中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第一名

080404

找頭「序」—Flat cube 的平移遊戲的解法之探討

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學(附設國小)

作者：	指導老師：
小五 潘佑禔	歐志昌

關鍵詞：奇偶性、變換、平移

得獎感言

科展初體驗，豐碩滿回憶

在頒獎典禮主持人的祝福聲中；在許多老師朋友們的掌聲中；在座位上大大小小同學們的羡慕下，今年暑假是我國小倒數的第二個暑假時光，卻也是我的第一次科展暑假，而且是「全國」科展喔！從我得到一套桌遊卡—Flat cube 開始，我在「玩」的過程，要找出規律，還要練習紀錄，一開始進度很慢，但當有一個用數字排列取代顏色紀錄的想法，又得到電腦 Excel 程式的幫助，讓我在操作及記錄上更方便。當然，我必須把做過的紀錄成果整理跟老師討論，一步一步解決問題，找到脈絡，經過一段漫長且持續的準備(小五學期中最「忙」的事)，一路挑戰高雄市科展到全國科展。

在做科展的過程中，印象最深刻的事，老師要我把某個問題所有可能的例子全都做一次，這項作業的數據我整整做了 3 週，但最後在寫說明書時，卻因為沒有空間，這份數據全部都不能放入，當場我的眼淚就快要掉下來，感覺白做了，但老師鼓勵我要我不傷心，因為換個角度想，我找出其中重要的關連性！

在科展的比賽過程中，印象最深刻的事，全國科展是大比賽，比賽前都有進度安排及訓練，包括：海報版面確定、講稿連接性以及最具挑戰的 Q&A，老師每次會問不一樣的問題，有的可以立即回答，有的我當場都想不出答案，老師會提醒我從哪個方向去思考，或要我再找例子說明解釋，一定要想辦法解決，覺得自己的腦都快要爆炸，但也是進步最大的時刻！

在科展的比賽過程中，與高雄市科展最不一樣的在公開展覽，一開始以為不會有很多人，結果有十幾個人來聽我解說，但沒有集體行動，害我每個人都要講 10 分鐘 10 分鐘……，講的我口乾舌燥！可是，他們感覺對我的作品蠻有興趣，對我的講解很滿意，還有人說要買 Flat cube 來玩玩看呢！同時，我也在這個時間交到來自桃園的朋友。

科展對我到底有什麼影響？這個問題在我遇到挫折時，常常會想到。我得到一個結論，做到全國科展這種全國級的比賽，是永遠不會忘記的，當我們長大後，不會記得國小的成績，但參加科展卻深深烙印在我心中，讓我能夠從中學習，是有趣的、精彩的、收穫滿滿的！

對於後進的鼓勵：我希望大家不要太在意名次，盡量懷抱著平常心比賽。如果有得獎，表示你的努力得到評審的許可。如果沒得獎，不代表努力不夠，而是其他組的作品更努力、更厲害，可以去觀摩了解，也許會有意想不到的收穫！

這些時間非常感謝歐志昌老師的教導、陪伴，在我找不出答案時，鼓勵、幫助我，從根本不會玩 Flat cube 的我，變成超強高手。也感謝所有鼓勵及幫助我的同學、家人及師長，讓我能夠更有信心，克服問題，完成一件特別有意義的事。

科展比賽中，指導老師、我的加油團(媽媽)與我的合影。

科展比賽中公開展覽與很多老師、同學的分享，很累也很有成就感。

科展比賽最棒的成果，感謝指導老師的教導，讓我將作品完整呈現。

摘　要

一、　我可以從 K 值判斷完成狀態的首卡奇偶性及是否可解，也可以判斷從某種牌卡狀態能否經過有限次移動變成另一種牌卡狀態。當牌卡狀態的 K 值奇偶性相同，則可經有限次移動完成變換，若奇偶性不同，則需改變首卡奇偶性才能完成。

二、　我找到三階段(偶數張牌卡)及二階段(奇數張牌卡)標準解題流程(以 6 張卡為例)可將任何牌卡排成完成狀態。

三、　利用號碼平移的方式，在找到一組牌卡的移動最少步數後，一併找出其他組的最少步數，簡化牌卡情形。

四、　5 張卡及 6 張卡的操作過程可作為奇數張牌卡及偶數張牌卡的基本模型，隨著牌卡數增加，只要不斷增加首卡連號數量即可，此兩 種牌卡數之餘卡則固定為 3 張及 4 張。

一、 研究動機

老師送我一個看似簡單的桌遊卡---flat cube，幾張牌卡的移動組合，有時幾個步驟輕輕鬆鬆解決，有時卻讓我卡關好久仍然不能解決，讓我產生想去研究如何完成它，也想知道是否所有的牌卡都能有辦法排出答案？於是我上網尋找解答，找到了第 55 屆嘉義縣國中組數學科作品:「平面魔術方塊-移位遊戲昇級版」,是討論這款桌遊,不過作品的結論及解法並不完整，且步驟相當繁複。因此，我想要進一步找到一套完整且容易操作的解法來破解這款桌遊。

二、 研究目的與問題

我想要找到一套完整且容易操作的方法來破解這款桌遊，因此我提出以下的研究問題：

(一)如何決定完成狀態的首張卡是哪個號碼？

(二)是否有哪些操作步驟可以重複使用，並簡化整體的操作步驟？

(三)是否有固定的牌卡類型，可透過固定的操作步驟完成此桌遊？

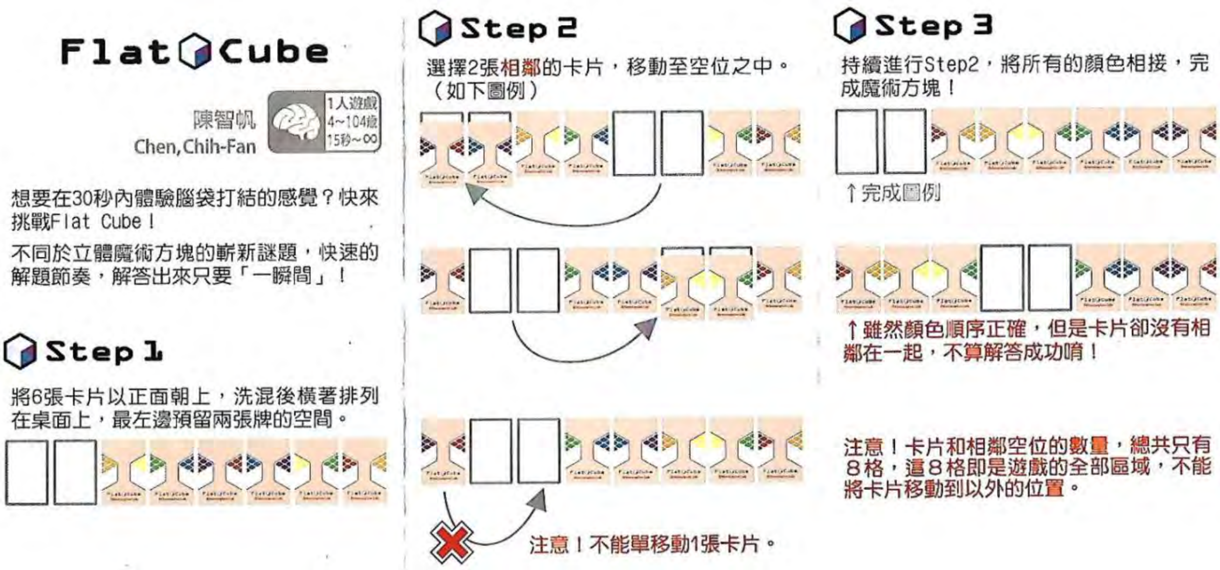
(四)能否找到一套 SOP 來完成此遊戲？

(五)若改變此款桌遊的牌卡張數，維持原遊戲規則，解法上又有何不同？

三、 遊戲介紹

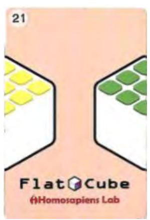
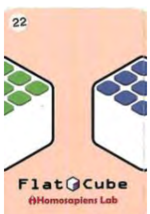
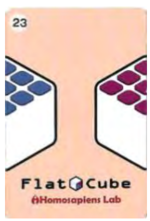
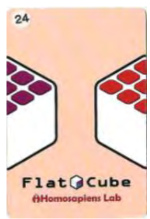
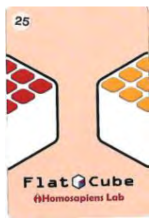
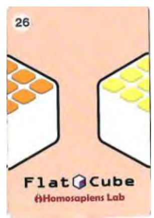
(一)遊戲規則

遊戲說明書中有這個遊戲的一些規定及玩法過程的舉例，整理如下：



(二)卡片編碼

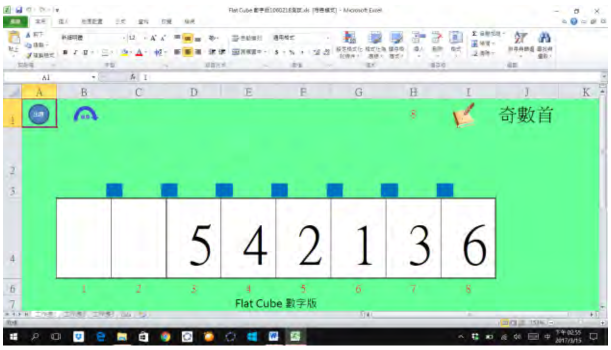
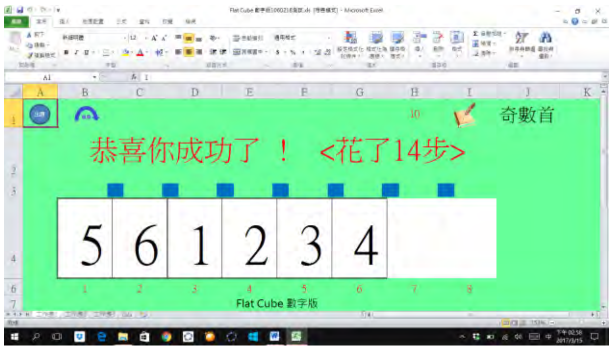
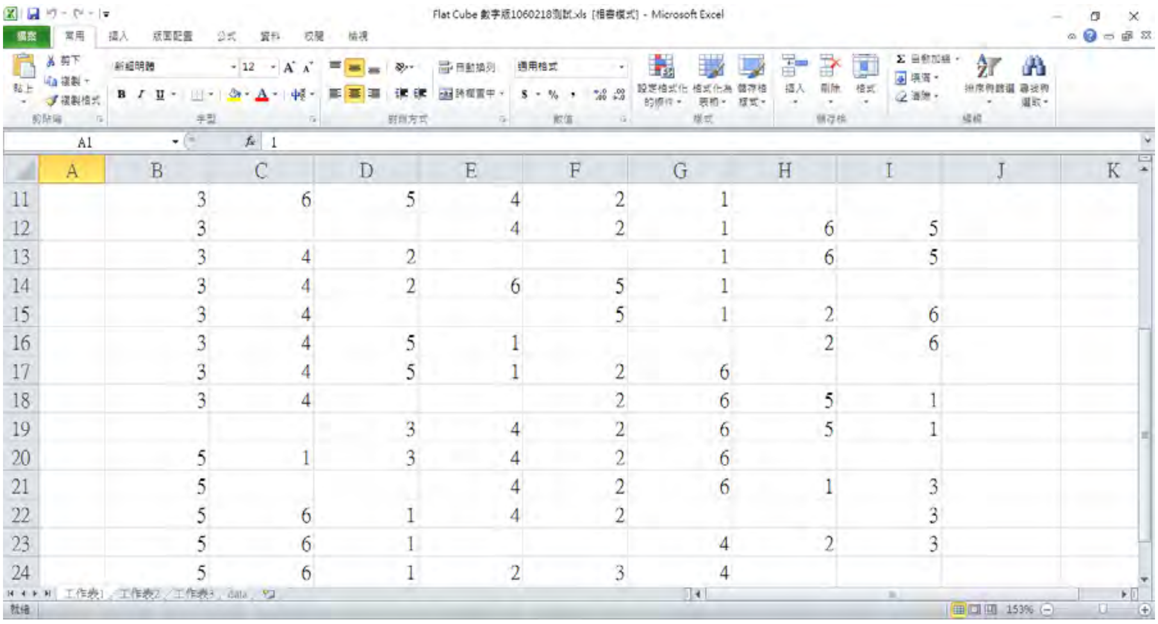
原來的遊戲是以相鄰兩張卡片連接邊上的顏色相同作為完成連接的依據，但是我發現這樣在進行紀錄時，並不方便，因此我便將 6 張卡片進行編號(如下表)。

卡片						
編號	1	2	3	4	5	6

此時，若將卡片依照 123456 排成一列，就是一種完成狀態；如果將 6 號卡從最右邊移到最左邊，讓卡片依照 612345 排成一列，仍然會是符合遊戲規則的完成狀態，也就是說卡片經過編號後，我可以找到**六種卡片的完成狀態，以數字排列表示，分別為：123456、234561、345612、456123、561234、612345。**

(三)利用電腦程式輔助

為了讓討論的過程正確性提高，且能有效地記錄下全部的操作過程，我將想法告訴指導老師，並由指導老師利用 EXCEL 寫了一個電腦程式，可以亂數出題，也可以用來判斷是否完成正確排法，並記錄所有的操作過程，我擷錄部分操作畫面如下。

<table>
<tr><td>出題畫面(電腦可亂數出題)</td><td>完成畫面(可顯示操作步數)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">紀錄操作過程</td></tr>
<tr><td colspan="2">

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
11		3	6	5	4	2	1				
12		3			4	2	1	6	5		
13		3	4	2			1	6	5		
14		3	4	2	6	5	1				
15		3	4			5	1	2	6		
16		3	4	5	1			2	6		
17		3	4	5	1	2	6				
18		3	4			2	6	5	1		
19				3	4	2	6	5	1		
20		5	1	3	4	2	6				
21		5			4	2	6	1	3		
22		5	6	1	4	2			3		
23		5	6	1			4	2	3		
24		5	6	1	2	3	4				

</td></tr>
</table>

四、 研究過程

(一)利用同型解簡化問題

當我將卡片編碼後，可知道完成狀態共有 6 種。因為<u>**每次都必須移動 2 張卡**</u>，所以我可以將 123456 重新排成 345612 及 561234(移動方法如下)。

1	2	3	4	5	6	×	×
×	×	3	4	5	6	1	2
3	4	×	×	5	6	1	2
3	4	5	6	×	×	1	2
3	4	5	6	1	2	×	×

1	2	3	4	5	6	×	×
×	×	3	4	5	6	1	2
5	6	3	4	×	×	1	2
5	6	×	×	3	4	1	2
5	6	1	2	3	4	×	×

所以，我將這三種完成狀態視為同型解，也就是說，只要我能完成 123456 的排法，就一定能透過上面的移動方式，排出另外兩種完成狀態。

同樣的道理，**234561、456123 及 612345 這三種完成狀態也會是同型解**，可以仿照前面的討論過程加以驗證。

但是，123456 並沒有辦法透過每次移動兩張卡片而變成 234561，因此，**這組卡片的完成狀態共有 2 組同型解**。因此接下來的討論，我會以 123456 及 234561 為完成狀態的兩種討論對象。

(二)判斷奇數排首或是偶數排首

由(一)的討論可以知道，2 組同型解的開頭數字分別為 1 跟 2，同一組同型解的開頭卡片號碼的奇偶性都一樣(例如：123456、345612 及 561234 都是奇數開頭；234561、456123 及 612345 都是偶數開頭)。因此，我<u>必須先找到如何決定開頭卡片號碼為奇數或是偶數的方法</u>。

1、 定義 K 值作為判斷奇數排首與偶數排首的依據

這個遊戲經過編碼後，主要的任務就變成是將數字進行排序，因此卡片之間的大小關係就變得很重要，所以我設計了一種大小關係的比較方法，來呈現卡片之間的大小關係。

(1) 將每張卡皆與在其右邊的所有卡片進行大小關係的比較，若此卡數字大於右邊的卡的數字，則以 1 表示，若此卡數字小於右邊的卡的數字，則以 0 表示。

(2) 將步驟(1)比較所得的數字累計加總，會得到數值 K。

(3) 舉例說明：若起始卡片狀態為：

3	2	1	4	6	5	×	×

(a) 3 號卡的右邊有 2、1、4、6、5，此時 3 比 2、1 大，但比 4、6、5 小，所以計為 1+1=2。接著比較 2 號卡與其右邊的 1、4、6、5，此時 2 比 1 大，但比 4、6、5 小，所以計為 1。接著比較 1 號卡與其右邊的 4、6、5，此時 1 比 4、6、5 都小，所以計為 0。接著比較 4 號卡與其右邊的 6、5，此時 4 比 6、5 都小，所以計為 0。最後比較 6 號卡與其右邊的 5，此時 6 比 5 大，所以計為 1。

(b) 每次比較都會得到 5 個數值，將此 5 個數值加總可得 K=2+1+0+0+1=4。

(c) K 值的最大與最小，分別出現在以下兩種情形：

K 值為 0							
1	2	3	4	5	6	×	×

K 值為：5+4+3+2+1=15							
6	5	4	3	2	1	×	×

2、 移動卡牌對 K 值的影響

為了解卡牌移動時，K 值所受到的影響，我做了以下幾種情況的測試：

【例 1】如下圖，5、6 原本在 3、4 右邊，3、4 移動後，5、6 變成在 3、4 左邊。對 1、2 來說，相對位置沒有改變，仍在 3、4 左邊。計算 K 值時，原來的 K 值為 0，移動後的 K 值則為 4。可解釋為：每張被移動卡對整體牌卡的 K 值皆增加 2，移動 2 張，所以整體牌卡的 K 值增加 4。

1	2	3	4	5	6		

⇒

1	2			5	6	3	4

【例 2】如下圖，3、6 原本在 4、5 右邊，4、5 移動後，3、6 變成在 4、5 左邊。對 1、2 來說，相對位置沒有改變，仍在 4、5 左邊。計算 K 值時，原來的 K 值為 2，移動後的 K 值仍為 2。可解釋為：此移動讓 4 號卡片的 K 值從 1 變成 0，5 號卡片的 K 值也從 1 變成 0，但是 6 號卡片的 K 值從 0 變成 2，因此整體牌卡的 K 值沒有變化。

1	2	4	5	3	6		

⇒

1	2			3	6	4	5

【例 3】如下圖，5、3、6 原本在 1、4 右邊，1、4 移動後，5、3、6 變成在 1、4 左邊，對 2 來說，相對位置沒有改變，仍在 1、4 左邊。計算 K 值時，原來的 K 值為 3，移動後的 K 值則為 7。可解釋為：此移動對 1 號卡片的 K 值沒有影響，但 4 號卡片的 K 值從 1 變成 0，5 號卡片的 K 值從 1 變成 3，3 號卡片的 K 值從 0 變成 1，6 號卡片的 K 值從 0 變成 2，因此整體牌卡的 K 值變化為 3-1+2+1+2=7。

2	1	4	5	3	6		

⇒

2			5	3	6	1	4

【例 4】如下圖，4、5、3、6 原本在 2、1 右邊，2、1 移動後，4、5、3、6 變成在 2、1 左邊。計算 K 值時，原來的 K 值為 3，移動後的 K 值則為 11。可解釋為：此移動讓 4 號卡片的 K 值從 1 變成 3，5 號卡片的 K 值從 1 變成 3，3 號卡片的 K 值從 0 變成 2，6 號卡片的 K 值從 0 變成 2，2 號卡片的 K 值沒有改變，仍為 1，因此整體牌卡的 K 值變化為 3+2+2+2+2=11。

2	1	4	5	3	6		

⇒

		4	5	3	6	2	1

從上面的 4 個例子發現，牌卡經過移動後，原 K 值與新 K 值的差皆為偶數。以下是我的推論：

(1) 因為每次要移動相鄰的兩張卡，被移動卡的左邊卡牌，與被移動卡的大小關係並沒有因為移動而有所改變，而被移動卡的右邊卡牌，與被移動卡的大小關係則會因為此移動而產生相反的效果，也就是 K 值會有 0 變成 1 或 1 變成 0 的情形。因此，若被移動卡的右邊有 2 張卡，此卡的原 K 值可能為 0、1、2，移動後則會變成 2、1、0。若被移動卡的右邊卡片數為 m ，被移動卡的原 K 值以 k_A 表示，新 K 值以 k_A' 表示，則 k_A 、 k_A' 與 m 會符合關係式：$\begin{cases} m \geq 1 \\ 0 \leq k_A \leq m \\ 0 \leq k_A' \leq m \\ k_A + k_A' = m \end{cases}$ 。

同樣的結果也可以用在另一張卡，假設其原 K 值為 k_B ，新 K 值為 k_B' ，則 k_B 、 k_B' 與 m 也會符合

關係式：$\begin{cases} m \geq 1 \\ 0 \leq k_B \leq m \\ 0 \leq k_B' \leq m \\ k_A + k_A' = m \end{cases}$ ，可推得牌卡移動後，原來的 K 值與新的 K 值差$=\left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right)$。

(2) 若兩張移動卡 A、B 的右邊只有 1 張卡，則 k_A 可能為 0 或 1，k_A' 可能為 1 或 0；k_B 可能為 0 或 1，k_B' 可能 1 變成 0。以下分為 4 種情形討論：

(a) $k_A = 0$，$k_B = 0 \Rightarrow k_A' = 1$，$k_B' = 1 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = 2$

(b) $k_A = 0$，$k_B = 1 \Rightarrow k_A' = 1$，$k_B' = 0 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = 0$

(c) $k_A = 1$，$k_B = 0 \Rightarrow k_A' = 0$，$k_B' = 1 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = 0$

(d) $k_A = 1$，$k_B = 1 \Rightarrow k_A' = 0$，$k_B' = 0 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = -2$

綜合上述的討論可發現，**原 K 值與新 K 值的差皆為偶數。**

(3) 若兩張移動卡 A、B 的右邊有 2 張卡，則 k_A 可能為 0、1、2，對應的 k_A' 則為 2、0、1；k_B 可能為 0、1、2，對應的 k_B' 則為 2、0、1。此時可分為 9 種情形討論：

(a) $k_A = 0$，$k_B = 0 \Rightarrow k_A' = 2$，$k_B' = 2 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = 4$

(b) $k_A = 0$，$k_B = 1 \Rightarrow k_A' = 2$，$k_B' = 1 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = 2$

(c) $k_A = 0$，$k_B = 2 \Rightarrow k_A' = 2$，$k_B' = 0 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = 0$

(d) $k_A = 1$，$k_B = 0 \Rightarrow k_A' = 1$，$k_B' = 2 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = 2$

(e) $k_A = 1$，$k_B = 1 \Rightarrow k_A' = 1$，$k_B' = 1 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = 0$

(f) $k_A = 1$，$k_B = 2 \Rightarrow k_A' = 1$，$k_B' = 0 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = -2$

(g) $k_A = 2$，$k_B = 0 \Rightarrow k_A' = 0$，$k_B' = 2 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = 0$

(h) $k_A = 2$，$k_B = 1 \Rightarrow k_A' = 0$，$k_B' = 1 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = -2$

(i) $k_A = 2$，$k_B = 2 \Rightarrow k_A' = 0$，$k_B' = 0 \Rightarrow \left(k_A' + k_B'\right) - \left(k_A + k_B\right) = -4$

綜合上述的討論可發現，**原 K 值與新 K 值的差皆為偶數。**

(4) 若兩張移動卡 A、B 的右邊有 3 張卡，則 k_A 可能為 0、1、2、3，對應的 k_A' 則為 3、2、0、1； k_B 可能為 0、1、2、3，對應的 k_B' 則為 3、2、0、1。此時可分為 16 種情形討論：

(a) $k_A=0$ ， $k_B=0 \Rightarrow k_A'=3$ ， $k_B'=3 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=6$

(b) $k_A=0$ ， $k_B=1 \Rightarrow k_A'=3$ ， $k_B'=2 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=4$

(c) $k_A=0$ ， $k_B=2 \Rightarrow k_A'=3$ ， $k_B'=1 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=2$

(d) $k_A=0$ ， $k_B=3 \Rightarrow k_A'=3$ ， $k_B'=0 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=0$

(e) $k_A=1$ ， $k_B=0 \Rightarrow k_A'=2$ ， $k_B'=3 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=4$

(f) $k_A=1$ ， $k_B=1 \Rightarrow k_A'=2$ ， $k_B'=2 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=2$

(g) $k_A=1$ ， $k_B=2 \Rightarrow k_A'=2$ ， $k_B'=1 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=0$

(h) $k_A=1$ ， $k_B=3 \Rightarrow k_A'=2$ ， $k_B'=0 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=-2$

(i) $k_A=2$ ， $k_B=0 \Rightarrow k_A'=1$ ， $k_B'=3 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=2$

(j) $k_A=2$ ， $k_B=1 \Rightarrow k_A'=1$ ， $k_B'=2 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=0$

(k) $k_A=2$ ， $k_B=2 \Rightarrow k_A'=1$ ， $k_B'=1 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=-2$

(l) $k_A=2$ ， $k_B=3 \Rightarrow k_A'=1$ ， $k_B'=0 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=-4$

(m) $k_A=3$ ， $k_B=0 \Rightarrow k_A'=0$ ， $k_B'=3 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=0$

(n) $k_A=3$ ， $k_B=1 \Rightarrow k_A'=0$ ， $k_B'=2 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=-2$

(o) $k_A=3$ ， $k_B=2 \Rightarrow k_A'=0$ ， $k_B'=1 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=-4$

(p) $k_A=3$ ， $k_B=3 \Rightarrow k_A'=0$ ， $k_B'=0 \Rightarrow \left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=-6$

綜合上述的討論可發現，**原 K 值與新 K 值的差皆為偶數。**

(5) 若兩張移動卡 A、B 的右邊有 4 張卡，則 k_A 可能為 0、1、2、3、4，對應的 k_A' 則為 4、3、2、0、1； k_B 可能為 0、1、2、3、4，對應的 k_B' 則為 4、3、2、0、1。此時可分為 25 種情形討論，討

論方式仿照前面的方法，$\left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)$的值會出現 8、6、4、2、0、-2、-4、-6、-8 等情形。我可以利用前面得到的關係式來說明一般化的情形：

因為 $k_A+k_A'=m$ ，$k_B+k_B'=m$ ，所以 $k_A'=m-k_A$ ，$k_B'=m-k_B$

$$\left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=\left(m-k_A+m-k_B\right)-\left(k_A+k_B\right)=2\left(m-k_A-k_B\right)，$$

可發現**原 K 值與新 K 值的差皆為偶數**。

小結

由上述的討論可知，每次移動 2 張卡牌，所得到的 K 值差皆為偶數，因此若原卡牌的 K 值為奇數，不論經過多少次移動，K 值的奇偶性並不會改變。所以，**若原卡牌的 K 值為奇數，則最後的完成排法必為 234561 或 456123 或 612345，也就是偶數卡排首**；**若原卡牌的 K 值為偶數，則最後的完成排法必為 123456 或 345612 或 561234，也就是奇數卡排首**。因此，我可以透過計算牌卡的 K 值決定最後完成排法的首張卡的奇偶性。

(三)利用連號卡簡化討論過程

遊戲本身有 6 張卡要進行排序，我想若能先將前兩張卡排對位置，則我就只要想辦法再把剩下的四張卡排好就可以了。因此，我就依照 2 組同型解的不同情形，分別設定當前兩張卡已經連號排對，進一步討論剩下四張卡的各種排列情形。

1、 基本變換

當卡片只剩四張，搭配兩個空格，我發現了以下 3 種卡片位置的基本變換。

倒序排法 (Return：以 R 代表) 產生 abcd→dcba 的效果共需 4 個步驟。	兩組相鄰卡對調排法 (Swap：以 S 代表) 產生 abcd→badc 的效果共需 5 個步驟。	兩組相鄰卡交換排法 (Exchange：以 E 代表) 產生 abcd→cdab 的效果共需 3 個步驟

a	b	c	d	×	×
×	×	c	d	a	b
d	a	c	×	×	b
d	×	×	a	c	b
d	c	b	a	×	×

a	b	c	d	×	×
a	×	×	d	b	c
a	d	b	×	×	c
×	×	b	a	d	c
b	a	×	×	d	c
b	a	d	c	×	×

a	b	c	d	×	×
×	×	c	d	a	b
c	d	×	×	a	b
c	d	a	b	×	×

2、 四張餘卡的分類

接下來我要將四張餘卡的各種情形都列出來加以討論，由前面的討論可知，要分為奇數排首跟偶數排首兩大類，加上同型解的想法，我就分成 12 連號卡與 23 連號卡兩種加以討論。

(1) 首先討論 12 連號卡的情形：四張餘卡為 3、4、5、6 的任意排列，共有 24 種情形(如下表)。

①	3	6	4	5	⑬	5	6	3	4
②	3	6	5	4	⑭	5	6	4	3
③	3	5	4	6	⑮	5	4	3	6
④	3	5	6	4	⑯	5	4	6	3
⑤	3	4	5	6	⑰	5	3	4	6
⑥	3	4	6	5	⑱	5	3	6	4
⑦	4	5	3	6	⑲	6	3	4	5
⑧	4	5	6	3	⑳	6	3	5	4
⑨	4	3	5	6	㉑	6	4	5	3
⑩	4	3	6	5	㉒	6	4	3	5
⑪	4	6	3	5	㉓	6	5	4	3
⑫	4	6	5	3	㉔	6	5	3	4

此時搭配我在的前面所找到的 3 種基本變換，可將這 24 種情形歸類成 6 種餘卡情形。例如：

⑯可透過 R 變換排成①，⑦可透過 E 變換排成①，⑳可透過 S 變換排成①，因此可將①、⑦、

⑯、⑳歸為一類。仿照同樣的方法，我將這 24 種情形整理成 6 類，如下表：

類型	R 變換	E 變換	S 變換
①：3645	⑯	⑦	⑳
②：3654	⑧	⑮	⑲
③：3546	㉑	⑪	⑱
④：3564	⑫	㉒	⑰
⑤：3456	㉓	⑬	⑩
⑥：3465	⑭	㉔	⑨

此時，我將 12 連號卡結合所歸納整理出來的 6 種餘卡類型，得到 6 種可能的排列情形，並進行在(二)所提出的奇數首與偶數首的檢查規則(計算 K 值，判斷奇偶性)，整理如下表：

類型	K 值	首卡的奇偶性	與 12 連號排首是否吻合
A：123645	**0**	奇	是
B：123654	3	偶	否
C：123546	1	偶	否
D：123564	**2**	奇	是
E：123456	**0**	奇	是
F：123465	1	偶	否

從上表可知，類型 A、D、E 才是真正配合 12 連號卡排首的可能情形，其中**類型 E 已經是完成狀態**，所以不需再討論，所以，**以 12 連號卡排首的所有情形，都可以藉由 R、E、S 三種變換，將 24 種情形簡化成為 A、D 兩類。**

(2) 接著討論 23 連號卡的情形：四張餘卡為 1、4、5、6 的任意排列，共有 24 種情形(如下表)。

①	4	5	6	1	⑬	6	1	4	5
②	4	5	1	6	⑭	6	1	5	4
③	4	6	5	1	⑮	6	4	5	1
④	4	6	1	5	⑯	6	4	1	5
⑤	4	1	5	6	⑰	6	5	4	1
⑥	4	1	6	5	⑱	6	5	1	4
⑦	5	6	1	4	⑲	1	4	5	6
⑧	5	6	4	1	⑳	1	4	6	5
⑨	5	4	6	1	㉑	1	6	4	5
⑩	5	4	1	6	㉒	1	6	5	4
⑪	5	1	4	6	㉓	1	5	6	4
⑫	5	1	6	4	㉔	1	5	4	6

此時搭配我在前面分所找到的 3 種基本變換，可以將這 24 種情形歸類成 6 種餘卡情形。例如：㉒可透過 R 變換排成①，⑬可透過 E 變換排成①，⑩可透過 S 變換排成①，因此可將①、⑩、⑬、㉒歸為一類。仿照同樣的方法，我將這 24 種情形整理成 6 類，如下表：

類型	R 變換	E 變換	S 變換
①：4561	㉒	⑬	⑩
②：4516	⑭	㉑	⑨
③：4651	㉓	⑪	⑯
④：4615	⑫	㉔	⑮
⑤：4156	⑱	⑧	⑳
⑥：4165	⑦	⑰	⑲

此時，我將 23 連號卡結合所歸納整理出來的 6 種餘卡類型，得到 6 種可能的排列情形，並進行在(二)所提出的奇數首與偶數首的檢查規則(計算 K 值，判斷奇偶性)，整理如下表：

類型	K 值	首卡的奇偶性	與 23 連號排首是否吻合
A' ：**234561**	**5**	偶	是
B' ：234516	4	奇	否
C' ：234651	6	奇	否
D' ：**234615**	**5**	**偶**	**是**
E' ：**234156**	**3**	**偶**	**是**
F' ：234165	4	奇	否

從上表可知，類型 A' 、 D' 、 E' 才是真正配合 23 連號卡排首的可能情形，其中類型 A' 已經是完成狀態，所以不需再討論，所以，**以 23 連號卡排首的所有情形，都可以藉由 R、E、S 三種變換，將 24 種情形簡化成為 D' 、 E' 兩類。**

(3) 綜合比較 12 連號卡與 23 連號卡

12 連號卡排首簡化後得到的兩種類型為：A 類 123645 及 D 類 123564

23 連號卡排首簡化後得到的兩種類型為： E' 類 234156 及 D' 類 234615

我發現以下兩個現象：

【現象一】: A 類及 E' 類有一個共同點，標示紅色的號碼卡只要往後移動 2 張卡就是完成狀態。

【現象二】: D 類及 D' 類有一個共同點，標示紅色的號碼卡只要往前移動 2 張卡就是完成狀態。

所以，不論是奇數排首或是偶數排首，最後所得到的 2 種類型還會有相同的現象，因此，我只要能找到奇數排首的 2 種簡化類型的解法，此解法也能用在偶數排首的現象。

3、 **討論 2 種簡化類型的解法**

(1) 討論 A 類：123645 的解法

當卡片排成 123645 的狀態時，只要將 6 號卡移到 45 號卡之後，就是完成狀態 123456，我發現只要將首卡調整 5 號卡即可順利完成，共需要 7 個步驟，操作步驟如下：

1	2	3	6	4	5	×	×
×	×	3	6	4	5	1	2
5	1	3	6	4	×	×	2
5	×	×	6	4	1	3	2
5	6	4	×	×	1	3	2
5	6	4	1	3	×	×	2
5	6	×	×	3	4	1	2
5	6	1	2	3	4	×	×

也就是說，當我將**卡片排法調整成 A 類排法後，就可以使用上述的 7 個步驟完成正確排法**。同樣的道理，因為 A 類與 E' 類的狀況是一樣的，所以若卡片為偶數排首時，當**卡片排法調整成 E' 類排法後，就可以使用上述的 7 個步驟完成正確排法。**

(2) 討論 D 類：123564 的解法

當卡片排成 123564 的狀態時，只要將 4 號卡移到 56 號卡之前，就是完成狀態 123456。我發現只要將首卡調整 3 號卡即可順利完成，共需要 7 個步驟，操作步驟如下：

1	2	3	5	6	4	×	×
1	2	×	×	6	4	3	5
×	×	1	2	6	4	3	5
3	5	1	2	6	4	×	×
3	×	×	2	6	4	5	1
3	4	5	2	6	×	×	1
3	4	5	×	×	2	6	1
3	4	5	6	1	2	×	×

也就是說，當我將卡片排法調整成 D 類排法後，就可以使用上述的 7 個步驟完成正確排法。

同樣的道理，因為 D 類與 D' 類的狀況是一樣的，所以若卡片為偶數排首時，當卡片排法調整成 D' 類排法後，就可以使用上述的 7 個步驟完成正確排法。

4、 **製造首兩張卡為連號卡的方法與步數**

由前面的討論可知，有了首兩張為連號卡時，要將卡片排成完成狀態就會變得很簡單，所以接下來要討論如何從給定的卡片狀況製造出首兩張卡為連號卡的方法，並找出最少的步數。

(1) 首先要利用 K 值的結果先判斷是奇數排首還是偶數排首。

(2) 確定奇數排首還是偶數排首後，就可以從給定的卡片狀況來選定連號卡為何。例如：給定卡片狀況為：542136，此時利用 K 值判斷可知為奇數排首(K=8)，因此可以選定 12 連號或 34 連號或 56 連號，討論情形如：(a)、(b)、(c)；給定卡片狀況為：562413，此時利用 K 值判斷可知為偶數排首(K=11)，因此可以選定 23 連號或 45 連號或 61 連號，討論情形如：(d)、(e)、(f)。

(a)排成 12 連號，步驟如下，共需 4 步

×	×	5	4	2	1	3	6
1	3	5	4	2	×	×	6
1	×	×	4	2	3	5	6
1	2	3	4	×	×	5	6
1	2	3	4	5	6	×	×

(b)排成 34 連號，步驟如下，共需 4 步

×	×	5	4	2	1	3	6
3	6	5	4	2	1	×	×
3	×	×	4	2	1	6	5
3	4	2	×	×	1	6	5
3	4	2	6	5	1	×	×

(c) 排成 56 連號，步驟如下，共需 5 步

×	×	5	4	2	1	3	6
5	4	×	×	2	1	3	6
5	4	3	6	2	1	×	×
5	×	×	6	2	1	4	3
5	6	2	×	×	1	4	3
5	6	2	4	3	1	×	×

(d) 排成 23 連號，步驟如下，共需 6 步

×	×	5	6	2	4	1	3
2	4	5	6	×	×	1	3
2	4	5	6	1	3	×	×
2	×	×	6	1	3	4	5
2	3	4	6	1	×	×	5
2	3	4	×	×	6	1	5
2	3	4	1	5	6	×	×

(e) 排成 45 連號，步驟如下，共需 3 步

×	×	5	6	2	4	1	3
4	1	5	6	2	×	×	3
4	×	×	6	2	1	5	3
4	5	3	6	2	1	×	×

(f) 排成 61 連號，步驟如下，共需 3 步

×	×	5	6	2	4	1	3
6	2	5	×	×	4	1	3
6	×	×	2	5	4	1	3
6	1	3	2	5	4	×	×

從上面的討論結果可知，在確定是奇數排首或偶數排首後，皆會有 3 種可能的連號卡選擇，且製造連號卡排首需要耗費的步數會介於 3 步到 6 步之間，但我會選擇所需步數最少的情形，因此在上述兩種情形中，製造連號卡排首所需的最少步數為 5 步。

上面所討論的兩種情形中，原始牌卡並未出現連號卡情形，如果原始牌卡中就已經存在連號卡，那製造連號卡排首是否會出現步數更多的情形呢？因此我做了以下的討論。

(3) 討論排成連號卡所需耗費的最少步數之最大值

(a) 給定排卡情況已經有<u>符合</u>奇數排首或偶數排首的連號卡

已符合奇數排首或偶數排首的連號卡，我用△代表，其他卡我用○代表，分 5 種情形討論：

【情形一】：需要 2 步可完成連號卡排首

×	×	△	△	○	○	○	○
△	△	×	×	○	○	○	○
△	△	○	○	○	○	×	×

【情形二】：需要 2 步可完成連號卡排首

×	×	○	△	△	○	○	○
△	△	○	×	×	○	○	○
△	△	○	○	○	○	×	×

【情形三】：需要 2 步可完成連號卡排首

×	×	○	○	△	△	○	○
△	△	○	○	×	×	○	○
△	△	○	○	○	○	×	×

【情形四】：需要 3 步可完成連號卡排首

×	×	○	○	○	△	△	○
△	△	○	○	○	×	×	○
△	△	×	×	○	○	○	○
△	△	○	○	○	○	×	×

【情形五】：需要 1 步可完成連號卡排首

×	×	○	○	○	○	△	△
△	△	○	○	○	○	×	×

(b) 給定排卡情況<u>沒有符合</u>奇數排首或偶數排首的連號卡

如果給定排卡情況沒有符合奇數排首或偶數排首的連號卡，我沿用之前的同型解概念，先分別討論 1、2 號卡的各種分布狀況，接著再將 4 張餘卡分別排入剩下的位置，其中我會將其他有連號卡的情形排除(如 34 連號或 56 連號)，因為在(a)部分已經討論過。在討論以 1、2 號卡為主的各種情形時，我是以奇數卡排首為完成狀態，因此在寫出所有排卡情形後，先計算其 K 值，找出奇數卡排首的情形，並進行前面(2)的各種情形討論，得到在此情形的連號卡排首的最少步數，整理如下表(共有 25 種情形，可再區分為$\boxed{1}$-$\boxed{10}$及$\boxed{11}$-$\boxed{25}$兩大類)。

$\boxed{1}$

X	X			1			2	步數	連號
		3	5		6	4		4	34
		4	6		5	3		4	56
		4	6		3	5		4	56
		4	3		6	5		4	34
		4	5		3	6		3	56
		5	3		4	6		4	56
		5	4		6	3		4	34
		6	3		5	4		3	56
		6	4		3	5		4	34
		6	5		4	3		4	56

$\boxed{2}$

X	X			1			2	步數	連號
		3	6		5		4	3	12
		3	5		4		6	3	12
		4	5		6		3	3	12
		4	3		5		6	3	12
		4	6		3		5	3	34
		5	4		3		6	3	12
		5	3		6		4	3	12
		6	3		4		5	3	12
		6	4		5		3	3	56
		6	5		3		4	3	12

3

X	X				1		2	步數	連號
		3	5	4		6		3	56
		4	3	5		6		3	56
		4	6	3		5		4	56
		5	3	6		4		3	34
		6	3	4		5		2	34
		6	5	3		4		3	34
		6	4	5		3		4	34

4

X	X		1		2			步數	連號
		3		4		6	5	5	34
		3		6		5	4	4	56
		3		5		4	6	4	34
		4		5		6	3	3	56
		4		6		3	5	5	12
		5		6		4	3	5	12
		5		4		3	6	4	34
		5		3		6	4	4	56
		6		3		4	5	3	34

5

X	X		1			2		步數	連號
		3		4	5		6	3	12
		3		6	4		5	3	12
		4		6	5		3	4	56
		4		5	3		6	3	34
		4		3	6		5	3	12
		5		6	3		4	3	12
		6		5	4		3	3	12
		6		4	5		3	3	56
		6		3	5		4	3	56
		6		4	3		5	4	34

6

X	X	1			2			步數	連號
			3	6		4	5	3	34
			3	5		6	4	3	56
			4	5		3	6	4	34
			4	3		6	5	4	34
			4	6		5	3	4	56
			5	4		6	3	3	56
			5	3		4	6	3	34
			6	3		5	4	4	56
			6	4		3	5	4	34
			6	5		4	3	4	56

7

X	X	1		2				步數	連號
			3		6	5	4	5	12
			3		5	4	6	3	34
			3		4	6	5	5	34
			4		6	3	5	4	34
			5		6	4	3	5	12
			5		4	3	6	5	12
			5		3	6	4	3	56
			6		4	5	3	4	56

8

X	X		1				2	步數	連號
		3		6	5	4		4	34
		3		5	4	6		3	56
		3		4	6	5		5	56
		4		6	3	5		3	34
		5		6	4	3		5	34
		5		4	3	6		4	34
		5		3	6	4		3	34
		6		4	5	3		3	56

9

X	X	1				2		步數	連號
			3	6	5		4	4	56
			3	5	4		6	4	12
			4	3	5		6	4	34
			4	6	3		5	4	34
			5	4	3		6	4	34
			5	3	6		4	4	12
			6	4	5		3	4	56
			6	5	3		4	4	56

10

X	X	1					2	步數	連號
			3	6	4	5		4	56
			4	5	3	6		4	34
			4	3	6	5		4	34
			4	6	3	5		4	34
			5	4	6	3		4	34
			6	3	5	4		3	34
			6	4	3	5		4	34
			6	5	4	3		4	56

11

X	X	2		1				step	連號
			3		6	4	5	3	34
			4		5	3	6	4	34
			4		3	6	5	4	34
			4		6	5	3	5	12
			5		4	6	3	3	56
			6		3	5	4	4	56
			6		4	3	5	5	12
			6		5	4	3	4	56

12

X	X	2			1			step	連號
			3	6		5	4	4	56
			3	5		4	6	3	34
			4	6		3	5	4	34
			5	4		3	6	3	12
			5	3		6	4	3	12
			6	3		4	5	3	34
			6	4		5	3	4	56
			6	5		4	3	4	56

13

X	X	2				1		step	連號
			3	6	4		5	5	34
			4	3	6		5	4	34
			4	6	5		3	4	56
			5	4	6		3	5	56
			6	3	5		4	4	56
			6	4	3		5	4	34
			6	5	4		3	4	56

14

X	X	2					1	step	連號
			3	6	5	4		3	34
			3	5	4	6		3	56
			4	5	6	3		4	34
			5	4	3	6		3	56
			5	3	6	4		3	34
			6	4	5	3		4	56

15

X	X			2			1	step	連號
		3	6		5	4		4	56
		3	5		4	6		3	56
		4	5		6	3		5	34
		4	6		3	5		4	56
		5	4		3	6		4	34
		5	3		6	4		3	34
		6	3		4	5		5	34
		6	4		5	3		4	34

16

X	X			2		1		step	連號
		3	6		4		5	4	12
		3	5		6		4	4	12
		4	3		6		5	4	34
		5	3		4		6	4	12
		6	3		5		4	3	56
		6	4		3		5	2	34
		6	5		4		3	4	56

17

X	X				2		1	step	連號
		3	6	4		5		4	56
		4	5	3		6		3	56
		4	3	6		5		4	56
		4	6	5		3		4	56
		5	4	6		3		4	34
		6	3	5		4		3	34
		6	4	3		5		4	34
		6	5	4		3		4	34

18

X	X		2			1		step	連號
		3		5	4		6	4	12
		3		4	6		5	4	12
		4		3	5		6	4	12
		4		6	3		5	4	12
		5		6	4		3	4	12
		5		3	6		4	4	12
		6		4	5		3	4	12
		6		5	3		4	4	12

19

X	X	2	1					step	連號
				3	6	5	4	4	12
				3	5	4	6	3	34
				5	4	3	6	4	12
				6	4	5	3	4	56

20

X	X					2	1	step	連號
		3	6	5	4			4	56
		3	5	4	6			5	56
		4	6	3	5			4	56
		5	4	3	6			4	34
		5	3	6	4			5	56

21

X	X		2		1			step	連號
		3		6		4	5	4	34
		3		5		6	4	3	56
		4		5		3	6	4	12
		4		3		6	5	4	12
		4		6		5	3	4	12
		5		4		6	3	4	12
		5		3		4	6	4	12
		6		3		5	4	4	12
		6		4		3	5	4	12
		6		5		4	3	4	12

22

X	X		2				1	step	連號
		3		6	4	5		4	56
		3		4	5	6		3	56
		4		5	3	6		3	56
		4		6	3	5		4	56
		4		6	5	3		4	56
		5		4	6	3		4	34
		6		3	5	4		3	34
		6		4	3	5		4	34
		6		5	4	3		5	34

23

X	X		2	1				step	連號
		6			5	4	3	4	12
		3			6	5	4	4	12
		3			5	4	6	4	12
		3			4	6	5	4	12
		4			6	3	5	4	12
		5			6	4	3	4	12
		5			3	6	4	4	56

24

X	X			2	1			step	連號
		3	6			5	4	4	56
		3	5			4	6	4	12
		4	5			6	3	3	56
		4	6			3	5	4	12
		5	4			3	6	4	34
		5	3			6	4	4	12
		6	3			4	5	3	34

25

X	X				2	1		step	連號
		6	5	3			4	4	56
		3	6	5			4	4	56
		3	5	4			6	5	56
		4	3	5			6	4	34
		4	6	3			5	5	34
		5	4	3			6	4	34
		5	3	6			4	4	34

另外，有關於偶數卡排首的情形，必須討論 2、3 號卡的各種分布狀況，接著再將 4 張餘卡分別排入剩下的位置，同樣會將有連號卡的情形排除(如 45 連號或 61 連號)。由前面 1、2 號卡的討論可以知道，偶數卡排首與奇數卡排首的情況應該是類似的，因此不再重新討論。

從上面的討論可以發現，**想要在首兩張卡排成連號卡，需要耗費的最少步數之最大值為 5 步。**

綜合 1、2、3、4 的討論，我得到以下的推論：完成任何一種起始牌卡的步數最多為 17 步。

按照上面的討論，拿到任何一種起始牌卡，可分為三個階段進行處理：

【階段一】：**判斷奇數排首或偶數排首後，先製造首兩張卡為連號卡**，此時若已經有合適的連卡，則直接移動到首兩張，步數在 3 步以內，若沒有現成且合適的連卡，則由前面的討論可知,製造首兩張卡為連號卡的步數在 5 步以內,所以階段一所需的**最多步數為 5 步**。

【階段二】：**將 4 張餘卡透過 R、E、S 三種變換排成兩種簡化類型**，因為 R 變換需要 4 步，E 變換需要 3 步，S 變換需要 5 步，所以階段二所需的**最多步數為 5 步**。

【階段三】：將**兩種簡化類型排程完成狀態，步數都是 7 步**。

因此，任何一種起始牌卡最多需要 5+5+7=17 步即可達到完成狀態。

以起始牌卡：××152643 為例：

×	×	1	5	2	6	4	3
1	5	×	×	2	6	4	3
1	5	4	3	2	6	×	×
1	×	×	3	2	6	5	4
1	2	6	3	×	×	5	4
1	2	6	3	5	4	×	×
1	2	6	3	×	×	5	4
1	2	×	×	6	3	5	4
1	2	3	5	6	×	×	4
1	2	3	×	×	5	6	4
1	2	3	6	4	5	×	×
×	×	3	6	4	5	1	2
5	1	3	6	4	×	×	2
5	×	×	6	4	1	3	2
5	6	4	×	×	1	3	2
5	6	4	1	3	×	×	2
5	6	×	×	3	4	1	2
5	6	1	2	3	4	×	×

→ 計算 K 值=3+2+1=6，所以是奇數排首

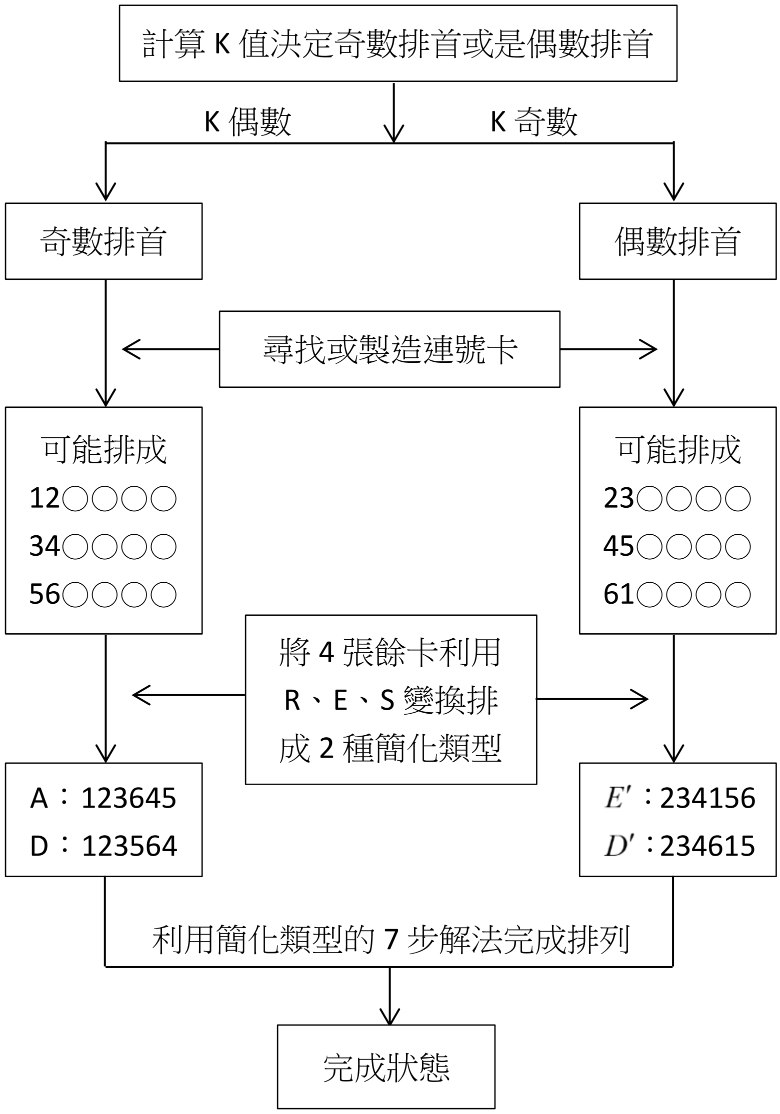
階段一
沒有適合且已經存在於起始牌卡的連號卡
製造 1、2 連號卡排首兩張，共 5 步完成

階段二
利用 S 變換將 4 張餘卡排成 A 類簡化型，
共 5 步完成

階段三
將 A 類簡化型排成完成狀態，共 7 步完成

(四)找出本遊戲的標準解題流程

經過前面一連串的討論，我已經可以找出一套標準的解題流程來破解這個遊戲。我以流程圖的方式來說明：



接著我舉幾個例子說明：

例 1：起始牌卡：××416352

×	×	4	1	6	3	5	2
3	5	4	1	6	×	×	2
3	5	×	×	6	4	1	2
×	×	3	5	6	4	1	2
1	2	3	5	6	4	×	×
1	2	×	×	6	4	3	5
×	×	1	2	6	4	3	5
3	5	1	2	6	4	×	×
3	×	×	2	6	4	5	1
3	4	5	2	6	×	×	1
3	4	5	×	×	2	6	1
3	4	5	6	1	2	×	×

計算 K 值=3+3+1+1=8，所以是奇數排首

沒有適合且已經存在於起始牌卡的連號卡
製造 1、2 連號卡排首兩張，4 張餘卡為 D 類

D 類簡化型，可經過 7 步排出完成狀態

例 2：起始牌卡：××625413

×	×	6	2	5	4	1	3
4	1	6	2	5	×	×	3
4	1	×	×	5	6	2	3
×	×	4	1	5	6	2	3
2	3	4	1	5	6	×	×
×	×	4	1	5	6	2	3
6	2	4	1	5	×	×	3
6	×	×	1	5	2	4	3
6	1	5	×	×	2	4	3
6	1	5	2	4	×	×	3
6	1	×	×	4	5	2	3
6	1	2	3	4	5	×	×

計算 K 值=5+1+3+2+1=11，所以是偶數排首

沒有適合且已經存在於起始牌卡的連號卡
製造 2、3 連號卡排首兩張，4 張餘卡為 E' 類

E' 類簡化型，可經過 7 步排出完成狀態

例 3：起始牌卡：××265341

×	×	2	6	5	3	4	1
3	4	2	6	5	×	×	1
3	4	×	×	5	2	6	1
3	4	5	2	6	1	×	×
×	×	5	2	6	1	3	4
1	3	5	2	6	×	×	4
1	×	×	2	6	3	5	4
1	2	6	×	×	3	5	4
1	2	6	3	5	×	×	4
1	2	×	×	5	6	3	4
1	2	3	4	5	6	×	×

計算 K 值=1+4+3+1+1=10，所以是奇數排首

起始牌卡已經存在適合的連號卡：34
將 34 連號卡移到首兩張，4 張餘卡為 A 類

A 類簡化型，可經過 7 步排出完成狀態

例 4：起始牌卡：××163452

×	×	1	6	3	4	5	2
4	5	1	6	3	×	×	2
4	5	×	×	3	1	6	2
4	5	6	2	3	1	×	×
4	5	×	×	3	1	6	2
×	×	4	5	3	1	6	2
6	2	4	5	3	1	×	×
6	×	×	5	3	1	2	4
6	1	2	5	3	×	×	4
6	1	2	×	×	5	3	4
6	1	2	3	4	5	×	×

計算 K 值=4+1+1+1=7，所以是偶數排首

起始牌卡已經存在適合的連號卡：45
將 45 連號卡移到首兩張，4 張餘卡為 D' 類

D' 類簡化型，可經過 7 步排出完成狀態

(五)改變牌卡張數，維持原遊戲規則，討論其解法。

1、 討論 5 張牌卡的情形

(1) **從完成狀態的 K 值特徵判斷起始牌卡是否有解**

(a) 5 張牌卡的完成狀態共有：12345、23451、34512、45123 及 51234。分別計算此 5 種完成狀態的 K 值，分別為：0、4、6、6 及 4，皆為偶數，此結果與 6 張牌卡的 K 值會出現奇數與偶數的情形不同。

(b) 每次移動 2 張牌卡，由前面的討論可知，整組牌卡的 K 值變化必為偶數，由於完成狀態的 K 值恆為偶數，因此當起始牌卡的 K 值為奇數時，必不可能透過遊戲規則完成此牌卡。

(2) **5 種完成狀態的互相轉換機制**

由於 5 種完成狀態的 K 值皆為偶數，且按照移動規則可知整組牌卡的 K 值變化必為偶數，因此我進行 5 種完成狀態互相轉換的探討，發現 5 種完成狀態皆可互相轉換，方法如下。

12345 轉 23451

X	X	1	2	3	4	5
3	4	1	2	X	X	5
3	4	X	X	1	2	5
3	4	2	5	1	X	X
3	4	2	X	X	5	1
X	X	2	3	4	5	1

12345 轉 34512

X	X	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	X	X
4	X	X	2	3	5	1
4	2	3	X	X	5	1
X	X	3	4	2	5	1
3	4	X	X	2	5	1
3	4	5	1	2	X	X

12345 轉 45123

X	X	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	X	X

12345 轉 51234

X	X	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	X	X
4	X	X	2	3	5	1
4	2	3	X	X	5	1
X	X	3	4	2	5	1
5	1	3	4	2	X	X
5	1	X	X	2	3	4
X	X	5	1	2	3	4

由此可知 5 種完成狀態可視為同一種，因此在處理 5 張牌卡時，只要考慮排成 12345 的狀況。

(3) 利用連號卡排首簡化問題，推得簡化類型

(a) 仿照 6 張卡的討論想法，我先透過連號卡排首來簡化問題。由(2)的討論可知，只要討論 12 排首的狀況即可。整理 12 排首的各種情形如右表，搭配 K 值必須為偶數的限制，可知只有 3 種可完成的類型(A、D、F)。其中 A 類為已完成狀態，D、F 類皆可在 2 步的操作後達到完成狀態(方法如下)。

類型	K 值	是否可完成
A：12345	0	O
B：12354	1	X
C：12435	1	X
D：12453	2	O
E：12543	3	X
F：12534	2	O

D 類：12453

1	2	4	5	3	X	X
1	2	X	X	3	4	5
X	X	1	2	3	4	5

F 類：12534

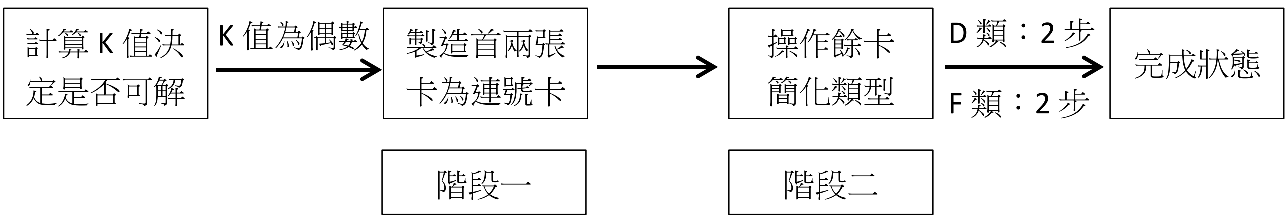
1	2	5	3	4	X	X
1	2	5	X	X	3	4
X	X	5	1	2	3	4

(b) 當起始牌卡本身就有 2 張連號卡時，因為 5 種完成狀態皆可互相轉換，所以無論是哪兩張連號卡皆可使用。此時只要 K 值為偶數，就可以將此連號卡移至排首，搭配 D、F 類的操作方法，即可完成。

(c) 若起始牌卡本身完全沒有連號卡，且 K 值為偶數，此時最多需要 6 步可做到 2 張連號卡排首，同樣可搭配 D、F 類的操作方法完成牌卡。

(4) 建立解題標準流程，並推算解題最少步數

5 張卡的解題流程主要分為兩階段：首先判斷 K 值是否為偶數，若為奇數則此牌卡無法完成；若為偶數，則先製造首兩張連號卡，稱為階段一，所需步數最多為 6 步。接下來會剩下 3 張餘卡，可分為 2 種簡化類型 D 類、F 類，此時只需要 2 步即可完成，稱為階段二。因此，當 5 張卡的起始牌卡 K 值為偶數時，必可透過二階段解題流程，在 8 步以內完成，流程圖如下。



(5) 舉例說明：起始牌卡：××13254

X	X	1	3	2	5	4
5	4	1	3	2	X	X
5	4	1	X	X	3	2
5	X	X	4	1	3	2
5	1	3	4	X	X	2
5	1	X	X	3	4	2
5	1	4	2	3	X	X
5	1	4	X	X	2	3
X	X	4	5	1	2	3

計算 K 值=1+1=2，所以可解

階段一：起始牌卡不存在連號卡，因此先製造首兩張卡為連號卡 51，此時 3 張餘卡為 F 類

階段二：F 類簡化類型，2 步可排出完成狀態

2、 討論 7 張牌卡的情形

(1) 7 張牌卡的完成狀態共有：1234567、2345671、3456712、4567123、5671234、6712345 及 7123456。計算此 7 種完成狀態的 K 值發現皆為偶數，與 5 張牌卡的情形相同。每次移動 2 張牌卡，整組牌卡的 K 值變化必為偶數，因此當起始牌卡的 K 值為奇數時，必不可能有解。

(2) 仿照 5 張卡的討論過程，我也做了 7 種完成狀態的互相轉換是否可行的討論，發現 7 種完成狀態都是可以互相轉換的，以下我僅列舉其中 2 種互轉過程作為說明。

1234567 轉 2345671

X	X	1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	X	X	4	5	6	7
2	3	1	6	7	4	5	X	X
2	3	X	X	7	4	5	1	6
2	3	4	5	7	X	X	1	6
2	3	4	5	7	1	6	X	X
2	3	4	5	X	X	6	7	1
2	3	X	X	4	5	6	7	1
X	X	2	3	4	5	6	7	1

1234567 轉 3456712

X	X	1	2	3	4	5	6	7
3	4	1	2	X	X	5	6	7
3	4	X	X	1	2	5	6	7
3	4	6	7	1	2	5	X	X
3	4	6	X	X	2	5	7	1
3	4	6	2	5	X	X	7	1
3	4	X	X	5	6	2	7	1
3	4	5	6	X	X	2	7	1
3	4	5	6	7	1	2	X	X

由此可知 7 種完成狀態可視為同一種，因此在處理 7 張牌卡時，只要考慮排成 1234567 的狀況。

(3) 由於卡片數增加到 7 張，延續 5 張卡的思考方式，所以我先將前 4 張卡排成連號

(a) 由(2)的討論可知，只要討論 1234 排首的狀況即可。整理 1234 排首的各種情形如右表，搭配 K 值必須為偶數的限制，可知只有 3 種可完成的類型(A、C、F)。其中 A 類為已完成狀態，C、F 類皆可在 3 步的操作後達到完成狀態(方法如下)。

類型	K 值	是否可完成
A：1234567	0	O
B：1234576	1	X
C：1234675	2	O
D：1234657	1	X
E：1234765	3	X
F：1234756	2	O

C 類：1234675

1	2	3	4	6	7	5	X	X
1	2	3	4	X	X	5	6	7
1	2	X	X	3	4	5	6	7
X	X	1	2	3	4	5	6	7

F 類：1234756

1	2	3	4	7	5	6	X	X
1	2	X	X	7	5	6	3	4
1	2	5	6	7	X	X	3	4
X	X	5	6	7	1	2	3	4

(b) 當起始牌卡本身就有連號卡時，因為 7 種完成狀態皆可互相轉換，所以無論是哪些連號卡皆可使用。只要 K 值為偶數，就可以將連號卡移至排首，搭配 C、F 類的操作方法，即可完成。

(c) 若起始牌卡本身完全沒有連號卡，且 K 值為偶數，此時最多需要 8 步可做到 4 張連號卡排首，同樣可搭配 C、F 類的操作方法完成牌卡。

(4) 從上面的分析可以發現，7 張卡的標準解題流程與 5 張卡的情形大致相同。首先需將首 4 張卡排成連號卡，最多需要 8 步即可完成，此時 3 張餘卡也是分為 2 種簡化類型，簡化類型變成完成狀態則需要 3 步。因此當 7 張卡的起始牌卡 K 值為偶數時，同樣可透過二階段解題流程，在 11 步以內必可完成。

(5) 舉例說明：起始牌卡：××5463271

X	X	5	4	6	3	2	7	1
3	2	5	4	6			7	1
3			4	6	2	5	7	1
3	4	6			2	5	7	1
3	4	6	7	1	2	5		
3	4			1	2	5	6	7
3	4	5	6	1	2			7
3	4	5	6			1	2	7
3	4	5	6	2	7	1		
3	4			2	7	1	5	6
3	4	7	1	2			5	6
		7	1	2	3	4	5	6

計算 K 值=4+3+3+2+1+1=14，所以可解

階段一

起始牌卡不存在連號卡，因此先製造首 4 張卡為連號卡 3456，此時 3 張餘卡為 F 類

階段二

F 類簡化類型，3 步可排出完成狀態

小結

綜合 **5 張及 7 張牌卡**的討論，我發現**在各種條件限制(K 值)及解題過程(二階段)都大致相同**。當牌卡增加 2 張時，影響的是排首的連號卡張數，會由 2 張增加到 4 張，因此步數也會由 6 步增加到 8 步，但是餘卡數量則皆為 3 張，簡化類型皆為 2 類，排出完成狀態的步數則也會受到影響，由 2 步增加到 3 步。由這兩種牌卡張數的討論結果可知，**5 張牌卡的操作流程與結果可作為處理奇數張牌卡的基本操作模式**。

3、 討論 8 張牌卡的情形

從奇數張牌卡的結果，我進一步討論 8 張牌卡的情形，我發現 8 張牌卡的操作模式基本上與 6 張牌卡相同，分為以下幾點進行說明：

(1) 8 張牌卡的完成狀態共有 8 種，計算此 8 種完成狀態的 K 值，整理如下表：

完成狀態	K 值	完成狀態	K 值
12345678	0	23456781	7
34567812	12	45678123	15
56781234	16	67812345	15
78123456	12	81234567	7

從上表可知，完成狀態可由 K 值區分為 2 種同型解，與 6 張牌卡的情形相同，當起始牌卡 K 值為奇數時，完成狀態必為偶數首，當起始牌卡 K 值為偶數時，完成狀態必為奇數首。

(2) 延續 5、6、7 張牌卡的討論方法，可將首 4 張卡排成適當的連號卡(配合 K 值)，此時會剩下 4 張餘卡，可使用 6 張牌卡的 R、E、S 變換進行簡化類型的處理(共有 2 類)，再由簡化類型排出完成狀態。此時會發生製造連號卡排首所需步數及簡化類型排出完成狀態的步數都會增加的現象，與奇數張牌卡數增加的情形相同(如 5 張卡到 7 張卡)。因此我可以將 6 張牌卡的分析過程做為偶數張牌卡的基本操作模式，8 張牌卡的操作過程就可以依此模式完成。

綜合 1、2、3 點的討論，我發現 **5 張牌卡的操作流程可作為奇數張牌卡的基本解題模型，6 張牌卡的操作流程可作為偶數張牌卡的基本解題模型**。當**牌卡張數增加時**，**首卡排成連號的張數也會跟著增加，需要的最少步數也會增加，餘卡張數則不會改變**，奇數張牌卡的餘卡數為 3 張，偶數張牌卡的餘卡數為 4 張，餘卡所產生的簡化類型也不會改變，**不論奇偶數張牌卡，簡化類型皆有 2 種**，但由簡化類型排出完成狀態所需的最少步數則會增加。

五、 研究結果

(一)我定義了一種 K 值的算法，可以用來判斷起始牌卡是否能排出完成狀態。依照牌卡數量為奇數或偶數而有不同的判斷結果，說明如下：

1、 牌卡數量為奇數時：**若 K 值為偶數，則起始牌卡必能排出完成狀態，且任何一種完成狀態都排的出來；若 K 值為奇數，則起始牌卡無法排出完成狀態。**

2、 牌卡數量為偶數時：**若 K 值為偶數，則完成狀態是奇數排首，若 K 值為奇數，則完成狀態是偶數排首。**

(二)完成狀態的分類：

1、 牌卡數量為奇數時：各種完成狀態皆可在有限的操作步數下互相轉換。

2、 牌卡數量為偶數時(以 6 張卡為例)：完成狀態可依 K 值奇偶性分為兩大類，**第一類：123456、345612 及 561234，第二類：234561，456123 及 612345**。同一類的完成狀態可透過遊戲規則的移動過程互相轉換，我稱它為同型解。

(三)餘卡的特性：

1、 當牌卡數量為偶數時(以 6 張卡為例)：餘卡數量為 4 張，我找到 3 種基本變換可以在首兩張卡不受影響的條件下，改變 4 張餘卡的排列結果。整理如下表：

變換類型	R 變換(Return)	E 變換(Exchange)	S 變換(Swap)
排列變化	abcd→dcba	abcd→cdab	abcd→badc
需要步數	4 步	3 步	5 步

2、 當牌卡數量為奇數時：餘卡數量為 3 張，可透過簡單的操作牌出完成狀態。

(四)給定不同數量的任意起始牌卡，可透過移動有限步數製造首 2 張、4 張、…為連號卡，同時符合完成狀態。隨著牌卡張數增加，製造連號卡所需的步數也會增加。例如 6 張牌卡製造 2 張連號卡的最多步數為 5 步，7 張牌卡製造 4 張連號卡的最多步數為 8 步。

(五)簡化類型的種類：

1、 牌卡數量為偶數時(以 6 張卡為例)：當首 2 張卡為符合完成狀態的連號卡，不論是奇數排首或是偶數排首，4 張餘卡經過整理都可以簡化成 2 種類型。整理如下表：

奇數排首	A 類：123645→123456	D 類：123564→123456
偶數排首	E' 類：234156→234561	D' 類：234615→234561
需要步數	7 步可完成	7 步可完成

2、 牌卡數量為奇數時(以 7 張卡為例)：當首 4 張卡為符合完成狀態的連號卡，3 張餘卡經過整理都可以簡化成 2 種類型。整理如下表：

任意排首	**C 類：1234675→1234567**	**F 類：1234756→5671234**
需要步數	**3** 步可完成	**3** 步可完成

(六)解題流程：

1、 牌卡數量為偶數時(以 6 張卡為例)：我找到**一套解題的流程，共分三個階段**，可以將任意起始牌卡經過有限步數移動達成完成狀態，**所需最多步數為 17 步。**

2、 牌卡數量為奇數時(以 7 張卡為例)：我找到**一套解題的流程，共分二個階段**，可以將任意起始牌卡經過有限步數移動達成完成狀態，**所需最多步數為 11 步。**

六、 討論

在研究過程中，我發現一些有趣的問題，並加以討論如下。

(一)是否可能產生單張卡對調的情形？如 123465→123456

我一開始本來想從單張卡的對調討論起，但是發現怎麼做都沒辦法完成。後來有了 K 值輔助判斷，就發現這是不可能做到的！

因為牌卡若為 123465，K 值為 1，依照前面的討論可知完成狀態必為偶數排首，所以不可能是 123456，因此不可能不影響前四張卡 1234，單純將 65 對調成 56。

(二)為何要先排定首兩張卡連號卡，而不是前三張呢？

根據嘉義縣國中數學組作品的討論方式，作者是採取先將前三張卡排成連號，如果剩下的三張卡有符合作者設定的殘卡狀態就可以順利完成，但是遊戲的操作每次都是移動兩張卡，所以就算前三張卡是連號狀態，為了讓後三張卡順利完成，也只能保持首兩張不動，第三張卡必須與後三張配合才能讓卡片排成連號。而且原作品並無法確定前三張是哪三張，必須不斷嘗試換連號卡，而且還必須搭配殘卡的對照表，所以在該作品中並未提出一套容易操作的流程。

如果將我在前面所訂的 K 值算法及 4 張餘卡所形成的簡化類型用來解釋該作品，則當前三張卡已經是連號卡時，以 123 連號為例，後三張卡依照所剩號碼排列的各種情形為：123456、123465、123546、123564、123645、123654。其中 123465、123546 及 123654 的 K 值為奇數，所以是偶數排首，不可能是 123 為前三張連號卡，因此刪除。而 123564 為簡化類型中的 D 類，123645 為簡化類型中的 A 類，使用 A、D 類的 7 步移動成完成狀態，並不需要不斷換前三張連號卡。

(三)每一種牌卡情形的最少移動步數是多少？有固定的公式或解法嗎？

我雖然找到了一套解題的標準流程，但是隨著我越玩越熟練，我發現其實有些步驟是可以再精簡的。舉例來說，給定牌卡：××163452，我分別使用三階段解題流程及隨機調整解法

三階段解題流程

X	X	1	6	3	4	5	2
4	5	1	6	3	X	X	2
4	5	X	X	3	1	6	2
4	5	6	2	3	1	X	X
4	5	X	X	3	1	6	2
X	X	4	5	3	1	6	2
6	2	4	5	3	1	X	X
6	X	X	5	3	1	2	4
6	1	2	5	3	X	X	4
6	1	2	X	X	5	3	4
6	1	2	3	4	5	X	X

隨機調整解法

X	X	1	6	3	4	5	2
4	5	1	6	3	X	X	2
4	5	X	X	3	1	6	2
X	X	4	5	3	1	6	2
6	2	4	5	3	1	X	X
6	X	X	5	3	1	2	4
6	1	2	5	3	X	X	4
6	1	2	X	X	5	3	4
6	1	2	3	4	5	X	X

在上面的例子中，三階段解題流程為了讓 4 張餘卡符合簡化類型 D'，所以多移動了 2 步，總步數為 10 步；而隨機調整解法發現在過程中可省略此 2 步，最後只需要 8 步即可完成。所以三階段解題流程可以在一開始對遊戲不夠熟悉的情況下使用，必可在 17 步以內完成解題，但是當玩家對遊戲已經有相當的了解，就可在過程中做隨機調整減少步數。最後我檢查了所有牌卡情形發現：**起始牌卡為：××426531 時，需要最多 15 步可排成完成狀態**，操作過程如下：

X	X	4	2	6	5	3	1	→ 計算 K 值=3+1+3+2+1=10，所以是奇數排首
5	3	4	2	6	X	X	1	
5	X	X	2	6	3	4	1	選定 56 連號卡移到首兩張， 結果 4 張餘卡會排成 3241 的情形
5	6	3	2	X	X	4	1	
5	6	3	2	4	1	X	X	
5	6	X	X	4	1	3	2	
5	6	1	3	4	X	X	2	利用 R 變換就可排出簡化類型
5	6	1	X	X	3	4	2	
5	6	1	4	2	3	X	X	
X	X	1	4	2	3	5	6	
3	5	1	4	2	X	X	6	
3	X	X	4	2	5	1	6	
3	4	2	X	X	5	1	6	A 類簡化型，可經過 7 步排出完成狀態
3	4	2	5	1	X	X	6	
3	4	X	X	1	2	5	6	
3	4	5	6	1	2	X	X	

但是我並沒有找到一套方法或是公式可以從起始牌卡就判斷出最少移動步數。

(四)可利用牌卡號碼平移的方式進行牌卡種類的簡化

在我玩了將近 3000 組牌卡後，我發現了一個有趣的現象，以下表中的三組牌卡為例：

××152643

X	X	1	5	2	6	4	3
5	2	1	X	X	6	4	3
5	X	X	2	1	6	4	3
5	6	4	2	1	X	X	3
5	6	X	X	1	4	2	3
5	6	1	4	X	X	2	3
5	6	1	4	2	3	X	X
X	X	1	4	2	3	5	6
3	5	1	4	2	X	X	6
3	X	X	4	2	5	1	6
3	4	2	X	X	5	1	6
3	4	2	5	1	X	X	6
3	4	X	X	1	2	5	6
3	4	5	6	1	2	X	X

××314265

X	X	3	1	4	2	6	5
1	4	3	X	X	2	6	5
1	X	X	4	3	2	6	5
1	2	6	4	3	X	X	5
1	2	X	X	3	6	4	5
1	2	3	6	X	X	4	5
1	2	3	6	4	5	X	X
X	X	3	6	4	5	1	2
5	1	3	6	4	X	X	2
5	X	X	6	4	1	3	2
5	6	4	X	X	1	3	2
5	6	4	1	3	X	X	2
5	6	X	X	3	4	1	2
5	6	1	2	3	4	X	X

××536421

X	X	5	3	6	4	2	1
3	6	5	X	X	4	2	1
3	X	X	6	5	4	2	1
3	4	2	6	4	X	X	1
3	4	X	X	5	2	6	1
3	4	5	2	X	X	6	1
3	4	5	2	6	1	X	X
X	X	5	2	6	1	3	4
1	3	5	2	6	X	X	4
1	X	X	2	6	3	5	4
1	2	6	X	X	3	5	4
1	2	6	3	5	X	X	4
1	2	X	X	5	6	3	4
1	2	3	4	5	6	X	X

這三組牌卡都是最少 13 步可完成，仔細觀察同一列的排卡號碼，由左至右剛好每個對應位置的號碼都增加 2，因為號碼最多只有到 6，所以超過 6 時就再往回數 1 及 2，這樣對照三組解的過程，

完全符合，也就是說當我找到牌卡：××152643 的解法時，我可以透過號碼平移 2 的方法，得到同為奇數排首的另兩種情形。另外，如果我將號碼平移 1 的話，××152643 會變成××263154，此時計算 K 值可知為偶排首，將××263154 的最少步數排法寫出來做對照發現，與號碼平移 2 的情況相同，同一列的排卡號碼，由左至右剛好每個對應位置的號碼都增加 1，那麼有可以將××263154 的結果再平移得到另兩組牌卡：××425316 及××641532 的解(如下表)。也就是說，當我解出一組牌卡時，我可以透過號碼分別平移 1、2、3、4、5 來得到其他 5 種牌卡的解題過程，這樣可以將牌卡的所有需要討論情形從 720 種簡化為 120 種。

××263154

X	X	2	6	3	1	5	4
6	3	2	X	X	1	5	4
6	X	X	3	2	1	5	4
6	1	5	3	2	X	X	4
6	1	X	X	2	5	3	4
6	1	2	5	X	X	3	4
6	1	2	5	3	4	X	X
X	X	2	5	3	4	6	1
4	6	2	5	3	X	X	1
4	X	X	5	3	6	2	1
4	5	3	X	X	6	2	1
4	5	3	6	2	X	X	1
4	5	X	X	2	3	6	1
4	5	6	1	2	3	X	X

××425316

X	X	4	2	5	3	1	6
2	5	4	X	X	3	1	6
2	X	X	5	4	3	1	6
2	3	1	5	4	X	X	6
2	3	X	X	4	1	5	6
2	3	4	1	X	X	5	6
2	3	4	1	5	6	X	X
×	×	4	1	5	6	2	3
6	2	4	1	5	X	X	3
6	X	X	1	5	2	4	3
6	1	5	X	X	2	4	3
6	1	5	2	4	X	X	3
6	1	X	X	4	5	2	3
6	1	2	3	4	5	X	X

××641532

X	X	6	4	1	5	3	2
4	1	6	X	X	5	3	2
4	×	×	1	6	5	3	2
4	5	3	1	6	X	X	2
4	5	X	X	6	3	1	2
4	5	6	3	X	X	1	2
4	5	6	3	1	2	X	X
X	X	6	3	1	2	4	5
2	4	6	3	1	X	X	5
2	X	X	3	1	4	6	5
2	3	1	X	X	4	6	5
2	3	1	4	6	X	X	5
2	3	X	X	6	1	4	5
2	3	4	5	6	1	X	X

(五)N 張卡的 K 值一般化討論

從研究過程中的討論中，我發現**牌卡數量為奇數時，K 值必為偶數，牌卡數量為偶數時，K 值則有一半的情形為奇數，一半的情形為偶數**，也因此在同型解的部分區分為：**(1)牌卡數量為奇數時，所有完成狀態都是同一種同型解，彼此間也可以在有限的步數內互相轉換。(2) 牌卡數量為偶數時，完成狀態分為兩種同型解，分別為奇數首及偶數首，同一種同型解之間才能在有限的步數內互相轉換，兩種同型解之間則不可能互相轉換**。以下是我推論 N 張卡的 K 值為何會因為張數的奇偶性而有所不同的原因。我將 N 張卡編號為：1、2、3、…、N，則完成狀態共有 N 種，分別為：$123\cdots N$，$23\cdots N1$，$34\cdots N12$，…，$N123\cdots(N\text{-}1)$。當完成狀態為$123\cdots N$時，K 值為 0，完成狀態$23\cdots N1$則可視為將 1 移至最右邊，此時 2、3、…、N 都在 1 的左邊，且都比 1 大，因此造成的 K 值變化為增加$(N\text{-}1)$，類推完成狀態$34\cdots N12$的 K 值變化應該是增加$(N\text{-}2)\times 2$，因此，完成狀態$(m+1)\cdots N12\cdots m$的 K 值變化應該是增加$(N-m)\times m$。此時，當 N 為奇數時，不論m為奇數或偶數，$(N-m)\times m$必為偶數，所以奇數張牌卡的 K 值必為偶數。當 N 為偶數時，若m為奇數，則$(N-m)\times m$必為奇數，若m為偶數，則$(N-m)\times m$必為偶數，所以偶數張牌卡的 K 值會分成奇數與偶數兩種。

七、 結論

一、**透過 K 值可以判斷完成狀態的首卡奇偶性(偶數卡適用)及起始牌卡是否可解(奇數卡適用)**，而且可以判斷從某種牌卡狀態是否能經過有限次移動變成另一種牌卡狀態。**當牌卡狀態的 K 值奇偶性相同，則必可經有限次移動完成變換，若奇偶性不同，需改變首卡奇偶性才可以完成**。

二、**偶數張牌卡可透過三階段標準解題流程完成，以 6 張卡為例，最多需要 17 步可完成**，但實際上並不會出現 17 步的狀態，**最多只要 15 步就可以做到**。**奇數張牌卡則是透過二階段解題流程**，以 7 張卡為例，最多需要 11 步完成。

三、各種起始牌卡皆可使用三階段或二階段標準解題流程完成，但若要找到最少移動步數，則會因為牌卡狀態不同而有很大的差異，並無法從起始牌卡就看出最少移動步數。

四、我可以利用號碼平移的方式，在找到一組牌卡的最少步數後，一併找出其他組牌卡的最少步數，這樣可以讓牌卡需要討論的情形簡化(以 6 張卡為例，720 種可簡化為 120 種)。

五、**牌卡張數的奇偶性會影響整體 K 值的奇偶性，也因此讓牌卡為偶數張時恆有解，解的種類有 2 大類(奇數首及偶數首)；當牌卡數為奇數張時，K 值必須為偶數才可解，K 值為奇數則無解。**

六、**5 張卡及 6 張卡的操作過程可作為奇數張牌卡及偶數張牌卡的基本操作模型，隨著牌卡數增加，我只要不斷增加首卡連號數量即可，此兩種牌卡數之餘卡則固定為 3 張及 4 張。**

八、 未來展望

關於這個遊戲，我想到的是如果將規則改成：一次移動三張卡，有三個空格，還是維持 6 張卡，那麼是否依然可以給定任意起始牌卡都能排的出來。我在目前所發現的一些規則，是否能沿用？讓我想要有機會更進一步去討論！

九、 參考資料

(一)平面魔術方塊-移位遊戲升級版。王哲豪 陳睿諺 林宜聖。2015。第 55 屆嘉義縣國中組數學。
(二)第六冊國小數學。奇數偶數。南一出版社。2016。
(三)第八冊國小數學。圖形的規律。康軒出版社。2016。

【評語】080404

此參展作品針對桌遊卡 Flat cube 的六張紙牌排列的平移遊戲進行探討，依據遊戲規則探討如何將牌卡經由適當的移動以達完成狀態，主題相當有趣。

作者將卡片進行編號以及利用"同型解"、"連號卡"的概念，有效地簡化了問題，是合理的策略。他引進了 K 值的概念（即奇或偶排列的概念），進行奇偶性的分析，再加上三種他所歸納出的基本變換，完整說明任何一種起始牌卡最多只需要移動 17 個步驟完成遊戲，是相當不錯的結果。

此外，作者也針對不同張牌卡的情況有所討論。他所使用方法很有策略性也很具推廣性，整體而言，這是一件很優秀的作品。

作品海報

壹~研究動機

老師送我一個看似簡單的**個人桌遊卡---flat cube**，這幾張牌卡的移動組合，有時幾個步驟輕輕鬆鬆解決，有時卻讓我卡關好久仍然不能解決，這讓我產生想去研究如何完成它的想法，也想知道是否所有的牌卡情形都能有辦法排出答案？於是我上網想要尋找解答，找到了第 55 屆嘉義縣國中組數學科作品：「平面魔術方塊-移位遊戲昇級版」，是討論這款桌遊，不過作品的結論及解法並不完整，且步驟相當繁複。因此，我想要進一步找到一套完整且容易操作的解法來破解這款桌遊。

貳~研究目的與問題

我想要找到一套完整且容易操作的方法來破解這款桌遊，因此我提出以下的研究問題：

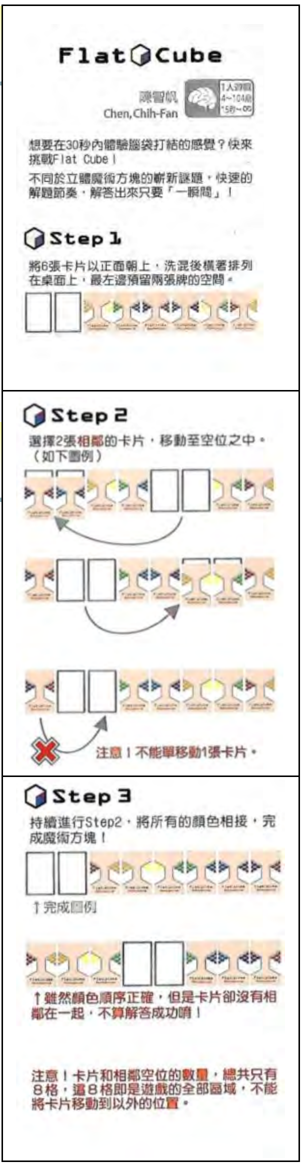
(一) 如何決定完成狀態的首張卡是哪個號碼？

(二) 是否有哪些操作步驟可以重複使用，並簡化整體的操作步驟？

(三) 是否有固定的牌卡類型，可透過固定的操作步驟完成此桌遊？

(四) 能否找到一套 SOP 來完成此遊戲？

(五) 若改變此款桌遊的牌卡張數，維持原遊戲規則，解法上又有何不同？

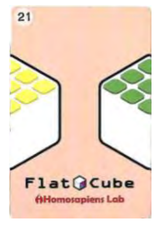
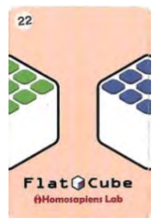
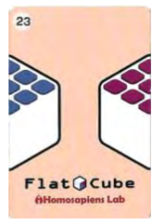
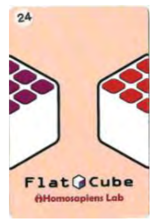
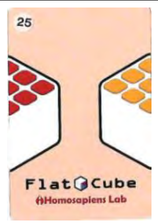
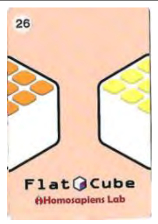


參~遊戲介紹

(一)遊戲規則　遊戲說明書中的規定及玩法過程的舉例，整理如右：

(二)卡片編碼

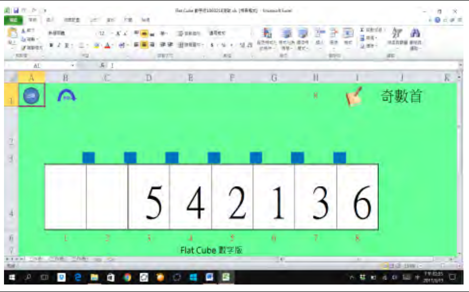
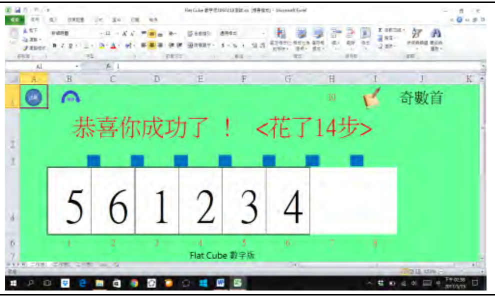
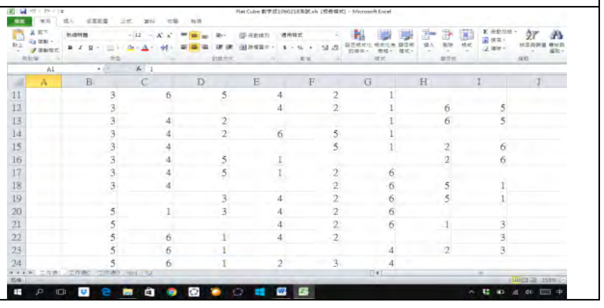
原來的遊戲是以相鄰兩張卡片連接邊上的顏色相同作為完成的依據，同時我將 6 張卡片進行編號(如下)

卡片						
編號	1	2	3	4	5	6

若將卡片依照 123456 排成一列，就是一種完成狀態；如果將 6 號卡從最右邊移到最左邊，讓卡片依照 612345 排成一列，仍然會是符合遊戲規則的完成狀態，也就是說**卡片經過編號後，我可以找到六種卡片的完成狀態**，分別為：**123456、234561、345612、456123、561234、612345**。

(三)利用電腦程式輔助

為了讓討論的過程正確性提高，且能有效記錄全部的操作過程，我將想法告訴指導老師，指導老師利用 EXCEL 寫了一個電腦程式，可以亂數出題，也可以用來判斷完成狀態過程及所需步數，擷錄操作畫面如下。

出題畫面(電腦可亂數出題)	完成畫面(可顯示操作步數)	紀錄操作過程
		

肆~研究過程

(一)利用同型解簡化問題

因為<u>每次都必須移動 2 張卡</u>，我可以將 **123456 重新排成 345612 及 561234**。我將這三種完成狀態視為同型解。

同樣的道理，**234561、456123 及 612345 三種完成狀態也是同型解**，因此，<u>**這組卡片的完成狀態共有 2 組同型解**</u>。

(二)判斷奇數排首或是偶數排首

同一組同型解的開頭卡片號碼的奇偶性都一樣(例如：123456、345612 及 561234 都是奇數開頭；234561、456123 及 612345 都是偶數開頭)。<u>**找到決定開頭卡片號碼為奇數或是偶數的方法是重要的**</u>。

1.定義 K 值作為判斷奇數排首與偶數排首的依據

(1)將每張卡皆與在其右邊的所有卡片進行大小關係的比較，若此卡數字大於右邊卡的數字，則以 1 表示，若此卡數字小於右邊卡的數字，則以 0 表示。

(2)將步驟(1)比較所得的數字累計加總，會得到數值 K。

(3)說明：若起始卡片狀態為：

3	2	1	4	6	5	X	X

K 值為 0							
1	2	3	4	5	6	X	X

K 值為：5+4+3+2+1=15							
6	5	4	3	2	1	X	X

2.移動卡牌對 K 值的影響　　為了解卡牌移動時，K 值所受到的影響，我做了以下幾種情況的測試：

【例 1】此移動讓 4 號卡片的 K 值從 1 變成 0，5 號卡片的 K 值也從 1 變成 0，但是 6 號卡片的 K 值從 0 變成 2，因此 K 值沒有變化。

1	2	4	5	3	6	X	X

➡

1	2	X	X	3	6	4	5

【例 2】此移動對 1 號卡片的 K 值沒有影響，4 號卡片的 K 值從 1 變成 0，5 號卡片的 K 值從 1 變成 3，3 號卡片的 K 值從 0 變成 1，6 號卡片的 K 值從 0 變成 2，因此 K 值的變化為 3-1+2+1+2=7。

2	1	4	5	3	6	X	X

➡

2	X	X	5	3	6	1	4

【例 3】此移動讓 4 號卡片的 K 值從 1 變成 3，5 號卡片的 K 值從 1 變成 3，3 號卡片的 K 值從 0 變成 2，6 號卡片的 K 值從 0 變成 2，2 號卡片的 K 值沒有改變，仍為 1，因此 K 值的變化為 3+2+2+2+2=11。

2	1	4	5	3	6	X	X

➡

X	X	4	5	3	6	2	1

若被移動卡的右邊有 2 張卡，此卡的原 K 值可能為 0、1、2，移動後則會變成 2、1、0。

若被移動卡的右邊卡片數為 m，

被移動卡的原 K 值以 k_A 表示，

新 K 值以 k_A' 表示：

因為 $k_A+k_A'=m$，$k_B+k_B'=m$，所以 $k_A'=m-k_A$，$k_B'=m-k_B$

$$\left(k_A'+k_B'\right)-\left(k_A+k_B\right)=\left(m-k_A+m-k_B\right)-\left(k_A+k_B\right)=2\left(m-k_A-k_B\right)，$$

可發現，<u>**原來的 K 值與新的 K 值差皆為偶數**</u>。

每次移動 2 張卡牌，所得到的 K 值差皆為偶數，

若原卡牌的 K 值為奇數， K 值的奇偶性並不會改變。

若原卡牌的 K 值為奇數，就是偶數卡排首

最後的完成排法必為 234561 或 456123 或 612345

若原卡牌的 K 值為偶數，就是奇數卡排首

最後的完成排法必為 123456 或 345612 或 561234。

伍~研究結果

6 張卡(偶數牌卡)

計算 K 值

K 偶數 → 奇數排首

K 奇數 → 偶數排首

階段一
尋找或製造首 2 張連號卡

可能排成
12○○○○
34○○○○
56○○○○

可能排成
23○○○○
45○○○○
61○○○○

階段二
將 4 張餘卡利用 R、E、S 變換
排成簡化類型

12 連號卡的情形

4 張餘卡(3、4、5、6)任意排列，共 24 種

利用 3 **種基本變換，歸類成 6 種餘卡情形**

類型	K 值	首卡奇偶性	與排首吻合
A：123645	0	奇	是
B：123654	3	偶	否
C：123546	1	偶	否
D：123564	2	奇	是
E：123456	0	奇	是
F：123465	1	偶	否

23 連號卡的情形

4 張餘卡(1、4、5、6)任意排列，共 24 種

利用 3 **種基本變換，歸類成 6 種餘卡情形**

類型	K 值	首卡奇偶性	與排首吻合
A′：234561	5	偶	是
B′：234516	4	奇	否
C′：234651	6	奇	否
D′：234615	5	偶	是
E′：234156	3	偶	是
F′：234165	4	奇	否

階段三
利用簡化類型的 7 步解法完成排列

A 類：123645 的解法

首卡調整為 5 號卡，7 個步驟

1	2	3	6	4	5	X	X
X	X	3	6	4	5	1	2
5	1	3	6	4	X	X	2
5	X	X	6	4	1	3	2
5	6	4	X	X	1	3	2
5	6	4	1	3	X	X	2
5	6	X	X	3	4	1	2
5	6	1	2	3	4	X	X

A 類及 *E′* 類共同點－紅色的號碼卡只要往後移動 2 張卡，就是完成狀態。

***E′* 類：234156 的解法**

首卡調整為 6 號卡，7 個步驟

2	3	4	1	5	6	X	X
X	X	4	1	5	6	2	3
6	2	4	1	5	X	X	3
6	X	X	1	5	2	4	3
6	1	5	X	X	2	4	3
6	1	5	2	4	X	X	3
6	1	X	X	4	5	2	3
6	1	2	3	4	5	X	X

D 類：123564 的解法

首卡調整為 3 號卡，7 個步驟

1	2	3	5	6	4	X	X
1	2	X	X	6	4	3	5
X	X	1	2	6	4	3	5
3	5	1	2	6	4	X	X
3	X	X	2	6	4	5	1
3	4	5	2	6	X	X	1
3	4	5	X	X	2	6	1
3	4	5	6	1	2	X	X

D 類及 *D′* 類共同點－紅色的號碼卡只要往前移動 2 張卡，就是完成狀態。

***D′* 類：234615 的解法**

首卡調整為 4 號卡，7 個步驟

2	3	4	6	1	5	X	X
2	3	X	X	1	5	4	6
X	X	2	3	1	5	4	6
4	6	2	3	1	5	X	X
4	X	X	3	1	5	6	2
4	5	6	3	1	X	X	2
4	5	6	X	X	3	1	2
4	5	6	1	2	3	X	X

完成狀態

7 張卡(奇數牌卡)

計算 K 值

K 奇數 → 無解

K 偶數

階段一
尋找或製造首 4 張連號卡
最多 8 步

可能排成	
1234○○○	2345○○○
3456○○○	4567○○○
5671○○○	6712○○○
7123○○○	

類型	K 值	是否可完成
A：1234567	0	是
B：1234576	1	否
C：1234675	2	是
D：1234657	1	否
E：1234765	3	否
F：1234756	2	是

階段二
將 3 張餘卡排成簡化類型

C 類：1234675 的解法

1	2	3	4	6	7	5	X	X
1	2	3	4	X	X	5	6	7
1	2	X	X	3	4	5	6	7
X	X	1	2	3	4	5	6	7

F 類：1234756 的解法

1	2	3	4	7	5	6	X	X
1	2	X	X	7	5	6	3	4
1	2	5	6	7	X	X	3	4
X	X	5	6	7	1	2	3	4

完成狀態

完成狀態的分類：

1.牌卡數量為偶數時(6 張卡為例)：K 值奇偶性分兩大類同型解

第一類：123456、345612 及 561234，

第二類：234561、456123 及 612345。

2.牌卡數量為奇數時(7 張卡為例)：

各種完成狀態皆可在有限的操作步數下互相轉換。

標準解題流程：

1.牌卡數量為偶數時(6 張卡為例)：**共分三個階段**

任意起始牌卡經有限步數移動達完成狀態，**最多步數 17 步。**

2.牌卡數量為奇數時(7 張卡為例)：**共分二個階段**

任意起始牌卡經有限步數移動達完成狀態，**最多步數 11 步。**

※製造首兩張卡為連號卡的方法與步數

我發現，**製造連號卡排首需要耗費的步數介於 3 步到 6 步之間**

(1)從給定的卡片狀況來選定連號卡為何

例子：給定卡片狀況為：562413，利用 K 值判斷可知為偶數排首(K=11)

(a)排成 23 連號，需 6 步。　(b)排成 45 連號，需 3 步。

(c)排成 61 連號，需 3 步。

(2)討論排成連號卡所需耗費的最少步數之最大值

(a)給定排卡已有符合奇數排首或偶數排首的連號卡---完成步數在 1~3 步之間

(b)給定排卡情況沒有符合奇數排首或偶數排首的連號卡---

想要在首兩張卡排成連號卡，需要耗費的最少步數之最大值為 5 步。

※7 張卡完成狀態同型解－

7 種完成狀態的 K 值皆為偶數，每次移動 2 張牌卡，牌卡的 K 值變化必為偶數。**7 種完成狀態可以互相轉換且可視為同一種 1234567**

1234567 轉 2345671

X	X	1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	X	X	4	5	6	7
2	3	1	6	7	4	5	X	X
2	3	X	X	7	4	5	1	6
2	3	4	5	7	X	X	1	6
2	3	4	5	7	1	6	X	X
2	3	4	5	X	X	6	7	1
2	3	X	X	4	5	6	7	1
X	X	2	3	4	5	6	7	1

1234567 轉 3456712

X	X	1	2	3	4	5	6	7
3	4	1	2	X	X	5	6	7
3	4	X	X	1	2	5	6	7
3	4	6	7	1	2	5	X	X
3	4	6	X	X	2	5	7	1
3	4	6	2	5	X	X	7	1
3	4	X	X	5	6	2	7	1
3	4	5	6	X	X	2	7	1
3	4	5	6	7	1	2	X	X

※利用連號卡簡化討論過程－基本變換

當卡片只剩四張，搭配兩個空格，有 3 種卡片位置的基本變換

(1)倒序排法(Return：以 R 代表)

此操作可產生 **abcd→dcba**

a	b	c	d	×	×
×	×	c	d	a	b
d	a	c	×	×	b
d	×	×	a	c	b
d	c	b	a	×	×

(2)兩組相鄰卡交換排法(Exchange：以 E 代表)

此操作可產生 **abcd→cdab** 的效果

a	b	c	d	×	×
×	×	c	d	a	b
c	d	×	×	a	b
c	d	a	b	×	×

(3)兩組相鄰卡對調排法(Swap：以 S 代表)

此操作可產生 **abcd→badc** 的效果

a	b	c	d	×	×
a	×	×	d	b	c
a	d	b	×	×	c
×	×	b	a	d	c
b	a	×	×	d	c
b	a	d	c	×	×

陸~討論

◈是否可能產生單張卡對調的情形？ 如 123465→123456

我一開始本來想從單張卡的對調討論起，但是發現怎麼做都沒辦法完成。因為牌卡若為 123465，K 值為 1，依照前面的討論可知完成狀態必為偶數排首，所以不可能是 123456，因此**不可能不影響前四張卡 1234，單純將 65 對調成 56。**

◈為何要先排定首兩張卡連號卡，而不是前三張呢？

根據**嘉義縣國中數學組作品**，作者先將前三張卡排成連號，剩下的三張卡有符合作者設定的殘卡狀態就順利完成，但是遊戲的規則每次移動兩張卡，所以就算前三張卡是連號狀態，為了讓後三張卡順利完成，只能保持首兩張不動，第三張卡須與後三張配合才能讓卡片排成連號。且原作品並無法確定前三張是哪三張，必須不斷嘗試換連號卡，還必須搭配殘卡對照表，所以作品中並未提出一套容易操作的流程。如果**將我在前面所訂的 K 值算法及 4 張餘卡所形成的簡化類型用來解釋該作品，當前三張卡已經是連號卡時，以 123 連號為例，後三張卡依照所剩號碼排列的各種情形為：123456、123465、123546、123564、123645、123654。其中 123465、123546 及 123654 的 K 值為奇數，所以是偶數排首，不可能是 123 為前三張連號卡，因此刪除。而 123564 為簡化類型中的 D 類，123645 為簡化類型中的 A 類，使用 A、D 類的 7 步移動成完成狀態，並不需要不斷換前三張連號卡。**

◈每種牌卡情形的最少移動步數是多少？有固定的公式或解法嗎？

若有兩組連號卡，步數最多只要 11 步，若有一組連號卡，步數最多只要 13 步，若都沒有連號卡，依照三階段解題流程最多需要 17 步，可是在過程中可以視情況調整以減少步數。

我檢查了沒有連號卡的所有情形發現最多步數都會停留在 15 步以下，也就是說如果可以在移動牌卡的過程中，盡量節省使用的步數，不一定要每一階段都做到後才進行下一階段，操作步數是不需要 17 步的。

但並沒有一套方法或是公式可以從起始牌卡就判斷出最少移動步數。

兩組連號卡

X	X	1	2	6	3	4	5
4	5	1	2	6	3	X	X
4	5	X	X	6	3	1	2
4	5	6	3	X	X	1	2
4	5	6	3	1	2	X	X
X	X	6	3	1	2	4	5
2	4	6	3	1	X	X	5
2	X	X	3	1	4	6	5
2	3	1	X	X	4	6	5
2	3	1	4	6	X	X	5
2	3	X	X	6	1	4	5
2	3	4	5	6	1	X	X

一組連號卡

X	X	6	3	5	4	1	2
1	2	6	3	5	4	X	X
1	2	6	3	X	X	5	4
1	2	X	X	6	3	5	4
1	2	3	5	6	X	X	4
1	2	3	X	X	5	6	4
1	2	3	6	4	5	X	X
X	X	3	6	4	5	1	2
5	1	3	6	4	X	X	2
5	X	X	6	4	1	3	2
5	6	4	X	X	1	3	2
5	6	4	1	3	X	X	2
5	6	X	X	3	4	1	2
5	6	1	2	3	4	X	X

隨機調整解法

X	X	1	5	2	6	4	3
1	5	X	X	2	6	4	3
1	5	4	3	2	6	X	X
1	X	X	3	2	6	5	4
1	2	6	3	X	X	5	4
1	2	X	X	6	3	5	4
1	2	3	5	6	X	X	4
1	2	3	X	X	5	6	4
1	2	3	6	4	5	X	X
X	X	3	6	4	5	1	2
5	1	3	6	4	X	X	2
5	X	X	6	4	1	3	2
5	6	4	X	X	1	3	2
5	6	4	1	3	X	X	2
5	6	X	X	3	4	1	2
5	6	1	2	3	4	X	X

◈可利用牌卡號碼平移的方式進行排卡種類的簡化

牌卡：**××152643** 的解法，透過號碼平移 2 的方法，得到同為奇數排首的另兩種情形。將號碼平移 1 的話，會變成××263154，此時計算 K 值可知為偶排首，將××263154 的最少步數排法寫出來做對照發現，與號碼平移 2 的情況相同，同一列的排卡號碼，由左至右剛好每個對應位置的號碼都增加 1，可以將××263154 的結果再平移得到另兩組牌卡：××314265 及××425316 的解。也就是說，當我解出一組牌卡時，可以**透過號碼分別平移 1、2、3、4、5 來得到其他 5 種牌卡的解題過程，這樣可以將牌卡的所有需要討論情形從 720 種簡化為 120 種。**

X	X	1	5	2	6	4	3
5	2	1	X	X	6	4	3
5	X	X	2	1	6	4	3
5	6	4	2	1	X	X	3
5	6	X	X	1	4	2	3
5	6	1	4	X	X	2	3
5	6	1	4	2	3	X	X
X	X	1	4	2	3	5	6
3	5	1	4	2	X	X	6
3	X	X	4	2	5	1	6
3	4	2	X	X	5	1	6
3	4	2	5	1	X	X	6
3	4	X	X	1	2	5	6
3	4	5	6	1	2	X	X

X	X	3	1	4	2	6	5
1	4	3	X	X	2	6	5
1	X	X	4	3	2	6	5
1	2	6	4	3	X	X	5
1	2	X	X	3	6	4	5
1	2	3	6	X	X	4	5
1	2	3	6	4	5	X	X
X	X	3	6	4	5	1	2
5	1	3	6	4	X	X	2
5	X	X	6	4	1	3	2
5	6	4	X	X	1	3	2
5	6	4	1	3	X	X	2
5	6	X	X	3	4	1	2
5	6	1	2	3	4	X	X

X	X	5	3	6	4	2	1
3	6	5	X	X	4	2	1
3	X	X	6	5	4	2	1
3	4	2	6	4	X	X	1
3	4	X	X	5	2	6	1
3	4	5	2	X	X	6	1
3	4	5	2	6	1	X	X
X	X	5	2	6	1	3	4
1	3	5	2	6	X	X	4
1	X	X	2	6	3	5	4
1	2	6	X	X	3	5	4
1	2	6	3	5	X	X	4
1	2	X	X	5	6	3	4
1	2	3	4	5	6	X	X

X	X	2	6	3	1	5	4
6	3	2	X	X	1	5	4
6	X	X	3	2	1	5	4
6	1	5	3	2	X	X	4
6	1	X	X	2	5	3	4
6	1	2	5	X	X	3	4
6	1	2	5	3	4	X	X
X	X	2	5	3	4	6	1
4	6	2	5	3	X	X	1
4	X	X	5	3	6	2	1
4	5	3	X	X	6	2	1
4	5	3	6	2	X	X	1
4	5	X	X	2	3	6	1
4	5	6	1	2	3	X	X

◈N 張卡的 K 值一般化討論

我發現**牌卡數量為奇數時，K 值必為偶數，牌卡數量為偶數時，K 值則有一半的情形為奇數，一半的情形為偶數**。同型解的部分**(1)牌卡數量為奇數時，所有完成狀態都是同一種同型解，彼此間也可以在有限的步數內互相轉換。(2)牌卡數量為偶數時，完成狀態分為兩種同型解，分別為奇數首及偶數首，同一種同型解之間才能在有限的步數內互相轉換，兩種同型解之間則不可能互相轉換。**

柒~結論

一、透過 K 值可以判斷完成狀態的首卡奇偶性(偶數卡適用)及起始牌卡是否可解(奇數卡適用)，而且可以判斷從某種牌卡狀態是否能經過有限次移動變成另一種牌卡狀態。**當牌卡狀態的 K 值奇偶性相同，必可經有限次移動完成變換，若奇偶性不同，需改變首卡奇偶性才可以完成**。

二、牌卡張數的奇偶性會影響整體 K 值的奇偶性，因此牌卡為偶數張時恆有解，解的種類有 2 大類(奇數首及偶數首)；當牌卡數為奇數張時，K 值必須為偶數才可解，K 值為奇數則無解。

三、各種起始牌卡皆可使用標準解題流程：**偶數張牌卡(以 6 張卡為例)以三階段標準解題流程完成，最多只要 17 步。**

奇數張牌卡(以 7 張卡為例)以二階段標準解題流程完成，最多需要 11 步。

四、牌卡需要討論情形的簡化(以 6 張卡為例，720 種可簡化為 120 種)，**利用號碼平移 1、2、3、4、5 的方式**，在找到一組牌卡的最少步數後，一併找出其他組牌卡的最少步數。

五、**7 張卡及 6 張卡的操作過程可作為奇數張牌卡及偶數張牌卡的基本操作模型，隨著牌卡數增加，我只要不斷增加首卡連號數量即可，此兩種牌卡數之餘卡則固定為 3 張及 4 張。**

捌~參考資料

一、平面魔術方塊-移位遊戲升級版。王哲豪 陳睿諺 林宜聖。2015。第 55 屆嘉義縣國中組數學。

二、第六冊國小數學。奇數偶數。南一出版社。2016。

三、第八冊國小數學。圖形的規律。康軒出版社。2016。