中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080403

神奇的砝碼

學校名稱：臺北市士林區士東國民小學

作者：	指導老師：
小四 藍宇潔	張亞男 藍邦偉

關鍵詞：槓桿原理、等差數列、分割

摘要

本研究是將梅齊裏亞克的砝碼問題(The Weight Problem of Bachet de Meziriac)，由等臂天平延伸至不等臂天平。

若i、k、m與n皆為正整數。首先在等臂天平中，討論k磅砝碼摔成i塊其解是否存在？是否有唯一解？並試圖找出通解的一般式。使用列舉的試誤法，之後設計視覺直觀的數學實驗程式，找出數學式，歸納出解的一般式。發現可以使用變形三進位的方法來決定符合解的砝碼。接著將等臂天平延伸到$1:n$不等臂天平。在$1:n$不等臂天平中，先找出所有解的組合，再找出最常出現幾組的不可稱解的最大可稱磅數、規律、性質與一般式。最後希望可以利用$1:n$不等臂天平的不可稱一般式推廣到$m:n$不等臂天平中。

壹、研究動機

在升國小三年級的暑假裡，某日去圖書館準備暑假作業時，一篇科普讀物吸引了我，1624年德國數學家梅齊裏亞克的砝碼問題。它的大意是這樣：

> **一位商人有一個 40 磅的砝碼，由於跌落在地而碎成 4 塊。後來，稱得每塊碎片的重量都是整數的磅數，而且可以用等臂天平和這 4 塊砝碼來稱 1 磅至 40 磅之間的任意整數磅的重物。4 塊砝碼不一定要全部用完，而且砝碼可以放在天平的左邊或右邊。問這 4 塊砝碼碎片各重多少磅？**

這個題目看似簡單，但實際思考後卻覺得很有意思，不禁使我進一步思考：

一、若將砝碼改成k磅砝碼(k為正整數)，同時，碎成 4 塊的小砝碼，也改成i塊整數磅數的小砝碼，是否也可以用等臂天平來稱 1 至k磅之間的整數磅數的物品？

二、進一步延伸將天平也改為$1:n$的不等臂天平，其結果又如何(n為大於 1 的正整數)？

三、甚至能否將$1:n$不等臂天平也推廣到$m:n$不等臂天平呢（m與n為大於 1 且互質的正整數）？

想到這裡，更激起我對這個問題的好奇心，剛好國小數學課本有提到正整數的四則運算，因此，想以此為基礎來進行這個研究。

貳、研究目的及問題

在本研究中，i與k皆為正整數，m與n為大於 1 且互質的正整數且$m<n$。一個k磅的砝碼，碎成i塊的小砝碼，待測物品可以放在天平的任一側，砝碼可以不全使用，且可以任意放在天平的兩側。並利用等臂天平來探討能否稱 1 至k磅之間的整數磅數的物品；再討論k磅砝碼分成 4 塊在$1:n$不等臂天平中與$m:n$不等臂天平中能否稱 1 至k磅之間的整數磅數的物品，並延伸討論。

一、名詞解釋與定義：

(一) $1:1$**可稱**：

一個k磅的砝碼碎成i塊小砝碼，若能利用等臂天平稱出 1 **磅至k磅之間的整數磅數**的物品，則稱$1:1$可稱，又稱等臂可稱。

(二) $1:n$**可稱**：

一個k磅的砝碼碎成i塊小砝碼，若能利用$1:n$不等臂天平稱出 1 **磅至k磅之間的整數磅數**的物品，則稱這個k磅的砝碼分成i塊小砝碼為$1:n$可稱。

(三) $m:n$**可稱**：

一個k磅的砝碼碎成i塊小砝碼，若能利用$m:n$不等臂天平稱出 **1 磅至k磅之間的整數磅數**的物品，則稱這個k磅的砝碼分成i塊小砝碼為$m:n$可稱。

(四) **可稱解：**

在$1:n$**可稱**與$m:n$**可稱**中，一個k磅的砝碼碎成i塊的小砝碼，所有可以稱出的磅數，稱為可稱解。

(五) **不可稱解：**

一個k磅砝碼，在$1:n$**可稱**與$m:n$**可稱**中**，**大於k磅到最大可稱磅數之間無法稱出的重量，稱為不可稱解。作者定義不可稱解的目的是：將最大可稱磅數扣除不可稱解，就可以得到所有的可稱解，也就是那些磅數是可以稱出。

二、研究問題：

起初我覺得題目有點難以下手，所以我簡化題目，先討論在等臂天平中砝碼沒破，摔成兩塊、三塊與四塊的情形。再考慮$1:n$不等臂天平與$m:n$不等臂天平摔成四塊的情形。以下是作者的**研究問題**：

(一) 在等臂天平中：

1. k磅的砝碼分成 1 塊、2 塊、3 塊、4 塊是否可稱？
2. k磅的砝碼分成i塊是否可稱？其一般式為何？

(二) 在不等臂天平中：

1. 在$1:n$不等臂天平與$m:n$不等臂天平中，k磅的砝碼分成 4 塊是否可稱？
2. 在$1:n$不等臂天平中，可稱解存在時，n的最大值為何？最大可稱磅數為何？
3. 求出$1:n$不等臂天平中不可稱解的一般式。
4. 找出$m:n$可稱與$1:n$可稱的關係。

因為這件專題的數據資料很多，因為有做出很多新的結果，所以作者將詳細資料放在實驗手冊中，說明書上只放整理出的表格。

參、研究設備及器材

紙、筆、白板、立可貼、筆記型電腦、動態幾何軟體 GeoGebra、Excel。

肆、研究過程或方法

一、研究流程

圖 1 是作者的研究流程圖：

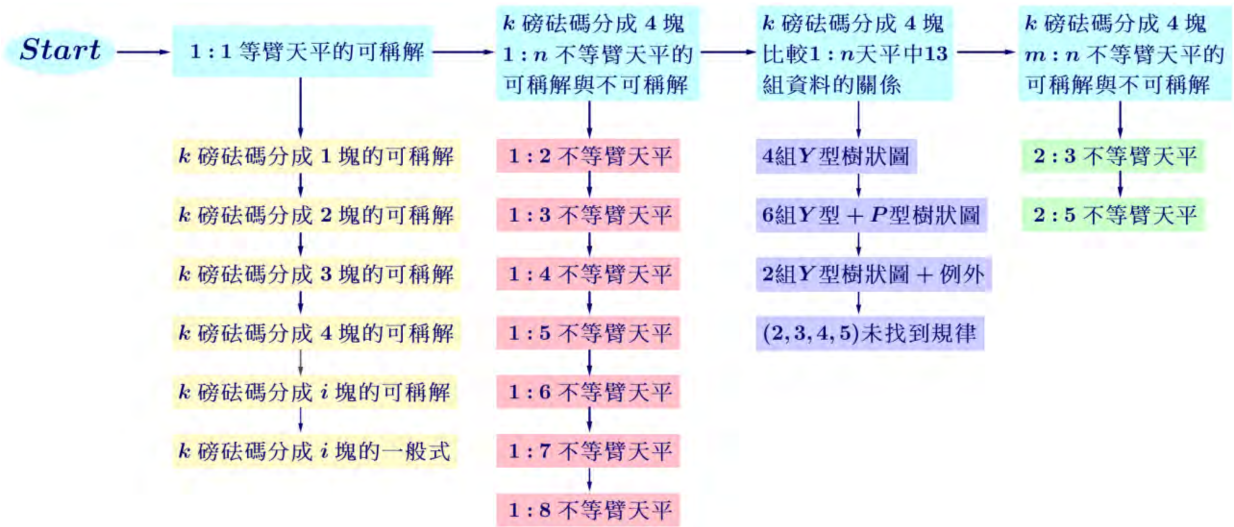


圖 1 ：研究流程圖

二、k磅砝碼分成 1 塊：

很明顯砝碼掉在地上都沒碎，這一塊砝碼當然只能秤k磅，僅有$k=1$時，合於所求。

三、k磅砝碼分成 2 塊：

將砝碼分成 2 塊且其重量分別為a、b磅，因為了討論時不重複，作者假設$a \le b$，且以數對(a,b)表示某次兩塊砝碼的重量。

(一) 如果砝碼重 2 磅，只有(1,1)一組可稱解；

(二) 如果砝碼重 3 磅，只有(1,2)一組可稱解；

(三) 如果砝碼重 4 磅，有(1,3)和(2,2)兩組解，但只有(1,3)一組可稱解；

(四) 如果砝碼重 5 磅，作者發現一定要有 1 磅，才能稱出 4 磅，但是如果砝碼有一塊是 1 磅，那另一塊必為 4 磅，這樣稱不出 2 磅，所以作者猜測在這種情況下，大於 4 磅的重量很明顯稱不出來。

(五) 而由 2 磅到 5 磅的情形觀察，滿足的解分別如表 1 所示：

表 1：砝碼分成 3 塊情形

磅數	2	3	4	≥5
解	(1,1)	(1,2)	(1,3)	無解

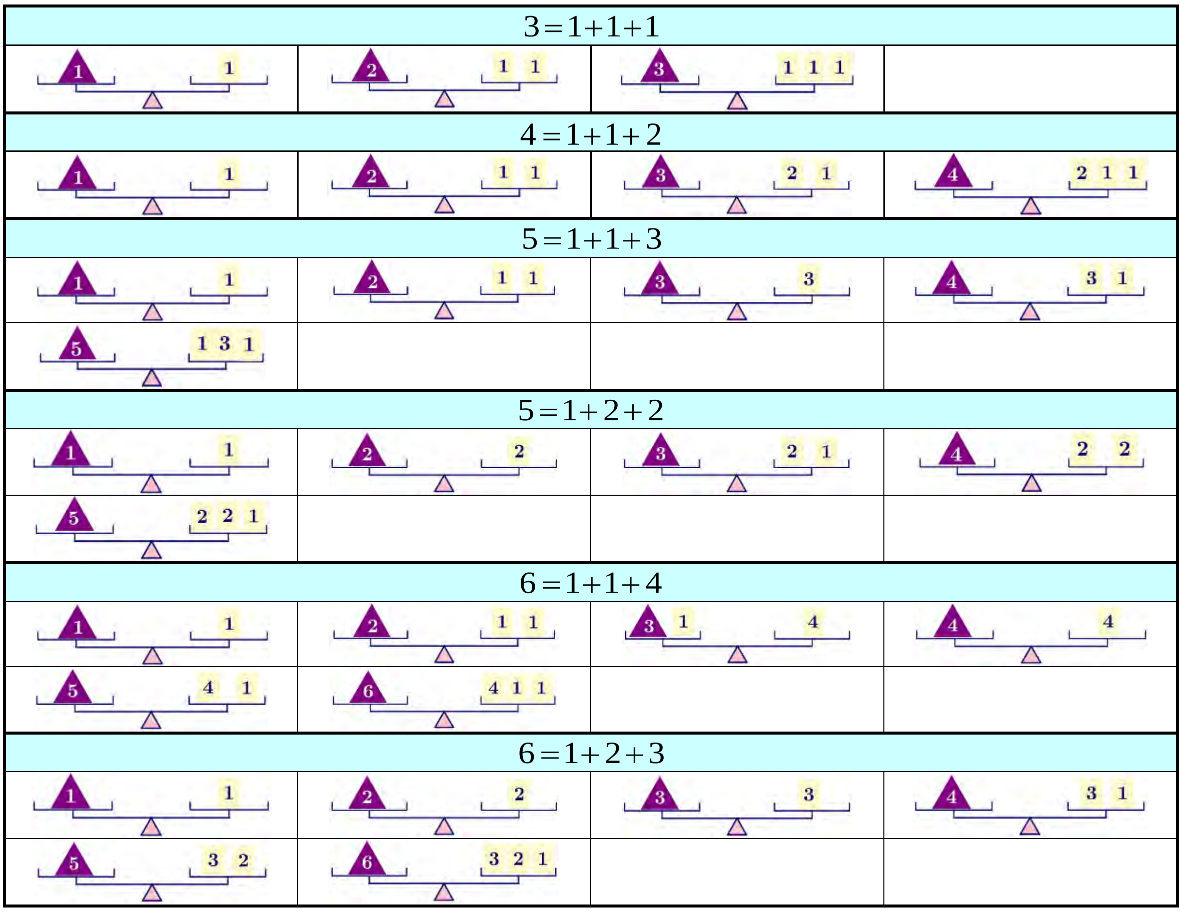
四、 k 磅砝碼分成 3 塊：

砝碼分成 3 塊比較複雜，而且作者不知道是否可稱，作者簡化題目，先討論將砝碼分成 3 塊且其重量分別為 a 、 b 、 c 磅，且為了討論時不重複，假設 $a \leq b \leq c$ ，以數對 (a,b,c) 表示某次三塊砝碼的重量。

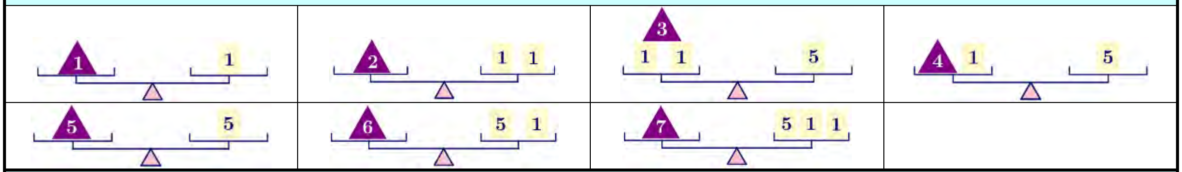
(一) 大於 2 磅的砝碼分成 3 塊是否可稱

如表 2 所示，等臂天平中，紫色三角形表待測物品的重量，黃色矩形代表砝碼。

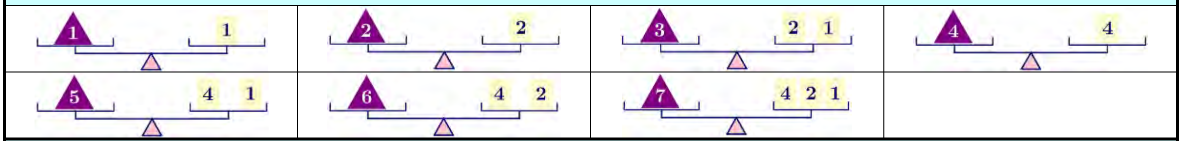
表 2：滿足 k 磅砝碼分成 3 塊



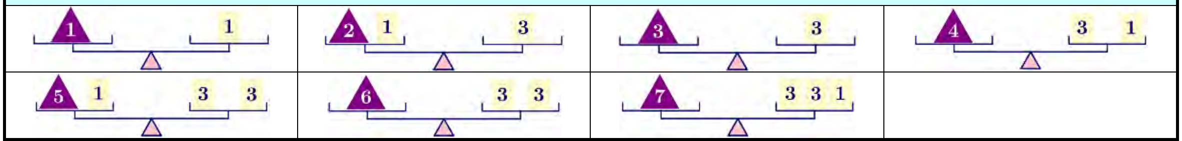
7 = 1 + 1 + 5



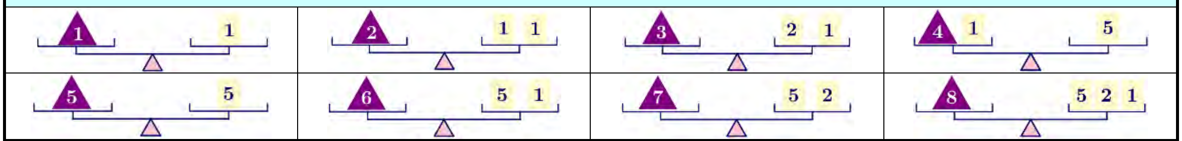
7 = 1 + 2 + 4



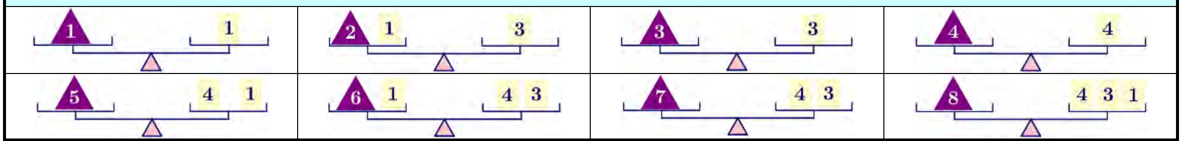
7 = 1 + 3 + 3



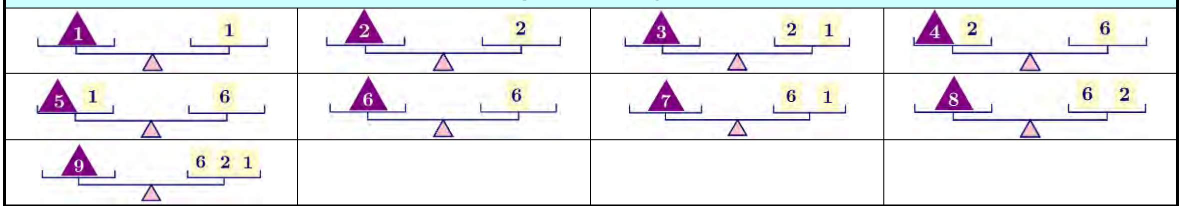
8 = 1 + 2 + 5



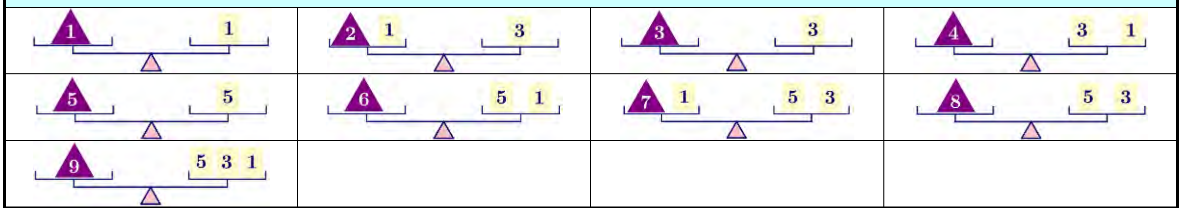
8 = 1 + 3 + 4



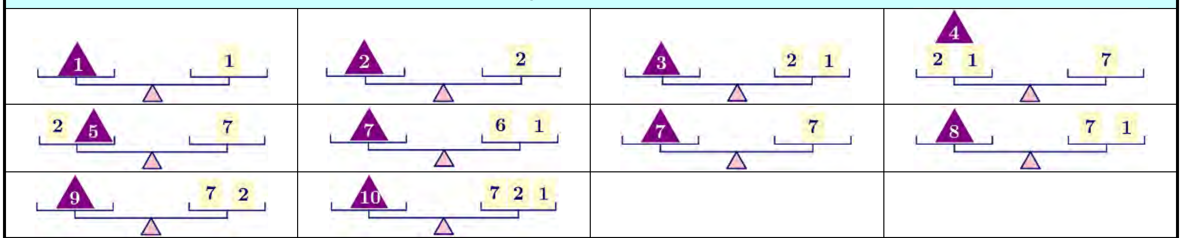
9 = 1 + 2 + 6



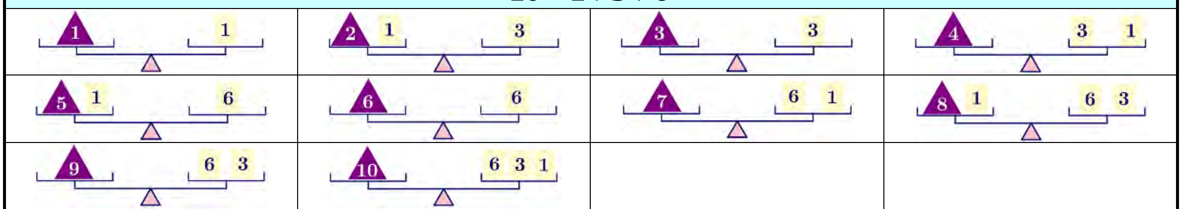
9 = 1 + 3 + 5



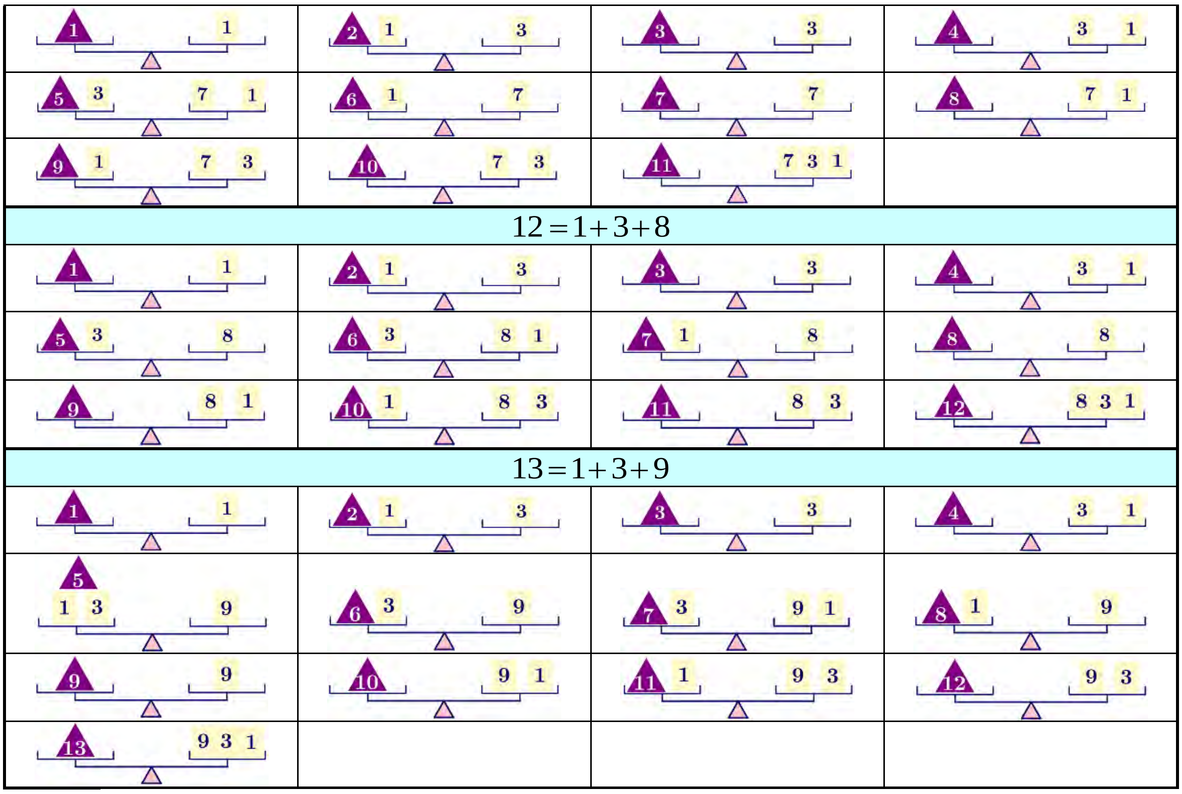
10 = 1 + 2 + 7



10 = 1 + 3 + 6



11 = 1 + 3 + 7



以列舉法將 14 磅的砝碼分成 3 塊，共有以下 16 組：(1,1,12)、(1,2,11)、(1,3,10)、(1,4,9)、(1,5,8)、(1,6,7)、(2,2,10)、(2,3,9)、(2,4,8)、(2,5,7)、(2,6,6)、(3,3,8)、(3,4,7)、(3,5,6)、(4,4,6)與(4,5,5)，沒有一組為可稱解。所以我如果原先砝碼重量大於 13 磅，則沒有可稱解。而由 3 磅到 13 磅的情形觀察可稱解的情形，如表 3 所示：

表 3：滿足 k 磅砝碼分成 3 塊

磅數	3	4	5	6	7	8
解	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,1,3) (1,2,2)	(1,1,4) (1,2,3)	(1,1,5) (1,2,4) (1,3,3)	(1,2,5) (1,3,4)
磅數	9	10	11	12	13	≥ 14
解	(1,2,6) (1,3,5)	(1,2,7) (1,3,6)	(1,3,7)	(1,3,8)	(1,3,9)	無解

觀察以上可稱解 (a,b,c) 的特性，我發現以下情形：

1. 每一組都至少有一個 1 磅；有 1 磅的目的是為了表示 $k-1$ 磅
2. 待測磅數為 3 至 7 磅時，每組都有兩個 1 磅
3. 待測磅數為 4 至 10 磅時，每組都有 1 磅和 2 磅
4. 待測磅數為 5 至 13 磅時，每組都有 1 磅和 3 磅

(二) k 磅的砝碼分成 3 塊是否有解

很明顯當砝碼總重很大時，例如 $k=100$ 磅，根據前面的經驗，滿足的解一定

有 1、1 或 1、2、或 1、3 在其中。也就是說$(1,1,98)$ 、$(1,2,97)$ 或$(1,3,96)$是作者可能要找的解，當然這三組解無法測得所有重量。也就是說當 k 為大於 13 的正整數時，若 x 為正整數，作者討論下列三種情形：

1. 設 k 可以分為$(1,1,x)$ ：1 和 1 可以表示 1、2 磅，故 $x-2$ 要可以表成 3，也就是說 $x=5$ ，此時 $k=1+1+5=7$ 。
2. 設 k 可以分為$(1,2,x')$：1 和 2 可以表示 1、2、3 磅，故 $x'-3$要可以表成 4，也就是說 $x'=7$ ，此時 $k=1+2+7=10$ 。
3. 設 k 可以分為$(1,3,x'')$ ：1 和 3 可以表示 1、2、3、4 磅，故 $x''-4$ 要可以表成 5，也就是說 $x''=9$ ，此時 $k=1+3+9=13$。

所以分成三塊砝碼的上限為 13 磅。

五、 k 磅的砝碼分成 4 塊：

表 4 是 k 磅砝碼分成 4 塊的可稱解，由表 4 知相同磅數的可稱解不一定是唯一解。

表 4： k 磅砝碼分成 4 塊的可稱解 1

4=1+1+1+1	5=1+1+1+2	6=1+1+1+3	6=1+1+2+2	7=1+1+1+4
7=1+1+2+3	7=1+2+2+2	8=1+1+2+4	8=1+1+3+3	9=1+1+2+5
9=1+1+3+4	9=1+2+2+4	9=1+1+2+5	10=1+1+2+6	10=1+1+3+5
10=1+1+4+4	10=1+2+2+5	10=1+2+3+4	11=1+1+2+7	11=1+1+3+6
11=1+1+4+5	11=1+2+2+6	11=1+2+3+5	11=1+2+4+4	12=1+1+2+8
12=1+1+3+7	12=1+1+4+6	12=1+1+5+5	12=1+2+2+7	12=1+2+3+6
12=1+2+4+5	12=1+3+3+5	12=1+3+4+4	13=1+1+2+9	13=1+1+3+8
13=1+1+4+7	13=1+1+5+6	13=1+2+2+8	13=1+2+3+7	13=1+2+4+6
13=1+2+5+5	13=1+3+3+6	13=1+3+4+5	14=1+1+3+9	14=1+1+4+8
14=1+1+5+7	14=1+2+2+9	14=1+2+3+8	14=1+2+4+7	14=1+2+5+6
14=1+3+3+7	14=1+3+4+6	14=1+3+5+5	15=1+1+3+10	15=1+1+4+9
15=1+1+5+8	15=1+2+2+10	15=1+2+3+9	15=1+2+4+8	15=1+2+5+7
15=1+2+6+6	15=1+3+3+8	15=1+3+4+7	15=1+3+5+6	16=1+1+3+11
16=1+1+4+10	16=1+1+5+9	16=1+2+2+11	16=1+2+3+10	16=1+2+4+9
16=1+2+5+8	16=1+2+6+7	16=1+3+3+9	16=1+3+4+8	16=1+3+5+7
16=1+3+6+6	17=1+1+4+11	17=1+1+5+10	17=1+2+3+11	17=1+2+4+10
17=1+2+5+9	17=1+2+6+8	17=1+2+7+7	17=1+3+3+10	17=1+3+4+9
17=1+3+5+8	17=1+3+6+7	18=1+1+4+12	18=1+1+5+11	18=1+2+3+12
18=1+2+4+11	18=1+2+5+10	18=1+2+6+9	18=1+2+7+8	18=1+3+3+11
18=1+3+4+10	18=1+3+5+9	18=1+3+6+8	18=1+3+7+7	19=1+1+4+13
19=1+1+5+12	19=1+2+3+13	19=1+2+4+12	19=1+2+5+11	19=1+2+6+10
19=1+2+7+9	19=1+3+3+12	19=1+3+4+11	19=1+3+5+10	19=1+3+6+9
19=1+3+7+8	20=1+1+5+13	20=1+2+4+13	20=1+2+5+12	20=1+2+6+11
20=1+2+7+10	20=1+3+3+13	20=1+3+4+12	20=1+3+5+11	20=1+3+6+10
20=1+3+7+9	20=1+3+8+8	21=1+1+5+14	21=1+2+4+14	21=1+2+5+13
21=1+2+6+12	21=1+2+7+11	21=1+3+3+14	21=1+3+4+13	21=1+3+5+12
21=1+3+6+11	21=1+3+7+10	21=1+3+8+9	22=1+1+5+15	22=1+2+4+15
22=1+2+5+14	22=1+2+6+13	22=1+2+7+12	22=1+3+3+15	22=1+3+4+14

22＝1+3+5+13	22＝1+3+6+12	22＝1+3+7+11	22＝1+3+8+10	22＝1+3+9+9
23＝1+2+5+15	23＝1+2+6+14	23＝1+2+7+13	23＝1+3+4+15	23＝1+3+5+14
23＝1+3+6+13	23＝1+3+7+12	23＝1+3+8+11	24＝1+2+5+16	24＝1+2+6+15
24＝1+2+7+14	24＝1+3+4+16	24＝1+3+5+15	24＝1+3+6+14	24＝1+3+7+13
24＝1+3+8+12	24＝1+3+9+11	25＝1+2+5+17	25＝1+2+6+16	25＝1+2+7+15
25＝1+3+4+17	25＝1+3+5+16	25＝1+3+6+15	25＝1+3+7+14	25＝1+3+8+13
25＝1+3+9+12	26＝1+2+6+17	26＝1+2+7+16	26＝1+3+5+17	26＝1+3+6+16
26＝1+3+7+15	26＝1+3+8+14	26＝1+3+9+13	27＝1+2+6+18	27＝1+2+7+17
27＝1+3+5+18	27＝1+3+6+17	27＝1+3+7+16	27＝1+3+8+15	27＝1+3+9+14
28＝1+2+6+19	28＝1+2+7+18	28＝1+3+5+19	28＝1+3+6+18	28＝1+3+7+17
28＝1+3+8+16	28＝1+3+9+15	29＝1+2+7+19	29＝1+3+6+19	29＝1+3+7+18
29＝1+3+8+17	29＝1+3+9+16	30＝1+2+7+20	30＝1+3+6+20	30＝1+3+7+19
30＝1+3+8+18	30＝1+3+9+17	31＝1+2+7+21	31＝1+3+6+21	31＝1+3+7+20
31＝1+3+8+19	31＝1+3+9+18	32＝1+3+7+21	32＝1+3+8+20	32＝1+3+9+19
33＝1+3+7+22	33＝1+3+8+21	33＝1+3+9+20	34＝1+3+7+23	34＝1+3+8+22
34＝1+3+9+21	35＝1+3+8+23	35＝1+3+9+22	36＝1+3+8+24	36＝1+3+9+23
37＝1+3+8+25	37＝1+3+9+24	38＝1+3+9+25	39＝1+3+9+26	40＝1+3+9+27

將 k 磅的砝碼分成 4 塊且其重量分別為 a 、 b 、 c 、 d 磅，為了討論時不重複，假設 $a \le b \le c \le d$ ，且以數對 (a,b,c,d) 表示某次四塊砝碼的重量。根據前面砝碼分成 3 塊的經驗，數對中 (a,b) 必為 $(1,1)$ 、$(1,2)$ 或 $(1,3)$。但是作者要找最大的待測重量，所以作者解一定是 $(1,3,x,y)$ ，其中 $x \le y$ ，討論如下：設 k 可以分為 $(1,3,x,y)$ ：1 和 3 可以表示 1、2、3、4 磅，此時取 $x=9$；1、3 和 9 可以表示 1 到 13 磅，故 $1,3,9,y$ 要可以表成 14，也就是說 $y=27$ ，即 $1+3+9+27=40$ 。所以分成四塊砝碼的上限為 40 磅。也就是當 $k \le 40$ ，若 k 磅砝碼摔成四塊之重量為 1、3、9、 $k-13$ 磅，則此四塊砝碼必可稱出 1 磅到 k 磅之間所有整數的重量。

(一) 解原題：40 磅的砝碼分成 4 塊 $(1,3,x,y)$ ：

以列舉法將 40 磅的砝碼分成 4 塊 $(1,3,x,y)$ ，共有以下 16 組：

(1,3,3,33)、(1,3,4,32)、(1,3,5,31)、(1,3,6,30)、(1,3,7,29)、(1,3,8,28)、(1,3,9,27)、(1,3,10,26)、(1,3,11,25)、(1,3,12,24)、(1,3,13,23)、(1,3,14,22)、(1,3,15,21)、(1,3,16,20)、(1,3,17,19)與(1,3,18,18)。其中(1,3,9,27) 為可稱解，其餘皆不合。作者以 x 表待測物品的重量，將表 4 整理成圖 2。

$x=1$	$x+1=9+3$	$x+9=27+3$	$x=27+3+1$
$x+1=3$	$x=9+3$	$x+9=27+3+1$	$x+3+1=27+9$
$x=3$	$x=9+3+1$	$x+3+1=27$	$x+3=27+9$
$x=3+1$	$x+9+3+1=27$	$x+3=27$	$x+3=27+9+1$
$x+1+3=9$	$x+9+3=27$	$x+3=27+1$	$x+1=27+9$
$x+3=9$	$x+9+3=27+1$	$x+1=27$	$x=27+9$
$x+3=9+1$	$x+9+1=27$	$x=27$	$x=27+9+1$
$x+1=9$	$x+9=27$	$x=27+1$	$x+1=27+9+3$
$x=9$	$x+9=27+1$	$x+1=27+3$	$x=27+9+3$
$x=9+1$	$x+9+1=27+3$	$x=27+3$	$x=27+9+3+1$

圖 2：滿足 40 磅砝碼分成 4 塊

(二) k 磅的砝碼分成 i 塊是否可稱：

綜合以上討論，k 磅的砝碼分成 1、2、3、4 塊中，我們將最大可稱磅數整理成表 5。當 k 磅的砝碼分成 i 塊時，其最大可稱磅數的分法為 $(1,3,3^2,3^3,...,3^{i-1})$ ，其總磅數為 $1+3+3^2+3^3+...+3^{i-1}$ 。也就是說：

1. 當 $k \le 3^0+3^1=4$ ：

   若 k 磅的砝碼分成 2 塊為可稱；此時砝碼重量為 1 磅與 $k-1$ 磅。

2. 當 $k \le 3^0+3^1+3^2=13$ ：

   若 k 磅的砝碼分成 3 塊為可稱；此時砝碼重量為 1 磅、3 磅與 $k-4$ 磅。

3. 當 $k \le 3^0+3^1+3^2+3^3=40$ ：

   若 k 磅的砝碼分成 4 塊為可稱；此時砝碼重量為 1 磅、3 磅、9 磅與 $k-13$ 磅。

4. 當 $k \le 1+3+3^2+...+3^{i-1}$ ：

   若 k 磅的砝碼分成 i 塊為可稱；此時砝碼重量為 1 磅、3 磅、3^2 磅、...、3^{i-2} 磅與 $k-(1+3+3^2+...+3^{i-2})$ 磅。

表 5： k 磅的砝碼分成 i 塊討論表

分成塊數(i)	1	2	3	4
分法	(1)	$(1,3^1)$	$(1,3^1,3^2)$	$(1,3^1,3^2,3^3)$
最大可稱磅數(k)	1	4	13	40

七、使用三進位來找其中一組可稱解

(一) 為什麼用三進位

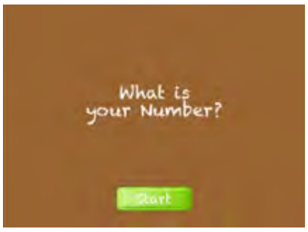


圖 3：Ur Number

在某次討論中，作者發現在 App Store 一個數學小遊戲－「Ur Number」，如圖 3，後來打聽到這個遊戲是國立臺灣師範大學數學系郭君逸教授 2016 年的作品，這是一個翻卡片猜數字的遊戲，郭教授說這個遊戲有兩個狀態，就是「有」跟「沒有」，就是使用二進位。事實上很多拈(Nim)的遊戲是使用二進位法或費柏那西數列。遊戲規則是，猜數者從 0 到 15 這 16 個非負整數中任選一個數，電腦每次顯示 8 個數字，猜數者對於自己所選的數字是否在這 8 個數字中，只要回答「有」跟「沒有」。如此之下，進行四次，電腦共猜四次後，即可以得到答案。因為電腦

每次顯示 8 個數字，而這 8 個數字轉換成二進位，則第一次出現的 8 個數字二進位的最右邊的數字都是 1，第二次的 8 個數字二進位的右邊第二個數字都是 1，以此類推。所以只要知道有沒有在該次選牌中，作者可以輕鬆得到答案。而在作者的研究中，砝碼與等臂天平有三個狀態，也就是說對某個砝碼而言，可以加在等臂天平的左邊、右邊或不用該砝碼。以上面 $100_{(10)}$ 磅的砝碼為例，作者如果將 100 表示成只用 $-1,0,1$ 的型式：

$$\begin{aligned}100 &= 1\times 3^4+0\times 3^3+2\times 3^2+0\times 3^1+1\times 3^0\\ &= 1\times 3^4+0\times 3^3+(3-1)\times 3^2+0\times 3^1+1\times 3^0\\ &= 1\times 3^4+1\times 3^3-1\times 3^2+0\times 3^1+1\times 3^0\end{aligned}$$

也就是在等臂天平的左邊放上式藍色的 81、27、1 磅的砝碼，右邊放待測的 100 磅與上式紅色的 9 磅砝碼。$81+27+1=109=100+9$ 就可以測出 100 磅。所以作者可以將所有的狀態都轉為三進位。

(二) k 磅的砝碼分成 i 塊的一種三進位解

作者目前想找到其中一種可稱解的對應方式。作者發現只要將砝碼轉成 3 進位，並將 2 調整成 $3-1$，就可以直接找到待測重量與對應砝碼的關係。也就是說，當 k 磅的砝碼分成 i 塊時，若 $k\le 1+3+3^2+\ldots+3^{i-1}$，此時必為可稱；且其中一組解的重量為 1 磅、3 磅、3^2 磅、...、3^{i-2} 與 $k-(1+3+3^2+\ldots+3^{i-2})$ 磅。當時，把 $k_{(10)}$ 調整成三進位，$k_{(10)}=a_i\times 3^i+a_{i-1}\times 3^{i-1}+\ldots+a_1\times 3^1+a_0\times 3^0=a_ia_{i-1}a_{i-2}\ldots a_1a_{0(3)}$，其中 $a_0,a_1,\ldots,a_{i-1},a_i$ 是 0,1,2 其中某一個數，再調整係數，也就是說改成 $k_{(10)}=b_i\times 3^i+\ldots+b_1\times 3^1+b_0\times 3^0$，其中 $b_0,b_1,\ldots,b_{i-1},b_i$ 是 $-1,0,1$ 其中某一個數，作者就可以在等臂天平的左側放係數是 1 的砝碼，等臂天平的右側放係數是 -1 的砝碼與待測重量物品，而係數是 0 的砝碼作者就不使用，這就是作者對應問題的其中一種砝碼放置方法。

伍、研究結果

作者討論一般化的情形，將 k 磅的砝碼分成 i 塊。當分成 2 塊、3 塊、4 塊時，根據前面的經驗作者發現：分成 1 塊砝碼的上限為 1 磅：$1=1$。分成 2 塊砝碼的上限為 4 磅：$1+3=4$。分成 3 塊砝碼的上限為 13 磅：$1+3+9=13$。分成 4 塊砝碼的上限為 40 磅：$1+3+9+27=40$。作者發現上面的式子有一個共通性，它們都是首項為 1 且公比為 3 的等比級數，所以將上述三式改寫成：分成 1 塊砝碼，k 的上限為 1 磅：$3^0=1$。

分成 2 塊砝碼，k 的上限為 4 磅：$3^0+3^1=4$。分成 3 塊砝碼，k 的上限為 13 磅：$3^0+3^1+3^2=13$。分成 4 塊砝碼，k 的上限為 40 磅：$3^0+3^1+3^2+3^3=40$。所以作者猜想 i 塊砝碼的上限是：$k_i=3^0+3^1+3^2+...+3^{i-1}$磅。作者使用數學歸納法證明：

(1) 當$i=1$時，$k_1=3^0$ 原式成立。

(2) 設$i=t$時原式成立，即 k 磅砝碼分成 t 塊($3^0,3^1,3^2,...,3^{t-1}$)為可稱，此時：

$$k_i=3^0+3^1+3^2+...+3^{t-1}$$

(3) 當$i=t+1$時，即k磅砝碼分成$t+1$塊 ($3^0,3^1,3^2,...,3^{t-1},x$)為可稱，此時：

$k_{i+1}=3^0+3^1+3^2+...+3^{t-1}+x$ 因為 $(3^0,3^1,3^2,...,3^{t-1})$ 為可稱，

所以 $x-(3^0+3^1+...+3^{t-1})$要可以表示成$(3^0+3^1+...+3^{t-1})+1$

即 $x-(3^0+3^1+...+3^{t-1})=(3^0+3^1+...+3^{t-1})+1$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{2}(3^t-1)=\frac{1}{2}(3^t-1)+1\Rightarrow x=3^t-1+1\Rightarrow x=3^t$$

即$k_{i+1}=3^0+3^1+3^2+...+3^{t-1}+3^t$ 成立

(4) 故依數學歸納法知，原式成立。

其中從$i=t$時有$3^0+3^1+3^2+...+3^{t-1}=\frac{1}{2}(3^t-1)$種方法，當$i=t+1$時，也就是說砝碼多一塊，而這塊砝碼對前面$t$種情形有$3$個選擇，就是放在等臂天平左邊或右邊，或不使用，所以會多出3^t種情形。也就是說作者找到並證明了砝碼問題的一般式：一塊k磅的砝碼，摔成i塊整數磅數的砝碼，使用等臂天平可以秤出 1 磅到k磅的重量，則k的最大重量為$\frac{1}{2}(3^i-1)$磅。如果從排列組合的角度來討論，每塊砝碼有 3 個選擇，放在天平的右邊、左邊或不放。i塊砝碼有3^i個選擇，扣掉全都不選，有3^i-1種，等臂天平可放砝碼有兩種選擇，故共有$\frac{3^i-1}{2}$種。其中從$i=t$時有$\frac{1}{2}(3^t-1)$種方法，當$i=t+1$時，也就是說砝碼多一塊，而這塊砝碼對前面t種情形有3個選擇，就是放在等臂天平左邊或右邊，或不使用，所以會多出3^t種情形。也就是說作者找到並證明了砝碼問題的一般式：

> ***規律 1：***一塊k磅的砝碼，摔成i塊整數磅數的砝碼，使用等臂天平可以秤出 1 磅到k磅的重量，則k的最大重量為$\frac{1}{2}(3^i-1)$磅。

如果從排列組合的角度來討論，每塊砝碼有 3 個選擇，放在天平的右邊、左邊或不放。

i 塊砝碼有 3^i 個選擇，扣掉全都不選，有 3^i-1 種，等臂天平可放砝碼有兩種選擇，故共有 $\frac{3^i-1}{2}$ 種。

陸、討論

作者在四年級上學期時發現如果將等臂天平延伸到 $1:n$ 的<u>不等臂天平</u>，此時待測物品可以放在天平的任一側；而且砝碼不一定要全部用完，用到的砝碼也可以放在天平的任一側，是否會有類似的結果？所以本研究從 $1:n$ 的 $1:2$、$1:3$ 開始討論，目前討論 n 的最大值為 8。接著討論 $m:n$ 的<u>不等臂天平</u>。作者從 $2:n$ 的情形開始討論，因為 $2:1$ 與 $1:2$ 相同，$2:2$ 與 $1:1$ 相同，而 $2:4$ 也與 $1:2$ 相同，故我們從 2:大於 1 的奇數開始討論，也就是 $2:3$、$2:5$、...。同理 $3:1$、$3:2$、$3:3$ 也討論過了，所以我們從 $3:4$、$3:5$ 討論，但是目前尚未找到可稱解。

一、 槓桿原理

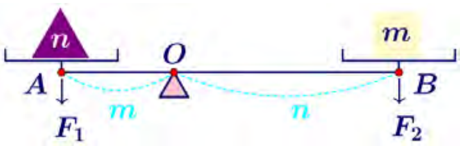


圖 4：槓桿原理示意圖

要使用不等臂天平，就要先介紹槓桿原理。作者考慮如果原題的 n 磅砝碼掉在地上摔成四塊，如果使用 $m:n$ 的不等臂天平，其中 m,n 為正整數，可以測出 1 磅到 n 磅的所有重量嗎？作者想檢查是否有規律，很明顯這個問題也有上界，因為不可能 $1:100$ 的天平測得出任意一塊砝碼，所以作者開始先從 $1:2$ 開始討論。並且作者參考了槓桿原理。以圖 4 為例，作者把天平視為一個理想的槓桿，槓桿中有一個支點 O，$\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 稱為力臂，若 $\overline{OA}:\overline{OB}=m:n$，則槓桿達成平衡時，在 A、B 兩點的作用力分別為 F_1 與 F_2，此時 $F_1:F_2=n:m$，也就是 $F_1\times m=F_2\times n$。

二、$1:n$ 不等臂天平的討論

(一) $1:2$ 不等臂天平

首先討論在 $1:2$ 不等臂天平中的情形。因為某些磅數的解不只一組，在以下的討論中，作者僅列出某一組可稱解。指導老師利用 GeoGebra 設計一個可以作<u>**數學實驗**</u>的程式，直接輸入砝碼磅數與待測物品磅數討論，並將結果截圖，放在工作手冊對照。圖 5 中藍色不等臂天平表待測物品重量為 1 磅至 k 磅的情形；紅色不等臂天平表待測物品重量為大於 k 磅的情形，完整情形列於工作手冊。表 6 為 $1:2$ 不等臂天平的部分情形，完整表格在工作手冊；其中藍色字體表示 1 磅至 k 磅的待測物品重量；紅色字體表示大於 k 的待測物品重量。目前作者分析到 $1:2$ 不等臂天平的情形，最多可以測到 26 磅。

而且 k 磅的砝碼在 $1:2$ 不等臂天平中無法測得 $2k-1$ 磅的重量。作者將 $1:2$ 不等臂天平的全部情形整理於表 7，表 7 中藍色方格表示 1 至 k 磅的可稱解；紅色方格表示大於 k 磅的可稱解。而在 $k+1$ 磅到最大可稱磅數間的空格就是不可稱解。而目前作者確定不會漏的方式就是一一代入。例如以 5 磅摔成 1,1,1,2 在 $1:2$ 不等臂天平中，先確定可稱，也就是 1 磅到 5 磅可以稱出。***<u>然後將所有結果列於工作手冊中。</u>***

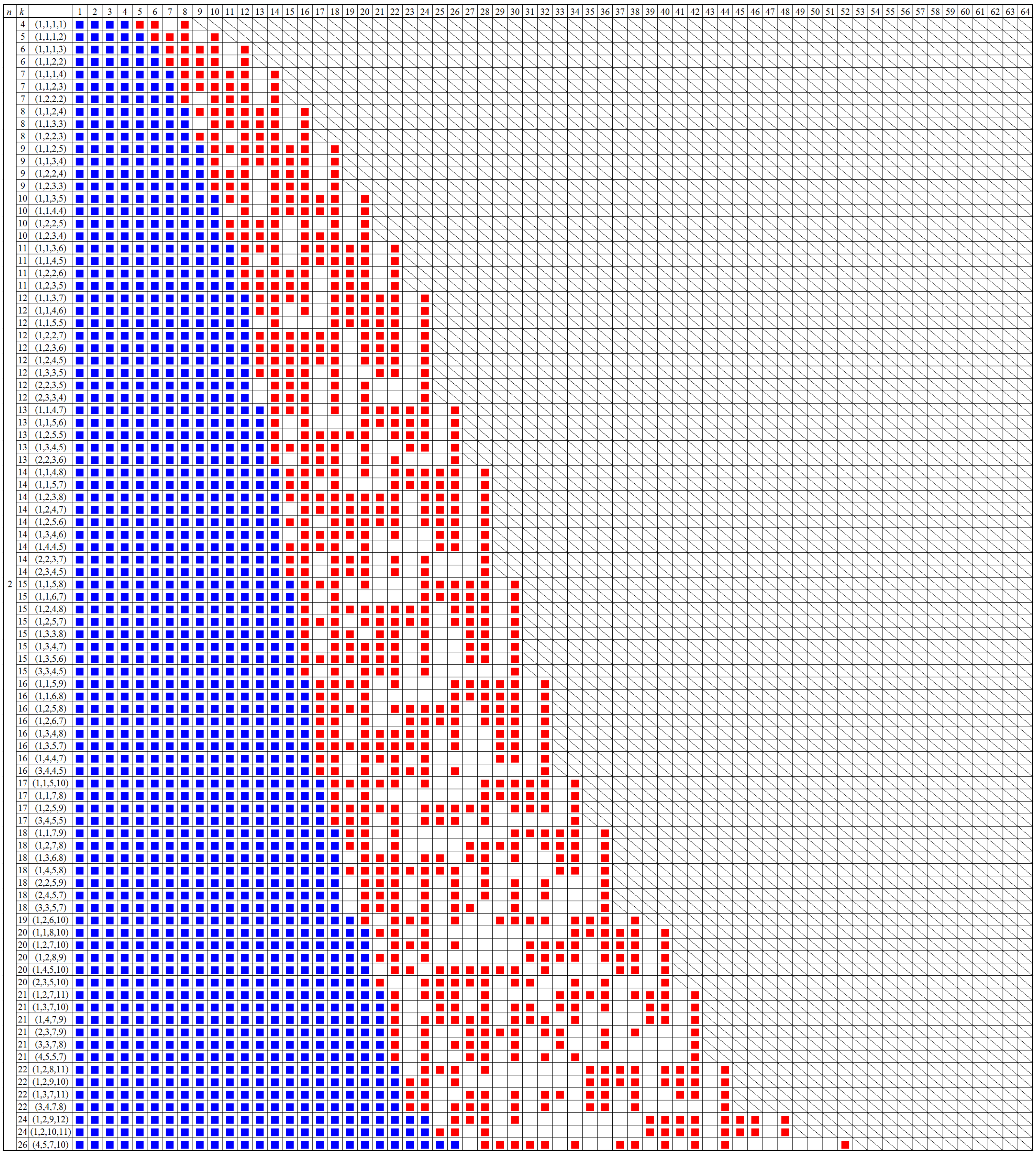
圖 5(a)：數學實驗示意圖

圖 5(b)：數學實驗示意圖

表 6：4 磅至 26 磅砝碼 $1:2$ 不等臂天平部分可稱磅數表

4＝1+1+1+1			
1+1＝1×2	2＝1×2	3+1＝(1+1)×2	4＝(1+1)×2
5+1＝(1+1+1)×2	6＝(1+1+1)×2	8＝(1+1+1+1)×2	
5＝1+1+1+2			
1+1＝1×2	2＝1×2	3+1＝(1+1)×2	4＝(1+1)×2
5+1＝(1+1+1)×2	6＝(1+1+1)×2	7+1＝(1+1+2)×2	8＝(1+1+2)×2
10＝(1+1+1+2)×2			
6＝1+1+1+3			
1+1＝1×2	2＝1×2	3+1＝(1+1)×2	4＝(1+1)×2
5+1＝3×2	6＝3×2	7+1＝(1+3)×2	8＝(1+3)×2
9+1＝(1+1+3)×2	10＝(1+1+3)×2	12＝(1+1+1+3)×2	
6＝1+1+2+2			
1+1＝1×2	2＝1×2	3+1＝2×2	4＝2×2
5+1＝(1+2)×2	6＝(1+2)×2	7+1＝(2+2)×2	8＝(2+2)×2
9+1＝(1+2+2)×2	10＝(1+2+2)×2	12＝(1+1+2+2)×2	
7＝1+1+1+4			
1+1＝1×2	2＝1×2	3+1＝(1+1)×2	4＝(1+1)×2
5+1+1+1＝4×2	6+1+1＝4×2	7+1＝4×2	8＝4×2
9+1＝(1+4)×2	10＝(1+4)×2	11+1＝(1+1+4)×2	12＝(4+1+1)×2
14＝(4+1+1+1)×2			
7＝1+1+2+3			
1+1＝1×2	2＝1×2	3+1＝2×2	4＝2×2
1+5＝3×2	6＝3×2	7+1＝(3+1)×2	8＝(3+1)×2
9+1＝(3+2)×2	10＝(3+2)×2	11+1＝(3+2+1)×2	12＝(3+2+1)×2
14＝(3+2+1+1)×2			
7＝1+2+2+2			
2＝1×2	2+2＝2×2	3+1＝2×2	4＝2×2
5+2+1＝(2+2)×2	6+2＝(2+2)×2	7+1＝(2+2)×2	8＝(2+2)×2
10＝(2+2+1)×2	11+1＝(2+2+2)×2	12＝(2+2+2)×2	14＝(2+2+2+1)×2
8＝1+1+2+4			
1+1＝1×2	2＝1×2	3+1＝2×2	4＝2×2
5+1＝(2+1)×2	6＝(2+1)×2	7+1＝4×2	8＝4×2
9+1＝(4+1)×2	10＝(4+1)×2	11+1＝(4+2)×2	12＝(4+2)×2
13+1＝(4+2+1)×2	14＝(4+2+1)×2	16＝(4+2+2+1)×2	

表 7：4 磅至 26 磅砝碼1: 2 不等臂天平可稱磅數表



(二) 1: 3~1: 8 不等臂天平

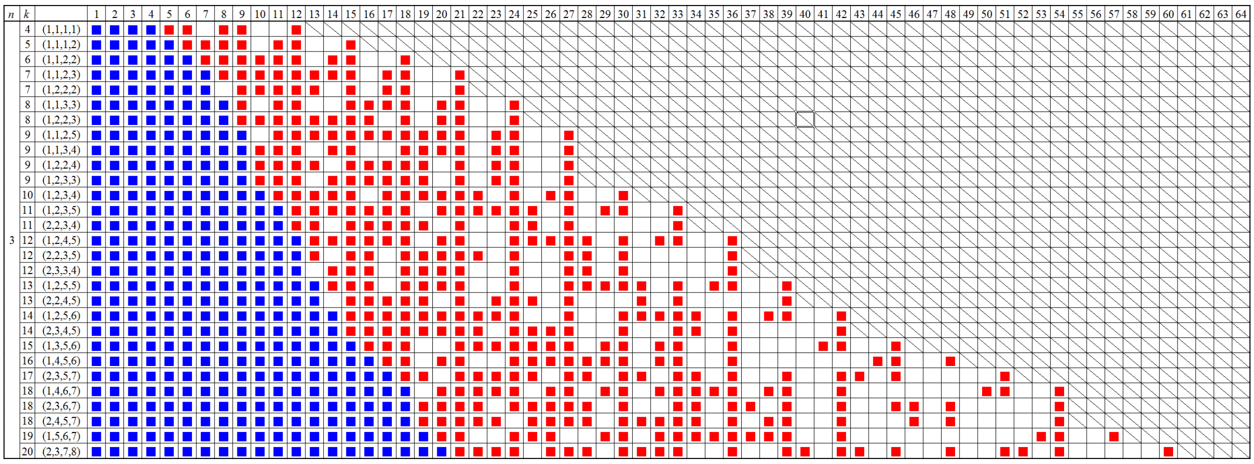
仿照1: 2 不等臂天平，我們分別列出1: 3~1: 8 不等臂天平數學實驗示意圖(如圖 6~10)及可稱磅數表(如表 8~13)，***<u>至於完整解的表格，請參閱工作手冊。</u>***

1. 1: 3不等臂天平

圖 6(a)：數學實驗示意圖

圖 6(b)：數學實驗示意圖

表 8：4 磅至 20 磅砝碼1:3不等臂天平可稱磅數表

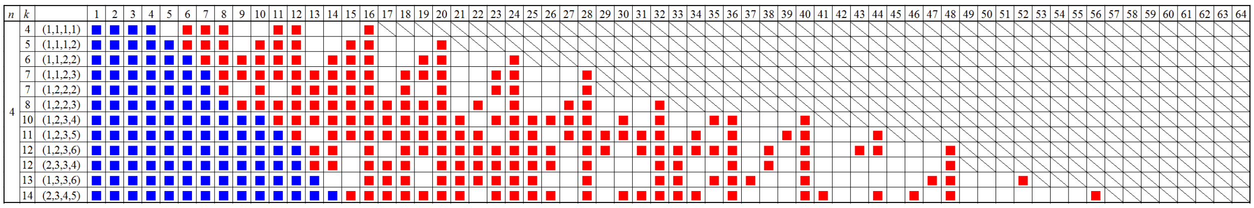


2. 1:4不等臂天平

圖 7(a)：數學實驗示意圖

圖 7(b)：數學實驗示意圖

表 9：4 磅至 14 磅砝碼1:4不等臂天平可稱磅數表

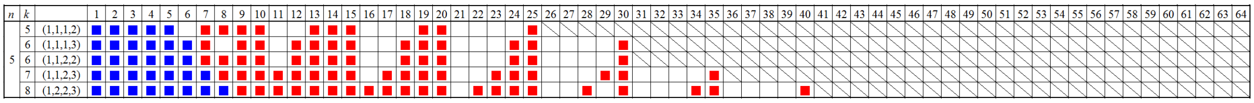


3. 1:5不等臂天平

圖 8(a)：數學實驗示意圖

圖 8(b)：數學實驗示意圖

表 10：5 磅至 8 磅砝碼1:5不等臂天平可稱磅數表

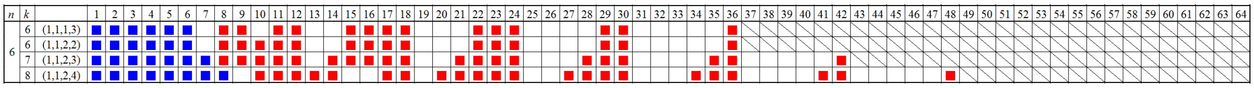


4. 1:6不等臂天平

圖 9(a)：數學實驗示意圖

圖 9(b)：數學實驗示意圖

表 11：6 磅至 8 磅砝碼1:6不等臂天平可稱磅數表



5. 1:7不等臂天平

圖 10(a)：數學實驗示意圖

圖 10(b)：數學實驗示意圖

表 12：7 磅至 8 磅砝碼$1:7$不等臂天平可稱磅數表

n	*k*		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
7	7	(1,1,2,3)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦		🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥			🟥	🟥	🟥	🟥	🟥				🟥	🟥	🟥	🟥				
	8	(1,1,2,4)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥	🟥		🟥	🟥	🟥		🟥	🟥			🟥	🟥			🟥	🟥	🟥	🟥	🟥				🟥

n	*k*		33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
7	7	(1,1,2,3)	🟥	🟥	🟥						🟥	🟥							🟥	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲
	8	(1,1,2,4)	🟥	🟥	🟥					🟥	🟥	🟥						🟥	🟥							🟥	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲

6. $1:8$不等臂天平

表 13： 8 磅砝碼$1:8$不等臂天平可稱磅數表

n	*k*		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
8	8	(1,1,2,4)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦		🟥	🟥	🟥		🟥	🟥	🟥			🟥	🟥			🟥	🟥				🟥	🟥	🟥	🟥	🟥

n	*k*		33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
8	8	(1,1,2,4)					🟥	🟥	🟥	🟥						🟥	🟥	🟥							🟥	🟥								🟥

(三) 等差關係

我們試著要從表 7~13(即$1:n$不等臂天平，$n=2,3,...,8$)中尋找可稱解的規律性，但是花了很長時間都沒有發現。既然縱向找不到規律，之後念頭一轉，改採橫向方式嘗試，果然有所發現。***也就是說把出現頻率不只一次的 13 組資料擺在一起觀察，找尋規律。***

目前找到其中 12 組有規律。

為了之後方便討論，作者定義：(如圖 11)

1. 黃色樹狀圖稱為 Y 型樹狀圖：表示*符合規律 4 中的不可稱解*所形成的樹狀圖，其中，任一個節點往左的值都是增加n；而往右的值都是增加$n+1$；且水平方向由左到右是公差為 1 的等差數列。
2. 粉紅色樹狀圖稱為 P 型樹狀圖：表示*不符合規律 4，但亦為不可稱解*所形成的樹狀圖，其中，任一個節點往左的值都是增加n；而往右的值都是增加$n+1$；且水平方向由左到右是公差為 1 的等差數列。

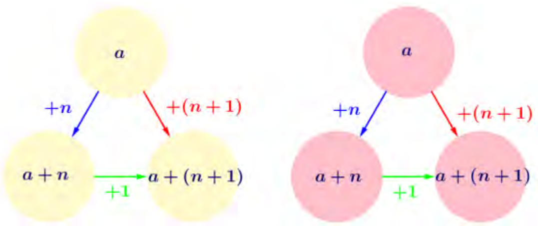


圖 11：Y 型樹狀圖與 P 型樹狀圖

我們將利用這兩種樹狀圖在接下來的討論中。更進一步討論如圖 12 中，藍色箭頭方向的公差為n，紅色箭頭方向的公差為$n+1$，而綠色箭頭方向的公差為1。

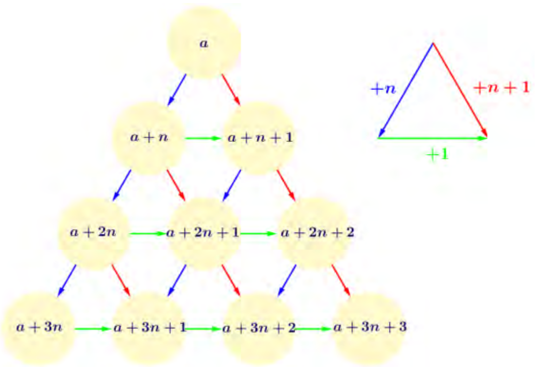


圖 12：三方向等差關係討論圖

以下針對這 12 組解，我們分兩部分討論。

《 第一部分 》 共同規律的尋求

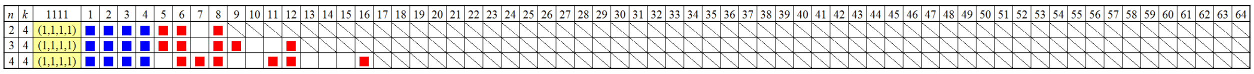
在 $(1,1,1,1)$ 、 $(1,1,1,2)$ 、 $(1,1,2,2)$ 、 $(1,1,2,3)$ 中尋求可稱解的共同規律。

表列轉換

將表 7~13 的縱向表列轉換為橫向表列，因此

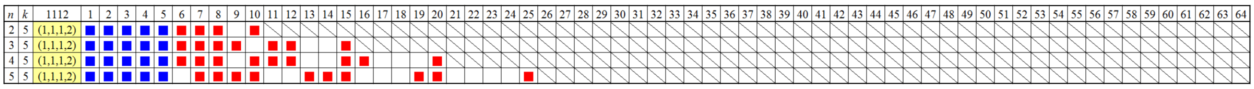
1. 列出 $(1,1,1,1)$ 在 $1:2$ 、 $1:3$ 與 $1:4$ 不等臂天平中的可稱解磅數，如表 14。

表 14：(1,1,1,1)砝碼在不等臂天平分析表



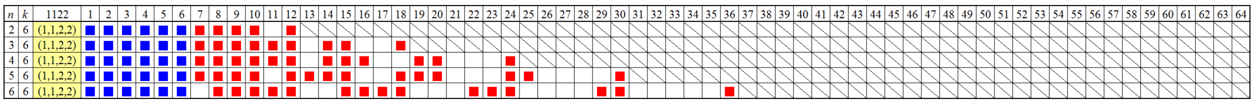
2. 列出 $(1,1,1,2)$ 在 $1:2$ 、 $1:3$ 、 $1:4$ 與 $1:5$ 不等臂天平中的可稱解磅數，如表 15。

表 15：(1,1,1,2)砝碼在不等臂天平分析表



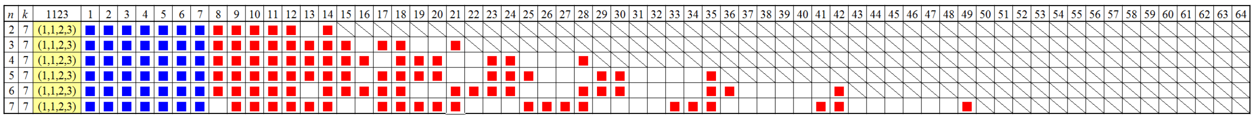
3. 列出 $(1,1,2,2)$ 在 $1:2$、$1:3$、$1:4$、$1:5$ 與 $1:6$ 不等臂天平中的可稱解磅數，如表 16。

表 16：(1,1,2,2)砝碼在不等臂天平分析表



4. 列出 $(1,1,2,3)$ 在 $1:2$ 、 $1:3$ 、 $1:4$ 、 $1:5$ 、 $1:6$ 與 $1:7$ 不等臂天平中的可稱解磅數，如表 17。

表 17：(1,1,2,3)砝碼在不等臂天平分析表



發現與歸納 1

從表 14～17 中，我們發現並歸納出以下幾點：

規律 2：

1. 在 $1:n$ 的不等臂天平中， k 磅砝碼最大的可稱解為 nk 。
2. 在重量為 $k+1 \sim nk$ 磅之間，並非每一個重量均為可稱解。
3. 若以連續 n 磅為一區段，則我們可以將 $1 \sim nk$ 磅分割成 k 個區段。
4. 在 k 個區段中，不完全可稱的區段為最後的 $(n-1)$ 個區段。

思考轉換

由以上的發現與歸納中，我們試著將思考做一轉換：***想從不可稱解著手，希望能尋找出不可稱解的規律性，進而求得所有可稱解的結果。***

整理與分析

因此，我們又分別將表 14～17 進一步整理成表 18～21。

表 18：(1,1,1,1)砝碼在不等臂天平整理

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱重量	下界		上界	
2	4	8	7	7	$(4-1)\times2+1$	7	$(4-1+1)\times2-1$
3	4	12	7	7	$(4-2)\times3+1$	7	$(4-2+1)\times3-2$
			10,11	10	$(4-1)\times3+1$	11	$(4-1+1)\times3-1$
4	4	16	5	5	$(4-3)\times4+1$	5	$(4-3+1)\times4-3$
			9,10	9	$(4-2)\times4+1$	10	$(4-2+1)\times4-2$
			13,14,15	13	$(4-1)\times4+1$	15	$(4-1+1)\times4-1$

表 19：(1,1,1,2)砝碼在不等臂天平整理

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱重量	下界		上界	
2	5	10	9	9	$(5-1)\times2+1$	9	$(5-1+1)\times2-1$
3	5	15	10	10	$(5-2)\times3+1$	10	$(5-2+1)\times3-2$
			13,14	13	$(5-1)\times3+1$	14	$(5-1+1)\times3-1$
4	5	20	9	9	$(5-3)\times4+1$	9	$(5-3+1)\times4-3$
			13,14	13	$(5-2)\times4+1$	14	$(5-2+1)\times4-2$
			17,18,19	17	$(5-1)\times4+1$	19	$(5-1+1)\times4-1$
5	5	25	6	6	$(5-4)\times5+1$	6	$(5-4+1)\times5-4$
			11,12	11	$(5-3)\times5+1$	12	$(5-3+1)\times5-3$
			16,17,18	16	$(5-2)\times5+1$	18	$(5-2+1)\times5-2$
			21,22,23,24	21	$(5-1)\times5+1$	24	$(5-1+1)\times5-1$

表 20：(1,1,2,2) 砝碼在不等臂天平整理

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱的重量	下界		上界	
2	6	12	11	11	$(6-1)\times2+1$	13	$(6-1+1)\times2-1$
3	6	18	13	13	$(6-2)\times3+1$	13	$(6-2+1)\times3-2$
			16,17	16	$(6-1)\times3+1$	17	$(6-1+1)\times3-1$
4	6	24	13	13	$(6-3)\times4+1$	13	$(6-3+1)\times4-3$
			17,18	17	$(6-2)\times4+1$	18	$(6-2+1)\times4-2$

			21,22,23	21	$(6-1)\times4+1$	23	$(6-1+1)\times4-1$
5	6	30	11	11	$(6-4)\times5+1$	11	$(6-4+1)\times5-4$
			16,17	16	$(6-3)\times5+1$	17	$(6-3+1)\times5-3$
			21,22,23	21	$(6-2)\times5+1$	23	$(6-2+1)\times5-2$
			26,27,28,29	26	$(6-1)\times5+1$	29	$(6-1+1)\times5-1$
6	6	36	7	7	$(6-5)\times6+1$	7	$(6-5+1)\times6-5$
			13,14	13	$(6-4)\times6+1$	14	$(6-4+1)\times6-4$
			19,20,21	19	$(6-3)\times6+1$	21	$(6-3+1)\times6-3$
			25,26,27,28	25	$(6-2)\times6+1$	28	$(6-2+1)\times6-2$
			31,32,33,34,35	31	$(6-1)\times6+1$	35	$(6-1+1)\times6-1$

表 21：(1,1,2,3)砝碼在不等臂天平整理

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱的重量	下界		上界	
2	7	14	13	13	$(7-1)\times2+1$	13	$(6-1+1)\times2-1$
3	7	21	16	16	$(7-2)\times3+1$	16	$(6-2+1)\times3-2$
			19,20	19	$(7-1)\times3+1$	20	$(6-1+1)\times3-1$
4	7	28	17	17	$(7-3)\times4+1$	17	$(6-3+1)\times4-3$
			21,22	21	$(7-2)\times4+1$	22	$(6-2+1)\times4-2$
			25,26,27	25	$(7-1)\times4+1$	27	$(6-1+1)\times4-1$
5	7	35	16	16	$(7-4)\times5+1$	16	$(6-4+1)\times5-4$
			21,22	21	$(7-3)\times5+1$	22	$(6-3+1)\times5-3$
			26,27,28	26	$(7-2)\times5+1$	28	$(6-2+1)\times5-2$
			31,32,33,34	31	$(7-1)\times5+1$	34	$(6-1+1)\times5-1$
6	7	42	13	13	$(7-5)\times6+1$	13	$(6-5+1)\times6-5$
			19,20	19	$(7-4)\times6+1$	20	$(6-4+1)\times6-4$
			25,26,27	25	$(7-3)\times6+1$	27	$(6-3+1)\times6-3$
			31,32,33,34	31	$(7-2)\times6+1$	34	$(6-2+1)\times6-2$
			37,38,39,40,41	37	$(7-1)\times6+1$	41	$(6-1+1)\times6-1$
7	7	49	8	8	$(7-6)\times7+1$	8	$(7-6+1)\times7-6$
			15,16	15	$(7-5)\times7+1$	16	$(7-5+1)\times7-5$
			22,23,24	22	$(7-4)\times7+1$	24	$(7-4+1)\times7-4$
			29,30,31,32	29	$(7-3)\times7+1$	32	$(7-3+1)\times7-3$
			36,37,38,39,40	36	$(7-2)\times7+1$	40	$(7-2+1)\times7-2$
			43,44,45,46,47,48	43	$(7-1)\times7+1$	48	$(7-1+1)\times7-1$

發現與歸納 2

從表 18～21 中，我們又進一步發現並歸納出：

1. 不可稱解的個數

從表 18～21 中，對於不可稱解的個數，我們整理出表 22：

表 22：不可稱解的個數對應表

n	2	3	4	5	6
不可稱解的個數	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5

從表 22 中，我們歸納出：

> ***規律 3：***在$1:n$不的不等臂天平中，其中不可稱解的個數為：
> $1+2+3+\ldots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 。

2. 不可稱解的一般式

從表 18～21 中，我們也歸納出不可稱解的一般式：

每一區段的下界$=(k-j)n+1$

每一區段的上界$=(k-j+1)n-j$　　其中 $j=1,2,3,\ldots,n-2,n-1$

> ***規律 4：***在$1:n$不的不等臂天平中，當 $j=1,2,3,\ldots,n-2,n-1$時，不可稱解重量x的範圍滿足不等式：$(k-j)n+1\le x\le(k-j+1)n-j$ 。

3. Y 型樹狀圖

將表 18～21 中的不可稱解，整理於圖 13～16，得到 Y 型樹狀圖。

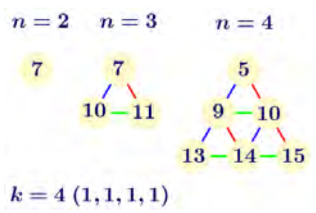


圖 13：4 磅分成 1,1,1,1 不可稱解

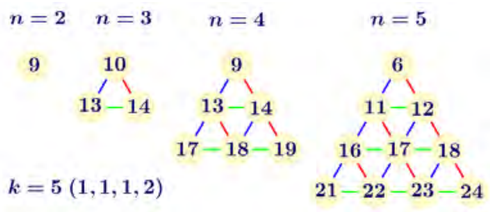


圖 14：5 磅分成 1,1,1,2 不可稱解

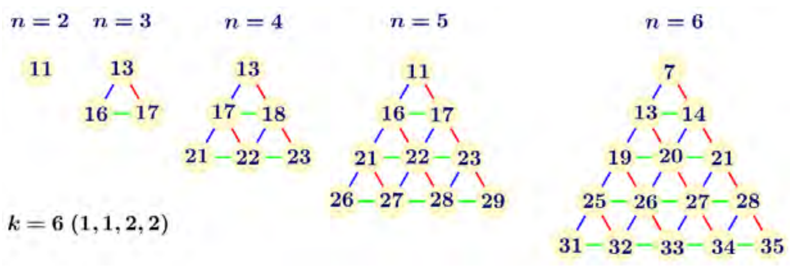


圖 15：6 磅分成 1,1,2,2 不可稱解

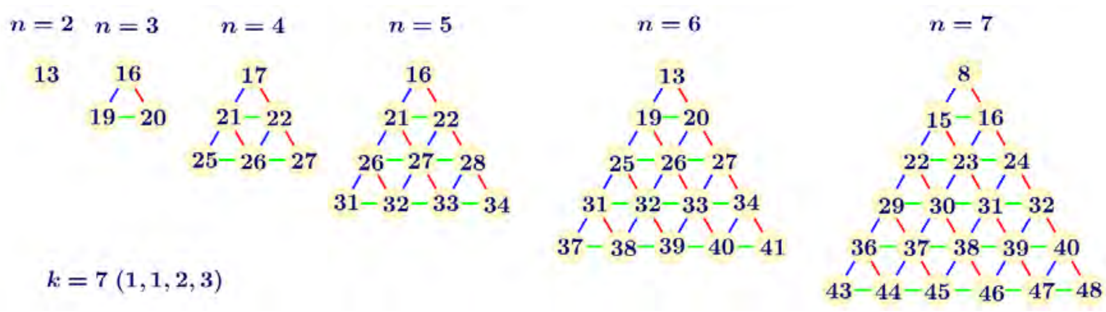


圖 16：7 磅分成 1,1,2,3 不可稱解

由圖 13~16 中，我們歸納出等差關係，也就是說只要找到第一個不可稱解的磅數 a (為$(k-(n-1))n+1$)，公差為d ，我們就可以找出那些重量為不可稱解，進而寫成圖 17 的關係式。

a

$a+d$　　$a+d+1$

$a+2d$　　$a+2d+1$　　$a+2d+2$

$a+3d$　　$a+3d+1$　　$a+3d+2$　　$a+3d+3$

$a+4d$　　$a+4d+1$　　$a+4d+2$　　$a+4d+3$　　$a+4d+4$

$a+(n-1)d$　　$a+(n-1)d+1$　　$a+(n-1)d+2$　　$\cdots$　　$a+(n-1)d+(n-2)$　　$a+(n-1)d+(n-1)$

圖 17：不可稱解

後來又發現公差d 事實上就是n，也就是說只要找到第一個不可稱解的磅數a ，就可以找到所有的不可稱解，如圖 18。

規律 5：

a

$a+n$　　$a+n+1$

$a+2n$　　$a+2n+1$　　$a+2n+2$

$a+3n$　　$a+3n+1$　　$a+3n+2$　　$a+3n+3$

$a+4n$　　$a+4n+1$　　$a+4n+2$　　$a+4n+3$　　$a+4n+4$

……………………………………………………………………

$a+(n-1)n$　　$a+(n-1)n+1$　　$a+(n-1)n+2$　　$\cdots$　　$a+(n-1)n+(n-2)$　　$a+(n-1)n+(n-1)$

圖 18：不可稱解

而在實際運用上，只要用圖 18 的方法，可以很快找到k 磅到nk 磅之間的不可稱解。可稱解跟n 有關是很容易理解的，因為$1,2,...,k$ 磅都可稱，所以$n,2n,...,kn$ 當然可以

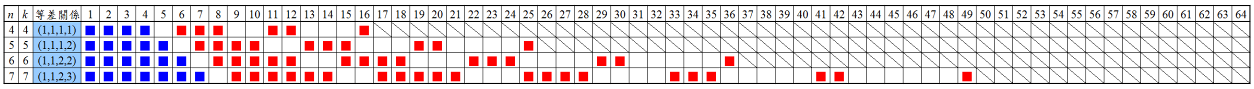
稱出。但是不可稱解也跟 n 有關，我們猜想是因為每段可稱解加不可稱解的個數恰好是 n 。

從以上一連串的轉換、整理與歸納中，我們就可以***<u>直接算出哪些重量為不可稱解，自然就知道哪些重量為可稱解。</u>***而下一步要做的就是分析比對數據，找出更多組不可稱的一般式。

5. 公差為 1 與公差為 -1 的等差關係

另外，把表 14、15、16 與 17 的最後一組放在一起，如表 23 所示，作者又發現一個性質：可稱解的連續個數是公差為 -1 的等差數列：分別為 $4,3,2,1$ 、 $5,4,3,2,1$ 、 $6,5,4,3,2,1$ 與 $7,6,5,4,3,2,1$ 。而且此時 $n=k=4,5,6,7$ 。不可稱解的連續個數是公差為 1 的等差數列：分別是 $1,2,3$ 、 $1,2,3,4$ 、 $1,2,3,4,5$ 與 $1,2,3,4,5,6$ 。

表 23：四組等差關係砝碼在不等臂天平分析表



《 第二部分 》 個別規律的探索

其他 8 種可稱解雖然尚未發現共同的規律，但我們也個別找出其規律性。

6. $(1,1,1,3)$ 在 $1:5$ 與 $1:6$ 不等臂天平中

作者發現 6 磅砝碼分成 $(1,1,1,3)$ 在 $1:5$ 的不等臂天平中有 $1+1+2+3+4$ 個不可稱，$1:6$ 的不等臂天平中有 $1+1+2+3+4+5$ 個連續不可稱。如表 24 所示。將表 24 中的不可稱解，整理於表 25，我們發現(1,1,1,3)在 $1:5$ 的不等臂天平中，除了 8 磅是不可稱，其餘的不可稱解滿足 Y 形樹狀圖，同理在 $1:6$ 的不等臂天平中，除了 10 磅是不可稱，其餘的不可稱解滿足 Y 形樹狀圖，如圖 19 所示。而兩個例外情形得到 P 型樹狀圖。

表 24：(1,1,1,3)砝碼在不等臂天平分析表

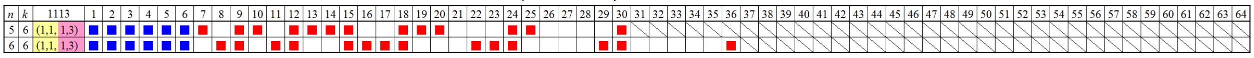


表 25：(1,1,1,3)砝碼在不等臂天平整理

<table>
<tr><th rowspan="2">n</th><th rowspan="2">k</th><th rowspan="2">最大可稱重量</th><th colspan="5">每一區段</th></tr>
<tr><th>不可稱的重量</th><th colspan="2">下界</th><th colspan="2">上界</th></tr>
<tr><td rowspan="4">5</td><td rowspan="4">6</td><td rowspan="4">30</td><td>8</td><td>8</td><td>例外</td><td>8</td><td>例外</td></tr>
<tr><td>11</td><td>11</td><td>$(6-4)\times5+1$</td><td>11</td><td>$(6-4+1)\times5-4$</td></tr>
<tr><td>16,17</td><td>16</td><td>$(6-3)\times5+1$</td><td>17</td><td>$(6-3+1)\times5-3$</td></tr>
<tr><td>21,22,23</td><td>21</td><td>$(6-2)\times5+1$</td><td>23</td><td>$(6-2+1)\times5-2$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>36</td><td>7</td><td>13</td><td>$(6-5)\times6+1$</td><td>7</td><td>$(6-5+1)\times6-5$</td></tr>
</table>

			10	10	例外	10	例外
			13,14	13	$(6-4)\times 6+1$	14	$(6-4+1)\times 6-4$
			19,20,21	19	$(6-3)\times 6+1$	21	$(6-3+1)\times 6-3$
			25,26,27,28	25	$(6-2)\times 6+1$	28	$(6-2+1)\times 6-2$

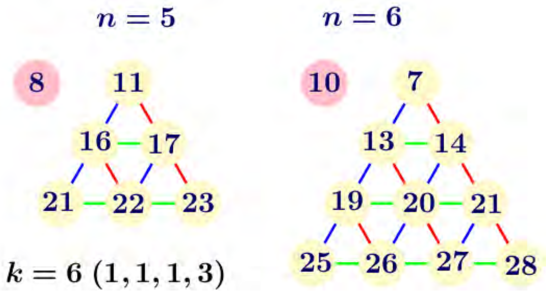


圖 19：6 磅分成 1,1,1,3 不可稱解

7. $(1,1,2,4)$在$1:6$、$1:7$與$1:8$不等臂天平中

作者發現在 8 磅砝碼分成$(1,1,2,4)$在$1:6$的不等臂天平有$1+2+1+2+3+4+5$個不可稱，$1:7$的不等臂天平有$1+1+2+3+4+5+6$個連續不可稱，而在$1:8$的不等臂天平中有$1+1+2+2+3+4+5+6+7$個連續不可稱。如表 26 所示。將表 26 中的不可稱解，整理於表 27，我們發現(1,1,2,4)在$1:6$的不等臂天平中，9、15、16 形成一個 P 形樹狀圖。其餘的不可稱解滿足 Y 形樹狀圖。而同理在$1:7$的不等臂天平中，11、18、19 形成一個 P 形樹狀圖。其餘的不可稱解滿足 Y 形樹狀圖。而在$1:8$的不等臂天平中，13、21、22 也形成一個 P 形樹狀圖。其餘不可稱解也都滿足我們的 Y 形樹狀圖，而在圖 20 中本來以為是例外發生，沒想到是 P 形樹狀圖。為什麼會發生 P 形樹狀圖，是個值得研究的問題，是否還有別組解有這個性質？值得我們研究。

表 26：(1,1,2,4)砝碼在不等臂天平分析表

n	k	1124		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
2	8	(1,1,	2,4)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲
6	8	(1,1,	2,4)	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■			■	■		■	■	■	■	■			■	■	■	■				■	■	■					■	■						■	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲
7	8	(1,1,	2,4)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■		■	■			■	■			■	■	■	■	■				■	■	■	■					■	■	■						■	■							■	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲
8	8	(1,1,	2,4)	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■		■	■	■			■	■			■	■				■	■	■	■	■					■	■	■	■						■	■	■							■	■								■

表 27：(1,1,2,4)砝碼在不等臂天平整理

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱的重量	下界		上界	
6	8	48	9	9	例外	9	例外
			15,16	15	例外	16	例外
			19	19	$(8-5)\times 6+1$	19	$(8-5+1)\times 6-5$
			25,26	25	$(8-4)\times 6+1$	26	$(8-4+1)\times 6-4$
			31,32,33	31	$(8-3)\times 6+1$	33	$(8-3+1)\times 6-3$
			37,38,39,40	37	$(8-2)\times 6+1$	40	$(8-2+1)\times 6-2$
			43,44,45,46,47	43	$(8-1)\times 6+1$	47	$(8-1+1)\times 6-1$
7	8	56	11	11	例外	11	例外
			15	15	$(8-6)\times 7+1$	15	$(8-6+1)\times 7-6$
			18,19	18	例外	19	例外

			22,23	22	$(8-5)\times7+1$	23	$(8-5+1)\times7-5$
			29,30,31	29	$(8-4)\times7+1$	31	$(8-4+1)\times7-4$
			36,37,38,39	36	$(8-3)\times7+1$	39	$(8-3+1)\times7-3$
			43,44,45,46,47	43	$(8-2)\times7+1$	47	$(8-2+1)\times7-2$
			50,51,52,53,54,55	50	$(8-1)\times7+1$	55	$(8-1+1)\times7-1$
8	8	64	9	9	$(8-7)\times8+1$	9	$(8-7+1)\times8-7$
			13	13	例外	13	例外
			21,22	21	例外	22	例外
			17,18	17	$(8-6)\times8+1$	18	$(8-6+1)\times8-6$
			25,26,27	25	$(8-5)\times8+1$	27	$(8-5+1)\times8-5$
			33,34,35,36	33	$(8-4)\times8+1$	36	$(8-4+1)\times8-4$
			41,42,43,44,45	41	$(8-3)\times8+1$	45	$(8-3+1)\times8-3$
			49,50,51,52,53,54	49	$(8-2)\times8+1$	54	$(8-2+1)\times8-2$
			57,58,59,60,61,62,63	57	$(8-1)\times8+1$	63	$(8-1+1)\times8-1$

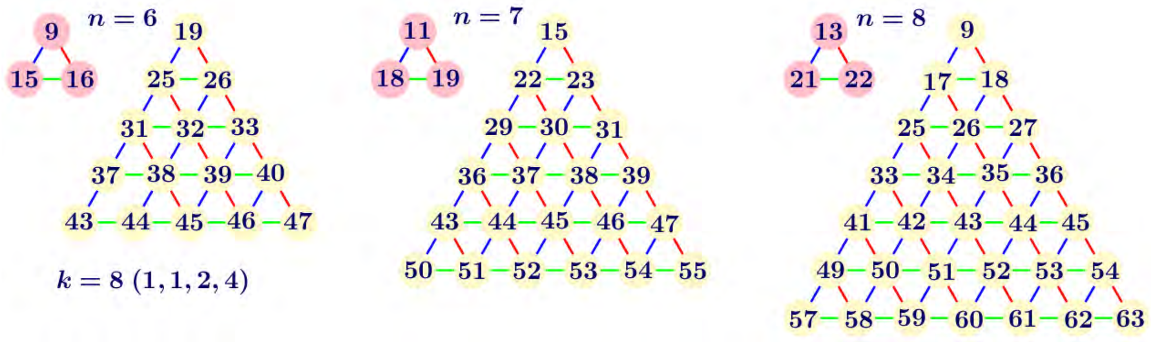


圖 20：8 磅分成 1,1,2,4 不可稱解

8. (1,2,2,3) 在 1:2 、1:3 、1:4 與 1:5 不等臂天平中

8 磅砝碼分成 (1,2,2,3) 在 1:2、1:3、1:4 與 1:5 不等臂天平中的情形整理在表 28。將表 28 中的不可稱解，整理於表 29 與圖 21。我們發現(1,2,2,3)在 1:2 的不等臂天平中，11 磅滿足 P 形樹狀圖。在 1:3 的不等臂天平中，17 磅滿足 P 形樹狀圖。在 1:4 的不等臂天平中， 23 磅滿足 P 形樹狀圖。在 1:5 的不等臂天平中， 29 磅滿足 P 形樹狀圖。其餘的不可稱解滿足 Y 形樹狀圖。

表 28：(1,2,2,3)砝碼在不等臂天平分析表

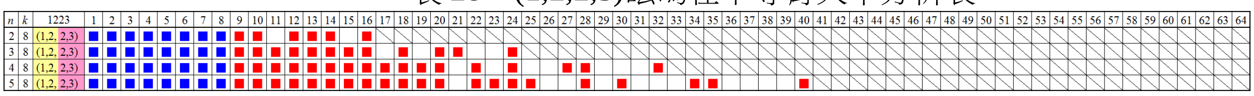


表 29：(1,2,2,3)砝碼在不等臂天平整理

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱的重量	下界		上界	
2	8	16	11	11	例外	11	例外
			15	15	$(8-1)\times2+1$	15	$(8-1+1)\times2-1$
3	8	24	17	17	例外	17	例外
			19	19	$(8-2)\times3+1$	19	$(8-2+1)\times3-2$
			22,23	22	$(8-1)\times3+1$	23	$(8-1+1)\times3-1$

4	8	32	21	21	$(8-3)\times 4+1$	21	$(8-3+1)\times 4-3$
			23	23	例外	23	例外
			25,26	25	$(8-2)\times 4+1$	26	$(8-2+1)\times 4-2$
			29,30,31	29	$(8-1)\times 4+1$	31	$(8-1+1)\times 4-1$
5	8	40	21	21	$(8-4)\times 5+1$	21	$(8-4+1)\times 5-4$
			26,27	26	$(8-3)\times 5+1$	27	$(8-3+1)\times 5-3$
			29	29	例外	29	例外
			31,32,33	31	$(8-2)\times 5+1$	33	$(8-2+1)\times 5-2$
			36,37,38,39	36	$(8-1)\times 5+1$	39	$(8-1+1)\times 5-1$

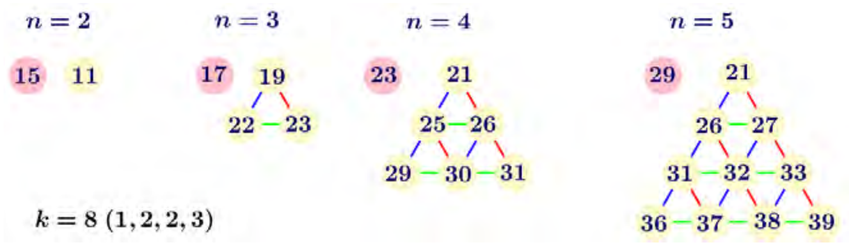


圖 21：8 磅分成 1,2,2,3 不可稱解

9. (1,1,2,5) 在 1:2 與 1:3 不等臂天平中

作者發現在 9 磅砝碼分成 (1,1,2,5) 在 1:2 與 1:3 不等臂天平中滿足 Y 形樹狀圖。如表 30 所示。將表 30 中的不可稱解，整理於表 31。我們發現(1,1,2,5)在 1:3 的不等臂天平中 10 磅滿足 P 形樹狀圖。其餘的不可稱解滿足 Y 形樹狀圖。

表 30： (1,1,2,5) 砝碼在不等臂天平分析表

n	k	1125	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
2	9	(1,1, 2,5)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥		🟥														
3	9	(1,1, 2,5)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦		🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥		🟥	🟥			🟥					

n	k	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
2	9																																
3	9																																

表 31： (1,1,2,5) 砝碼在不等臂天平整理

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱的重量	下界		上界	
2	9	18	17	17	$(9-1)\times 2+1$	17	$(9-1+1)\times 2-1$
3	9	27	10	10	例外	10	例外
			22	22	$(9-2)\times 3+1$	22	$(9-2+1)\times 3-2$
			25,26	25	$(9-1)\times 3+1$	26	$(9-1+1)\times 3-1$

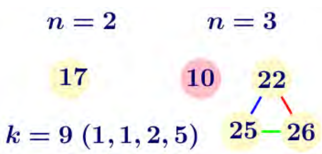


圖 22：9 磅分成 1,1,2,5 不可稱解

10. (1,1,3,3) 在 1:2 與 1:3 不等臂天平中

在 8 磅砝碼分成 (1,1,3,3) 在 1:2 與 1:3 不等臂天平中的情形整理如表 32 所示。再將表 32 中的不可稱解，整理於表 33 與圖 23。我們發現(1,1,3,3)在 1:2 的不等臂天平中，9 磅滿足 P 形樹狀圖。在 1:3 的不等臂天平中 10、13、14 磅滿足 P 形樹狀圖。其餘的不可稱解滿足 Y 形樹狀圖。

表 32： (1,1,3,3) 砝碼在不等臂天平分析表

n	*k*	1133		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
2	8	(1,1,	3,3)	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■		■	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲
3	8	(1,1,	3,3)	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■			■	■	■	■		■	■			■	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲

表 33： (1,1,3,3) 砝碼在不等臂天平整理

n	*k*	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱的重量	下界		上界	
2	8	16	9	9	例外	9	例外
			15	15	$(8-1)\times 2+1$	15	$(8-1+1)\times 2-1$
3	8	24	10	10	例外	10	例外
			13,14	13	例外	14	例外
			19	19	$(8-2)\times 3+1$	19	$(8-2+1)\times 3-2$
			22,23	22	$(8-1)\times 3+1$	23	$(8-1+1)\times 3-1$

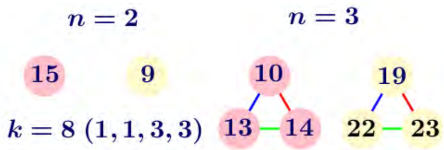


圖 23：8 磅分成 1,1,3,3 不可稱解

11. (1,1,3,4) 在 $1:2$ 與 $1:3$ 不等臂天平中

9 磅砝碼分成 (1,1,3,4) 在 $1:2$ 與 $1:3$ 不等臂天平中的情形整理在表 34。將表 34 中的不可稱解，整理於表 35 與圖 24。我們發現 (1,1,3,4) 在 $1:2$ 的不等臂天平中，11 磅滿足 P 形樹狀圖。在 $1:3$ 的不等臂天平中， 13、16、17 磅滿足 P 形樹狀圖，其餘的不可稱解滿足 Y 形樹狀圖。

表 34： (1,1,3,4) 砝碼在不等臂天平分析表

n	*k*	1134		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
2	9	(1,1,	3,4)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■		■	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲
3	9	(1,1,	3,4)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■			■	■	■	■		■	■			■	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲

表 35： (1,1,3,4) 砝碼在不等臂天平整理

n	*k*	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱的重量	下界		上界	
2	9	18	11	11	例外	11	例外
			17	17	$(9-1)\times 2+1$	17	$(9-1+1)\times 2-1$
3	9	27	13	13	例外	13	例外
			16,17	16	例外	17	例外
			22	22	$(9-2)\times 3+1$	22	$(9-2+1)\times 3-2$
			25,26	25	$(9-1)\times 3+1$	26	$(9-1+1)\times 3-1$

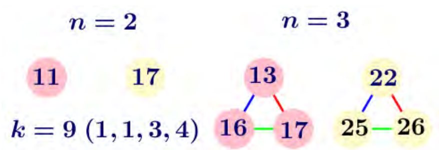


圖 24：9 磅分成 1,1,3,4 不可稱解

12. (1,2,2,2) 在 $1:2$ 、 $1:3$ 與 $1:4$ 不等臂天平中

7 磅砝碼分成 (1,2,2,2) 在 $1:2$ 、 $1:3$ 與 $1:4$ 不等臂天平中的情形整理在表 36。將表 36

中的不可稱解，整理於表 37 與圖 25。我們發現$(1,2,2,2)$在$1:2$的不等臂天平中，除了 9 磅是不可稱。在$1:3$的不等臂天平中，除了 8、14 磅是不可稱。在$1:4$的不等臂天平中，除了 9、11、19 磅是不可稱。這三組不可稱解目前沒找到規律，其餘的不可稱解滿足 Y 形樹狀圖。

表 36：$(1,2,2,2)$砝碼在不等臂天平分析表

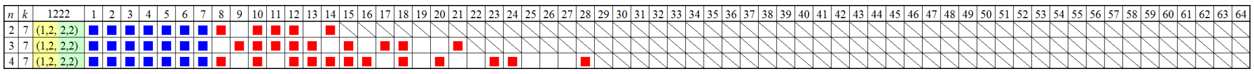


表 37：$(1,2,2,2)$砝碼在不等臂天平整理

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱的重量	下界		上界	
2	7	14	9	9	例外	9	例外
			13	13	$(7-1)\times 2+1$	13	$(7-1+1)\times 2-1$
3	7	21	8	8	例外	8	例外
			14	14	例外	14	例外
			16	16	$(7-2)\times 3+1$	16	$(7-2+1)\times 3-2$
			19,20	19	$(7-1)\times 3+1$	20	$(7-1+1)\times 3-1$
4	7	28	9	9	例外	9	例外
			11	11	例外	11	例外
			19	19	例外	19	例外
			17	17	$(7-3)\times 4+1$	17	$(7-3+1)\times 4-3$
			21,22	21	$(7-2)\times 4+1$	22	$(7-2+1)\times 4-2$
			25,26,27	25	$(7-1)\times 4+1$	27	$(7-1+1)\times 4-1$

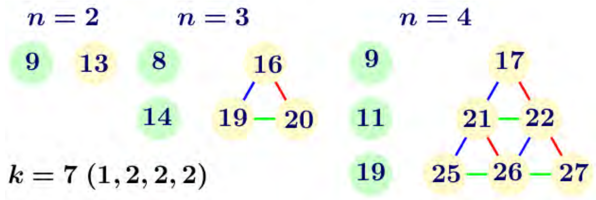


圖 25：7 磅分成 1,2,2,2 不可稱解

13. $(1,2,3,4)$在$1:2$、$1:3$與$1:4$不等臂天平中

10 磅砝碼分成$(1,2,3,4)$在$1:2$、$1:3$與$1:4$不等臂天平中的情形整理在表 38。將表 38 中的不可稱解，整理於表 39 與圖 26。我們發現$(1,2,3,4)$在$1:2$的不等臂天平中，除了 15 磅是不可稱。在$1:3$的不等臂天平中，除了 16、23 磅是不可稱。在$1:4$的不等臂天平中，除了 22、31 磅是不可稱。這三組不可稱解目前沒找到規律，但其中的某兩項公差為$2n$，為什麼有這種情形？作者還在討論中。其餘的不可稱解滿足 Y 形樹狀圖。

表 38：$(1,2,3,4)$砝碼在不等臂天平分析表

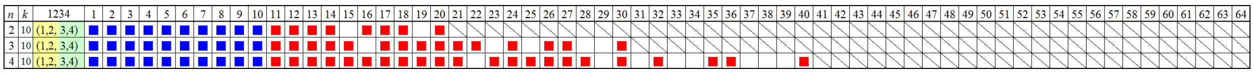


表 39： (1,2,3,4) 砝碼在不等臂天平整理

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱的重量	下界		上界	
2	10	20	15	15	例外	15	例外
			19	19	$(10-1)\times 2+1$	19	$(10-1+1)\times 2-1$
3	10	30	16	16	例外	16	例外
			23	23	例外	23	例外
			25	25	$(10-2)\times 3+1$	25	$(10-2+1)\times 3-2$
			28,29	28	$(10-1)\times 3+1$	29	$(10-1+1)\times 3-1$
4	10	40	22	22	例外	22	例外
			31	31	例外	31	例外
			29	29	$(10-3)\times 4+1$	29	$(10-3+1)\times 4-3$
			33,34	33	$(10-2)\times 4+1$	34	$(10-2+1)\times 4-2$
			37,38,39	37	$(10-1)\times 4+1$	39	$(10-1+1)\times 4-1$

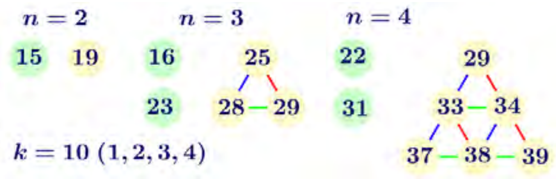


圖 26：10 磅分成 1,2,3,4 不可稱解

14. (2,3,4,5) 在 $1:2$ 、 $1:3$ 與 $1:4$ 不等臂天平中

而(2,3,4,5)是目前所有出現兩次以上，但是還沒找到規率唯一的一組，如表 40 所示，作者還在探討規律中。

表 40： (2,3,4,5) 砝碼在不等臂天平分析表

n	k	2345	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
2	14	(2,3,4,5)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■		■		■				■	╲	╲	╲	╲
3	14	(2,3,4,5)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■			■		
4	14	(2,3,4,5)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■		■		■	■	■

n	k	2345	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
2	14	(2,3,4,5)	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲
3	14	(2,3,4,5)	■	■		■						■	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲
4	14	(2,3,4,5)	■	■		■				■	■			■		■		■								■	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲

三、 $2:n$ 不等臂天平的討論

接著討論 $m:n$ 不等臂天平。從 $2:n$ 開始討論。目前發現 $2:3$ 有 8 組可稱解， $2:5$ 有 4 組可稱解！因為 $1:n$ 最大的可稱解發生在 $n=8$ ，所以我們考慮最多找到 $2:17$ 。而 $2:7$ 、 $2:9$ 、 $2:11$ 、 $2:13$ 、 $2:15$ 與 $2:17$ 尚未找到可稱解。 k 磅砝碼摔成四塊在 $2:3$ 不等臂天平上的部份可稱解列於工作手冊。結果整理於表 41。 k 磅砝碼摔成四塊在 $2:5$ 不等臂天平上的部份可稱解列於工作手冊。結果整理於表 42。表 41 與表 42 中，藍色方格表示 1 至 k 磅的可稱解；紅色方格表示 k 磅以上的可稱解。

表 41：6 磅至 13 磅砝碼 $2:3$ 不等臂天平可稱磅數表

k	2:3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
6	(1,1,1,3)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦			🟥	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲
6	(1,1,2,2)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦			🟥	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲	╲
8	(1,1,2,4)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥			🟥	╲	╲	╲	╲	╲	╲
8	(1,1,3,3)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥			🟥	╲	╲	╲	╲	╲	╲
9	(1,2,2,4)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦		🟥	🟥	╲	╲	╲	╲	╲	╲
10	(1,1,2,6)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥	🟥			🟥	╲	╲	╲
11	(1,2,2,6)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥		🟥	🟥	╲	╲	╲
13	(1,2,2,8)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥	🟥		🟥	🟥

表 42：8 磅至 11 磅砝碼 $2:5$ 不等臂天平可稱磅數表

k	2:5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
8	(1,1,2,4)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥	🟥			🟥	🟥	🟥					🟥	╲	╲	╲	╲	╲
8	(1,2,2,3)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥	🟥			🟥		🟥					🟥	╲	╲	╲	╲	╲
9	(1,2,2,4)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥		🟥	🟥	🟥	🟥				🟥	🟥	╲	╲	╲	╲	╲
11	(1,2,4,4)	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦			🟥	🟥		🟥	🟥	🟥	🟥				🟥	🟥

柒、結論

在等臂天平中：

一、在等臂天平中，作者找到並證明了 k 磅的砝碼分成 i 塊時，此時只有唯一可稱解，且 k 的上限值是 $\frac{3^i-1}{2}$；而當 k 的值小於 $\frac{3^i-1}{2}$ 時，可能不只一組可稱解。當 k 的值大於 $\frac{3^i-1}{2}$ 時，可稱解不存在。

二、在等臂天平中，當 $k \le 1+3+3^2+\ldots+3^{i-1}$ 時，此時必為可稱；且其中一組可稱解為 1 磅、3 磅、3^2 磅、...、3^{i-2} 與 $k-(1+3+3^2+\ldots+3^{i-2})$ 磅。

在 $1:n$ 的不等臂天平中：

三、目前找到 n 的最大值是 8，最大可測重量是在 $1:8$ 不等臂天平中可測得 64 磅。

四、若 k 磅砝碼在 $1:n$ 不等臂天平中可稱，則這一組砝碼最多可以測到 nk 磅重，而且 $nk-1$ 磅重必測不到。

五、找到 Y 型樹狀圖不可稱解的**一般式**。

> **當 $j=1,2,3,\ldots,n-2,n-1$ 時，會有 $n-j$ 個不可稱，而不可稱重量 x 的範圍滿足不等式：$(k-j)n+1 \le x \le (k-j+1)n-j$。**

六、找到 Y 型樹狀圖與 P 型樹狀圖中，當 a 為不可稱解，則 $a+n$ 與 $a+n+1$ 亦為不可稱。

七、當 $5 \le n \le 8$ 時，可以使用 Y 型樹狀圖與 P 型樹狀圖求出所有不可稱解的一般式。

八、在 $1:n$ 的不等臂天平中，當 $n=k=4$、5、6 與 7 時，$(1,1,1,1)$、$(1,1,1,2)$、$(1,1,2,2)$、$(1,1,2,3)$ 的可稱解的個數是公差為 -1 的等差數列，不可稱解的個數是公差為 1 的等差數列。

九、下一步希望使用 $1:n$ 不等臂天平的性質，推廣到 $m:n$ 不等臂天平的情形並持續對目前資料分析比對。目前 $2:n$ 不等臂天平找到 $2:3$ 與 $2:5$ 兩組。而 $3:n$ 以上不等臂天平的解尚未找到，$2:7$、$2:9$、$2:11$、$2:13$ 與 $2:15$ 尚未找到；目前進度是開始找 $3:4$ 的可稱解。

捌、參考資料

[1] 謝宜臻、蔡孟辰、李吾燕、曾嫚儀 (2016)。數字魔法所變出的超級砝碼。第 56 屆嘉義縣科學展覽會數學組第二名。

[2] 許志農(2014)。隱藏的和諧比看得見的和諧來得好…隱藏在天平上的和諧。2017 年 5 月 10 日，取自 pisa.math.ntnu.edu.tw/attachments/article/904/meet23.pdf

[3] 趙文敏(2004)。砝碼問題。**寓數學於遊戲第二輯**(p42~p43)。九章書局。

【評語】080403

此參展作品乃是將梅齊裏亞克的砝碼問題，由等臂天平延伸至不等臂天平的情況，深具挑戰性。作者由簡入繁地逐步進行研究問題的解析，其研究流程圖清楚呈現了控因與變因以及循序漸進的探討步驟符合科學探究的精神。

在等臂天平（1:1）的情形中，作者引進了 3 進位的概念來討論何時 k 磅砝碼碎裂成 i 塊時，可以利用等臂天平稱出 1 至 k 磅間，所有整數磅數物品的問題，並做出”當砝碼質量 $k=(3^{i-1})$ 時, i-碎裂是可稱的”的結論，這是一個很不錯的結果。

對於不等臂天平的問題，作者只探討到 1:n 的情形，其它情形（m:n）尚在努力中。作者雖未完全解決他想要討論的問題，但就其目前所呈現的研究成果，可看出他所下努力，值得嘉許。

作品海報

壹、 研究動機

作者推廣 1624 年德國數學家梅齊裏亞克的砝碼問題由等臂天平延伸至不等臂天平。考慮若 k 為正整數，一個 k 磅的砝碼，碎成 i 塊整數磅數的小砝碼，是否可以用等臂天平和這 i 塊的砝碼來稱 1 至 k 磅之間的整數磅數物品？進一步延伸是否可以用 $1:n$ 的**不等臂天平**和這 4 塊的砝碼來稱 1 至 nk 磅之間的整數磅數的物品？

貳、 研究目的

一、名詞解釋及定義

設 i 與 k 為正整數，m 與 n 為大於 1 且互質的正整數，$m<n$。待測物品可以放在天平的任一側，砝碼可以不全使用，可以放在天平的任一側。討論 k 磅砝碼分成 i 塊在等臂天平、$1:n$ 不等臂天平與 $m:n$ 不等臂天平中：

(一) **可稱**：k 磅的砝碼碎成 i 塊，若能稱出 1 磅至 k 磅之間整數磅數的物品，使用等臂天平時，稱為 $1:1$ **可稱**或**等臂可稱**；若使用 $1:n$ 不等臂天平，稱為 $1:n$ **可稱**；若使用 $m:n$ 不等臂天平，稱為 $m:n$ **可稱**。

(二) **可稱解**：在 $1:n$ **可稱**與 $m:n$ **可稱**中，k 磅的砝碼碎成 4 塊，所有可以稱出的磅數，稱為可稱解。

(三) **不可稱解**：在 $1:n$ **可稱**與 $m:n$ **可稱**中，大於 k 磅到最大可稱磅數之間無法稱出的重量，稱為不可稱解。

(四) **Y 型數狀圖與 P 型數狀圖**：研究過程出現不只一次的資料中，用這兩種數狀圖表示不可稱解的規律。

二、研究問題

(一) 在等臂天平中：

1. k 磅的砝碼分成 1 塊、2 塊、3 塊與 4 塊是是否可稱？
2. k 磅的砝碼分成 i 塊是否可稱？其一般式為何？

表 1：4 磅砝碼分成(1,1,1,1)

n	k	1111	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	4	(1,1, 1,1)	■	■	■	■	■	■		■								
3	4	(1,1, 1,1)	■	■	■	■	■	■		■	■			■				
4	4	(1,1, 1,1)	■	■	■	■		■	■	■			■	■				■

(二) 在**不等臂天平**中：

1. 在 $1:n$ **不等臂天平**與 $m:n$ **不等臂天平**中，k 磅的砝碼分成 4 塊是否可稱？
2. 在 $1:n$ **不等臂天平**中，找出 $1:n$ 不等臂天平有可稱解時，n 的最大值與最大可稱磅數。
3. 找出 $1:n$ **不等臂天平**中不可稱解的一般式。

參、 研究流程與方法

圖 1：研究流程圖

肆、 研究結果

一、等臂天平的討論

(一) 使用列舉法討論砝碼分成 1 塊、2 塊、3 塊與 4 塊的情形。

(二) 將 40 磅的砝碼分成 4 塊有 16 組。其中只有(1,3,9,27)為等臂可稱。

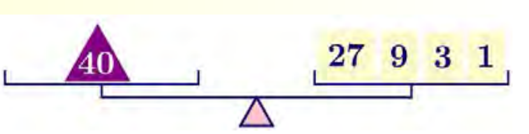


圖 2：滿足 40 磅砝碼分成 4 塊的等臂可稱

(三) 使用三進位來找其中一組解：砝碼與等臂天平有三個狀態，放在天平的左邊、右邊或不使用；以 100 磅的砝碼為例：

$$100=1\times3^4+0\times3^3+2\times3^2+0\times3^1+1\times3^0=1\times3^4+0\times3^3+(3-1)\times3^2+0\times3^1+1\times3^0$$

$$=1\times3^4+1\times3^3-1\times3^2+0\times3^1+1\times3^0=1\times81+1\times27-1\times9+0\times3+1\times1$$

即 1 磅、27 磅、81 磅砝碼放一邊，待測物品 100 磅與 9 磅砝碼放另一邊。

(四) k 磅的砝碼分成 i 塊的一種三進位解：我們發現只要將砝碼轉成 3 進位，並將 2 調整成 $3-1$，就可以直接找到待測重量與對應砝碼的關係。

(五) 當 $k\le1+3+3^2+\ldots+3^{i-1}$ 時，必為可稱；且其中一組砝碼重量為 1 磅、3 磅、3^2 磅、...、3^{i-2} 與 $k-(1+3+3^2+\ldots+3^{i-2})$ 磅。此時 k 的最大重量為 $\dfrac{3^i-1}{2}$ 磅。

二、不等臂天平的討論

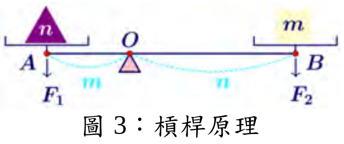


圖 3：槓桿原理

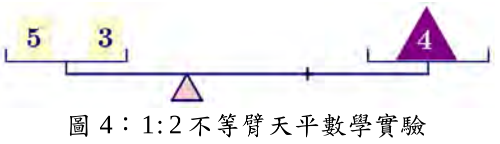


圖 4：1:2 不等臂天平數學實驗

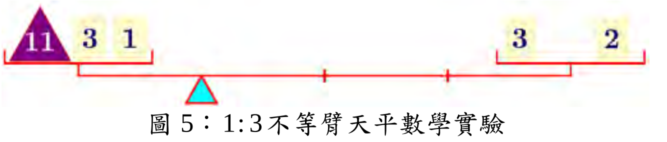


圖 5：1:3不等臂天平數學實驗

表 2：1:2 不等臂天平可稱解示例表

4＝1+1+1+1			
1+1＝1×2	2＝1×2	3+1＝(1+1)×2	4＝(1+1)×2
5+1＝(1+1+1)×2	6＝(1+1+1)×2		8＝(1+1+1+1)×2

三、資料轉換

(一) 分析出現不只一次的砝數組合在1:n不等臂天平中不可稱解的 Y 型數狀圖與 P 型數狀圖的性質與一般式。

表 3：12 組1:n不等臂天平分析表

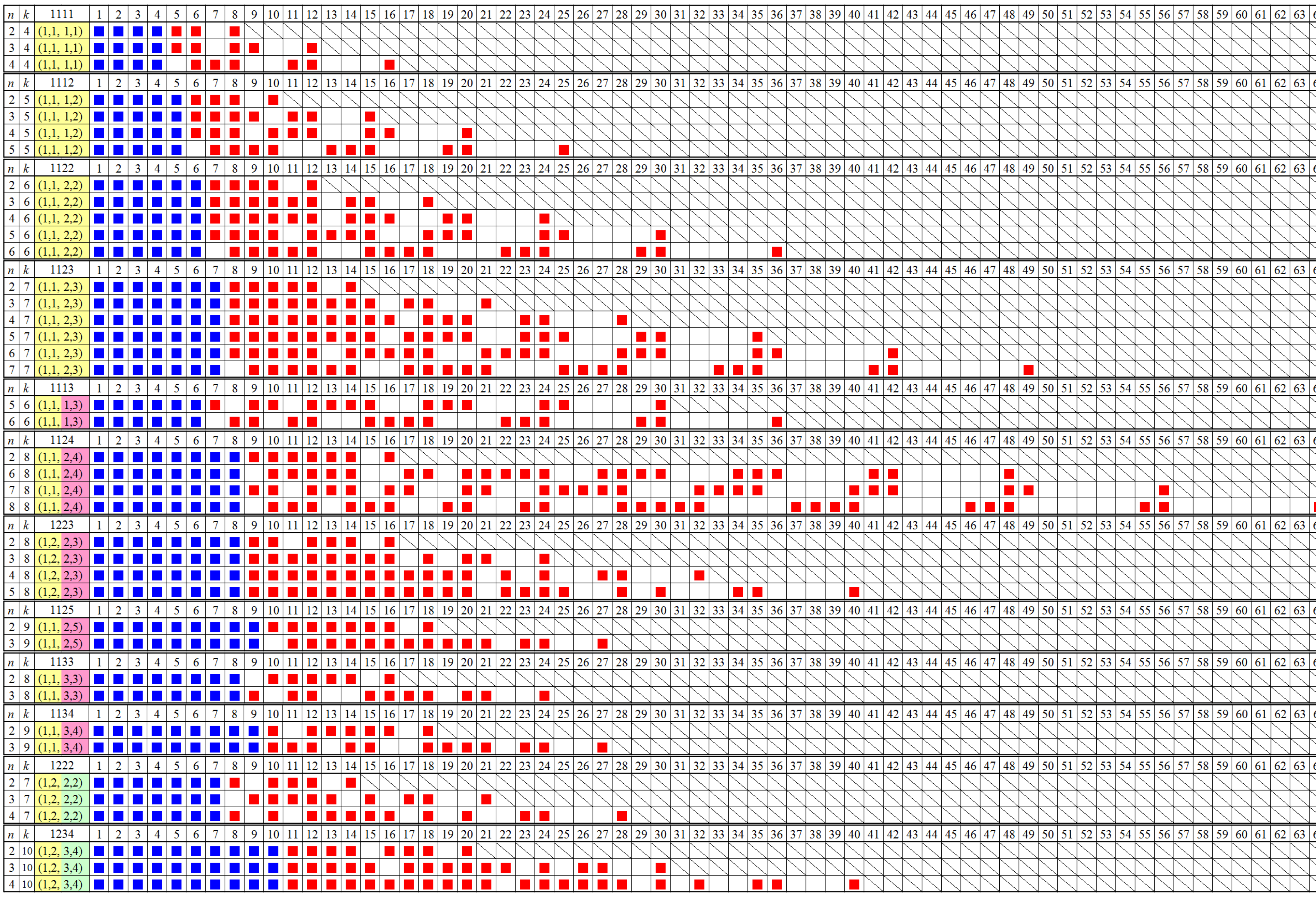


表 4：(1,1,1,1) 不可稱解重量整理表

n	k	最大可稱重量	每一區段 不可稱解	下界		上界	
2	4	8	7	7	(4−1)×2+1	7	(4−1+1)×2−1
3	4	12	7	7	(4−2)×3+1	7	(4−2+1)×3−2
			10,11	10	(4−1)×3+1	11	(4−1+1)×3−1
4	4	16	5	5	(4−3)×4+1	5	(4−3+1)×4−3
			9,10	9	(4−2)×4+1	10	(4−2+1)×4−2
			13,14,15	13	(4−1)×4+1	15	(4−1+1)×4−1

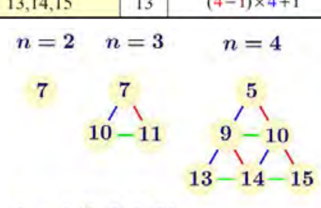


圖 6：(1,1,1,1)不可稱解

表 5：(1,1,1,2) 不可稱解重量整理表

n	k	最大可稱重量	每一區段 不可稱解	下界		上界	
2	5	10	9	9	(5−1)×2+1	9	(5−1+1)×2−1
3	5	15	10	10	(5−2)×3+1	10	(5−2+1)×3−2
			13,14	13	(5−1)×3+1	14	(5−1+1)×3−1
4	5	20	9	9	(5−3)×4+1	9	(5−3+1)×4−3
			13,14	13	(5−2)×4+1	14	(5−2+1)×4−2
			17,18,19	17	(5−1)×4+1	19	(5−1+1)×4−1
5	5	25	6	6	(5−4)×5+1	6	(5−4+1)×5−4
			11,12	11	(5−3)×5+1	12	(5−3+1)×5−3
			16,17,18	16	(5−2)×5+1	18	(5−2+1)×5−2
			21,22,23,24	21	(5−1)×5+1	24	(5−1+1)×5−1

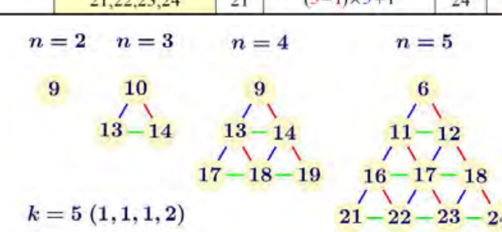


圖 7：(1,1,1,2)不可稱解

表 6：(1,1,2,3) 不可稱解重量整理表

n	k	最大可稱重量	每一區段 不可稱解	下界		上界	
2	7	14	13	13	(7−1)×2+1	13	(6−1+1)×2−1
3	7	21	16	16	(7−2)×3+1	16	(6−2+1)×3−2
			19,20	19	(7−1)×3+1	20	(6−1+1)×3−1
4	7	28	17	17	(7−3)×4+1	17	(6−3+1)×4−3
			21,22	21	(7−2)×4+1	22	(6−2+1)×4−2
			25,26,27	25	(7−1)×4+1	27	(6−1+1)×4−1
5	7	35	16	16	(7−4)×5+1	16	(6−4+1)×5−4
			21,22	21	(7−3)×5+1	22	(6−3+1)×5−3
			26,27,28	26	(7−2)×5+1	28	(6−2+1)×5−2
			31,32,33,34	31	(7−1)×5+1	34	(6−1+1)×5−1
6	7	42	13	13	(7−5)×6+1	13	(6−5+1)×6−5
			19,20	19	(7−4)×6+1	20	(6−4+1)×6−4
			25,26,27	25	(7−3)×6+1	27	(6−3+1)×6−3
			31,32,33,34	31	(7−2)×6+1	34	(6−2+1)×6−2
			37,38,39,40,41	37	(7−1)×6+1	41	(6−1+1)×6−1
7	7	49	8	8	(7−6)×7+1	8	(7−6+1)×7−6
			15,16	15	(7−5)×7+1	16	(7−5+1)×7−5
			22,23,24	22	(7−4)×7+1	24	(7−4+1)×7−4
			29,30,31,32	29	(7−3)×7+1	32	(7−3+1)×7−3
			36,37,38,39,40	36	(7−2)×7+1	40	(7−2+1)×7−2
			43,44,45,46,47,48	43	(7−1)×7+1	48	(7−1+1)×7−1

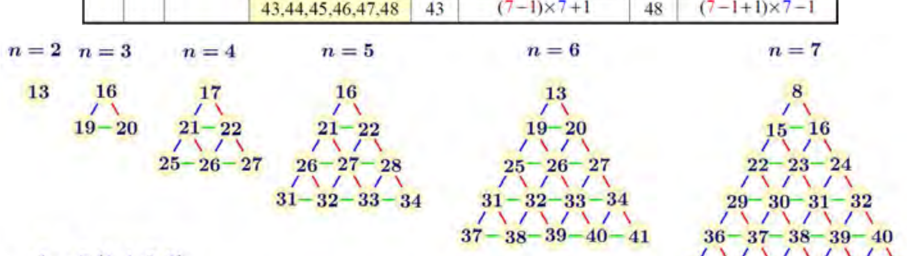


圖 8：(1,1,2,3)不可稱解

表 7：(1,1,2,2) 不可稱解重量整理表

n	k	最大可稱重量	每一區段 不可稱解	下界		上界	
2	6	12	11	11	(6−1)×2+1	13	(6−1+1)×2−1
3	6	18	13	13	(6−2)×3+1	13	(6−2+1)×3−2
			16,17	16	(6−1)×3+1	17	(6−1+1)×3−1
4	6	24	13	13	(6−3)×4+1	13	(6−3+1)×4−3
			17,18	17	(6−2)×4+1	18	(6−2+1)×4−2
			21,22,23	21	(6−1)×4+1	23	(6−1+1)×4−1
5	6	30	11	11	(6−4)×5+1	11	(6−4+1)×5−4
			16,17	16	(6−3)×5+1	17	(6−3+1)×5−3
			21,22,23	21	(6−2)×5+1	23	(6−2+1)×5−2
			26,27,28,29	26	(6−1)×5+1	29	(6−1+1)×5−1
6	6	36	7	7	(6−5)×6+1	7	(6−5+1)×6−5
			13,14	13	(6−4)×6+1	14	(6−4+1)×6−4
			19,20,21	19	(6−3)×6+1	21	(6−3+1)×6−3
			25,26,27,28	25	(6−2)×6+1	28	(6−2+1)×6−2
			31,32,33,34,35	31	(6−1)×6+1	35	(6−1+1)×6−1

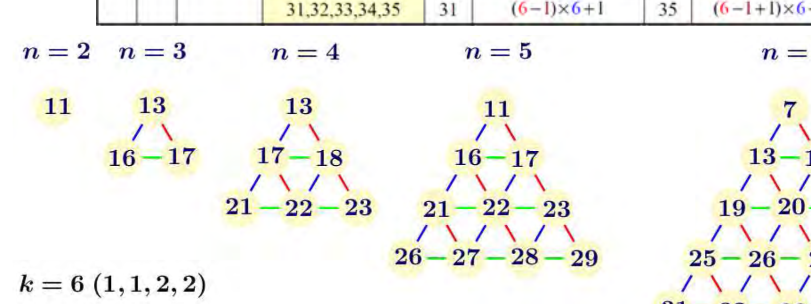


圖 9：(1,1,2,2)不可稱解

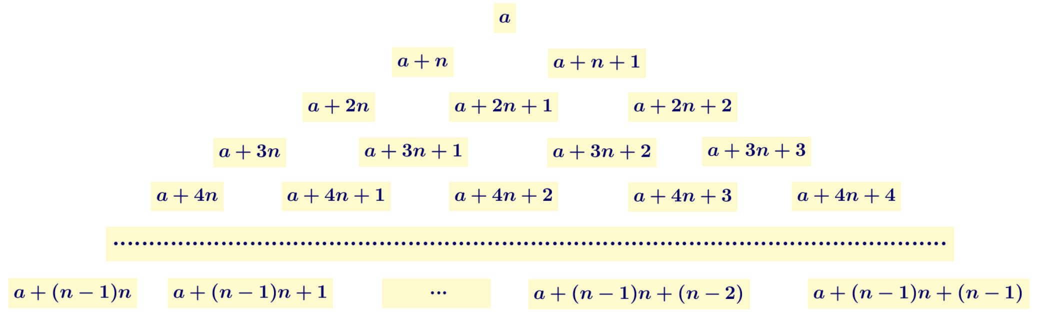


圖 10：不可稱解砝數一般式

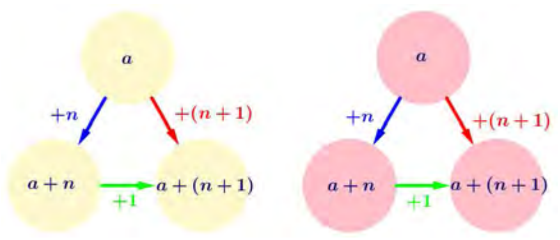


圖 11：Y 型數狀圖與 P 型數狀圖規律圖

Y 型數狀圖不可稱解性質與一般式：

1. 最大可稱砝數為 nk 砝；而且 $nk-1$ 砝必為不可稱解；共有 $n-1$ 層；
2. 不可稱解的個數為 $\dfrac{n(n-1)}{2}$；可稱解的個數為 $nk-\dfrac{n(n-1)}{2}$。
3. 若 a 砝為不可稱解，則 $a+n$ 砝與 $a+n+1$ 砝必為不可稱解。
4. 當 $j=1,2,3,\ldots,n-2,n-1$ 時，會有 $n-j$ 個不可稱。且不可稱重量 x 的範圍滿足不等式：
   $(k-j)n+1\le x\le(k-j+1)n-j$。

表 8：(1,1,2,4) 不可稱解重量整理表

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱解	下界		上界	
6	8	48	9	9	$(8-7)\times6+3$	9	$(8-7+1)\times6-3$
			15,16	15	$(8-6)\times6+3$	16	$(8-6+1)\times6-2$
			19	19	$(8-5)\times6+1$	19	$(8-5+1)\times6-5$
			25,26	25	$(8-4)\times6+1$	26	$(8-4+1)\times6-4$
			31,32,33	31	$(8-3)\times6+1$	33	$(8-3+1)\times6-3$
			37,38,39,40	37	$(8-2)\times6+1$	40	$(8-2+1)\times6-2$
			43,44,45,46,47	43	$(8-1)\times6+1$	47	$(8-1+1)\times6-1$
7	8	56	11	11	$(8-7)\times7+4$	11	$(8-7+1)\times7-3$
			15	15	$(8-6)\times7+1$	15	$(8-6+1)\times7-6$
			18,19	18	$(8-6)\times7+4$	19	$(8-6+1)\times7-2$
			22,23	22	$(8-5)\times7+1$	23	$(8-5+1)\times7-5$
			29,30,31	29	$(8-4)\times7+1$	31	$(8-4+1)\times7-4$
			36,37,38,39	36	$(8-3)\times7+1$	39	$(8-3+1)\times7-3$
			43,44,45,46,47	43	$(8-2)\times7+1$	47	$(8-2+1)\times7-2$
			50,51,52,53,54,55	50	$(8-1)\times7+1$	55	$(8-1+1)\times7-1$
8	8	64	9	9	$(8-7)\times8+1$	9	$(8-7+1)\times8-7$
			13	13	$(8-7)\times8+5$	13	$(8-7+1)\times8-3$
			21,22	21	$(8-6)\times8+5$	22	$(8-6+1)\times8-2$
			17,18	17	$(8-6)\times8+1$	18	$(8-6+1)\times8-6$
			25,26,27	25	$(8-5)\times8+1$	27	$(8-5+1)\times8-5$
			33,34,35,36	33	$(8-4)\times8+1$	36	$(8-4+1)\times8-4$
			41,42,43,44,45	41	$(8-3)\times8+1$	45	$(8-3+1)\times8-3$
			49,50,51,52,53,54	49	$(8-2)\times8+1$	54	$(8-2+1)\times8-2$
			57,58,59,60,61,62,63	57	$(8-1)\times8+1$	63	$(8-1+1)\times8-1$

表 9：(1,2,2,2) 不可稱解重量整理表

n	k	最大可稱重量	每一區段				
			不可稱解	下界		上界	
2	7	14	9	9	例外	9	例外
			13	13	$(7-1)\times2+1$	13	$(7-1+1)\times2-1$
3	7	21	8	8	例外	8	例外
			14	14	例外	14	例外
			16	16	$(7-2)\times3+1$	16	$(7-2+1)\times3-2$
			19,20	19	$(7-1)\times3+1$	20	$(7-1+1)\times3-1$
4	7	28	9	9	例外	9	例外
			11	11	例外	11	例外
			19	19	例外	19	例外
			17	17	$(7-3)\times4+1$	17	$(7-3+1)\times4-3$
			21,22	21	$(7-2)\times4+1$	22	$(7-2+1)\times4-2$
			25,26,27	25	$(7-1)\times4+1$	27	$(7-1+1)\times4-1$

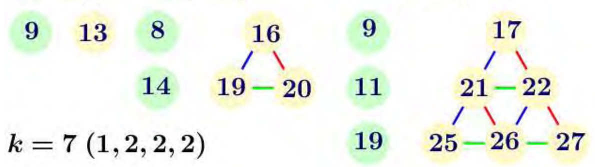


圖 13：(1,2,2,2)不可稱解

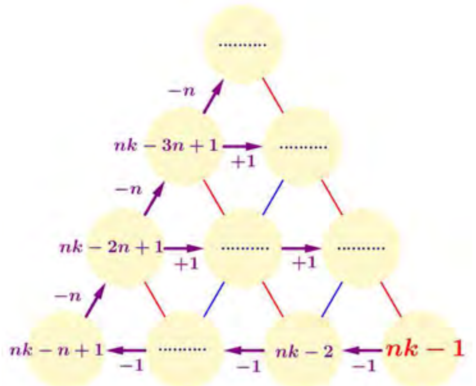


圖 14：利用不變量與逆推法找 Y 型數狀圖

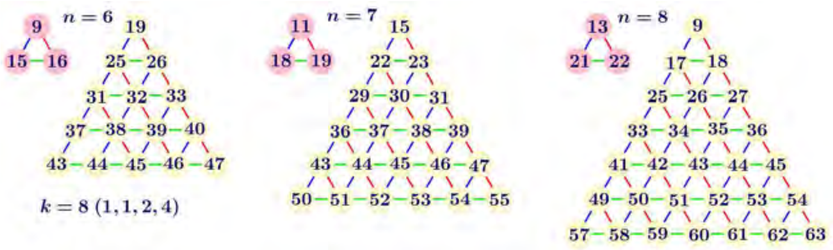
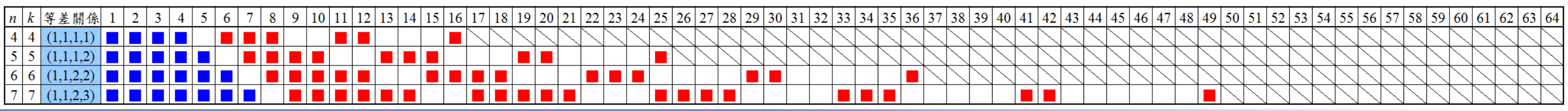


圖 12：(1,1,2,4)不可稱解

(二) 等差關係：

表 10：可稱解個數與不可稱解個數在不等臂天平的等差關係



伍、結論與未來展望

(一) 在等臂天平中：

作者找到並證明了 k 砝的砝碼分成 i 塊時，k 的上限值是 $\dfrac{3^i-1}{2}$，且此時只有一組可稱解。

(二) 在不等臂天平中：

1. 若 k 砝砝碼在 $1:n$ 不等臂天平中可稱，則這組砝碼最大可稱砝數為 nk，而且 $nk-1$ 砝必為不可稱解。
2. 在 $1:n$ 不等臂天平中，n 的最大值為 8。最大可稱重量是在 $1:8$ 不等臂天平中可稱得 64 砝。
3. 找到 Y 型數狀圖不可稱解的**一般式**；而 P 型數狀圖中不可稱解的一般式，尚在討論中。
4. 找到 Y 型數狀圖與 P 型數狀圖中，當 a 為不可稱解，則 $a+n$ 與 $a+n+1$ 亦為不可稱。
5. 當 $n=5$、6、7、8 時，可以使用 Y 型數狀圖與 P 型數狀圖求出所有不可稱解的一般式。
6. 在表 10 中可稱解的個數是公差為 -1 的等差數列，不可稱解的個數是公差為 1 的等差數列。

(三) 未來展望：

使用 $1:n$ 不等臂天平的性質，推廣到 $m:n$ 不等臂天平的情形；並持續對目前資料分析比對。目前 $2:n$ 不等臂天平找到 $2:3$ 與 $2:5$ 兩組，而 $2:7$、$2:9$、$2:11$、$2:13$、$2:15$ 與 $2:17$ 尚未找到可稱解。

參考資料

[1] 謝宜臻、蔡孟辰、李吾燕、曾嫚儀 (2016)。數字魔法所變出的超級砝碼。第 56 屆嘉義縣科學展覽會數學組第二名。

[2] 許志農(2014)。**隱藏的和諧比看得見的和諧來得好…隱藏在天平上的和諧**。2017 年 5 月 10 日，取自 pisa.math.ntnu.edu.tw/attachments/article/904/meet23.pdf

[3] 趙文敏(2004)。砝碼問題。**寓數學於遊戲第二輯**(p42~p43)。九章書局。