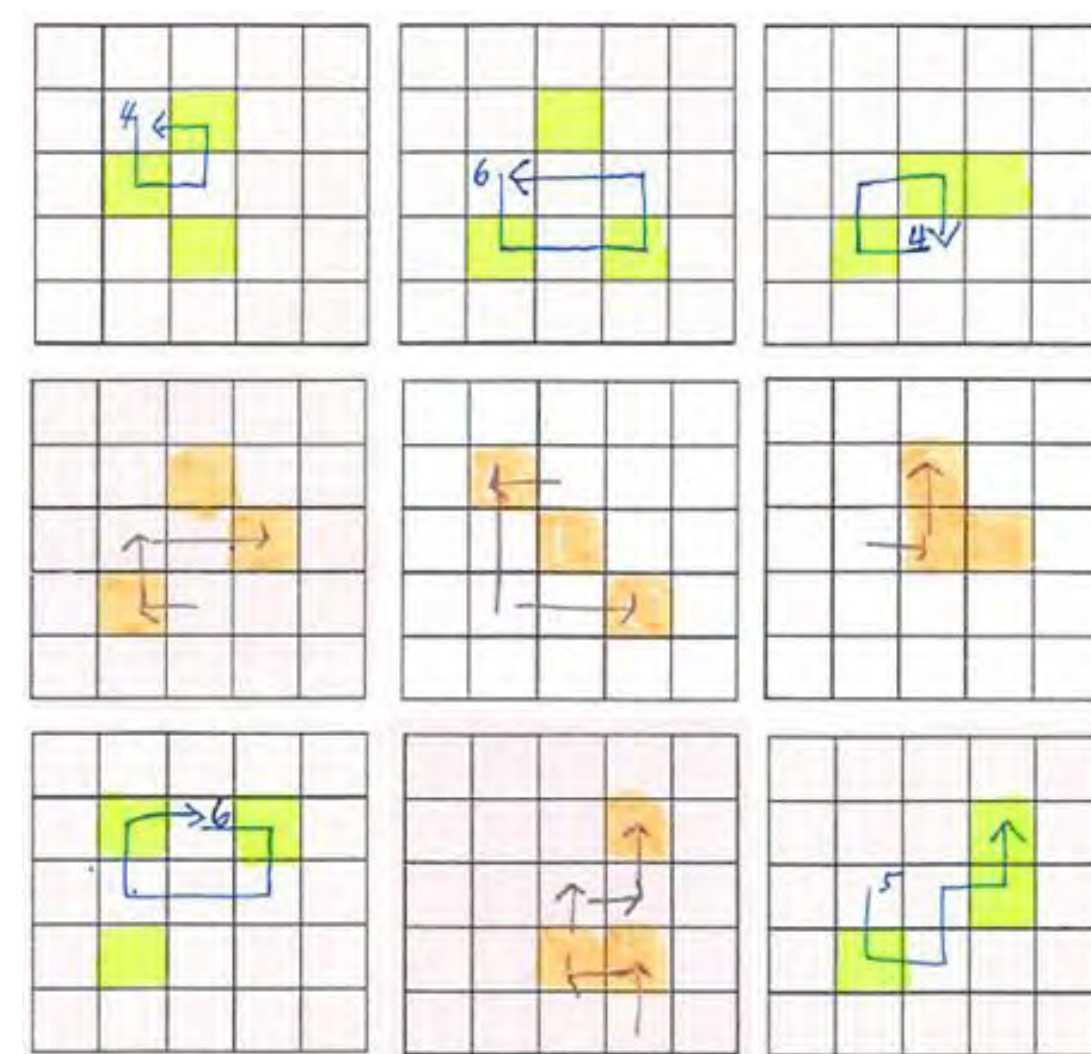
肆、研究設備及器材

- 一、模擬轉珠網頁(電腦Windows系統)
- 二、轉珠大師APP(手機Android系統)。
- 三、路徑設計圖(5x5空白圖格多張)、鉛筆、螢光筆。桌上思考輔具。

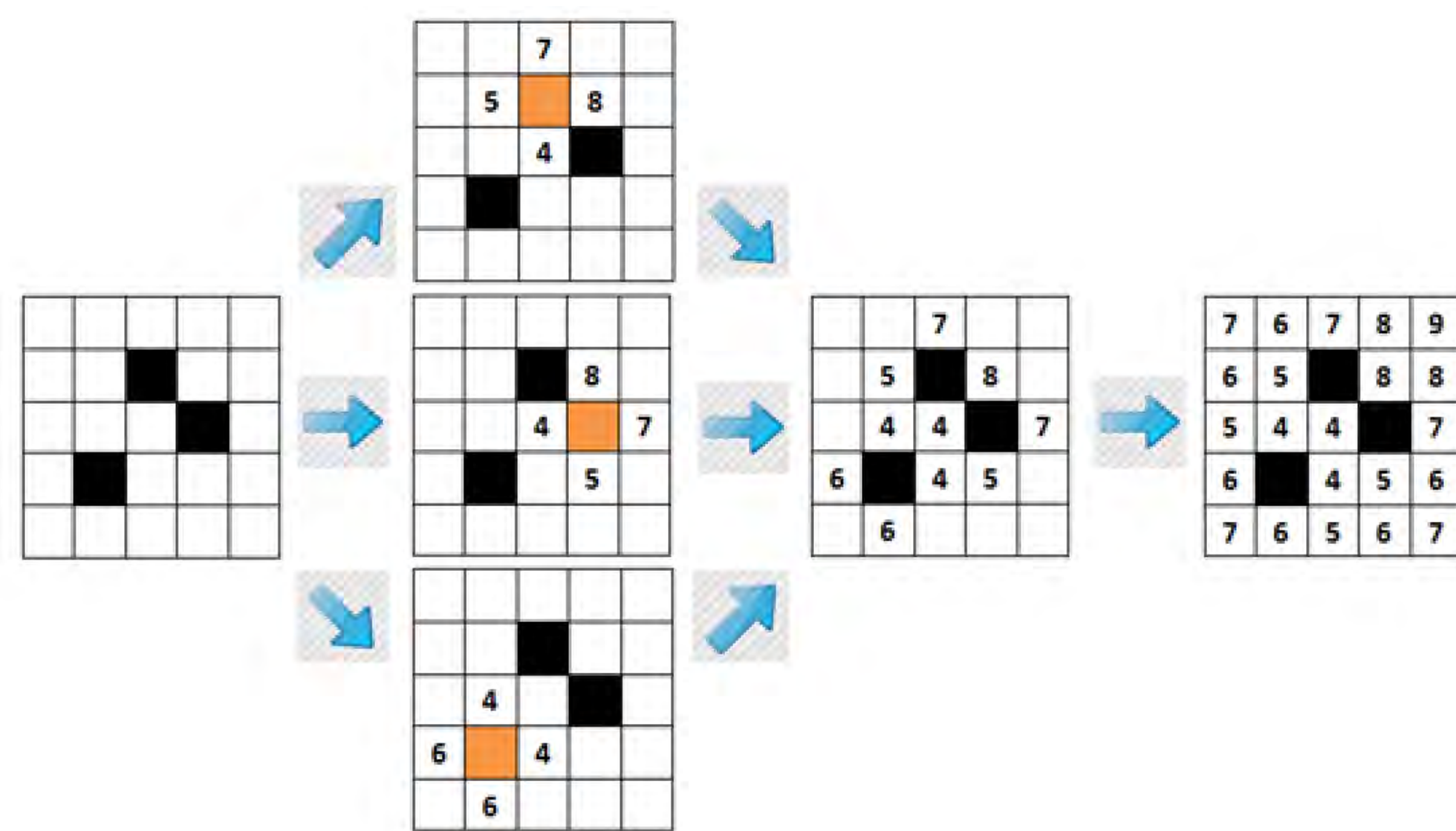
伍、研究過程與方法

一、研究1和3：

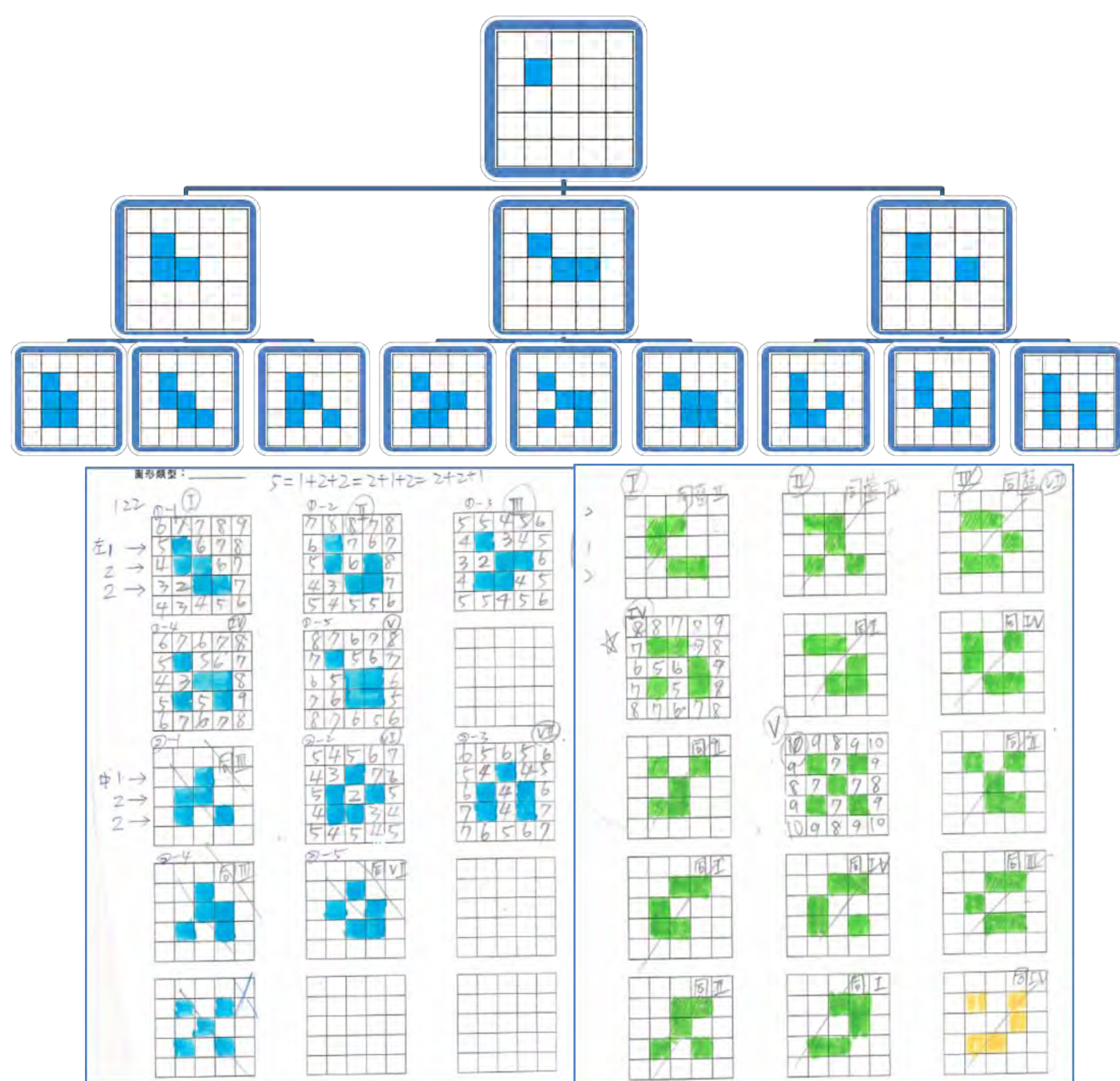
模擬I：模擬過往作品



發現I-1：整理思考過程，固定尋找最短步數方法。



發現I-2：樹狀圖尋找基本樣式。



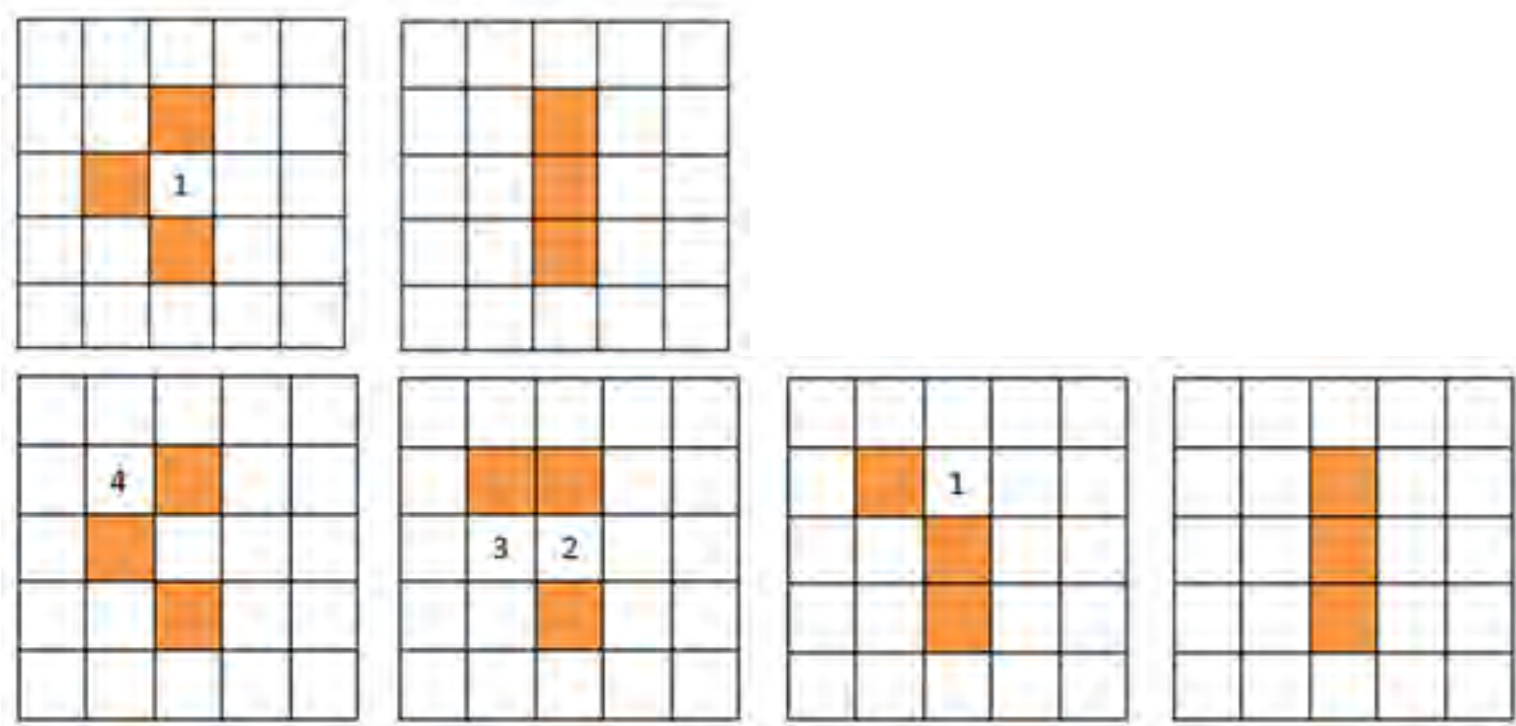
發現II：「3消」和「5消」最短步數基礎樣式

斜型	L型	Y型	W型	勺型	火箭型	蝸型	魚1型	魚2型
直角型	2型	J型	屋型	花型	五點型			

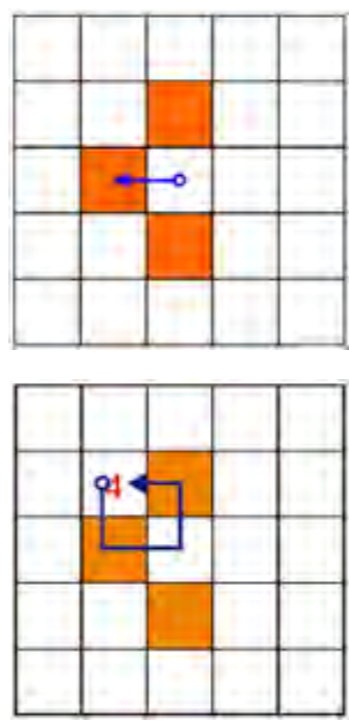
二、研究2：

探討在3x3盤面中，完成「3消」基礎樣式的過程變化，並從中分類基礎樣式的階層關係

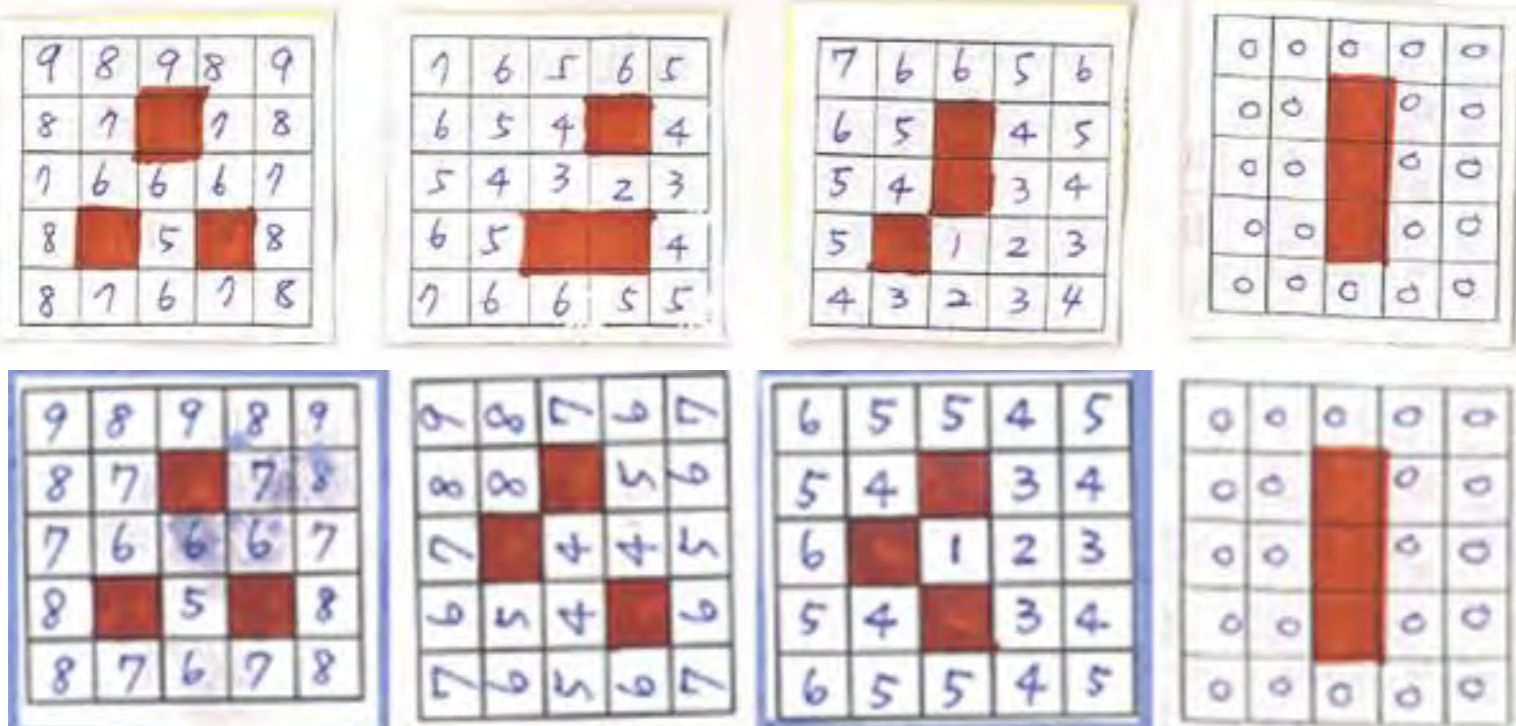
「<型」→「一字型」過程圖



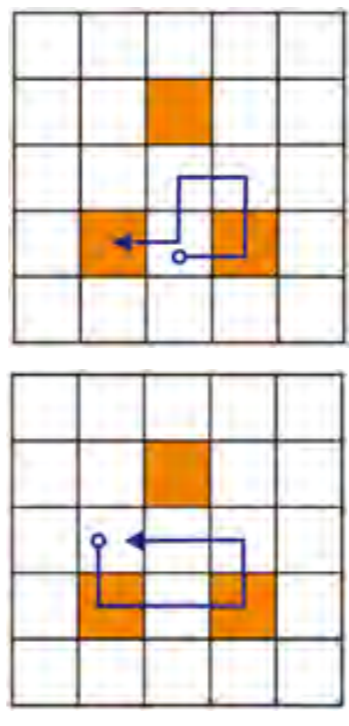
路徑圖



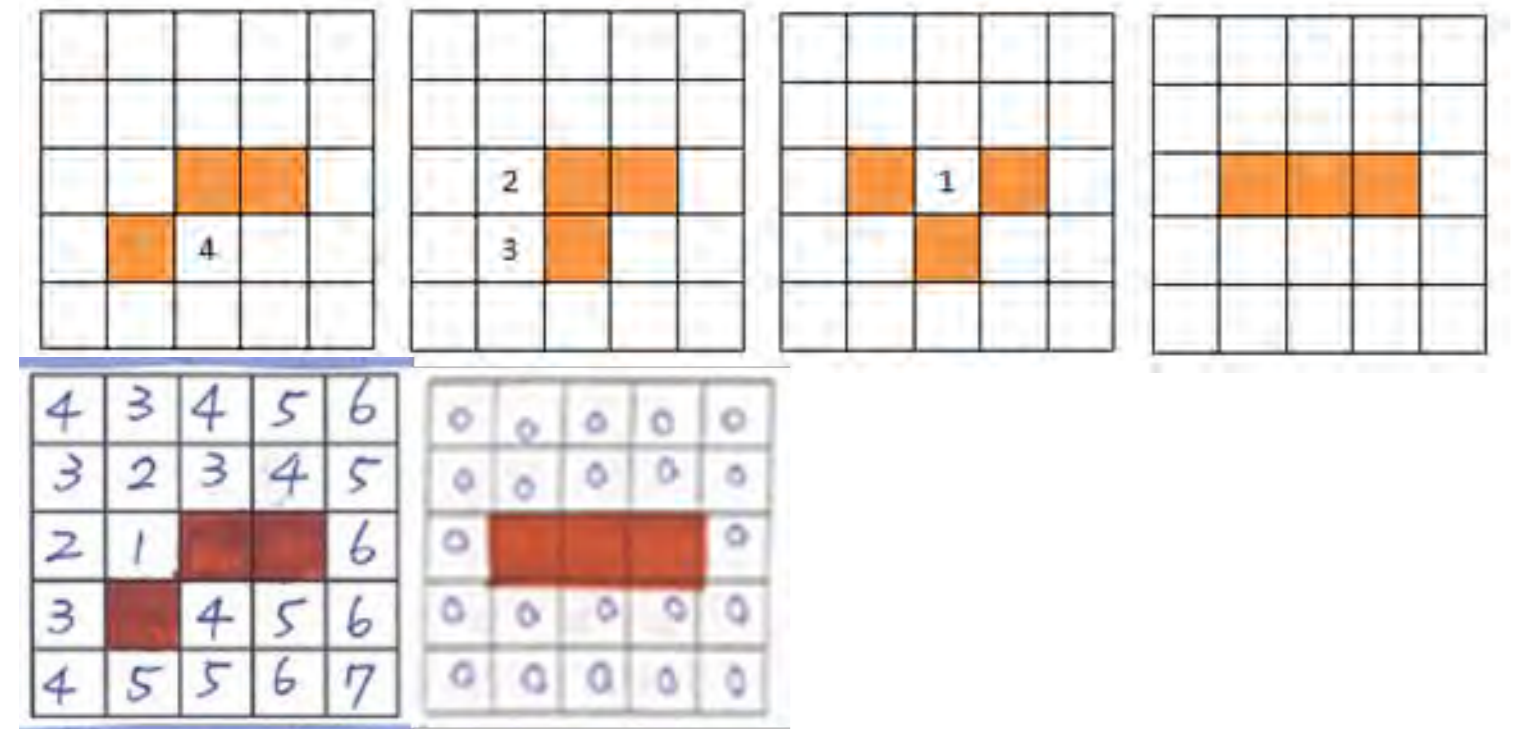
「三角型」→「一字型」過程圖



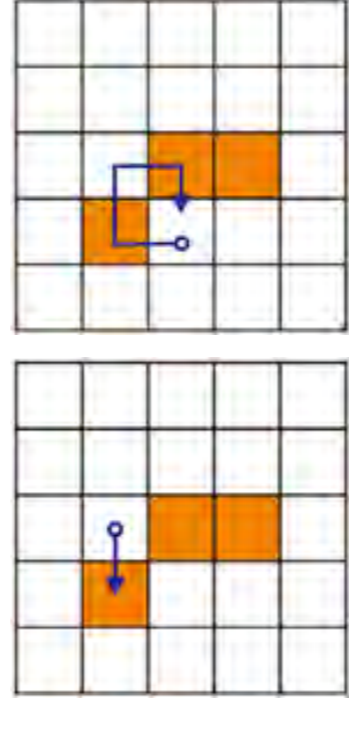
路徑圖



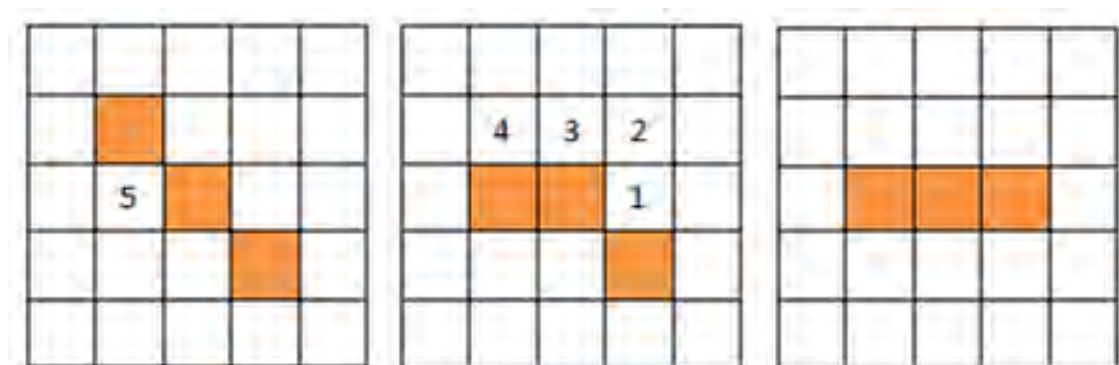
「厂型」→「一字型」過程圖



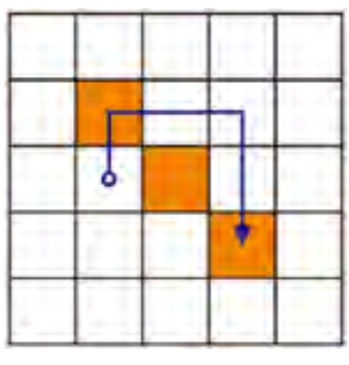
路徑圖



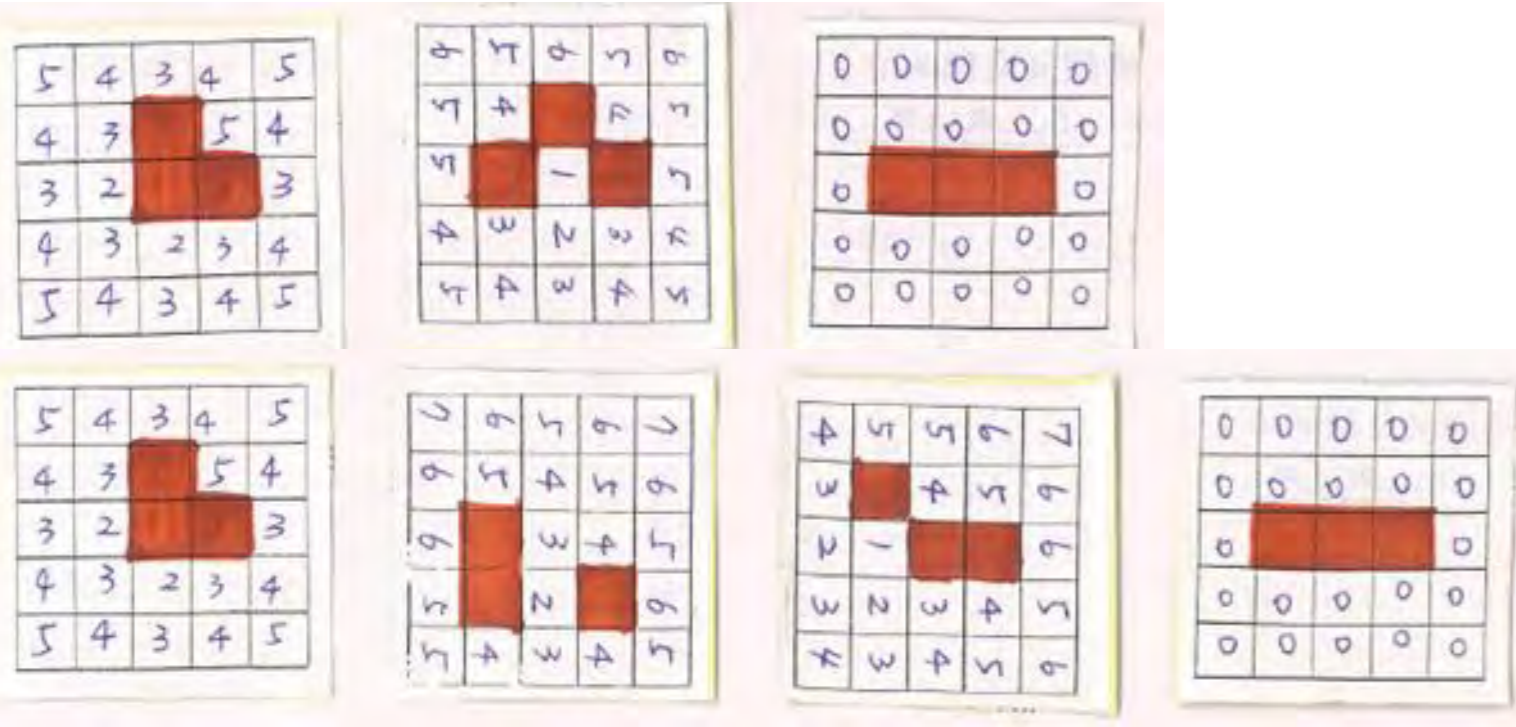
「斜型」→「一字型」過程圖



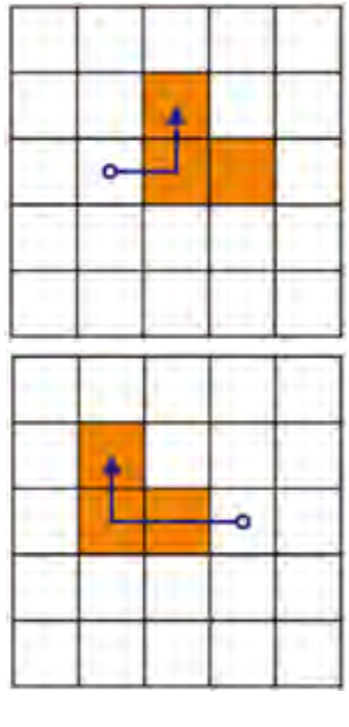
路徑圖



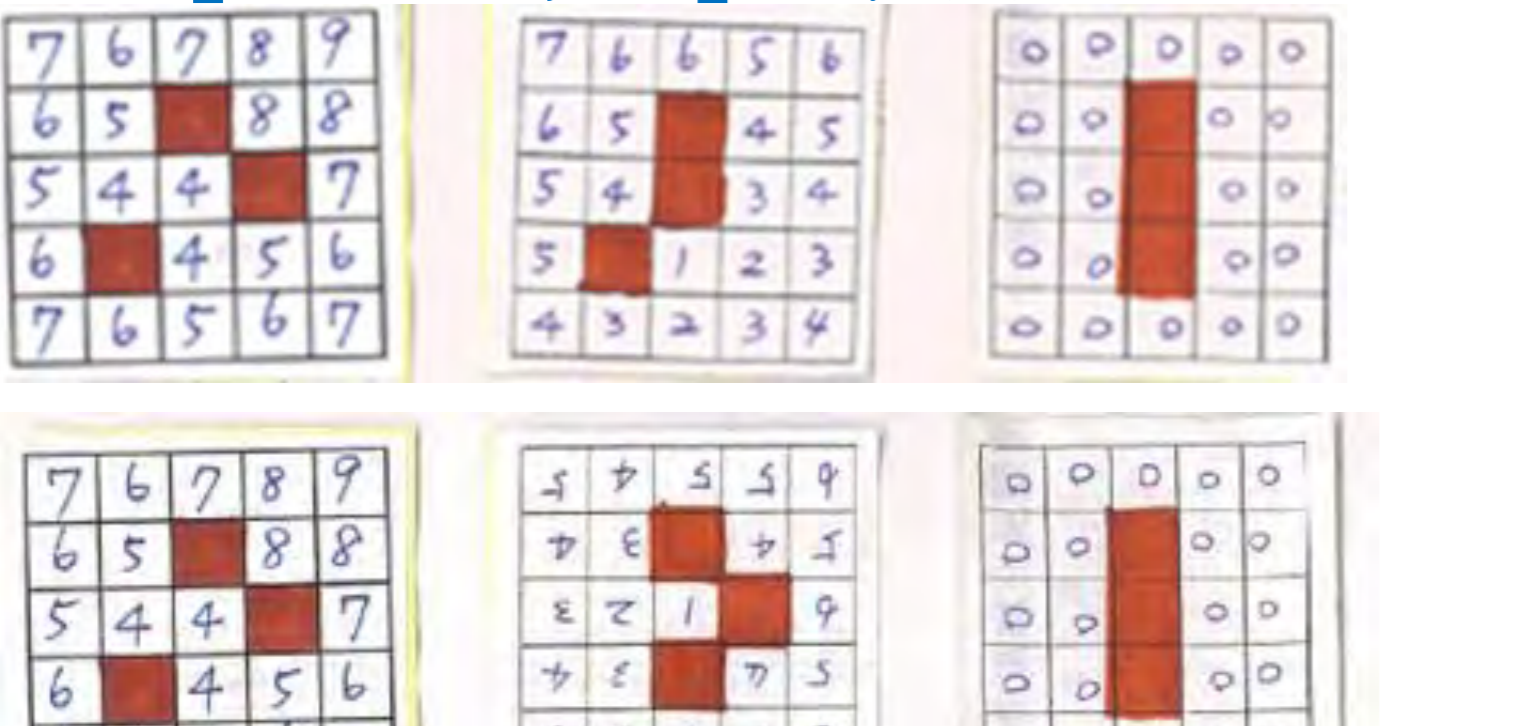
「L型」→「一字型」過程圖



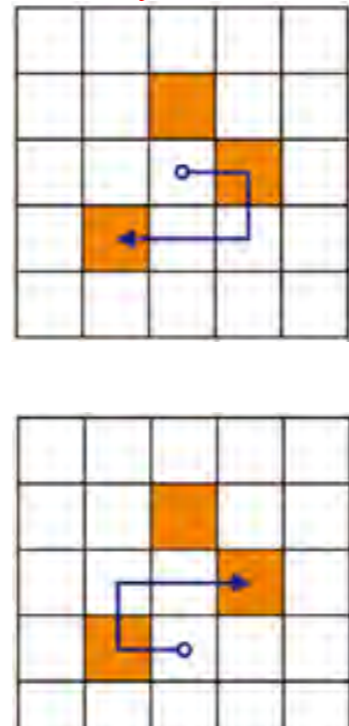
路徑圖



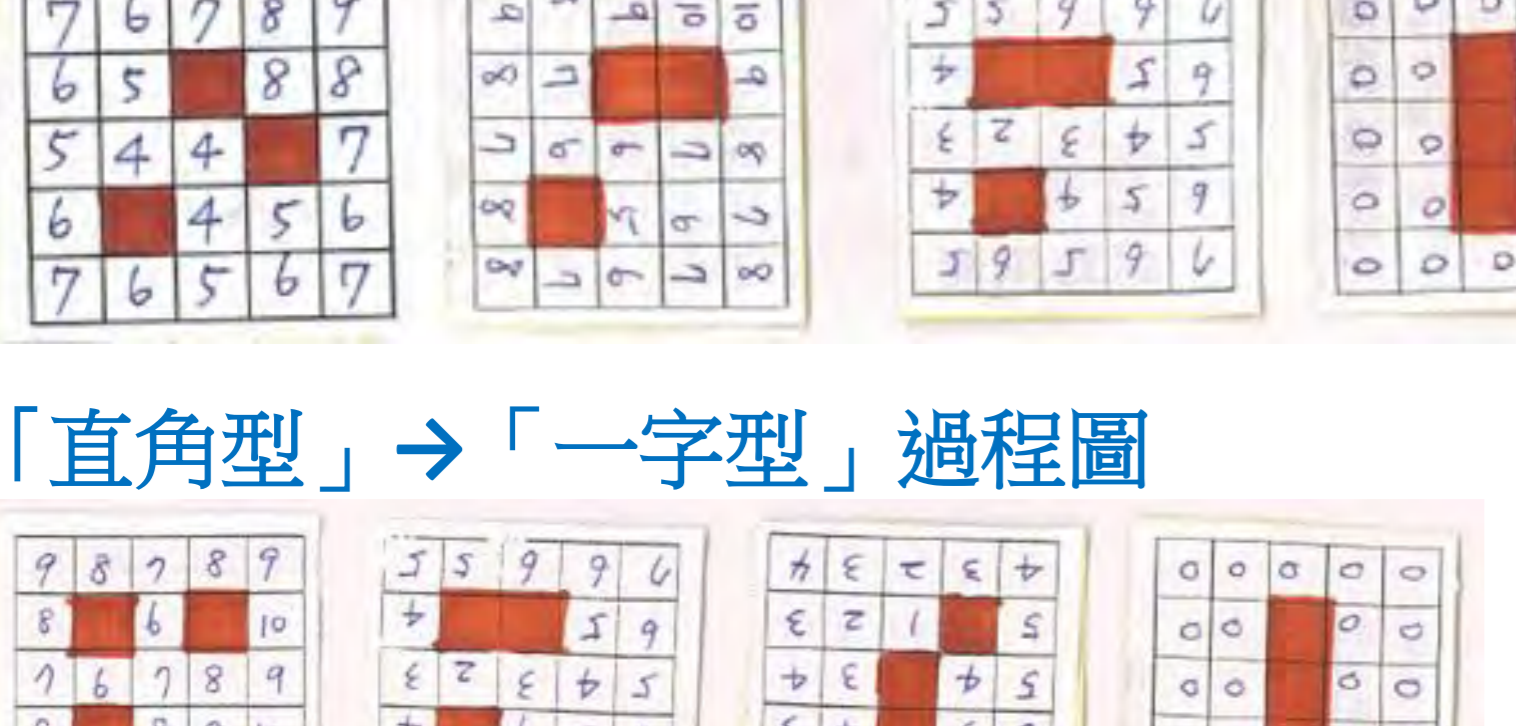
「Y型」→「一字型」過程圖



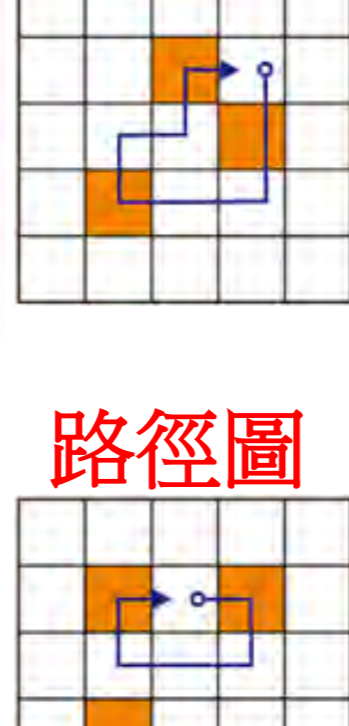
路徑圖



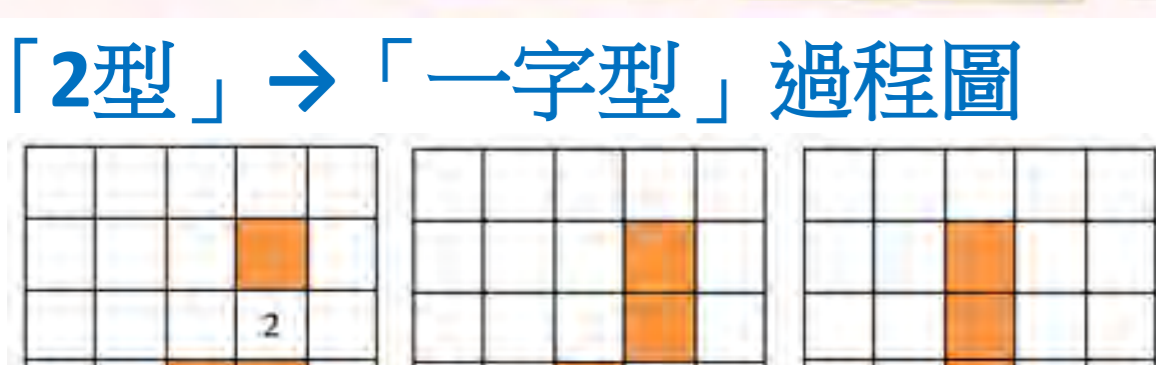
「直角型」→「一字型」過程圖



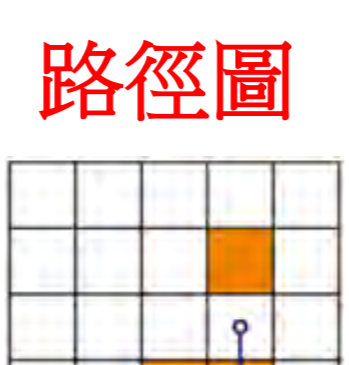
路徑圖



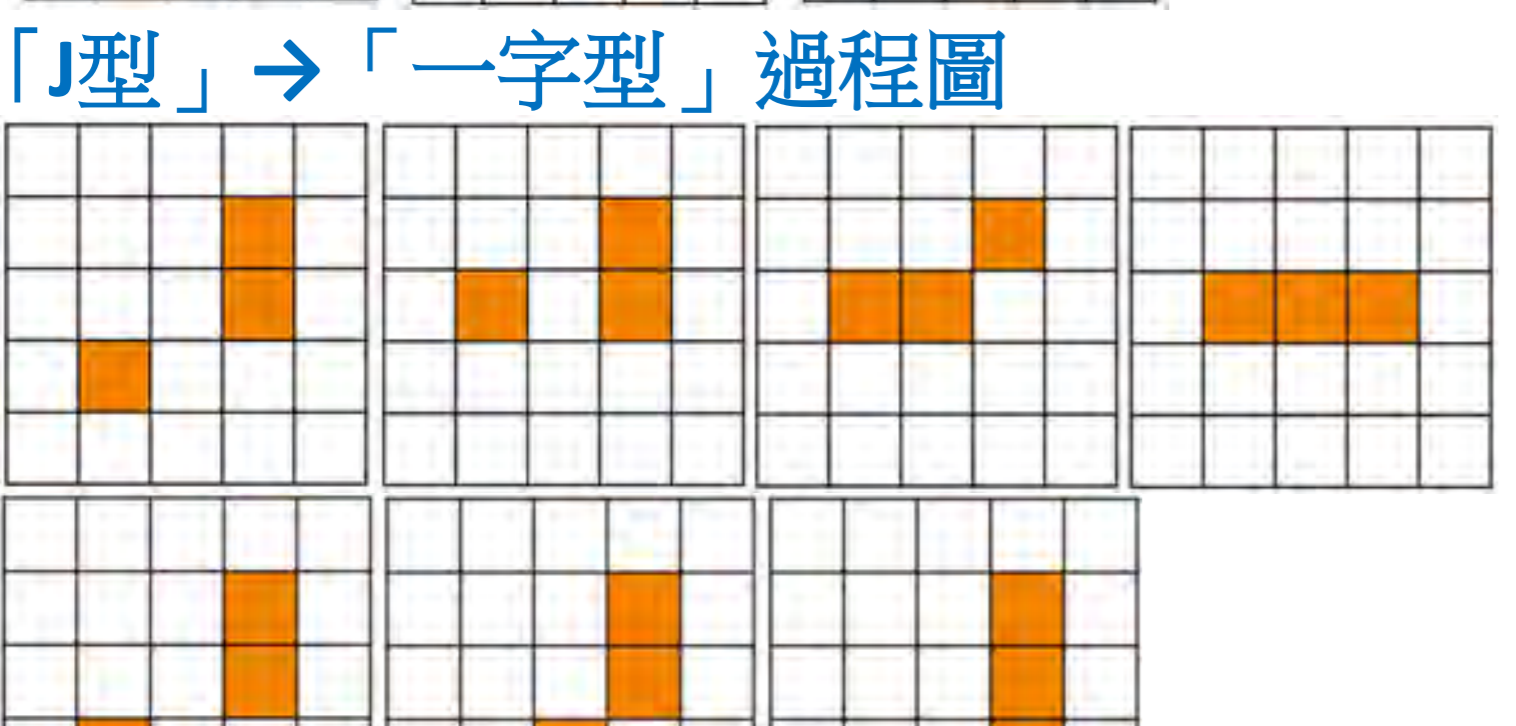
「2型」→「一字型」過程圖



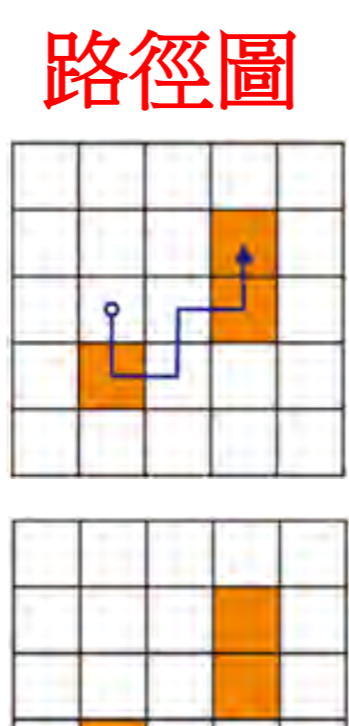
路徑圖



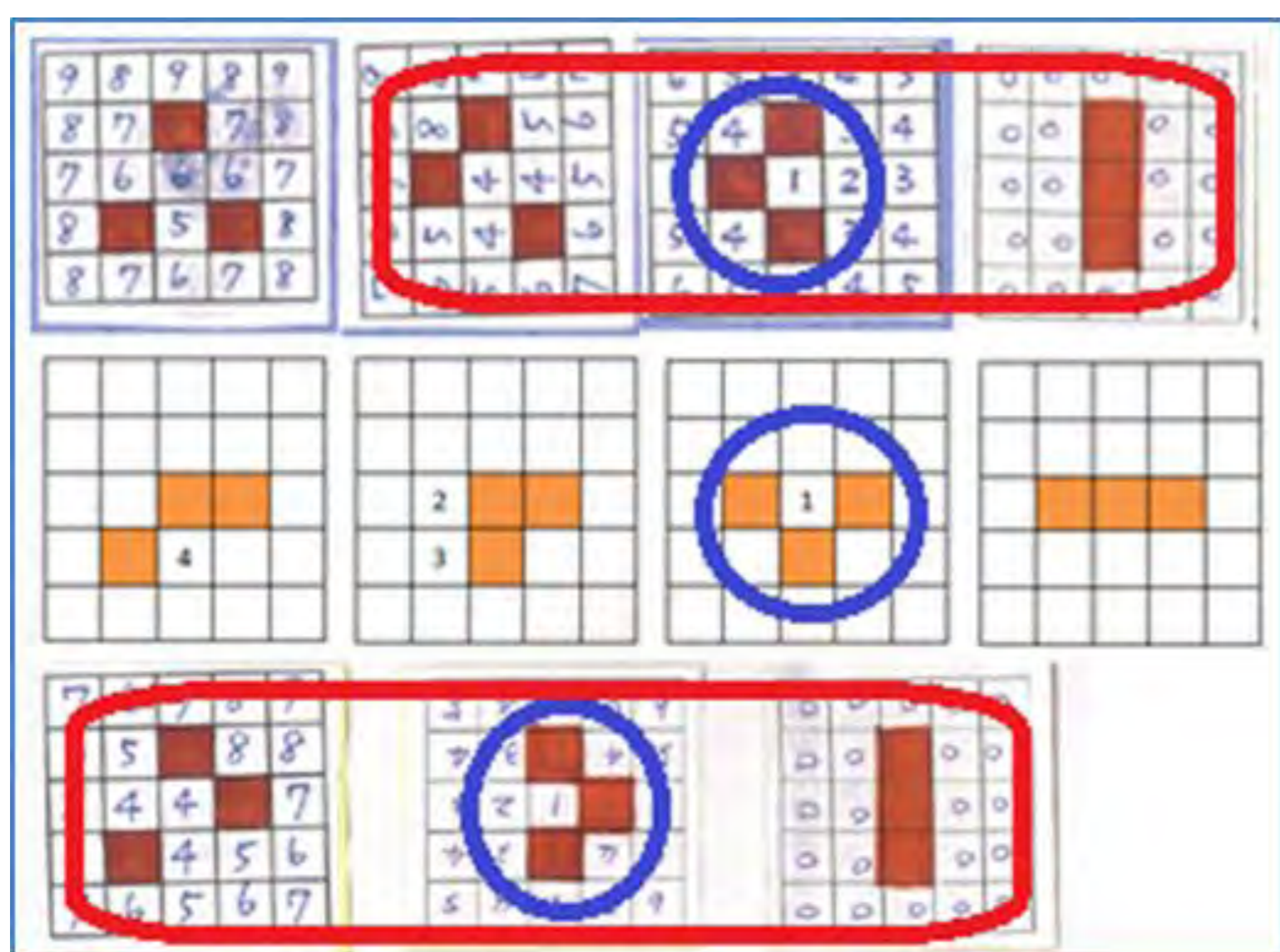
「J型」→「一字型」過程圖



路徑圖



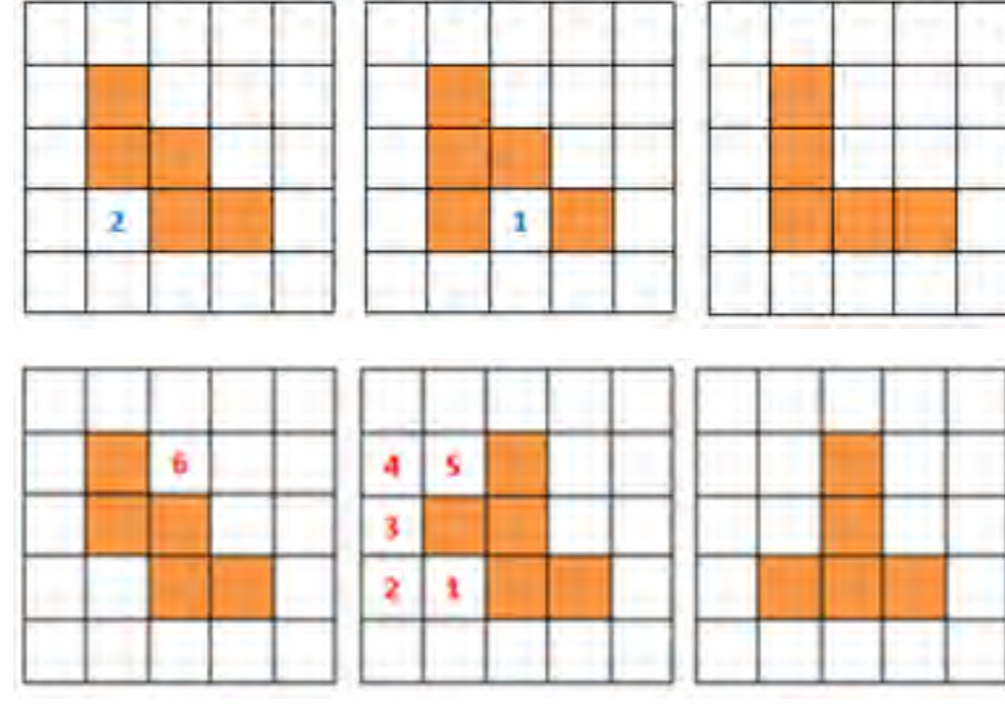
發現I：「3消」基礎樣式有順序或階層關係



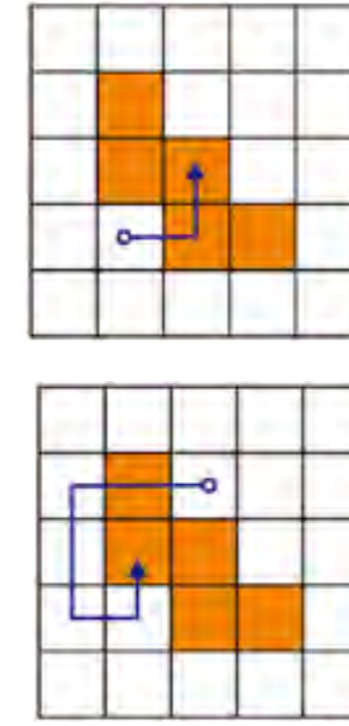
四、研究4：

探討在3x3盤面中，完成「5消」基礎樣式的過程變化，並從中分類基礎樣式的階層關係

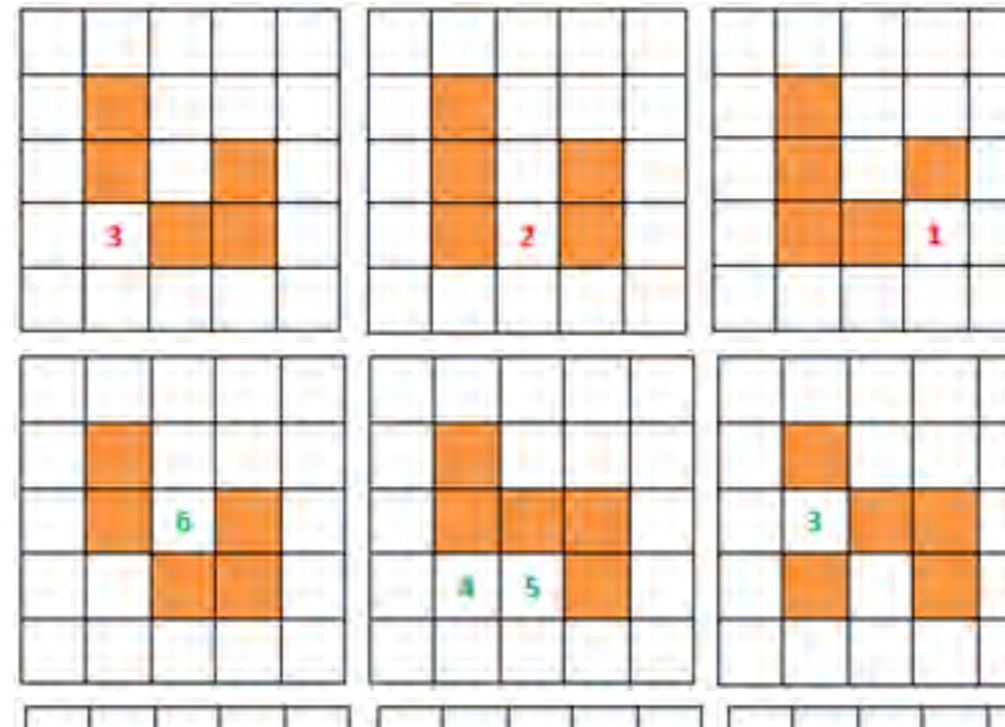
「W型」五消過程圖



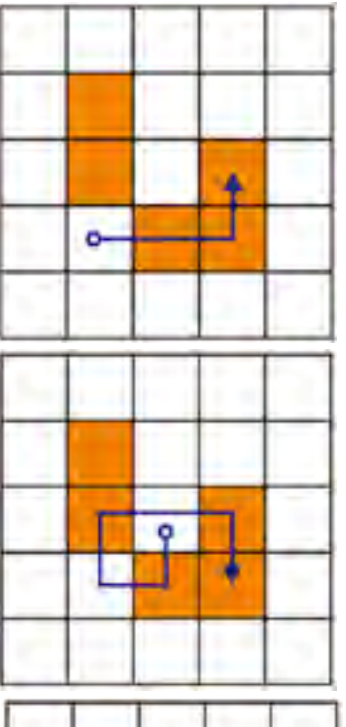
路徑圖



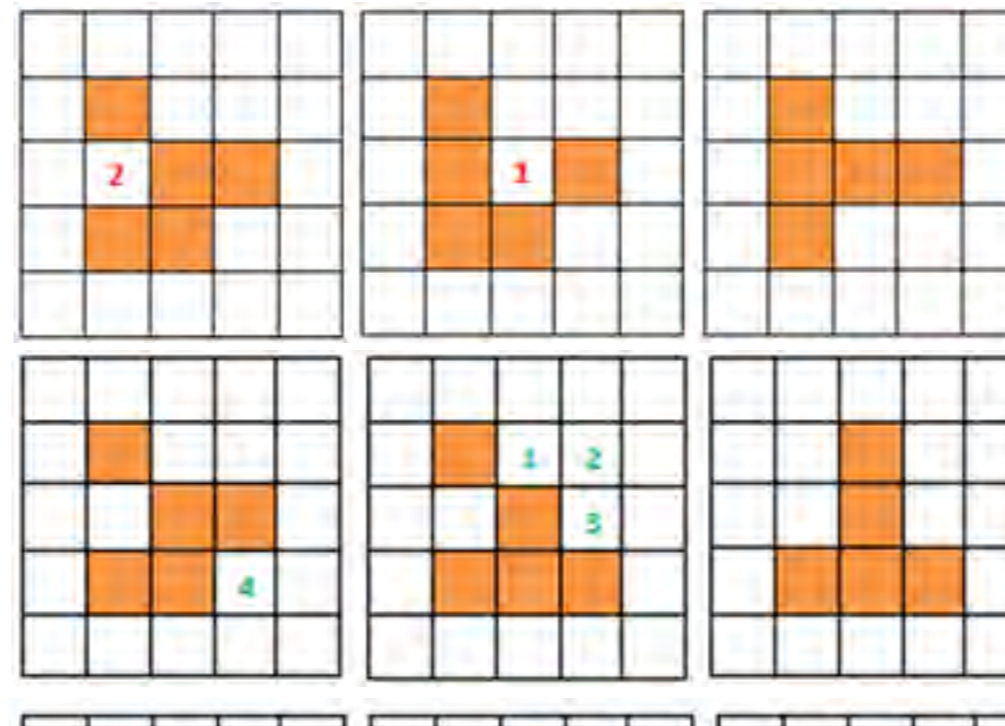
「勺型」五消過程圖



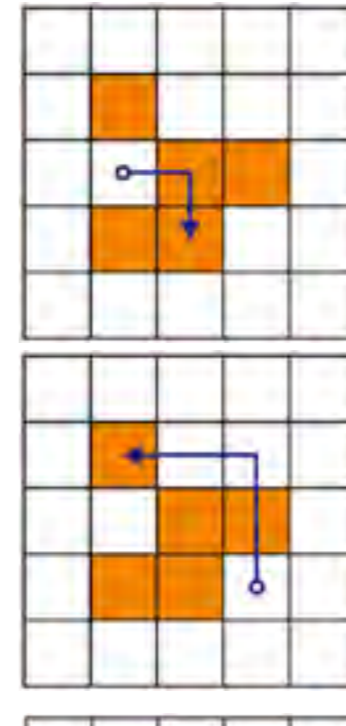
路徑圖



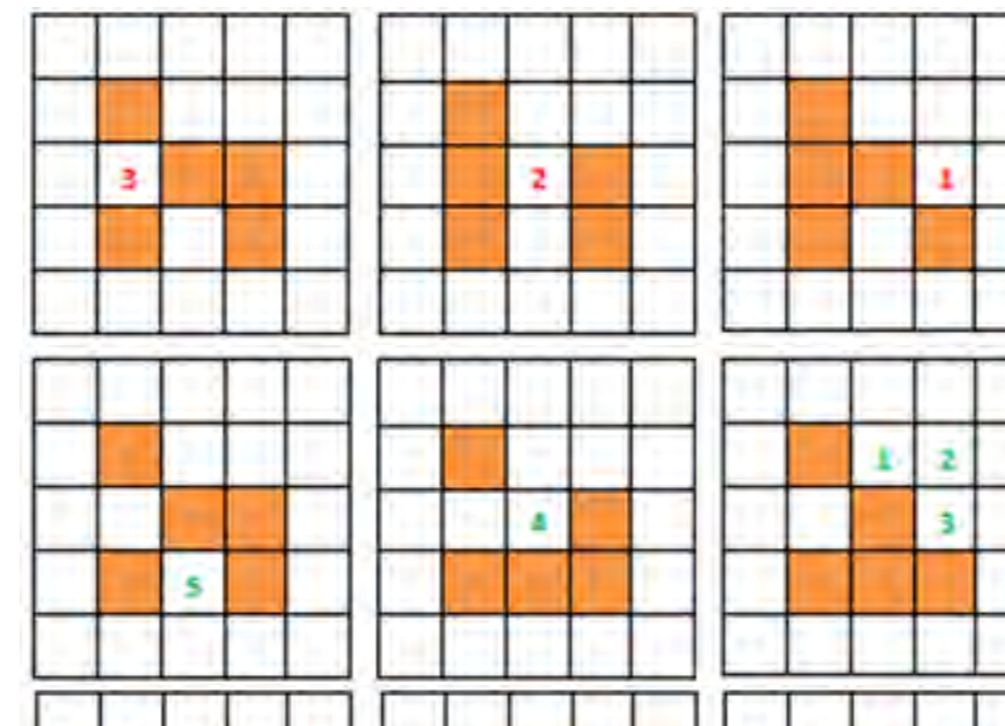
「火箭型」五消過程圖



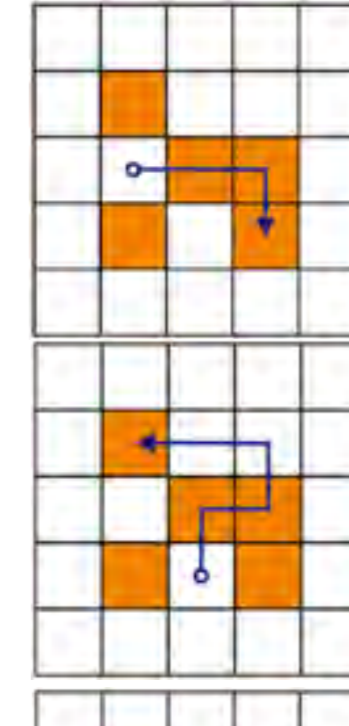
路徑圖



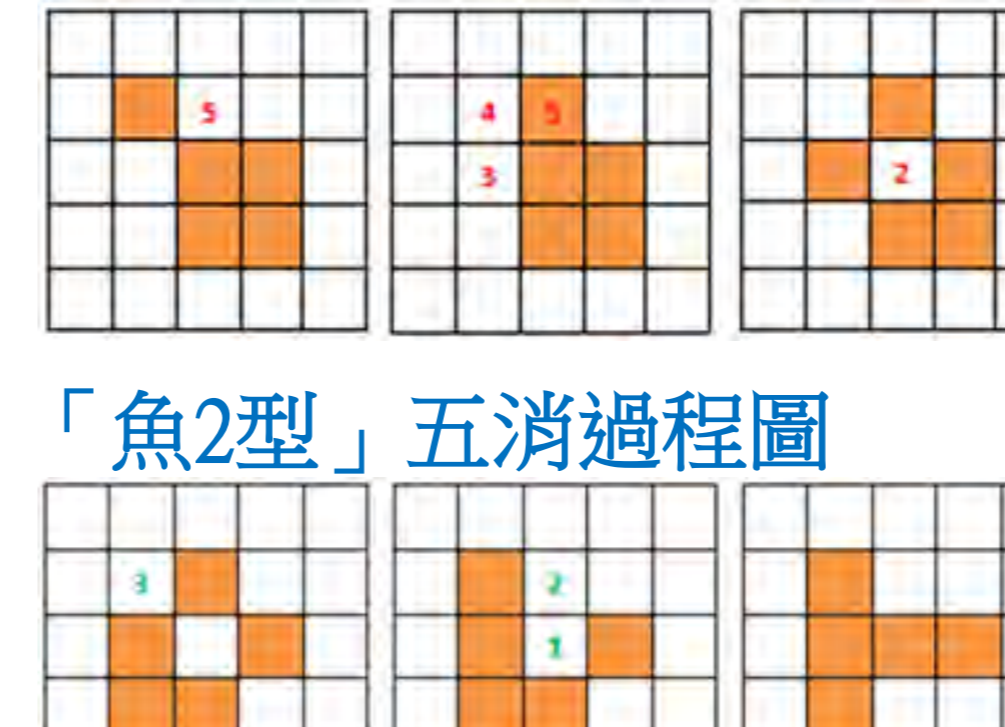
「蝦型」五消過程圖



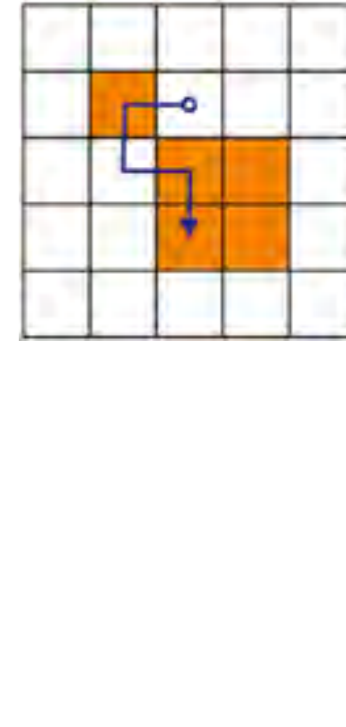
路徑圖



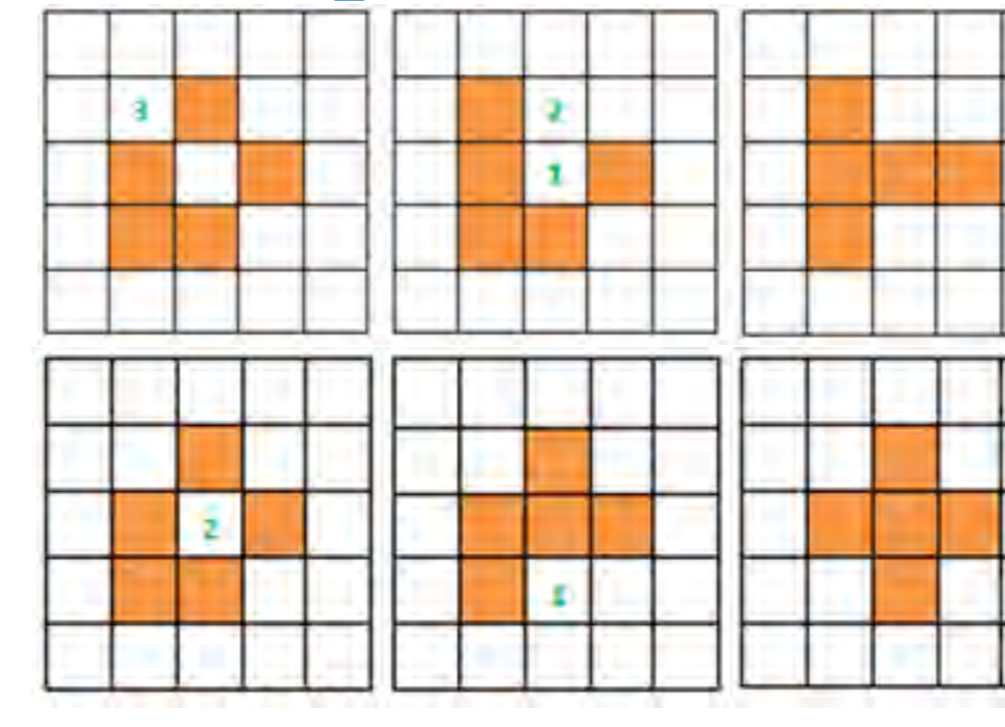
「魚1型」五消過程圖



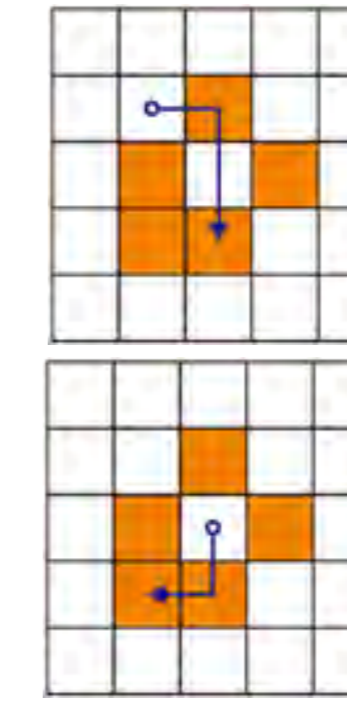
路徑圖



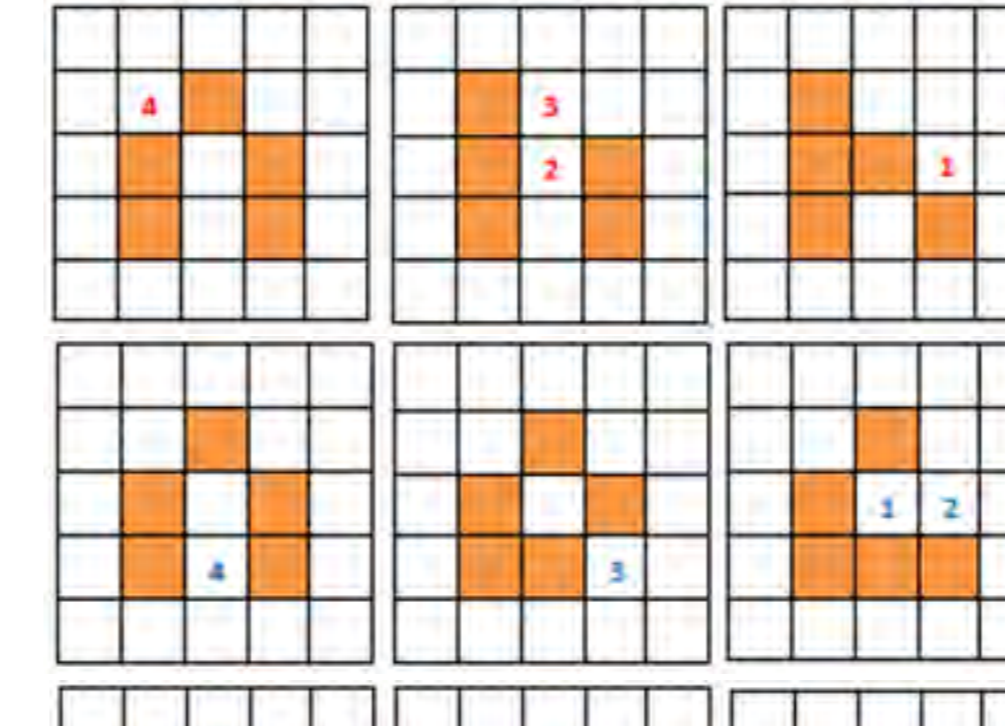
「魚2型」五消過程圖



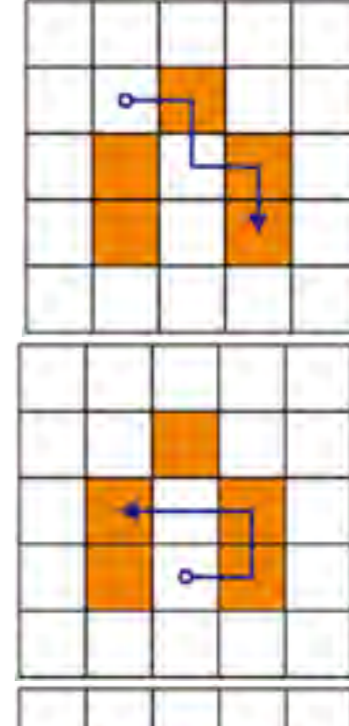
路徑圖



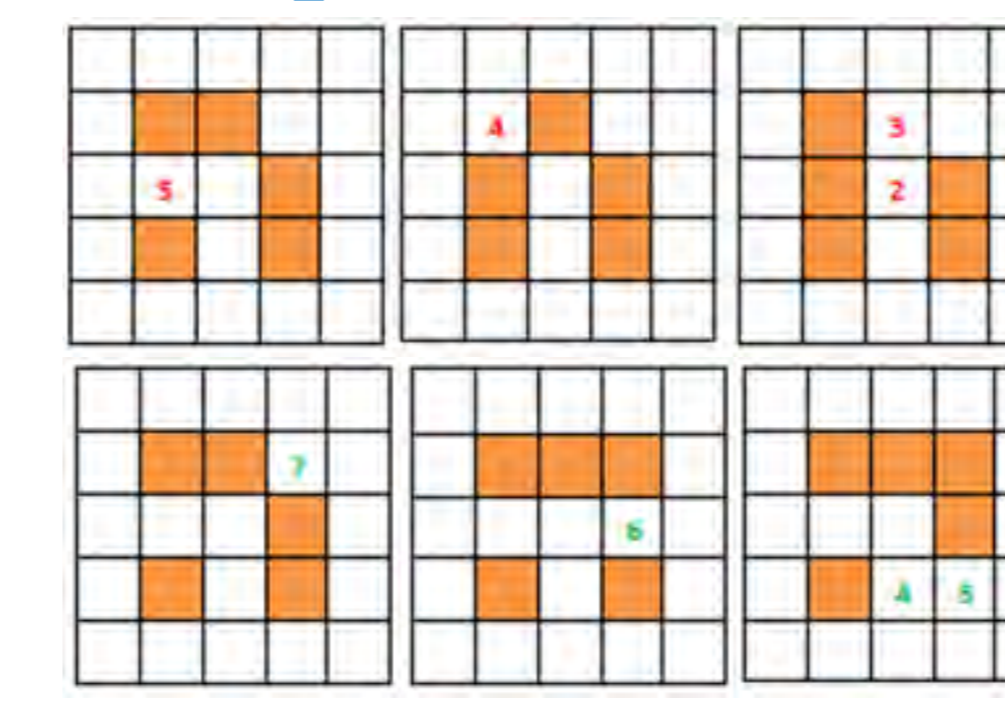
「屋型」五消過程圖



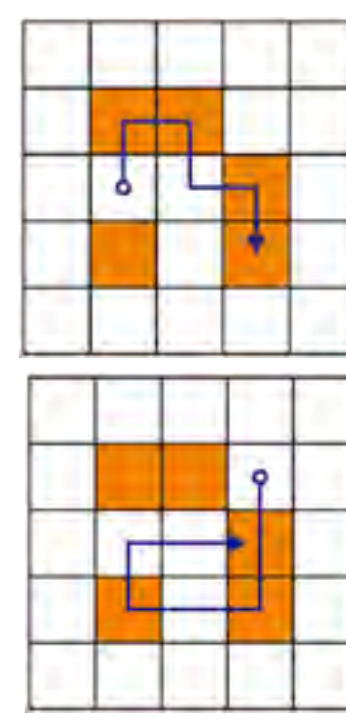
路徑圖



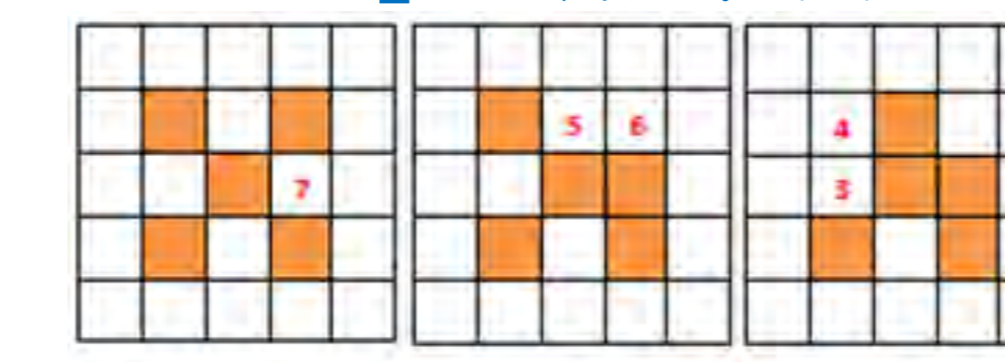
「花型」五消過程圖



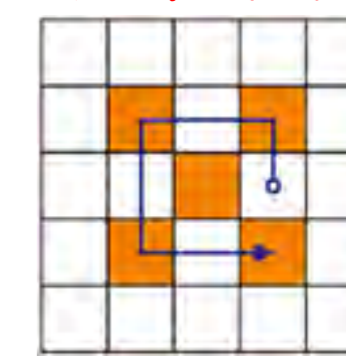
路徑圖



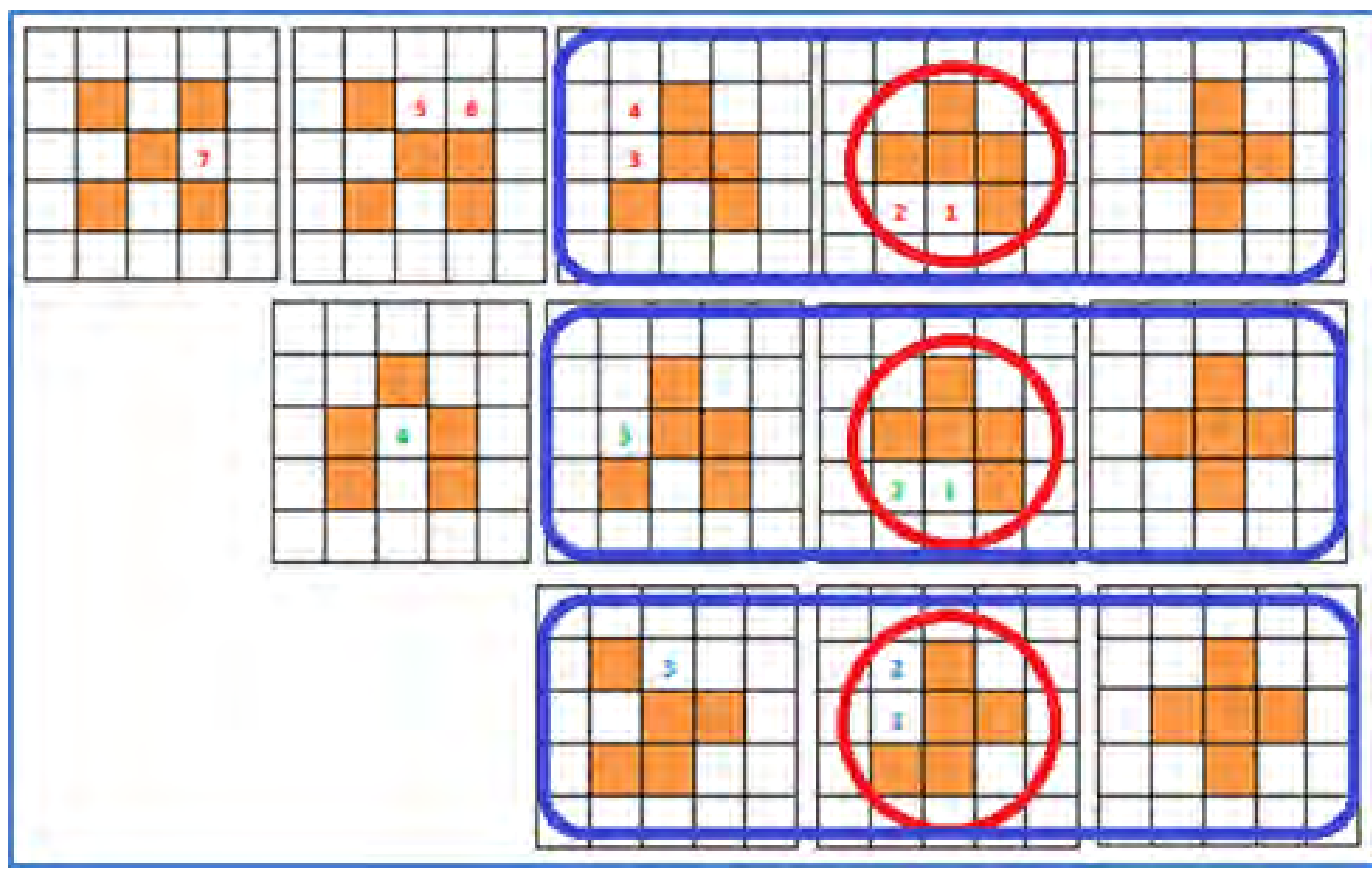
「五點型」五消過程圖



路徑圖



發現I：「3消」基礎樣式有順序或階層關係

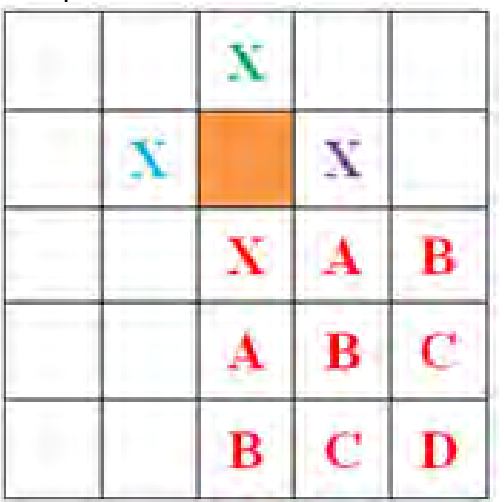


柒、討論

一、「目標珠」的最短步數，必定存在於「分界珠」？

(一)提出假設：最短步數不存在於「目標珠」

上下左右的「分界格X」中



(二)探討關係： $D=C+1$ 、 $C=B+1$ 、 $B=A+1$ ，

且 $D>C>B>A$ ，A最小。

(三)思考討論：

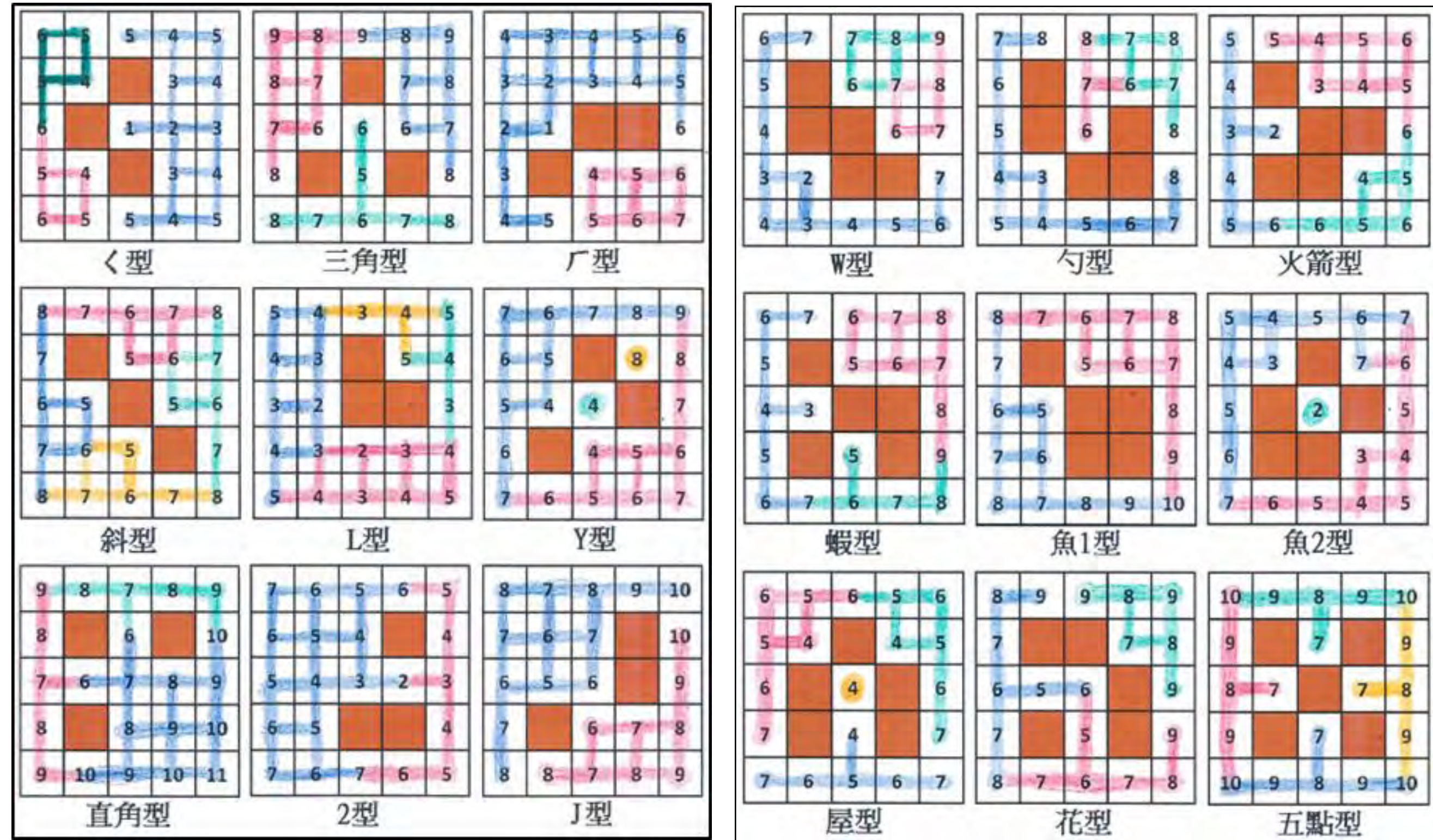
- 1.如果 $X=A$ ，X和A無相關，隸屬不同的區域，無法從A移動到X改變「目標珠」位置，矛盾；
- 2.如果 $X>A$ ，移動是先從X移動到A，方向會偏離「目標珠」，且無法改變「目標珠」位置，矛盾。

(四)完成證明：最短步數必存在於「目標珠」

上下左右的「分界珠X」。

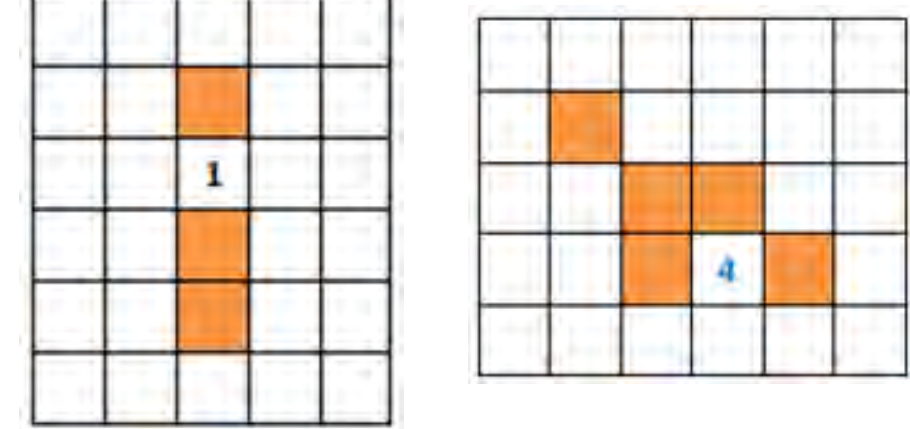
陸、研究結果

一、建立3消及5消建立「基礎樣式隸屬圖」及「關係區域分類圖」



二、3x3以外盤面，最後是否都會依照「階層N→階層3→階層2→階層1→階層0」的過程，完成消除的動作？

(例外情況：



三、如何從3消、5消分類區域圖中找出最短步數，起始珠的位置？

二、建立3消基礎樣式「階層關係圖」及「3消降階法」

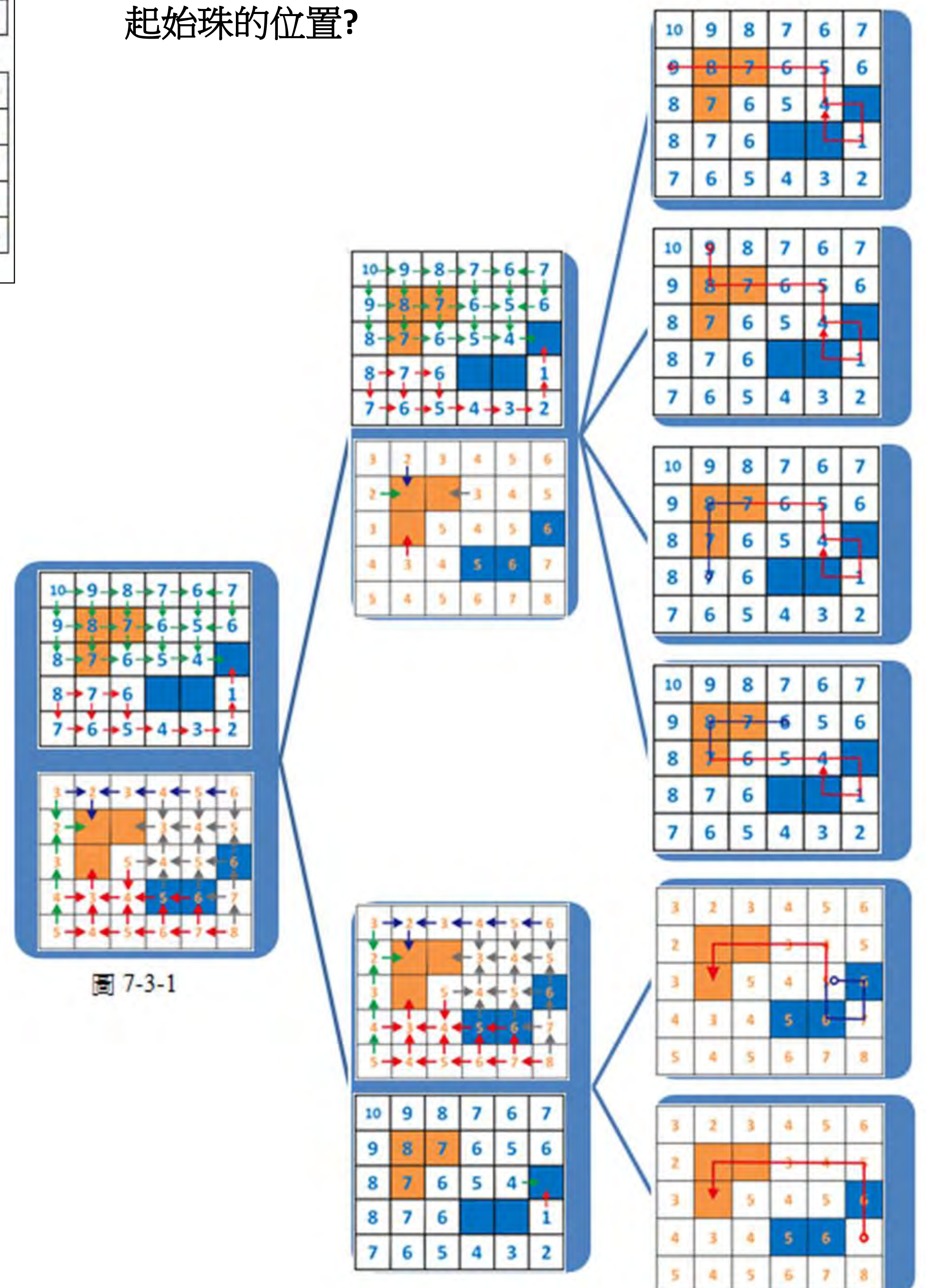
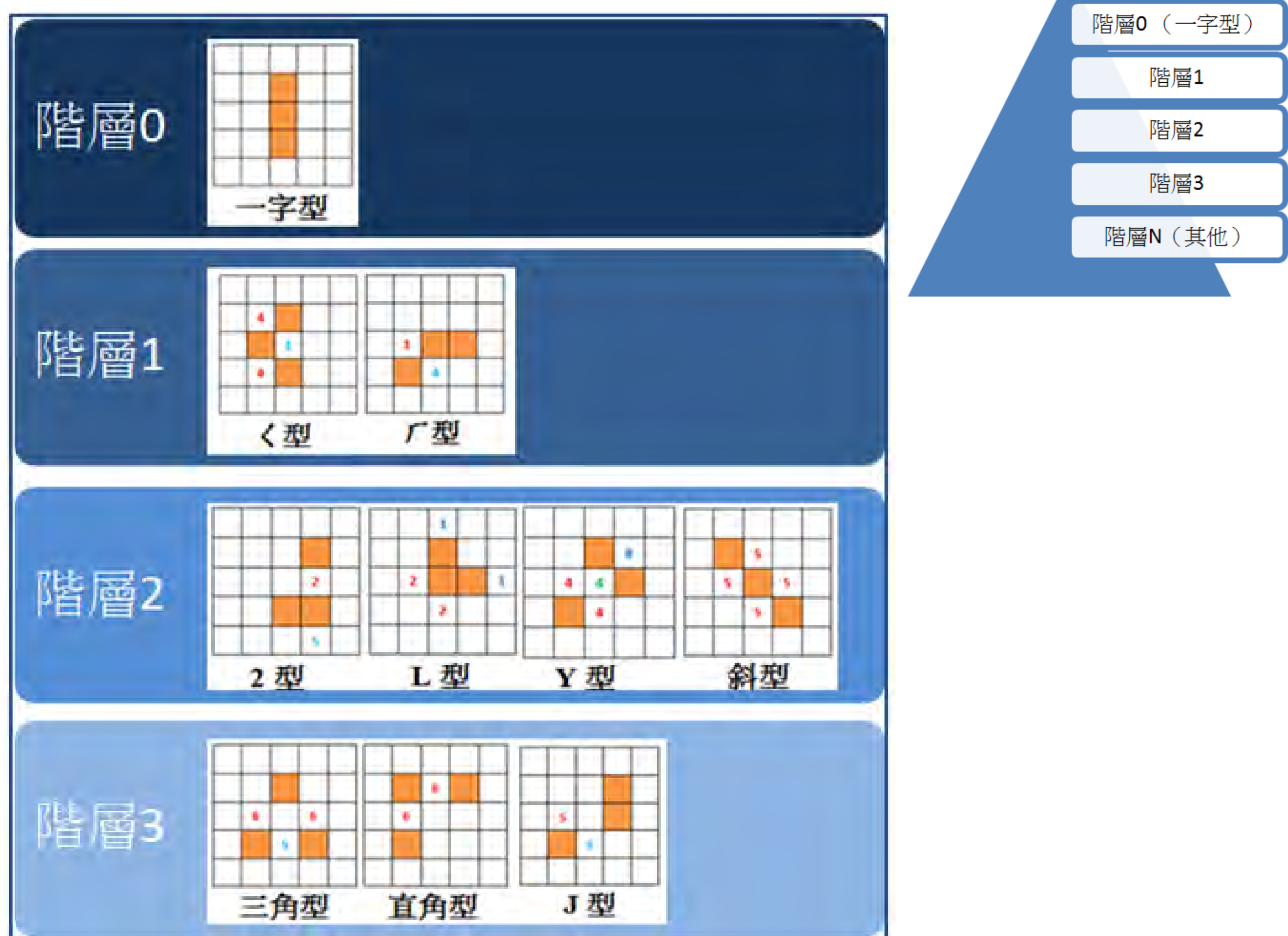


圖 7-3-1

捌、結論

本研究在探討過程中經歷了觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗，最後提出最短步數及較多combo的判斷準則。綜合整個研究獲得主要的結論如下：

- 一、學會了變因控制法、樹狀圖的應用。
- 二、學會利用對稱、旋轉將重複的相同圖形刪除，歸納出3消九種基礎樣式、5消九種基礎樣式。
- 三、學會利用「桌上思考輔具」進行「思考實驗」。
- 四、找到「3消最短步數基礎樣式」。(與54屆類似)
- 五、找出「5消最短步數基礎樣式」。
- 六、利用「分界格的關係區域分類圖」快速找到最短步數起始珠的位置。
- 七、建立3消及5消達成combo的過程圖及路徑圖
- 八、發現基礎樣式具有包含關係、階層關係。
- 九、用階層關係建立降階表，
 - (一) 階層較低，使用降階法快速轉換為階層0
 - (二) 階層較高的基礎樣式，使用降階法逐步轉換為較低階層圖形完成combo。
- 十、建立起起始珠的判斷準則，以得到3消+3消、3消+5消和5消+5消的最短步數，以此為基準串連後續緊接著的3消或5消完成更多combo數。
- 十一、建立「3消」和「5消」組合的轉珠思考邏輯。

玖、參考資料與其他

- 一、第54屆全國科展高中組，扭「轉」乾坤
- 二、國小數學第9冊，第五單元-線對稱圖形。國小數學第12冊，第二單元-怎樣解題。
- 三、神魔之塔、轉珠模擬軟體。

三、建立「3消」和「5消」組合的轉珠思考邏輯

