中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第二名

080402

一直乘以2

學校名稱：新北市樹林區大同國民小學

作者：	指導老師：
小五 黃子恆	顏榮皇
小四 廖凡儀	吳孟貞

關鍵詞：影響區域、遞迴、有向圖

摘要

這個遊戲是個層層堆疊的數列，代表了一種有趣的乘法結果記錄：某一層的數列是將上一層的每一碼**乘以 2** 的乘積，依序排列起來。我們要求的是在第幾層時數列的長度會超過 1000 位？

我們還研究了乘數是 3、4、5、⋯、10 的情形。

本作品使用的方法為直觀觀察、樹狀圖和有向圖，去找到遞迴式。很遺憾，一直乘以 7 沒有找到一般式。然而，我們可以利用有向圖求得：給定某次運算後，知道其數字分佈後，透過「矩陣運算」得到下次運算後的長度。

壹、前言

一、題目來源

學校辦理數學競賽，有一道題目[1]。

題目 1.1.1. 小定剛學背九九乘法表時，把 2 的九九乘法背得很熟。

$$2\times1=2，2\times2=4，\ldots\ldots，2\times9=18$$

他記得老師說，學會九九乘法表就可以做乘法了。於是小定大展身手，從 1 開始一直乘以 2，寫下一連串的結果。但是，他以為對的乘法是錯的，因為每一次他都把每一個數字乘以 2，然後再寫在一起。比如小定把 16「乘以 2」是得到 212，因為他以為是把 1×2=2 以及 6×2=12 拆開來乘再合在一起，所以

$$16\times2=212 \tag{1.1.2}$$

於是從 1 開始他得到

1
2
4
8
16
212
424
848
16816
21216212
424212424
848424848
1681684816816
21216212168162121 6212
4242124242121621242421 2424

圖 1.1.3

請問，

從 1 開始「乘以 2」3 次，得到的答案是多少數值? (1.1.4)

從 1 開始「乘以 2」10 次，得到的答案是多少數值? (1.1.5)

給定 10 進位，從 1 開始至少要「乘以 2」幾次，得到的答案超過 1000 位數? (1.1.6)

二、名詞定義

規定

定義 1.2.1. $G_{i,j}^{n,k}$：一直乘以 n，k 進位法，乘 i 次，從左邊往右數到第 j 個。

一直乘以 2 為例，

$1=G_{0,1}^{2,10}$，$2=G_{1,1}^{2,10}$，$4=G_{2,1}^{2,10}$，$8=G_{3,1}^{2,10}$，$16=G_{4,1}^{2,10}G_{4,2}^{2,10}$，$212=G_{5,1}^{2,10}G_{5,2}^{2,10}G_{5,3}^{2,10}$。

規定

定義 1.2.2. $\left|G_i^{n,k}\right|$：一直乘以 n，k 進位法，乘 i 次的長度。

如此，

$1=G_{0,1}^{2,10}$，但，為了作遞迴式規定 $\left|G_0^{2,10}\right|=1$。 (1.2.3)

規定

定義 1.2.4. $\left(G_{i,j}^{n,k},\ G_{i,t}^{n,k}\right)$ 為一直乘以 n，k 進位法，乘 i 次，第 j 個數字到第 t 個數字，其中，$j \le t$。

例如，$\left(G_{4,1}^{2,10},\ G_{4,2}^{2,10}\right)=16=G_{4,1}^{2,10}G_{4,2}^{2,10}$，$\left(G_{5,1}^{2,10},\ G_{5,3}^{2,10}\right)=212=G_{5,1}^{2,10}G_{5,2}^{2,10}G_{5,3}^{2,10}$，$\left(G_{i,j}^{n,k},\ G_{i,j}^{n,k}\right)=G_{i,j}^{n,k}$。

三、研究目的

研究一直乘以某一個小於 10 的自然數，進位後即佔住其位置，$\left|G_i^{n,10}\right|$ 長度的一般式。

四、文獻探討

(一)乘法:　　第 44 屆國展國小組數學科「乾坤大挪移 AB×CD＝BA×DC 的研究」[2，P1]。
(二)遞迴運算:第 44 屆國展國小組數學科「小朋友上樓梯一費氏數列的推廣與應用」[3，P6]。
(三)矩陣運算:第 51 屆國展國小組數學科「方塊田田又填填」[4，P5]。如圖 1.4.1、圖 1.4.2 及圖 1.4.3。

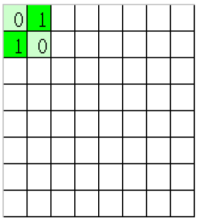


圖 1.4.1

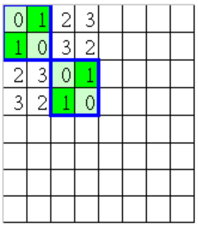


圖 1.4.2

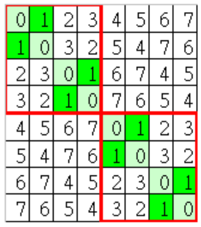


圖 1.4.3

(四)基底轉換:第 56 屆國展國小組數學科「螞蟻回家—等角環形最短路徑之探討」[5，P2]。
(五)自我相似:第 56 屆國展國小組數學科「神算」[6，P14]。
(六)尺規作圖:第 48 屆國展國中數學科，「弧弧相切－多邊形內相切弧的探討」[7，P7]。

五、本研究的特色

一、這是臺灣國際科展及全國科展第一篇討論特殊乘法長度的作品，如圖 1.1.3.及圖 1.5.1。
二、利用遞迴、奇偶性猜測、有向圖、變形有向圖、矩陣等不同的數學方法，尋找$\left|G_i^{n,k}\right|$的長度。如圖 1.5.1、圖 1.5.2、圖 1.5.3、圖 1.5.4 及圖 1.5.5。
三、提出數學的一般式演算方法後，針對這種整數數學運算後的數量問題、對稱性、存在性、唯一性、自我相似及基底轉換提出討論。
四、提出通訊碼的構想。

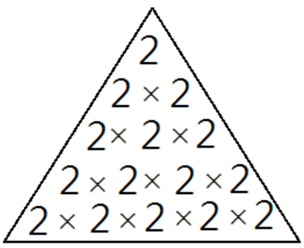


圖 1.5.1

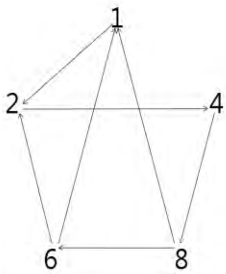


圖 1.5.2

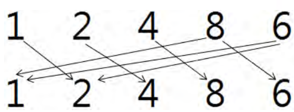


圖 1.5.3

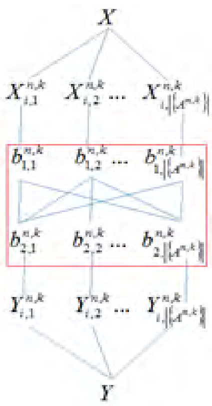


圖 1.5.4

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

圖 1.5.5

貳、10 進位，一直乘以 2

一、直觀觀察

已經知道

$$1\times 2=2\text{。} \tag{2.1.1}$$

$$2\times 2=4\text{。} \tag{2.1.2}$$

$$4\times 2=8\text{。} \tag{2.1.3}$$

$$8\times 2=16\text{。} \tag{2.1.4}$$

$$6\times 2=12\text{。} \tag{2.1.5}$$

發現

事實 2.1.6. 2=$G_{1,1}^{2,10}$，$\left|G_1^{2,10}\right|$=1；212=$G_{5,1}^{2,10}G_{5,2}^{2,10}G_{5,3}^{2,10}$，$\left|G_5^{2,10}\right|=3$
$\left|G_2^{2,10}\right|$=1，$\left|G_3^{2,10}\right|$=1，$\left|G_4^{2,10}\right|$=2，$\left|G_6^{2,10}\right|$=3，$\left|G_7^{2,10}\right|$=3，$\left|G_8^{2,10}\right|$=5，$\left|G_9^{2,10}\right|$=8，
$\left|G_{10}^{2,10}\right|$=9，$\left|G_{11}^{2,10}\right|$=9，$\left|G_{12}^{2,10}\right|$=13，$\left|G_{13}^{2,10}\right|$=21，$\left|G_{14}^{2,10}\right|$=26。

得到

i=11>9=$\left|G_{11}^{2,10}\right|$，但是，$i$=12<13=$\left|G_{12}^{2,10}\right|$。

事實 2.1.7. 當 $i\le 11$ 時，$i\ge\left|G_i^{2,10}\right|$；當 $i\ge 12$ 時，$i\le\left|G_i^{2,10}\right|$。

事實 2.1.8. 10 進位，一直乘以 2 全部運算後，會出現偶數 2、4、6、8，但不出現 0；會出現奇數 1，但不出現 3、5、7、9。

性質 2.1.9. 當 $i<j$ 時，$\left|G_i^{2,10}\right|\le\left|G_j^{2,10}\right|$。

[證明] 依據事實 2.1.8，10 進位，一直乘以 2 的結果，只會出現 1、2、4、6、8。

由 $1\times 2=2$，$2\times 2=4$，$4\times 2=8$，運算後，只會讓長度維持 1 個。

由 $8\times 2=16$，$6\times 2=12$，運算後，只會讓長度變成 2 個。

性質 2.1.9.得證。 □

二、樹狀圖

發現

演算方法 2.2.1. 當以 10 為底，一直乘以 2，把各列的數字作下面的畫記
若，到下一列還是只有 1 個位置的數，寫成 0 和 |；
若，到下一列會變成占 2 個位置的數，寫成 1 和 |\。

根據式子 2.1.1 到式子 2.1.5，寫成 0 和｜，有$1\times2=2$，$2\times2=4$，$4\times2=8$的運算。
寫成 1 和｜⟍，有 6×2=12，8×2＝16 的運算。

如此，以 10 為底，一直乘以 2，前 9 列的運算，會有表 2.2.2 的情形。

表 2.2.2、一直乘以 2 的前 8 次運算

第幾次運算	以 10 進位的數值	標示	是否增加進位
0	1	｜	1
1	2	｜	0
2	4	｜	0
3	8	｜	0
4	16	｜⟍	01
5	212	｜ ｜⟍	001
6	424	｜ ｜ ｜	000
7	848	｜ ｜ ｜	000
8	16816	｜⟍ ｜ ｜⟍	101

撇開 1 不看，將成為一個三角形。此時，圖 2.2.3 也同圖 1.5.1。

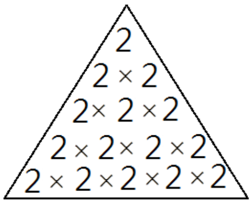


圖 2.2.3

那麼我們可以寫成

$$2^0=1，2^1=2，2^2=4，2^3=8，2^4=16。$$

但是，

若我們再進行 1 次運算，數列卻會變為$2^5=212$。

也就是

數值 8 的 2 次乘以 2 為 212。 (2.2.4)

得到

事實 2.2.5. 第 1 次出現｜標記，由數值 1 變成數值 2。
第 2 次出現｜標記，由數值 2 變成數值 4。
第 3 次出現｜標記，由數值 4 變成數值 8。
數值 8 之後的運算，$8\times2=16$，以｜⟍，前面的數值是 1，後 1 位的數值是 6。
數值 8 之後的 2 次運算以｜和｜⟍表示 1×2=2 和 6×2=12。

三、解的範圍

考慮做 2 的運算次數和$\left|G_i^{2,10}\right|$的長度，如圖 2.3.1。其中，$i \le 15$。

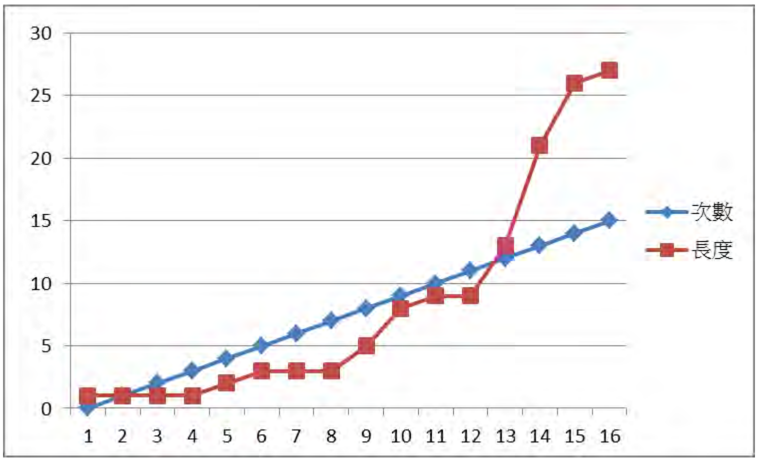


圖 2.3.1

再做$\left|G_i^{2,10}\right|$的長度和2^i數量的比較，此時，$i \le 10$，如圖 2.3.2。

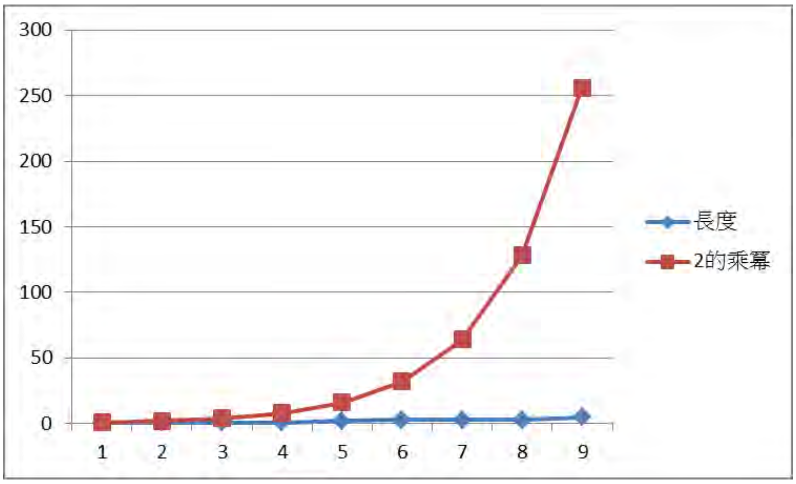


圖 2.3.2

如此，發現兩件事：在$i \le 15$成立，$\left|G_i^{2,10}\right|$的長度屬於遞增的函數。

2 的乘冪，增加得很快。

再考慮性質 2.1.9，得到

性質 2.3.3. $\left|G_i^{n,10}\right| \le \left|G_{i+1}^{n,10}\right| \le 2\times\left|G_i^{n,10}\right|$，其中，$n<10$，$n$ 為正整數。

[證明] $n<10$，n 為正整數，所以，$n \le 9$。

因為，經過一次乘以 n 的運算，$(n-1)\times(n-1) \le 9\times 9 = 81 < 100 = 10\times 10$。

性質 2.3.3.，得證。

參、影響區域

一、影響區域

規定

定義 3.1.1. 取 $G_{i,j}^{n,k}$ 和 $G_{s,t}^{n,k}$ ，若 $i<s$ ，且 $G_{i,j}^{n,k}$ 可以生成 $G_{s,t}^{n,k}$ ，則稱 $G_{s,t}^{n,k}$ 在 $G_{i,j}^{n,k}$ 的影響區域；
若 $i<s$ ，且 $G_{i,j}^{n,k}$ 不可以生成 $G_{s,t}^{n,k}$ ，則稱 $G_{s,t}^{n,k}$ 不在 $G_{i,j}^{n,k}$ 的影響區域。

例如， $G_{5,1}^{2,10}$=2 在 $G_{4,1}^{2,10}$=1 的影響區域內，但 $G_{5,3}^{2,10}$=2 不在 $G_{4,1}^{2,10}$=1 的影響區域內。

如此，會有

一個父親可能有 2 個兒子，如圖 3.1.2。
但，一個兒子不能有 2 個父親，
如圖 3.1.3，圖 3.1.4 的情形。

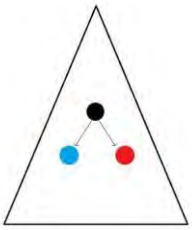


圖 3.1.2

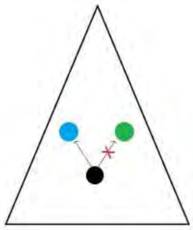


圖 3.1.3

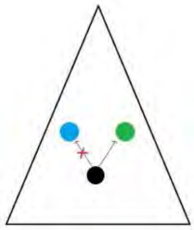


圖 3.1.4

考慮，函數的特性可以 1 對 1，也可以多對 1，函數不可以 1 對多，不可以多對多。
但，本研究的運算過程可以 1 對 1 也可以 1 對多，本研究不可以多對 1，也可以多對多。

事實 3.1.5. 影響區域的集合關係，只有兩種情形:
第一種情形包含關係，取 $G_{i,j}^{n,k}$ 和 $G_{s,t}^{n,k}$ ，
若 $i<s$ ，且 $G_{s,t}^{n,k}$ 在 $G_{i,j}^{n,k}$ 的影響區域，如圖 3.1.6。
第二種情形交集為空集合，二者沒有交集，如圖 3.1.7。

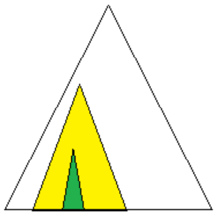


圖 3.1.6

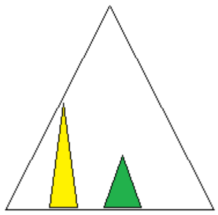


圖 3.1.7

換句話，

兩點的影響區域不是包含關係，就是交集是空集合，二選一。 (3.1.8)

二、可交換性

事實 3.2.1. 在 10 進位，一直乘以 2，設 $G_{i,j}^{2,10}=G_{i,t}^{2,10}=2$ ， $G_{i,j+1}^{2,10}=G_{i,t-1}^{2,10}=4$ ，如圖 3.2.2。

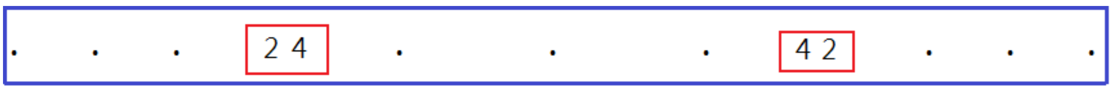


圖 3.2.2

此時，因為，$G_{i,j}^{2,10}=G_{i,t}^{2,10}=2$，$G_{i,j+1}^{2,10}=G_{i,t-1}^{2,10}=4$ 都在第 i 列，這 4 個數值的影響區域都不會互相影響，也就是，交集為空集合。如圖 3.2.3、圖 3.2.4 及圖 3.2.5。

如此，數列$(G_{i,j}^{2,10}, G_{i,j+1}^{2,10})=(24)$ 在經過 s 次運算後長度和數列 $(G_{i,t-1}^{2,10}, G_{i,t}^{2,10})=(42)$ 在第 s 次運算後長度相同。

此時，$s \geq i$。

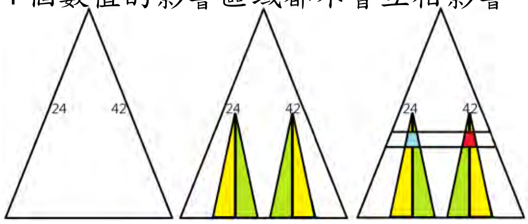


圖 3.2.3　圖 3.2.4　圖 3.2.5

圖 3.2.4 及圖 3.2.5 數值 2 影響區域為黃色，

數值 4 的影響區域為綠色。

數值 24 經過 s 次運算後長度為藍色，數值 42 經過 s 次運算後長度為紅色。

二者長度相同。

推理

性質 3.2.6. 數列 424 所產生的後代$\left|G_i^{2.10}\right|$長度和數列 244 所產生的後代的$\left|G_i^{2.10}\right|$的長度，互相相同。

[證明]數列 424 及數列 244 均有 2 個數值是 4，1 個數值是 1，其後代的影響區域互相獨立。

如圖 3.2.7、圖 3.2.8 及圖 3.2.9。其中，圖 3.2.9 經過 s 次運算的藍色長度和紅色長度等長。

性質 3.2.6，證明完畢。 □

不過，現實中，10 進位，一直乘以 2，會出現 424 的數列，不會出現 244 的數列。但是，計算$\left|G_i^{2.10}\right|$長度，只管其影響區域的關係，不討論某一個數列的排列順序。

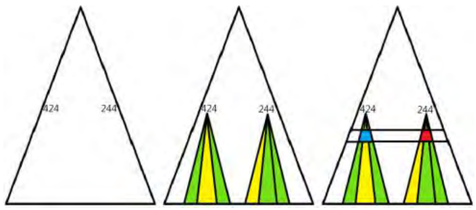


圖 3.2.7　圖 3.2.8　圖 3.2.9

性質 3.2.10. 若某兩數列，數值 a_1 各有 b_1 個，a_2 有各 b_2 個，a_3 有各 b_3 個，...，a_j 各有 b_j 個，則不論這兩個數列的數值的排列次序為何，二個數列的$\left|G_i^{n.10}\right|$長度均相同。其中，$n<10$。

[證明]後代影響區域，互相獨立。

性質 3.2.10 證明完畢。 □

推理

事實 3.2.11 數值 a_1 有 b_1 個，數值 a_2 有 b_2 個，數值 a_3 有 b_3 個，...，數值 a_j 有 b_j 個的數列，

$$若 \sum_{i-1}^{j} b_i = m \text{，則該排列的相異種類有 } \frac{m!}{\prod_{i=1}^{j}(b_i!)} \text{ 個。}$$

但是，不管怎麼排列，事實 3.2.11 的 $\frac{m!}{\prod_{i=1}^{j}(b_i!)}$ 個數列的$\left|G_i^{n.10}\right|$長度均相同。

性質 3.2.12. $\left(G_{i,j}^{n,k}, G_{i,t}^{n,k}\right)=\left(G_{s,u}^{n,k}, G_{s,v}^{n,k}\right)$，$\left(G_{i,j}^{n,k}, G_{i,t}^{n,k}\right)$下一次運算和$\left(G_{s,u}^{n,k}, G_{s,v}^{n,k}\right)$下一次運算的結果相同。

[證明]依照題目 1.1.1 的規定，任何運算後的位置，不會受到其他因素的影響。

也就是，一個父親可能會有 1 個兒子或 2 個兒子，如圖 3.1.2

但是，1 個兒子不會有兩個父親，如圖 3.1.3 及圖 3.1.4。

圖 3.2.13 為示意圖。

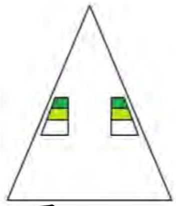


圖 3.2.13

性質 3.2.12 證明完畢。 □

肆、遞迴

以下討論遞迴的一般式

性質 4.1.1. 當 $i \geq 5$ 時，$\left|G_i^{2,10}\right| = 2\times\left|G_{i-4}^{2,10}\right| + \left|G_{i-5}^{2,10}\right|$。

[證明]事實 2.1.6，直觀觀察，10 進位，一直乘以 2 的結果。

依照性質 3.2.10，$\left(G_{i,j}^{n,k}, G_{i,t}^{n,k}\right)=\left(G_{s,u}^{n,k}, G_{s,v}^{n,k}\right)$，$\left(G_{i,j}^{n,k}, G_{i,t}^{n,k}\right)$下一次運算和$\left(G_{s,u}^{n,k}, G_{s,v}^{n,k}\right)$下一次運算的結果相同。

考慮圖，4.1.2，$\left|G_5^{2,10}\right| = 3$，$\left(G_{5,1}^{2,10}, G_{5,3}^{2,10}\right) = (212)$，2 個藍框及 1 個橘框。

$G_{0,1}^{2,10} = 1$，橘框；

$G_{1,1}^{2,10} = 2$，藍框。

圖 4.1.2

性質 4.1.1，證明完畢。 □

使用 Excel 軟體，發現$\left|G_{28}^{2,10}\right| = 781$ 及$\left|G_{29}^{2,10}\right| = 1048$。如此，我們可以得到

答案 4.1.3. 題目 1.1.1 中，式子 1.1.4、式子 1.1.5 和式子 1.1.6 的答案，如下

$\left|G_3^{2,10}\right|$=1，$\left|G_{10}^{2,10}\right|$=9，$\left|G_{28}^{2,10}\right| = 781 < 1000 < 1048 = \left|G_{29}^{2,10}\right|$。

發現

性質 4.1.4. 一直乘以 2，從左到右看，若出現 1、2 或 4，那麼這些碼的下一次運算得到的位數和原位數一致；若出現n_1個 6 或出現n_2個 8，下次運算就增加n_1+n_2位數。

[證明]因為 2×1，2×2，2×4 的積皆為 1 位數，而 2×6，2×8 的積皆為 2 位數。性質 4.1.5，得證。□

二、廣義的影響區域

讓我們考慮 10 進位，一直乘以 5，發現，

性質 4.2.1($\left|G_i^{5,10}\right|$ 遞迴式) $\left|G_0^{5,10}\right|=\left|G_1^{5,10}\right|=1$，$\left|G_2^{5,10}\right|=2$，$\left|G_3^{5,10}\right|=4$，$\left|G_4^{5,10}\right|=6$，且 $\left|G_i^{5,10}\right|=\left|G_{i-1}^{5,10}\right|+\left|G_{i-3}^{5,10}\right|+1$，$i\geq 4$。

[證明]圖 4.2.2，$\left|G_i^{5,10}\right|$ 紅框代表 $\left|G_{i-3}^{5,10}\right|$。
$\left|G_i^{5,10}\right|$ 藍框代表 $\left|G_{i-1}^{5,10}\right|$。
$\left|G_i^{5,10}\right|$ 紫框代表 1；因為數值 0 的長度是 1。

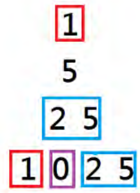


圖 4.2.2

性質 4.2.1，證明完畢。 □

推理，假設 k 進位，一直乘以 n，如圖 4.2.4 如此，我們可以得到

事實 4.2.3. $\left|G_0^{n,k}\right|=\left|G_1^{n,k}\right|=1$，$\left|G_2^{n,k}\right|=2$，$\left|G_3^{n,k}\right|=3$，$\left|G_i^{n,k}\right|=\left|G_{i-1}^{n,k}\right|+\left|G_{i-2}^{n,k}\right|+1$，$i\geq 4$。

事實 4.2.3，可以用圖 4.2.4 表示。

$\left|G_i^{n,k}\right|$ 紅框代表 $\left|G_{i-2}^{n,k}\right|$。$\left|G_i^{n,k}\right|$ 藍框代表 $\left|G_{i-1}^{n,k}\right|$。

$\left|G_i^{n,k}\right|$ 紫框代表 1；因為數值 0 的長度是 1。

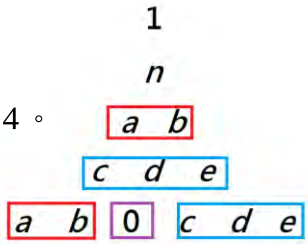


圖 4.2.4 □

再舉一例，有減法的情形

事實 4.2.5. $\left|G_0^{n,k}\right|=\left|G_1^{n,k}\right|=1$，$\left|G_2^{n,k}\right|=2$，$\left|G_3^{n,k}\right|=3$，

$\left|G_i^{n,k}\right|=3\times\left|G_{i-2}^{n,k}\right|+\left|G_{i-3}^{n,k}\right|-2\times\left|G_{i-4}^{n,k}\right|-2\times\left|G_{i-5}^{n,,k}\right|+\left|G_{i-6}^{n,k}\right|$，$i\geq 6$。

其演算步驟：步驟一：取 2 個 $\left|G_{i-2}^{n,k}\right|$，如圖 4.2.6。

步驟二：取 1 個數值 1，就是 $\left|G_{i-6}^{n,k}\right|$，如圖 4.2.7。

步驟三：取 1 個 $\left|G_{i-3}^{n,k}\right|-2\times\left|G_{i-5}^{n,k}\right|$，得到數值 b，如圖 4.2.8。

步驟四：取 1 個 $\left|G_{i-2}^{n,k}\right|-2\times\left|G_{i-4}^{n,k}\right|$，得到數值 c，如圖 4.2.9。

整理後，得到是事實 4.2.5。

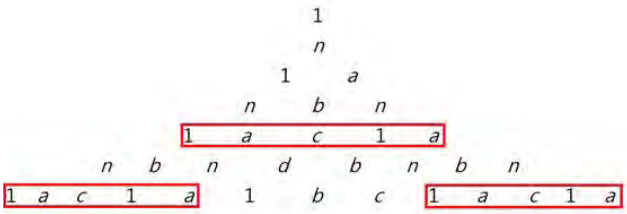


圖 4.2.6

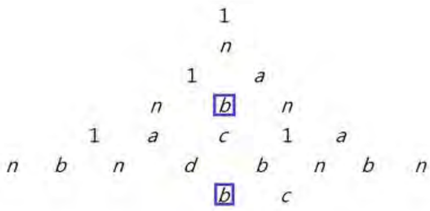


圖 4.2.7

圖 4.2.8

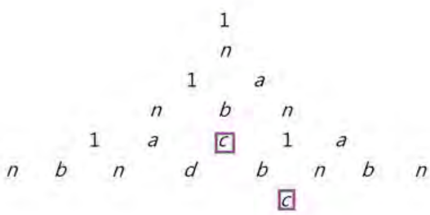


圖 4.2.9

三、當 $n=$3、4、6、8 及 9 時，求 $\left|G_i^{n,10}\right|$ 的長度

如此，我們會有

性質 4.3.1

一直乘以 3 的遞迴式:

$\left|G_0^{3,10}\right|=\left|G_1^{3,10}\right|=\left|G_2^{3,10}\right|=1$，$\left|G_3^{3,10}\right|=2$，$\left|G_4^{3,10}\right|=3$，$\left|G_5^{3,10}\right|=4$，$\left|G_6^{3,10}\right|=6$。

$\left|G_i^{3,10}\right|=\left|G_{i-3}^{3,10}\right|+2\times\left|G_{i-4}^{3,10}\right|+\left|G_{i-5}^{3,10}\right|+\left|G_{i-6}^{3,10}\right|$，$i\geq 6$。

性質 4.3.2

一直乘以 4 的遞迴式:

$\left|G_0^{4,10}\right|=\left|G_1^{4,10}\right|=1$，$\left|G_2^{4,10}\right|=2$，$\left|G_3^{4,10}\right|=3$，$\left|G_4^{4,10}\right|=5$，$\left|G_5^{4,10}\right|=8$，$\left|G_6^{4,10}\right|=13$。

$\left|G_i^{4,10}\right|=3\times\left|G_{i-2}^{4,10}\right|+\left|G_{i-3}^{4,10}\right|-2\times\left|G_{i-4}^{4,10}\right|-2\times\left|G_{i-5}^{4,10}\right|+\left|G_{i-6}^{4,10}\right|$，$i\geq 6$。

性質 4.3.3

一直乘以 6 的遞迴式:

$\left|G_0^{6,10}\right|=\left|G_1^{6,10}\right|=1$，$\left|G_2^{6,10}\right|=2$，$\left|G_3^{6,10}\right|=4$，$\left|G_4^{6,10}\right|=7$，$\left|G_5^{6,10}\right|=13$。

$\left|G_i^{6,10}\right|=4\times\left|G_{i-1}^{6,10}\right|-6\times\left|G_{i-2}^{6,10}\right|+5\times\left|G_{i-3}^{6,10}\right|-4\times\left|G_{i-4}^{6,10}\right|+3\times\left|G_{i-5}^{6,10}\right|$，$i\geq 5$。

性質 4.3.4

一直乘以 8 的遞迴式:

$\left|G_0^{8,10}\right|=\left|G_1^{8,10}\right|=1$，$\left|G_2^{8,10}\right|=2$，$\left|G_3^{8,10}\right|=4$，$\left|G_4^{8,10}\right|=8$，$\left|G_5^{8,10}\right|=15$。

$\left|G_i^{8,10}\right|=\left|G_{i-1}^{8,10}\right|+\left|G_{i-2}^{8,10}\right|+2\times\left|G_{i-4}^{8,10}\right|+\left|G_{i-5}^{8,10}\right|$，$i\geq 5$。

性質 4.3.5

一直乘以 9 的遞迴式:

$\left|G_0^{9,10}\right|=\left|G_1^{9,10}\right|=1$，$\left|G_2^{9,10}\right|=2$，$\left|G_3^{9,10}\right|=3$，$\left|G_4^{9,10}\right|=6$，$\left|G_5^{9,10}\right|=10$，$\left|G_6^{9,10}\right|=20$。

$\left|G_i^{9,10}\right|=\left|G_{i-1}^{9,10}\right|+4\times\left|G_{i-2}^{9,10}\right|-3\times\left|G_{i-3}^{9,10}\right|-3\times\left|G_{i-4}^{9,10}\right|+\left|G_{i-5}^{9,10}\right|$，$i\geq 6$。

為了流暢性，我們將遞迴的作法擺在平常的計算簿子，國展期間，拿給公開展出。

唯獨，10 進位，一直乘以 7 尚未找到遞迴式。這就是我們重新考慮研究方向。

四、以奇偶性求 $\left|G_i^{7,10}\right|$ 的長度猜想

將 10 進位，一直乘以 7，每次運算後乘積，如圖 4.4.1。將奇數以 1 表示，偶數則以 0 表示，可以將第 5 次運算結果，分成 3 個段落，藍色部分為 $\left|G_{i-1}^{7,10}\right|$，紅色部分為 $\left|G_{i-2}^{7,10}\right|$，綠色部分為 $\left|G_{i-5}^{7,10}\right|$。

1
7
49
2863
14564221
728354214147

圖 4.4.1

1
1
01
0001
10100001
10011000010101 → 10100001000111

圖 4.4.2

如圖 4.4.2。此時，解決我們的困擾，10 進位，一直乘以 7，猜測，如式子 4.4.3。

$$\left|G_i^{7,10}\right| = \left|G_{i-1}^{7,10}\right| + \left|G_{i-2}^{7,10}\right| + 2\times\left|G_{i-5}^{7,10}\right| \tag{4.4.3}$$

猜測這個方法，有其優點，也有其缺點。優點，我們可以減少資訊的干擾，如圖 4.4.2，猜測一般式，如式子 4.4.3。缺點是唯一性。

例如：0 代表偶數：在一直乘以 7 的過程，0 可能代表 2、4、6、8。雖然，一直乘以 7，0 不會出現；但，答案是 0，可能性有 4 種。

1 代表奇數：在一直乘以 7 的過程，1 可能代表 1、3、5、7、9。答案是 1，可能性有 5 種可能。

換句話，以兩個位數值來看，九九乘法表，一直乘以 7 有下列幾種情形

$7\times1=7$ ， 7 以奇偶性代表為 1。

$7\times2=14$ ，14 以奇偶性代表為 10。

$7\times3=21$ ，21 以奇偶性代表為 01。

$7\times4=28$ ，28 以奇偶性代表為 00。

$7\times5=35$ ，35 以奇偶性代表為 11。

$7\times6=42$ ，42 以奇偶性代表為 00。

$7\times7=49$ ，49 以奇偶性代表為 01。

$7\times8=56$ ，56 以奇偶性代表為 10。

$7\times9=63$ ，63 以奇偶性代表為 01。

反面思考，以奇偶性反推，答案是 1，有 1 種可能。

以奇偶性反推，答案是 00，有 2 種可能。

以奇偶性反推，答案是 01，有 3 種可能。

以奇偶性反推，答案是 10，有 2 種可能。

以奇偶性反推，答案是 11，有 1 種可能。

伍、有向圖

一、訊息的傳遞

回過頭來，重新直觀觀察 10 進位，一直乘以 2。

從有向圖思考，如圖 5.1.1；變成另一個有向圖的變形，如圖 5.1.2。

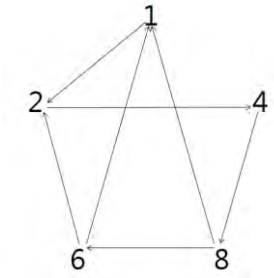


圖 5.1.1

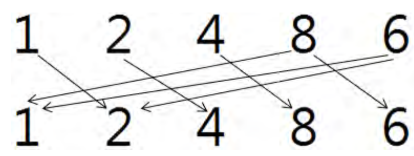


圖 5.1.2

此時，圖 5.1.1 同圖 1.5.2。圖 5.1.2 同圖 1.5.3。

如此，

式子 2.1.1、式子 2.1.2、式子 2.1.3、式子 2.1.4 及式子 2.1.5 的生成關係都可以在圖 5.1.1 表現。

圖 5.1.1 的有向關係也可以在式子 2.1.1、式子 2.1.2、式子 2.1.3、式子 2.1.4 及式子 2.1.5 表現。

同時，

式子 2.1.1、式子 2.1.2、式子 2.1.3、式子 2.1.4 及式子 2.1.5 的生成關係都可以在圖 5.1.2 表現。

圖 5.1.2 的有向關係也可以在式子 2.1.1、式子 2.1.2、式子 2.1.3、式子 2.1.4 及式子 2.1.5 表現。

最後，

圖 5.1.1 的有向線段的訊息，可以由圖 5.1.2 表示。

圖 5.1.2 的有向線段的訊息，可以由圖 5.1.1 表示。

也就是，式子 2.1.1、式子 2.1.2、式子 2.1.3、式子 2.1.4 及式子 2.1.5 的生成關係和圖 5.1.1 及圖 5.1.2 是一體兩面，傳遞的訊息互通。

二、反向思考

規定

定義 5.2.1　$\{A^{n,k}\}$：k 進位，所有一直乘以 n 曾經出現的數字所組成數列集合。

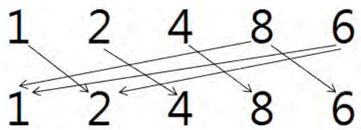
$\left|\{A^{n,k}\}\right|$：k 進位，所有一直乘以 n 曾經出現的數字所組成數列集合的長度。

$B^{n,k}$:　k 進位，取一直乘以 n 的所有出現數列集合 $\{A^{n,k}\}$，

包含輸入數列 $B_1^{n,k}$ 和輸出數列 $B_2^{n,k}$ 及其間關係。

例如，　$\{A^{2,10}\}=\{1,2,4,8,6\}=\{1,2,4,6,8\}$，$\{A^{5,10}\}=\{0,1,2,5\}$。

$\left|\{A^{2,10}\}\right|=5$，$\left|\{A^{5,10}\}\right|=4$。

$B^{2,10}$ 為 

，也就是圖 5.1.2。

由式子 2.1.1、式子 2.1.2、式子 2.1.3、式子 2.1.4 及式子 2.1.5 的生成關係，反向思考。

8 和 6 都可以生成 1。　(5.2.2)

1 和 6 都可以生成 2。　(5.2.3)

2 可以單獨生成 4。　(5.2.4)

4 可以單獨生成 8。　(5.2.5)

8 可以單獨生成 6。　(5.2.6)

我們再一次觀察圖 1.1.3，發現，一直乘以 2 的過程。

1 會生成 2，　(5.2.7)

2 會生成 4，　(5.2.8)

4 會生成 8，　(5.2.9)

8 會生成 1 和 6，　(5.2.10)

6 會生成 1 和 2。　(5.2.11)

三、計算 $\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$ 的方法

我們會得到計算 $\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$ 的方法。

演算方法 5.3.1 (計算 $\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$ 的方法)

步驟一：取 $\{A^{n,k}\}$，k 進位，所有一直乘以 n 曾經出現的數字所組成數列集合，$\left|\{A^{n,k}\}\right| \le k < \infty$。

步驟二：針對 $\{A^{n,k}\}$ 各數值，在第 i 次運算，填入對應 $B^{n,k}$ 的輸入數列 $B_1^{n,k}$ 及輸出數列 $B_2^{n,k}$。

如圖 5.1.1 為 10 進位，一直乘以 2 的有向圖。

步驟三：透過得 $B^{n,k}$ 有向圖，得知其有向關係，有關係者為連成直線，沒關係者不連成直線。如圖 5.1.2，為 10 進位，一直乘以 2 的變形有向圖。

步驟四：將步驟二的 $B_1^{n,k}$ 及步驟三的各關係數量相乘，依各輸出各數列 $B_2^{n,k}$ 得到個別的數量。

步驟五：將步驟四的 $B_2^{n,k}$ 得到個別的數量加總其數值的總和，得到 $\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$ 。

10 進位，一直乘以 2 示意圖如圖 5.3.2。

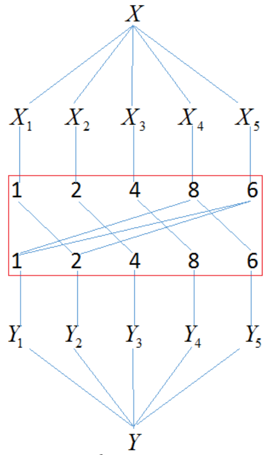


圖 5.3.2

四、10 進位，一直乘以 7

思考 10 進位，一直乘以 7，得到表 5.4.1。

表 5.4.1

$\{A^{7,10}\}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
生成關係			⍀	⍀	⍀	⍀	⍀	⍀	⍀	⍀
×7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
可交換性	7	41	12	82	53	24	94	65	36

如此，可以歸類成

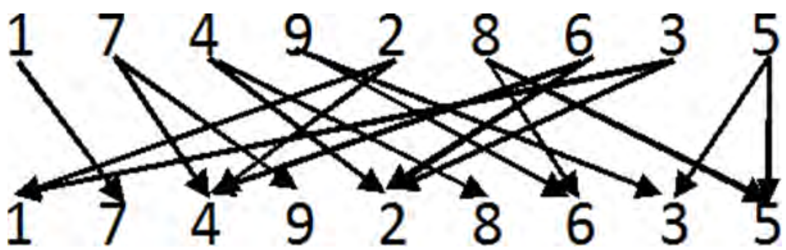


圖 5.4.2

再進一步，如圖 5.4.3。

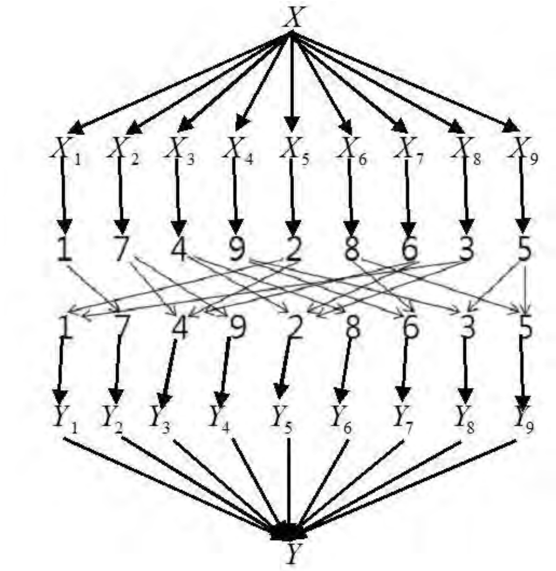


圖 5.4.3

一般式，如圖 5.4.4

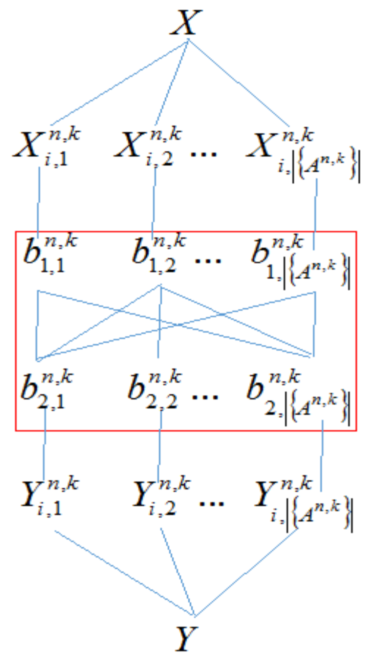


圖 5.4.4

如此，

依據演算方法 5.3.1 及圖 5.4.4，我們可以由$\left|G_i^{7,10}\right|$得到$\left|G_{i+1}^{7,10}\right|$的長度，也可以從$\left|G_i^{n,k}\right|$得到$\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$的長度。

陸、聯立方程組

我們嘗試利用矩陣解聯立方程組。

一、10 進位，一直乘以 2 的矩陣運算

規定

定義 6.1.1. $\left[d_{i,j}^{n,k}\right]_{\{A^{n,k}\}|\times|\{A^{n,k}\}}$ 為 $D^{n,k}$ ，第 i 列，第 j 行的數值。

$$d_{i,j}^{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{表示起始數列}\{A^{n,k}\}\text{第}i\text{個到終點數列}\{A^{n,k}\}\text{第}j\text{個,存在關係。} \\ 0, & \text{表示起始數列}\{A^{n,k}\}\text{第}i\text{個到終點數列}\{A^{n,k}\}\text{第}j\text{個,沒有關係。} \end{cases}$$

考慮: $D^{2,10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，如圖 1.5.5，則 $d_{2,5}^{2,10}$=1 存在關係， $d_{5,2}^{2,10} = 0$ ，沒有關係。

此時，$\left\{A^{2,10}\right\}$的排列，以$\{1,2,4,8,6\}$的順序排列。

此處的有關係，表示 $B^{2,10}$ 中，由數字 6 會生成數字 2。
此處沒有關係，表示 $B^{2,10}$ 中，由數字 2 會不生成數字 6。

很顯然，

$$d_{i,i}^{n,k} \text{ 為 } \left\{A^{n,k}\right\} \text{第 } i \text{ 個到自己的關係。} \tag{6.1.2}$$

10 進位，一直乘以 2，由 $B^{2,10}$ 的生成關係，製造一個大小為$\left|\{A^{2,10}\}\right| \times \left|\{A^{2,10}\}\right|$的矩陣。依$\{A^{2,10}\} = \{1,2,4,8,6\}$排列。

由式子 2.1.1 得知，矩陣第 1 列，依序寫 0，0，0，1，1。 (6.1.3)
由式子 2.1.2 得知，矩陣第 2 列，依序寫 1，0，0，0，1。 (6.1.4)
由式子 2.1.3 得知，矩陣第 3 列，依序寫 0，1，0，0，0。 (6.1.5)
由式子 2.1.4 得知，矩陣第 4 列，依序寫 0，0，1，0，0。 (6.1.6)
由式子 2.1.5 得知，矩陣第 5 列，依序寫 0，0，0，1，0。 (6.1.7)

$$這個矩陣為\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5} 。 \tag{6.1.8}$$

二、矩陣

定義 6.2.1. $\{A^{n,k}\}$ 以 $\left\{a_1^{n,k}, a_2^{n,k}, a_3^{n,k}, \ldots, a_{\left|\{A^{n,k}\}\right|}^{n,k}\right\}$ 表示橫列排序，$\left\{a_1^{n,k}, a_2^{n,k}, a_3^{n,k}, \ldots, a_{\left|\{A^{n,k}\}\right|}^{n,k}\right\}^T$ 為直列排序。其中，^{T} 表示轉置運算。

例如，

$\{A^{2,10}\} = \{1,2,4,8,6\} = \{1,2,4,6,8\}$，為了方便研究，以 $\{A^{2,10}\} = \{1,2,4,8,6\}$ 為代表，則

定義 6.2.2 $D^{n,k}$ 使用 $\{A^{n,k}\}$ 構成一個 $\left|\{A^{n,k}\}\right| \times \left|\{A^{n,k}\}\right|$ 的矩陣。如 10 進位，一直乘以 2 的矩陣。

$$D^{2,10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5} 。$$

$$\{1,2,4,8,6\}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}_{5\times 1} \text{，表示 1、2、4、8 和 6 分別的數量。} \tag{6.2.3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{5\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{5\times 1} \tag{6.2.4}$$

其中，式子 6.2.4 對照式子 6.2.3 而來。也就是，數列只有數值 1 的 1 個，經過 $D^{2,10}$ 的運算後，得到數列只有數值 2 的 1 個。

得到

數列由{1，0，0，0，0}^{T}，經過 1 次運算變成{0，1，0，0，0}^{T}

0+1+0+0+0=1。

$\left|G_0^{2,10}\right|$=1，同樣，$\left|G_1^{2,10}\right|$=1。 (6.2.5)

三、利用矩陣找$\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$的方法?

演算方法 6.3.1. 用矩陣找$\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$，作法如下

第一步驟，取$\{A^{n,k}\}$可以得知$\left|\{A^{n,k}\}\right|$。

第二步驟，設計$B^{n,k}$，將起始數列和結束數列各排成兩列，有生成關係畫有向線，沒生成關係不畫線。

第三步驟，設計$D^{n,k}$，其中，大小為$\left|\{A^{n,k}\}\right| \times \left|\{A^{n,k}\}\right|$。$d_{i,j}^{n,k} \in D^{n,k}$，$d_{i,j}^{n,k}$為第$i$列，第 j 行的數值。

$$\text{其中，}d_{i,j}^{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{表示起始數列}\{A^{n,k}\}\text{第}i\text{個到終點數列}\{A^{n,k}\}\text{第}j\text{個,存在關係。} \\ 0, & \text{表示起始數列}\{A^{n,k}\}\text{第}i\text{個到終點數列}\{A^{n,k}\}\text{第}j\text{個,沒有關係。} \end{cases}$$

第四步驟，給定某次運算後的結果，計算各個數字所對應的累積數字和。我們不妨規定為

$$\left(a_{i,1}^{n,k}, a_{i,2}^{n,k}, a_{i,3}^{n,k}, \ldots a_{i,\left|\{A^{n,k}\}\right|}^{n,k}\right)^T = F_i^{n,k}$$

$a_{i,j}^{n,k}$表示n進位，一直乘以k，第i次運算，$\{A^{n,k}\}$第j數字的結果

第五步驟，計算$D^{n,k} \times F_i^{n,k} = F_{i+1}^{n,k}$，再計算$F_{i+1}^{n,k}$內的數字和，即成為$\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$。

舉例，

10 進位，一直乘以 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{5\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{5\times1}$$

10 進位，一直乘以 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1}$$

因此，$\left(a_{1,1}^{2,10}, a_{1,2}^{2,10}, a_{1,3}^{2,10}, a_{1,4}^{2,10}, a_{1,5}^{2,10}\right)^T = F_1^{2,10} = 0+1+0+0+0 = 1$

$$\left(a_{1,1}^{5,10}, a_{1,2}^{5,10}, a_{1,3}^{5,10}, a_{1,4}^{5,10}\right)^T = F_1^{5,10} = 0+0+1+0 = 1$$

可以保證演算方法 6.3.1 正確無誤的理由，$B^{n,k}$ 的有向關係可以用 $D^{n,k}$ 的 0 與 1 的方式表示；反向思考，$D^{n,k}$ 的 0 與 1 的方式也可以用 $B^{n,k}$ 的有向關係表示。

運用矩陣運算，可以幫助我們解多元方程組，在經過 $D^{n,k}$ 的運算後，可以得到 $\left|G_i^{n,k}\right|$ 的長度。

四、當 $n<10$，$D^{n,10}$ 的矩陣

10 進位，一直乘以 n，$D^{n,10}$ 的表示，如下所示。

$$D^{2,10}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}_{5\times5}$$

圖 6.4.1

$$D^{3,10}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&1&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}_{8\times8}$$

圖 6.4.2

$$D^{4,10}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}_{6\times6}$$

圖 6.4.3

$$D^{5,10}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}_{4\times4}$$

圖 6.4.4

$$D^{6,10}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1\\1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}_{6\times6}$$

圖 6.4.5

$$D^{7,10}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}_{5\times5}$$

圖 6.4.6

$$D^{8,10}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\end{bmatrix}_{6\times 6}$$

圖 6.4.7

$$D^{9,10}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}_{9\times 9}$$

圖 6.4.8

柒、討論

一、長度解的存在性

這篇研究我們使用窮舉法、樹狀圖、有向圖法、遞迴式、變形有向圖及矩陣運算方法探討 10 進位，一直乘以 $n<10$。對於解的存在性，我們有幾樣發現。

第一種，窮舉法，給定 $n<10$，10 進位，一定有辦法在有限次數的運算，得到長度解。

第二種，樹狀圖，給定 $n<10$，10 進位，$\left|G_i^{n,10}\right|<\left|G_{i+1}^{n,10}\right|<2\times\left|G_i^{n,10}\right|$。

其理由是，$n<10$，10 進位，一直乘以 n。對於特定的數字乘以 n 最多是增加 2 位數。

第三種，有向圖法，給定 $n<10$，10 進位，做有向圖。每個 $\left\{A^{n,10}\right\}$ 的個數小於 10，可以推測在 10 進位，走最長但不重複的路徑一定小於 10。

第四種，遞迴法，我們還沒有發現，一直乘以 7 的遞迴式。但，經由其他一直乘以 n 的遞迴式，我們一定可以在有限次數計算 $\left|G_i^{n,k}\right|$。

第五種，矩陣法，給定 $n<10$，10 進位，計算 $\left|G_i^{n,k}\right|$，因為，尚未發現 $\left|G_i^{7,10}\right|$ 的遞迴式，讓我們反向思考，得到變形有向圖及矩陣運算方法。

對於 $\left|G_i^{n,10}\right|$ 的計算，我們知道矩陣的大小是 $\left|\{A^{n,k}\}\right|\times\left|\{A^{n,k}\}\right|$，而，$\left|\{A^{n,k}\}\right|\le 8$，有限次運算後，一定可以得到 $\left|G_i^{n,k}\right|$。

透過不同方法，我們找尋到 $\left|G_i^{n,k}\right|$ 的長度。

二、遞迴的唯一性

考慮 10 進位，一直乘以 3，其一般式可為

$$\left|G_{i}^{3,10}\right| = \left|G_{i-3}^{3,10}\right| + 2\times\left|G_{i-4}^{3,10}\right| + \left|G_{i-5}^{3,10}\right| + \left|G_{i-6}^{3,10}\right| \text{。} \tag{7.2.1}$$

$$\left|G_{i}^{3,10}\right| = \left|G_{i-1}^{3,10}\right| + \left|G_{i-3}^{3,10}\right| + \left|G_{i-4}^{3,10}\right| - \left|G_{i-6}^{3,10}\right| \text{。} \tag{7.2.2}$$

如圖 7.2.3 代表式子 7.2.1 及圖 7.2.4 代表式子 7.2.2

圖 7.2.3	圖 7.2.4
1	1
3	3
9	9
27	27
621	621
1863	1863
324189	324189
961232427	961232427
2718369612621	2718369612~~621~~
621 324918 27 1836 1863	6213249182718361863 → 271836612 324189 1863

圖 7.2.3　　圖 7.2.4

如此，我們可以得到，遞迴式不具有唯一性。

三、數量問題

考慮 10 進位，一直乘以 $n<10$，$\left|\{A^{n,10}\}\right|$ 的及 $B^{n,10}$ 關係。發現

事實 7.3.1　依 n 的奇偶性，$4=\left|\{A^{5,10}\}\right| < \left|\{A^{3,10}\}\right| = 8 < \left|\{A^{7,10}\}\right| = \left|\{A^{9,10}\}\right| = 9$；
$5=\left|\{A^{2,10}\}\right| < \left|\{A^{4,10}\}\right| = \left|\{A^{6,10}\}\right| = \left|\{A^{8,10}\}\right| = 6$。

事實 7.3.2　若 $2\le n\le 9$ 且 $\gcd(10,n)$=1，則 $\left|\{A^{n,k}\}\right|$ 非常大，有 7 或 9 兩種。
若 $2\le n\le 9$ 且 $\gcd(10,n)$>1，則 $\left|\{A^{n,k}\}\right|$ 比較小，有 4、5 或 6 共三種。

事實 7.3.3　$B^{5,10}$ 結構，有關係數量有 6 個。其中，有關係指 $B^{5,10}$ 可以從輸入數列的某一數值找到輸出數列某數值的路徑。

事實 7.3.4　若 $2\le n\le 9$ 且 $\gcd(10,n)$=1，則 $\left|\{A^{n,k}\}\right|\times\left|\{A^{n,k}\}\right|$ 非常大，有 $8\times 8=64$ 或 $9\times 9=81$ 兩種。

事實 7.3.5　若 $2\le n\le 9$ 且 $\gcd(10,n)$>1，則 $\left|\{A^{n,k}\}\right|\times\left|\{A^{n,k}\}\right|$ 大小有 $4\times 4=16$，$5\times 5=25$，$6\times 6=36$，三種。

事實 7.3.6　$\{A^{k,10}\}$ 若被偶數相乘，則 $\{2,4,6,8\}\subset\{A^{k,10}\}$；此時，$2\le k<10$。。

事實 7.3.7　$\{A^{k,10}\}$ 若被奇數相乘且 $k\ne 5$，則 $\{2,4,6,8\}\subset\{A^{k,10}\}$；此時，$2\le k<10$。

猜想 7.3.8　若 $2n$ 進位，一直乘以 n ，則 $\left|\{A^{n,2n}\}\right| \le \left|\{A^{k,2n}\}\right|$ ，其中， $2 \le k \le 2n-1$ 。

這個現象，很像一道科展題目。「弧弧相切－多邊形內相切弧的探討」。[7]
取一個每邊等長的正 n 邊形，若以頂點為圓心，以邊的一半長為半徑畫圓弧，則畫 n 次圓弧後，會回到從前出發的地方。如圖 7.3.9。

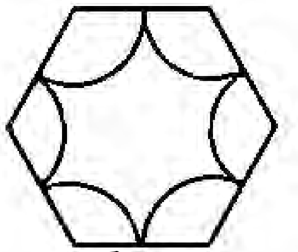


圖 7.3.9

四、對稱性

請觀察，10 進位，一直乘以 2，如圖 7.4.1，用紅色框。10 進位，一直乘以 4，如圖 7.4.2，用紅色框。

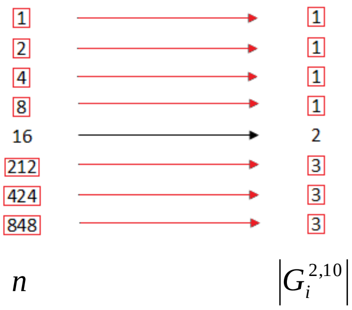


圖 7.4.1

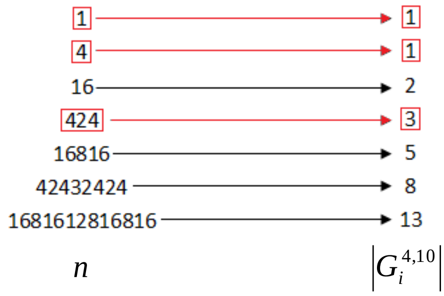


圖 7.4.2

用窮舉法可以找出某次特定運算後對稱性。但有向圖求得 $\left|G_i^{n,k}\right|$ 的長度，但失去探討某次運算的唯一性與對稱性，如圖 7.4.1、圖 7.4.2 及圖 7.4.3。

例如，圖 7.4.3，(224)、(424)及(442)的長度是 3，但，長度是 3 卻是誰，我們不知道。

如此，利用有向圖，很難找到唯一性。

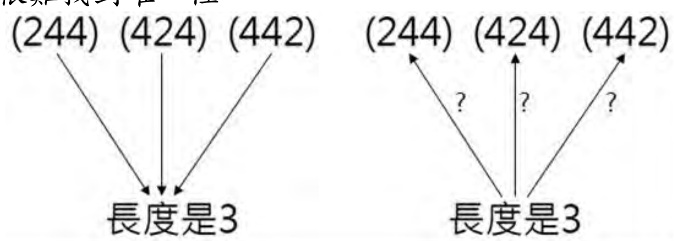


圖 7.4.3

性質 7.4.4.　$\left|G_i^{2,10}\right|$ 若出現列對稱時，且 $j=\dfrac{\left|G_i^{n,k}\right|-1}{2}$ 時，不會出現 $G_{i,j}^{n,k}=6$ 。

[證明] $j=\frac{\left|G_i^{n,k}\right|-1}{2}$ 時，表示$\left|G_i^{n,k}\right|$是奇數，才會發生 $j=\frac{\left|G_i^{n,k}\right|-1}{2}\in N$ 。

10 進位，一直乘以 2，第 9 次運算，出現 21216212，$G_{i,j}^{n,k}=6$，但不呈列對稱。

另一證明，經過一直乘以 2 的過程，會出現偶數。16 的對稱是 61，61 不是偶數。
性質 7.4.4 得證。 □

性質 7.4.5
第 3 次運算後，出現列對稱，其連續 3 個整數，只出現 212 或 424 或 848 三種。
[證明]一直乘以 2，只會出現$G_{i,j}^{n,k}=1$、$G_{i,j}^{n,k}=2$、$G_{i,j}^{n,k}=4$、$G_{i,j}^{n,k}=6$和$G_{i,j}^{n,k}=8$情形。
21216212，$G_{i,j}^{n,k}=6$，但不呈列對稱。
當$G_{i,j}^{n,k}=1$，只有 1、212 的數列會呈現列對稱。
當$G_{i,j}^{n,k}=2$，只有 2、212，424 的數列會呈現列對稱。
同理，$G_{i,j}^{n,k}=4$，只有 4、424，848 的數列會呈現列對稱。
同理，$G_{i,j}^{n,k}=8$，只有 8、848 的數列會呈現列對稱。
性質 7.4.5，得證。 □

性質 7.4.6

取 212 或 424 或 848 三種，不限次數的排列，當出現列對稱時，$\left|G_i^{2,10}\right|=3s$ 。$s\in N$ 。

[證明]
「212 或 424 或 848 都只佔 3 個位數」。 □

由於第 5 次運算為 212，我們可以預測

第 10 次運算為 424212424，出現列對稱，且$\left|G_{10}^{2,10}\right|=9$ 。

再預測一個有趣的列對稱呈現

$$848424848424212424848424848 \tag{7.4.7}$$

此時，式子 7.4.7，$\left|G_i^{2,10}\right|=27$，$i=?$
這是很好的問題，當然，使用窮舉法可以得到答案。也就是，$i=15$，$\left|G_{15}^{2,10}\right|=27$，呈現列對稱。

$$(848)(424)(848)(424)(212)(424)(848)(424)(848) \tag{7.4.8}$$

性質 7.4.9. 10 進位，一直乘以 2 中，只要 6 在數列中的數量為 0，則此數列會出現對稱。

[證明]
因為 6 只有 8 可以生成，且 $2\times8=16$。若有對稱，則會形成 61，或中間夾一列數列也會形成 61。但是 61 不是 2 的倍數。只要數列中存在有 6 的數字，不會出現列對稱。 □

性質 7.4.10. 10 進位一直乘以 4 中，只要 6 和 3 在數列中的數量為 0，則此數列會出現對稱。
[證明]
因為 6 只有 4 可以生成，且 $4\times4=16$。若有對稱，則會形成 61，或中間夾一列數列也會形成 61。但是 61 不是 4 的倍數。只要數列中存在有 6 的數字，不會出現列對稱。
3 只有 8 可以生成，且 $4\times8=32$。若 32 有對稱，則為或在 3223 中間加有對稱性的數列，而因為 23 不是 4 的倍數，所以只要有 3 或 6 的數列，就一定沒有對稱性。 □

五、自我相似

依照性質 4.2.2 的一般式，$\left|G_i^{5,10}\right|=\left|G_{i-1}^{5,10}\right|+\left|G_{i-3}^{5,10}\right|+1$，得到

1
5
25
1025
501025
250501025
10250250501025
501025010250250501025

圖 7.5.1

這很像第 56 屆，全國科展，國小數學科的作品，神算，[6，p14]，自我相似。

推理

性質 7.5.2. 取正整數 n，$4n+2$ 進位，一直乘以 $2n+1$，都有自我相似。
取正整數 n，$4n-2$ 進位，一直乘以 $2n$，都有自我相似。

[證明]
$$(2n+1)\times(2n+1)\equiv 2n+1 \mod(4n+2)，$$
$$2n\times 2n\equiv 2n \mod(4n-2)$$
□

六、10 進位法，一直乘以 7

思考 $B^{7,10}$ 的拆解圖形，如圖 7.6.1。$D^{7,10}$ 的性質，如圖 7.6.2、圖 7.6.3 及圖 7.6.4，這裡的 $D^{7,10}$ 使用 $\{A^{7,10}\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 進行運算。

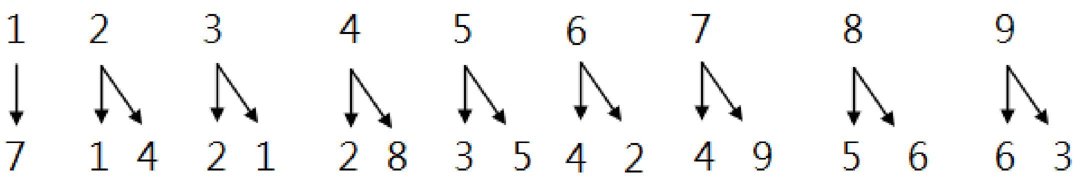
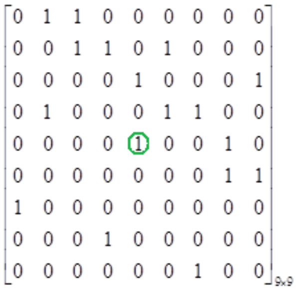
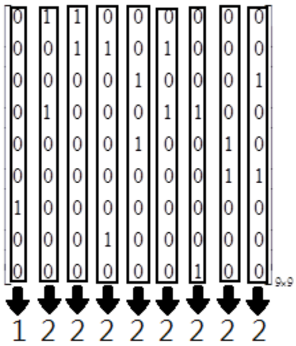


圖 7.6.1





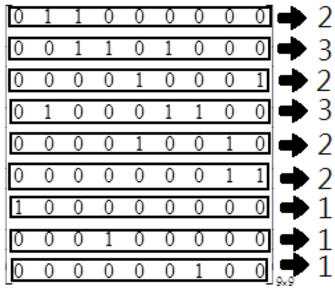


圖 7.6.2　　圖 7.6.3　　圖 7.6.4

發現

事實 7.6.5　　圖 7.6.2 的對角線，在輸入為 5 和輸出為 5，有關係。

也就是，10 進位，一直乘以 7，出現數值是 5 時，會有自我相似的情形。

事實 7.6.6　　圖 7.6.1 所生成的孩子情況，在圖 7.6.3 表現出來。

也就是，10 進位，一直乘以 7 的結果。除了數值是 1 是 1 個孩子以外，其他數值都有 2 個孩子。

圖 7.6.3，每一行所出現的數目，顯現，某一數值所產生的下一代情形。

事實 7.6.7　　圖 7.6.4 為矩陣中每一個數值在不同的情形下的關係矩陣。

例如：圖 7.6.4 的第一列，表示產生 1 的結果，有 $2\times7=14$，$3\times7=21$，等二類。

第二列，表示產生 2 的結果，有 $3\times7=21$，$4\times7=28$，$6\times7=42$，等三類。

第三列，表示產生 3 的結果，有 $5\times7=35$，$9\times7=63$，等二類。

第四列，表示產生 4 的結果，有 $2\times7=14$，$6\times7=42$，$7\times7=49$，等三類。

第五列，表示產生 5 的結果，有 $5\times7=35$，$8\times7=56$，等二類。

第六列，表示產生 6 的結果，有 $8\times7=56$，$9\times7=63$，等二類。

第七列，表示產生 7 的結果，有 $1\times7=7$，只有一類。

第八列，表示產生 8 的結果，有 $4\times7=28$，只有一類。

第九列，表示產生 9 的結果，有 $7\times7=49$，只有一類。

如此，

圖 7.6.4 以每列的產出結果為產出只有一類孩子的 3 種。

圖 7.6.4 以每列的產出結果為產出計有二類孩子的 4 種。

圖 7.6.4 以每列的產出結果為產出計有三類孩子的 2 種。

比較，

事實 7.7.6，圖 7.6.4 以每行的產出結果為產出只有一類孩子的 1 種情形。

圖 7.6.4 以每行的產出結果為產出只有二類孩子的 8 種情形。

得到，

$$1\times1+2\times8=1\times3+2\times4+3\times2=17\text{ 。}$$

產生的結果，以行來看，或以列來看，數量問題均相同。

七、基底轉換

當以高位變低位做基底轉換時，以下情形做為舉例

考慮，$(12)_4 \to (?)_2$

$$(12)_4 = \begin{cases} 1\times 4^1 \to (1)_2 \times 2^2 \\ 2\times 4^0 \to (10)_2 \times 2^0 \end{cases} = (110)_2$$ ，如此

$$(12)_4 = (110)_2 \tag{7.7.1}$$

考慮，$(12)_8 \to (?)_2$

$$(12)_8 = \begin{cases} 1\times 8^1 \to (1)_2 \times 2^3 \\ 2\times 8^0 \to (10)_2 \times 2^0 \end{cases} = (1010)_2$$

$$(12)_8 \to (1010)_2 \tag{7.7.2}$$

如此，我們就可以思考，若以低位變高位做基底轉換，則會有以下情形

考慮 $(123)_3 \to (?)_9$

$$(123)_3 = \begin{cases} 1\times 3^2 \to (10)_9 \times 9^0 \\ 2\times 3^1 \to (6)_9 \times 9^0 \\ 3\times 3^0 \to (3)_9 \times 9^0 \end{cases} = (10)_9 + (6)_9 + (3)_9 = (20)_9$$ ，如此，

$$(123)_3 \to (20)_9 \tag{7.7.3}$$

假設，$(A)_{27} = (10)_{10}$，$(B)_{27} = (11)_{10}$，$(C)_{27} = (12)_{10}$，$(D)_{27} = (13)_{10}$，$(E)_{27} = (14)_{10}$，$(F)_{27} = (15)_{10}$，$(G)_{27} = (16)_{10}$，$(H)_{27} = (17)_{10}$，$(I)_{27} = (18)_{10}$，$(J)_{27} = (19)_{10}$，$(K)_{27} = (20)_{10}$，$(L)_{27} = (21)_{10}$，$(M)_{27} = (22)_{10}$，$(N)_{27} = (23)_{10}$，$(O)_{27} = (24)_{10}$，$(P)_{27} = (25)_{10}$，$(Q)_{27} = (26)_{10}$。

考慮 $(123)_3 \to (?)_{27}$

$$(123)_3 = \begin{cases} 1\times 3^2 \to (9)_{27} \times 27^0 \\ 2\times 3^1 \to (6)_{27} \times 27^0 \\ 3\times 3^0 \to (3)_{27} \times 27^0 \end{cases} = (9)_{27} + (6)_{27} + (3)_{27} = (I)_{27}$$ ，如此，

$$(123)_3 \to (I)_{27} \tag{7.7.4}$$

發現，我們可以快速的作基底轉換，同時也可以研究不同進位法所帶來的結果。

八、通訊碼設計

某天，我們突然靈機一動，想到是否只需知道每個$\left(a_{i,1}^{n,k},a_{i,2}^{n,k},a_{i,3}^{n,k},...a_{i,\left|\{A^{n,k}\}\right|}^{n,k}\right)^{T}$，猜測出$\left(G_{i,1}^{n,k},\ G_{i,\left|G_i^{n,k}\right|}^{n,k}\right)$?

例子 7.8.1 10 進位，一直乘以 2，某次運算有 18 個 1、32 個 2、16 個 4、1 個 8 及 6 個 6，試求第幾次運算的結果。

我們嘗試以下列步驟解決。

演算方法 7.8.2 (例子 7.8.1.的解答)

步驟一：1 一定跟 2 或著是 6 在一起 (7.8.3)

2 一定跟 1 或著是 4 在一起 (7.8.4)

4 一定跟 2 或著是 8 在一起 (7.8.5)

8 一定跟 4 或是是 16 在一起 (7.8.6)

16 一定跟 212 或著是 8 在一起 (7.8.7)

步驟二: 找 16，依據式子 7.8.7，能得知一定有 6 個 16。因為，6 一定得跟 1 在一起。
則剩下 12 個 1、32 個 2、16 個 4 及 1 個 8，數列暫定為 161616161616。

步驟三: 藉由一個 8 得知，依據式子 7.8.6，剩下 12 個 1、32 個 2 及 16 個 4，
此時，數列為 16816 和 16161616 均存在。

步驟四: 找 212，依據式子 7.8.3 和 7.8.4，找 8 個 212。
此時,數列為剩下 4 個 1、16 個 2 及 16 個 4,數列為 16816 和 21216212 和 21216212 和 21216212 和 21216212。

步驟五: 剩下的剛好可以組成 4 個 424212424。

步驟六: $\left(G_{i,1}^{2,10},\ G_{i,\left|G_i^{2,10}\right|}^{2,10}\right)$為

(424212424)(21216212)(424212424)(21216212)(16816)(21216212)(424212424)(21216212)(424212424)。

步驟七: 此時，10 進位，一直乘以 2，第 18 次運算。同時，也確定了步驟六正確無誤。

嘗試利用 10 進位,一直乘以 2,寫一個電腦程式。把運算次數計算由 0 次運算計算至 20 次,如表 7.8.8。

表 7.8.8

一直乘以2						
次數	1的數量	2的數量	4的數量	8的數量	6的數量	長度
0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	1
3	0	0	0	1	0	1
4	1	0	0	0	1	2
5	1	2	0	0	0	3
6	0	1	2	0	0	3
7	0	0	1	2	0	3
8	2	0	0	1	2	5
9	3	4	0	0	1	8
10	1	4	4	0	0	9
11	0	1	4	4	0	9
12	4	0	1	4	4	13
13	8	8	0	1	4	21
14	5	12	8	0	1	26
15	1	6	12	8	0	27
16	8	1	6	12	8	35
17	20	16	1	6	12	55
18	18	32	16	1	6	73
19	7	24	32	16	1	80
20	17	8	24	32	16	97

如此，我們利用 $D^{2,10}$ 矩陣算法，得到第 i 次和第 $i+1$ 次的唯一性。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times5} \begin{bmatrix} 1_i \\ 2_i \\ 4_i \\ 8_i \\ 6_i \end{bmatrix}_{5\times1} = \begin{bmatrix} 1_{i+1} \\ 2_{i+1} \\ 4_{i+1} \\ 8_{i+1} \\ 6_{i+1} \end{bmatrix}_{5\times5} 。$$

其中，第 i 次的運算後，1 的數量記做「1_i」；第 $i+1$ 次的運算後，1 的數量記做「1_{i+1}」。
第 i 次的運算後，2 的數量記做「2_i」；第 $i+1$ 次的運算後，2 的數量記做「2_{i+1}」。
第 i 次的運算後，4 的數量記做「4_i」；第 $i+1$ 次的運算後，4 的數量記做「4_{i+1}」。
第 i 次的運算後，8 的數量記做「8_i」；第 $i+1$ 次的運算後，8 的數量記做「8_{i+1}」。
第 i 次的運算後，6 的數量記做「6_i」；第 $i+1$ 次的運算後，6 的數量記做「6_{i+1}」。

如此，

$$\{1_i，2_i，4_i，8_i，6_i\}^T \neq \{1_{i+1}，2_{i+1}，4_{i+1}，8_{i+1}，6_{i+1}\}^T 。 \tag{7.8.9}$$

以數量的多少，可以證明各次運算的結果具有唯一性。

以如此具有唯一性的特性，和演算方法 7.8.2，我們可以利用 10 進位，一直乘以 2，第 i 次運算後，各個數量的結果，當作通訊碼。

推理

通訊碼設計 7.8.10　以 k 進位，一直乘以 n，第 i 次運算後，各個數量的結果，可以當作通訊碼。

捌、結論

我們的研究使用窮舉法、樹狀圖、有向圖法、遞迴法、變形有向圖及矩陣運算法，來計算$\left|G_i^{n,k}\right|$的長度。當我們運用樹狀圖運算時，猜測 10 進位，一直乘以$n \le 10$的遞迴式，其中，一直乘以 2 的遞迴式為$\left|G_0^{2,10}\right| = \left|G_1^{2,10}\right| = \left|G_2^{2,10}\right| = \left|G_3^{2,10}\right|$=1，$\left|G_4^{2,10}\right|$=2，當$i \ge 5$時，$\left|G_i^{2,10}\right| = 2 \times \left|G_{i-4}^{2,10}\right| + \left|G_{i-5}^{2,10}\right|$。我們運用了 Excel 進行公式地快速運算。再由一直乘以 2 到一直乘以 9 中，所會生成出來的數字繪製成有向圖，其中有迴圈式以及橫向式，使用變形有向圖，不僅可以計算出$\left|G_i^{n,k}\right|$的長度。

在這個研究中，我們發現至少有一種方法得到$\left|G_i^{n,k}\right|$的長度。但是，遞迴式的表示法不惟一。本研究也討論數量問題、對稱性、自我相似、基底轉換和設計一種通訊碼的方法。

參考資料

1.科學研習月刊雜誌，第 55 卷，第 4 期，第 59 頁。2016 年 4 月 1 日。

2.陳牧心　，第 44 屆國展國小組數學科「乾坤大挪移 AB×CD＝BA×DC 的研究」，2004 年 7 月。

3.黃田奇等，第 44 屆國展國小組數學科「小朋友上樓梯—費氏數列的推廣與應用」，2004 年 7 月。

4 高佳晏等，第 51 屆國展國小組數學科「方塊田田又填填」，2011 年 7 月。

5.林辰恩等，第 56 屆國展國小數學科，「螞蟻回家—等角環形最短路徑之探討」， 2016 年 7 月。

6.周家萱等，第 56 屆國展國小組數學科，「神算」，2016 年 7 月。

7 陳冠安等，第 48 屆國展國中數學科，「弧弧相切－多邊形內相切弧的探討」，2008 年 7 月。

附錄一、K 進位，一直乘以 2($K \le 9$)

一直乘以 2，採用其他進位法計算。我們得到一般式

$\left|G_i^{2,2}\right| = i$。 $\left|G_i^{2,3}\right| = 2 \times \left|G_{i-2}^{2,3}\right|$。 $\left|G_i^{2,4}\right| = \left|G_{i-2}^{2,4}\right| + 1$。

$\left|G_i^{2,5}\right| = \left|G_{i-3}^{2,5}\right| + 2 \times \left|G_{i-4}^{2,5}\right|$。 $\left|G_i^{2,6}\right| = \left|G_{i-2}^{2,6}\right| + \left|G_{i-3}^{2,6}\right|$。 $\left|G_i^{2,7}\right| = 2 \times \left|G_{i-3}^{2,7}\right|$。

$\left|G_i^{2,8}\right| = \left|G_{i-3}^{2,8}\right| + 1$。 $\left|G_i^{2,9}\right| = \left|G_{i-4}^{2,9}\right| + \left|G_{i-5}^{2,9}\right| + 2 \times \left|G_{i-6}^{2,9}\right|$。

【評語】080402

本作品主要目的在探討經由特殊乘法所產生的數列之長度問題，研究主題有趣；作者引入多種數學方法，探討出可透過遞迴式表出數列長度之一般式（包括不同數的乘法與不同進位的情形）；定義、符號與數學工具的運用合理；內容豐富、且使用多種方式觀察，是完整的探索作品，值得讚賞；最後提出通訊碼的構想，將研究發現作了很好的應用。

作品海報

前言

研究主題

題目 1　(原始題目[1])　如圖 2，這個層層堆疊的數列代表了一種有趣的乘法結果記錄。某一層的數列是將上一層的<u>每一碼</u>**乘以 2** 的乘積，依序排列起來。我們要求的是在第幾層時，數列的長度會超過 1000 位？

1
2
4
8
16
212
424
848
16816
21216212
424212424
848424848
1681684816816
21216212168162121216212
4242124242121621242421242 4

圖 2

定義

定義 3　$G_{i,j}^{n,k}$：一直乘以 n，k 進位法，乘 i 次，第 i 列從左邊往右數到第 j 個。

定義 4　$\left|G_i^{n,k}\right|$：一直乘以 n，k 進位法，乘 i 次，第 i 列的長度。

定義 5　$\left(G_{i,j}^{n,k},\ G_{i,t}^{n,k}\right)$：一直乘以 n，k 進位法，乘 i 次，第 j 個數字到第 t 個數字。

定義 6　$\{A^{n,k}\}$：k 進位，所有一直乘以 n 曾經出現的數字所組成數列集合。

定義 7　$\left|\{A^{n,k}\}\right|$：k 進位，所有一直乘以 n，$\{A^{n,k}\}$ 長度。

定義 8　$B^{n,k}$：k 進位，所有一直乘以 n 的有向圖。如圖 9，$B^{2,10}$。

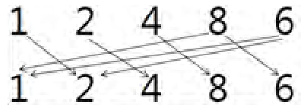


圖 9

研究目的

一直乘以某一個小於 10 的自然數，進位後即估住其位置長度 $\left|G_i^{n,10}\right|$ 的一般式。

遞迴

影響區域

事實 10　(父代與子代) 題目 1 樹狀圖只能由上一列生成下一列，如圖 11；下一列不能有兩個來源，如圖 12、圖 13。

性質 14　(遞增函數)　$\left|G_i^{n,10}\right| \le \left|G_{i+1}^{n,10}\right| \le 2\times\left|G_i^{n,10}\right|$，其中，$n<10$。

事實 15　(交集) 題目 1 的影響區域，兩點的影響區域不是包含關係，就是交集是空集合；如圖 16 及圖 17。

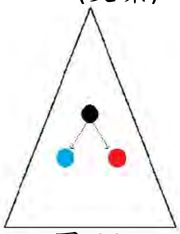


圖 11

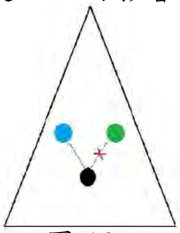


圖 12

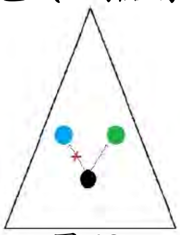


圖 13

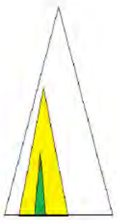


圖 16


圖 17


圖 19

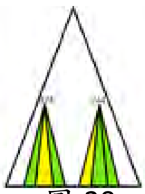


圖 20

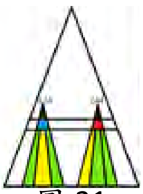


圖 21

可交換性

事實 18　若 10 進位，一直乘以 n，數值 a_j 有 b_j 個，$1\le j\le\left|\{A^{n,10}\}\right|$，$\sum_{i=1}^{j} b_i = m$，則排列相異種有 $\dfrac{m!}{\prod_{i=1}^{j}(b_i!)}$ 種；且，不管怎麼排列，各數列 $\left|G_t^{n.10}\right|$ 長度均相同。如圖 19、圖 20 及圖 21。

性質 22　$\left(G_{i,j}^{n,k},\ G_{i,t}^{n,k}\right)=\left(G_{s,u}^{n,k},\ G_{s,v}^{n,k}\right)$，$\left(G_{i,j}^{n,k},\ G_{i,t}^{n,k}\right)$下一次運算和$\left(G_{s,u}^{n,k},\ G_{s,v}^{n,k}\right)$下一次運算的結果相同。如圖 23。

存在性

性質 24　$\left|G_2^{2,10}\right|=1$，$\left|G_3^{2,10}\right|=1$，$\left|G_4^{2,10}\right|=2$，$\left|G_5^{2,10}\right|=3$，當 $i\ge5$ 時，$\left|G_i^{2,10}\right|=2\times\left|G_{i-4}^{2,10}\right|+\left|G_{i-5}^{2,10}\right|$。如圖 25、圖 26 及圖 27。

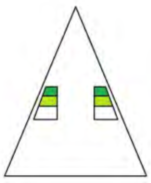


圖 23

圖 25	圖 26	圖 27
1	1	1
2	2	2
4	4	4
8	8	8
16	16	16
212	212	212

答案 28　針對題目 1，$\left|G_{28}^{2,10}\right|=781<1000<1048=\left|G_{29}^{2,10}\right|$。

性質 29　$\left|G_0^{3,10}\right|=\left|G_1^{3,10}\right|=\left|G_2^{3,10}\right|=1$，$\left|G_3^{3,10}\right|=2$，$\left|G_4^{3,10}\right|=3$，$\left|G_5^{3,10}\right|=4$，$\left|G_6^{3,10}\right|=6$。$\left|G_i^{3,10}\right|=\left|G_{i-3}^{3,10}\right|+2\times\left|G_{i-4}^{3,10}\right|+\left|G_{i-5}^{3,10}\right|+\left|G_{i-6}^{3,10}\right|$，$i\ge6$。如圖 30 至圖 34。

圖 30	圖 31	圖 32	圖 33	圖 34
1	1	1	1	1
3	3	3	3	3
9	9	9	9	9
27	27	27	27	27
621	621	621	621	621
1863	1863	1863	1863	1863
324189	324189	324189	324189	324189
961232427	961232427	961232427	961232427	961232427
2718369612621	2718369612621	2718369612621	2718369612621	2718369612621

性質 35　$\left|G_0^{4,10}\right|=\left|G_1^{4,10}\right|=1$，$\left|G_2^{4,10}\right|=2$，$\left|G_3^{4,10}\right|=3$，$\left|G_4^{4,10}\right|=5$，$\left|G_5^{4,10}\right|=8$，$\left|G_6^{4,10}\right|=13$。
$\left|G_i^{4,10}\right|=3\times\left|G_{i-2}^{4,10}\right|+\left|G_{i-3}^{4,10}\right|-2\times\left|G_{i-4}^{4,10}\right|-2\times\left|G_{i-5}^{4,10}\right|+\left|G_{i-6}^{4,10}\right|$，$i\ge6$。

性質 36　$\left|G_0^{5,10}\right|=\left|G_1^{5,10}\right|=1$，$\left|G_2^{5,10}\right|=2$，$\left|G_3^{5,10}\right|=4$，$\left|G_4^{5,10}\right|=6$，且 $\left|G_i^{5,10}\right|=\left|G_{i-1}^{5,10}\right|+\left|G_{i-3}^{5,10}\right|+1$，$i\ge4$。

性質 37　$\left|G_0^{6,10}\right|=\left|G_1^{6,10}\right|=1$，$\left|G_2^{6,10}\right|=2$，$\left|G_3^{6,10}\right|=4$，$\left|G_4^{6,10}\right|=7$，$\left|G_5^{6,10}\right|=13$。
$\left|G_i^{6,10}\right|=4\times\left|G_{i-1}^{6,10}\right|-6\times\left|G_{i-2}^{6,10}\right|+5\times\left|G_{i-3}^{6,10}\right|-4\times\left|G_{i-4}^{6,10}\right|+3\times\left|G_{i-5}^{6,10}\right|$，$i\ge5$。

性質 38　$\left|G_0^{8,10}\right|=\left|G_1^{8,10}\right|=1$，$\left|G_2^{8,10}\right|=2$，$\left|G_3^{8,10}\right|=4$，$\left|G_4^{8,10}\right|=8$，$\left|G_5^{8,10}\right|=15$。
$\left|G_i^{8,10}\right|=\left|G_{i-1}^{8,10}\right|+\left|G_{i-2}^{8,10}\right|+2\times\left|G_{i-4}^{8,10}\right|+\left|G_{i-5}^{8,10}\right|$，$i\ge5$。

性質 39　$\left|G_0^{9,10}\right|=\left|G_1^{9,10}\right|=1$，$\left|G_2^{9,10}\right|=2$，$\left|G_3^{9,10}\right|=3$，$\left|G_4^{9,10}\right|=6$，$\left|G_5^{9,10}\right|=10$，$\left|G_6^{9,10}\right|=20$。
$\left|G_i^{9,10}\right|=\left|G_{i-1}^{9,10}\right|+4\times\left|G_{i-2}^{9,10}\right|-3\times\left|G_{i-3}^{9,10}\right|-3\times\left|G_{i-4}^{9,10}\right|+\left|G_{i-5}^{9,10}\right|$，$i\ge6$。

唯一性

性質 40　(沒有唯一性)依性質 29，$\left|G_i^{3,10}\right|=\left|G_{i-3}^{3,10}\right|+2\times\left|G_{i-4}^{3,10}\right|+\left|G_{i-5}^{3,10}\right|+\left|G_{i-6}^{3,10}\right|$，但是，
$\left|G_i^{3,10}\right|=\left|G_{i-1}^{3,10}\right|+\left|G_{i-3}^{3,10}\right|+\left|G_{i-4}^{3,10}\right|-\left|G_{i-5}^{3,10}\right|-\left|G_{i-7}^{3,10}\right|$，得到，遞迴式不具有唯一性。

有向圖與矩陣

定義

定義 41 設正整數 $a\in\{A^{n,k}\}$，則在 k 進位，一直乘以 n，第 i 次運算後，數值 a 的數量為 $\left|a_i^{n,k}\right|$。

定義 42 $D^{n,k}$：k 進位，一直乘以 n 的關係矩陣，有關係則填入 1，沒關係則填入 0。

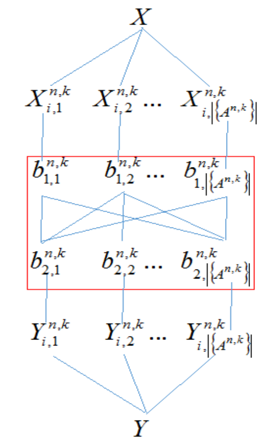


圖 48

一直乘以 7

性質 43 $\left|G_{i+1}^{7,10}\right|=2\times\left|G_i^{7,10}\right|-\left|1_i^{7,10}\right|$，其中，$1\in\{A^{7,10}\}$。如圖 44、圖 45。

性質 46 $\left|G_{i+2}^{7,10}\right|=2\times\left|G_{i+1}^{7,10}\right|-\left|2_i^{7,10}\right|-\left|3_i^{n,10}\right|$，其中，$2\in\{A^{7,10}\}$、$3\in\{A^{7,10}\}$。

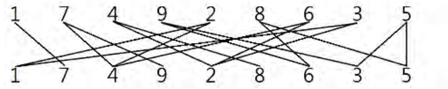


圖 44

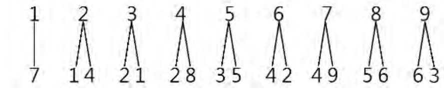


圖 45

有向圖

演算方法 47 (計算 $\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$ 的方法)，如圖 48。

步驟一：取各個 $\left|a_i^{n,k}\right|$ 數量，$\forall a\in\{A^{n,k}\}$，在第 i 次運算，填入對應 $B^{n,k}$ 的輸入數列 $B_1^{n,k}$。

步驟二：透過得 $B^{n,k}$ 有向圖，得知其有關係連成直線，沒關係則部連成直線。

步驟三：將步驟二的 $B_1^{n,k}$ 的各關係數量相乘，依各輸出各數列 $B_2^{n,k}$ 得到個別的數量。

步驟四：將步驟三的 $B_2^{n,k}$ 得到個別的數量加總其數值的總和，得到 $\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$。

矩陣

例子 49 $D^{2,10}$：10 進位，一直乘以 2 的關係矩陣，由 $B^{2,10}$ 轉化的矩陣，如圖 50。

我們也可以透過矩陣運算，由 $\left|G_i^{2,10}\right|$ 計算 $\left|G_{i+1}^{2,10}\right|$，如圖 51，由 $\left|G_0^{2,10}\right|$ 計算 $\left|G_1^{2,10}\right|$。

$$D^{2,10}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

圖 50

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

圖 51

存在性

性質 52 我們可以經由有向圖與矩陣，找到 $\left|a_i^{n,k}\right|$ 各數值的變化量進而找到 $\left|G_i^{n,k}\right|$ 和 $\left|G_{i+1}^{n,k}\right|$ 長度的變化。

討論

數量問題

考慮 10 進位，一直乘以 $n<10$，$\left|\{A^{n,10}\}\right|$ 的及 $B^{n,10}$ 關係。發現

事實 53 依 n 的奇偶性，$4=\left|\{A^{5,10}\}\right|<\left|\{A^{3,10}\}\right|=8<\left|\{A^{7,10}\}\right|=\left|\{A^{9,10}\}\right|=9$；

$5=\left|\{A^{2,10}\}\right|<\left|\{A^{4,10}\}\right|=\left|\{A^{6,10}\}\right|=\left|\{A^{8,10}\}\right|=6$。

事實 54 若 $2\le n\le 9$ 且 $\gcd(10,n)=1$，則 $\left|\{A^{n,10}\}\right|$ 非常大，有 8 或 9 兩種。

若 $2\le n\le 9$ 且 $\gcd(10,n)>1$，則 $\left|\{A^{n,10}\}\right|$ 比較小，有 4、5 或 6 共三種。

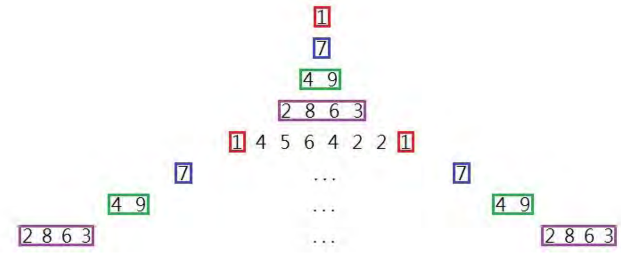


圖 56

擬自我循環

性質 55 (10 進位，一直乘以 7)，各列首項會以 1、7、4、2 數值循環；

各列末項會以 1、7、9、3 數值循環，如圖 56。

擬自我相似

依照性質 36 的一般式，$\left|G_i^{5,10}\right|=\left|G_{i-1}^{5,10}\right|+\left|G_{i-3}^{5,10}\right|+1$，得到圖 57，擬自我相似。

推理

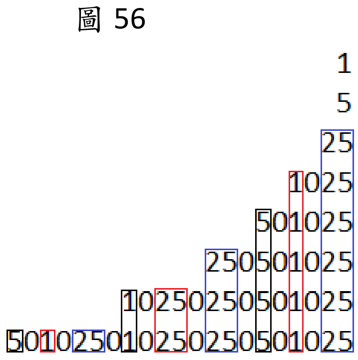


圖 57

性質 58 取正整數 n，$4n+2$ 進位，一直乘以 $2n+1$，都有擬自我相似。

取正整數 n，$4n-2$ 進位，一直乘以 $2n$，都有擬自我相似。

[證明] $(2n+1)\times(2n+1)\equiv 2n+1 \mod (4n+2)$，$2n\times 2n\equiv 2n \mod (4n-2)$。 □

對稱性

請觀察，10 進位，一直乘以 2，如圖 59，用紅色框。10 進位，一直乘以 4，如圖 60，用紅色框。發現

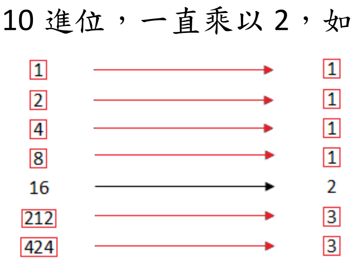


圖 59

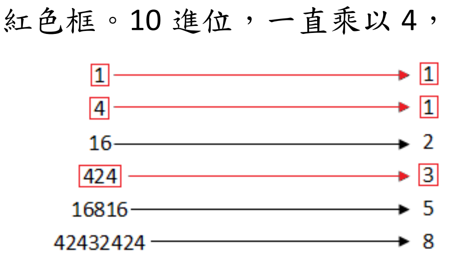


圖 60

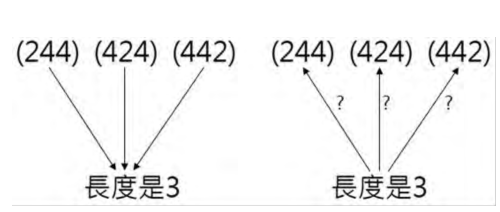


圖 61

窮舉法可以找出某次運算後對稱性。但有向圖求得 $\left|G_i^{n,k}\right|$ 長度，失去探討某次運算的唯一性與對稱性，如圖 61。

性質 62 考慮 $\left|G_i^{2,10}\right|$，存在 i 是偶數，$G_{i,j}^{2,10}$ 不會出現列對稱。

性質 63 當出現列對稱時，則 $\left|G_i^{2,10}\right|=3k$ 或 1。

性質 64 10 進位，一直乘以 2 中，只要 6 在數列中的數量為 0，則此數列會出現對稱。

性質 65 $\left|G_{15}^{2,10}\right|=27$，呈現列對稱。第 15 次運算為 (848)(424)(848)(424)(212)(424)(848)(424)(848)。

性質 66 10 進位，一直乘以 2，第 16 次運算後，不會出現對稱。

性質 67 10 進位，一直乘以 4 中，只要 6 和 3 在數列中的數量為 0，則此數列會出現對稱。

連結

事實 68 取 10 進位，一直乘以 2， $\left|a_i^{2,10}\right| = \left|G_i^{2,10}\right|$ ，$\forall a^{2,10} \in \left\{A^{2,10}\right\}$。如表 69。

事實 70 $\left|a_i^{7,10}\right|$ 有很 6 種形態，我們只能找到性質 43 和性質 46 的擬遞迴式，表 71。

表 69

運算次數	1	2	4	8	6	長度
0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	1
3	0	0	0	1	0	1
4	1	0	0	0	1	2
5	1	2	0	0	0	3
6	0	1	2	0	0	3
7	0	0	1	2	0	3
8	2	0	0	1	2	5
9	3	4	0	0	1	8
10	1	4	4	0	0	9

表 71

運算次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	長度
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	2
3	0	1	1	0	0	1	0	1	0	4
4	2	2	0	2	1	1	0	0	0	8
5	2	3	1	3	1	0	2	2	0	14
6	4	4	1	5	3	2	2	3	2	26
7	5	8	5	8	6	5	4	5	2	48
8	13	18	8	17	11	7	5	8	4	91
9	26	32	15	30	19	12	13	17	5	169
10	47	57	24	57	36	22	26	30	13	312

事實 72 $\left|a_i^{n,10}\right| = \left|G_i^{n,10}\right|$ ，其中，$2 \le n \le 9$，同時，$n \ne 7$，且 $\forall a^{n,10} \in \left\{A^{n,10}\right\}$。

猜想 73 我們可以由有向圖推理且連結遞迴一般式，如圖 74、圖 75、圖 76。

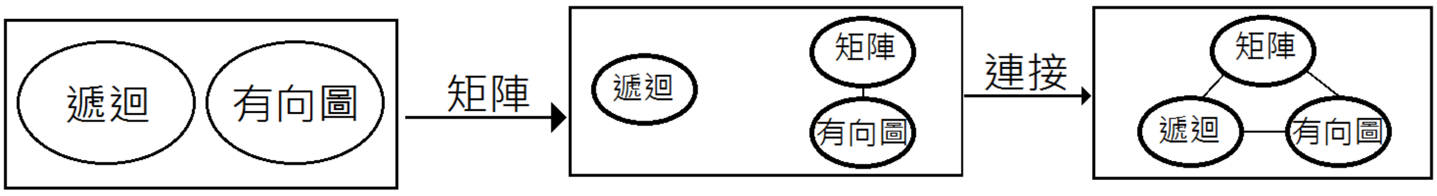


圖 74　　圖 75　　圖 76

基底轉換

升階：$(1234)_5 \to (?)_9$

$$(1234)_5 \to \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 6 & 1 & & \\ 12 & 4 & 1 & \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 6+2 \\ 12+8+3 \\ 8+8+6+4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to (235)_9 \tag{77}$$

降階：$(235)_9 \to (?)_5$

$$(235)_9 \to \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -8 & 1 & & & \\ 24 & -6 & 1 & & \\ -32 & 12 & -4 & 1 & \\ 16 & -8 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 \\ -16+1 \\ 48-6 \\ -64+12+1 \\ 32-8-2+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 \\ -15 \\ 42 \\ -51 \\ 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \to (1234)_5 \tag{78}$$

式子 77 和式子 78，得知 $(1234)_5 = (235)_9$。

應用

通訊碼的設計

性質 79 10 進位，一直乘以 2，第 16 次運算後的數列，若出現數值 8 或數值 6，則 $\left|G_i^{2,10}\right| < \left|G_{i+1}^{2,10}\right|$。

通訊碼:依照性質 79，取 $\left|G_i^{2,10}\right| < \left|G_{i+1}^{2,10}\right|$ 唯一性，利用反運算，得到發訊者和收訊者的通訊協定。

依照 10 進位，一直乘以 2，第 18 次運算後，$\left(G_{18,1}^{2,10}, G_{18,\left|G_{18}^{2,10}\right|}^{2,10}\right)$。此時，有三種通訊碼表示。

第一種方法：取數值 10、2、18，代表 10 進位，一直乘以 2，第 18 次運算，如圖 80。

第二種方法：取數值 10、2，$\left|G_i^{2,10}\right|$ 的數量，其中，$i \ge 16$。

第三種方法：取數值 10、2，各個 $\left\{A^{2,10}\right\}$ 第 i 次的變化數量，其中，$i \ge 16$。

(424212424)(21216212)(424212424)(21216212)(16816)(21216212)(424212424)(21216212)(424212424)。

圖 80

結論

$\left|G_0^{2,10}\right| = \left|G_1^{2,10}\right| = \left|G_2^{2,10}\right| = 1$，$\left|G_3^{2,10}\right| = 1$，$\left|G_4^{2,10}\right| = 2$，$\left|G_5^{2,10}\right| = 3$，當 $i \ge 5$ 時，$\left|G_i^{2,10}\right| = 2 \times \left|G_{i-4}^{2,10}\right| + \left|G_{i-5}^{2,10}\right|$。

參考資料

1.科學研習月刊雜誌，第 55 卷，第 4 期，第 59 頁。2016 年 4 月 1 日。

2.陳牧心　，第 44 屆國展國小組數學科「乾坤大挪移 AB×CD＝BA×DC 的研究」，2004 年 7 月。

3.黃田奇等，第 44 屆國展國小組數學科「小朋友上樓梯—費氏數列的推廣與應用」，2004 年 7 月。

4 高佳晏等，第 51 屆國展國小組數學科「方塊田田又填填」，2011 年 7 月。

5.林辰恩等，第 56 屆國展國小數學科，「螞蟻回家—等角環形最短路徑之探討」， 2016 年 7 月。

6.周家萱等，第 56 屆國展國小組數學科，「神算」，2016 年 7 月。

7 陳冠安等，第 48 屆國展國中數學科，「弧弧相切—多邊形內相切弧的探討」，2008 年 7 月。