

中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 工程學科(一)科

最佳團隊合作獎

052301

叮叮噹—圓筒狀玻璃杯振動聲音之研究

學校名稱：國立蘭陽女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 蕭詠儀	林冠宏
高二 許宏澤	許義淵

關鍵詞：聲音、頻率、玻璃杯

摘要

本研究利用鑽石刀刻畫與加熱膨脹裂截玻璃杯的方法，製作出實驗所需規格之圓筒狀玻璃杯，以免費的個人電腦聲頻分析軟體，偵測玻璃杯振動所發出聲音的頻率，探討玻璃杯深度、口徑、厚度、水位高度等變因對頻率之影響。研究的結果發現，當玻璃杯深度愈短、口徑愈小、杯壁愈薄、水位高度愈低，敲擊後所產生的聲音頻率愈高，並成功地歸納出玻璃杯振動頻率與各項變因之間的定量關係式。對於不易觀測到之內容液體的容器而言，若能利用本研究的方法與結果，建立起各種內含液體容器或管路振動時所產生聲音頻率關係的資料庫，未來只需偵測其振動聲響之頻率，就可以推斷其結構或內容物的變化，可以作為一種非破壞性的檢測方法。

壹、研究動機

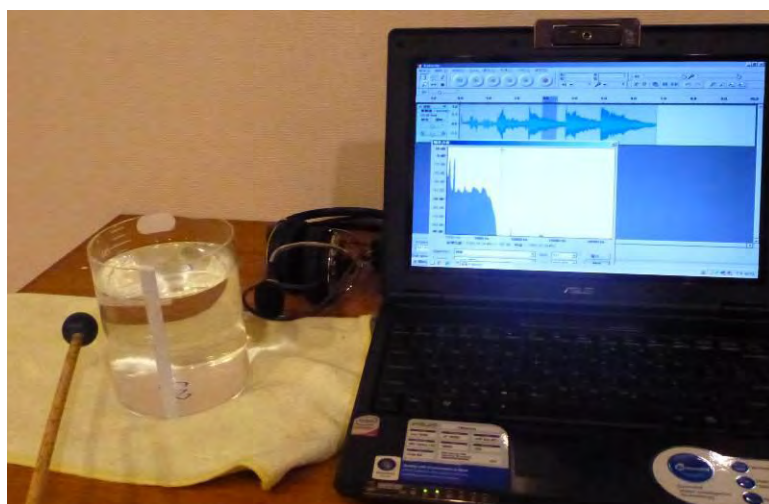
在日常生活當中，可以觀察到敲擊不同水位的玻璃杯，所產生的聲音高低不同，在一些影音媒體中，也可以看到利用不同水位的水杯，敲擊出不同的音高的聲音，進行音樂演奏。因此，我們想研究杯子振動所產生聲音頻率的高低，會受到那些因素的影響，並希望能夠找出振動頻率與這些因素的關係式。

貳、研究目的

- 一、 探討玻璃杯體深度對振動頻率的影響。
- 二、 探討玻璃杯體口徑對振動頻率的影響。
- 三、 探討玻璃杯壁厚度對振動頻率的影響。
- 四、 探討玻璃杯內盛水位高度對振動頻率的影響。

參、研究設備及器材

- 一、 個人電腦、麥克風、聲頻分析軟體[Audacity]、橡皮敲擊鎚、圓柱型玻璃杯、游標尺、方格紙、鑽石刀、剉刀、砂紙、加熱槍。
- 二、 軟體：聲頻分析軟體(Audacity)、Microsoft Excel



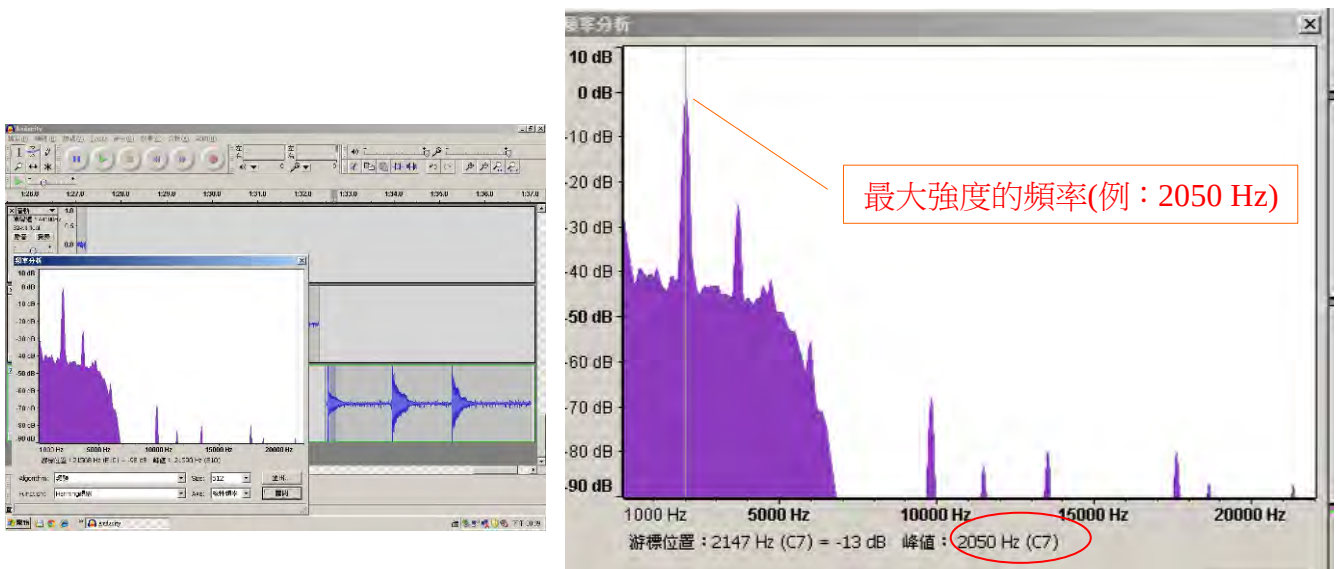
肆、研究過程與方法

一、變因之決定

對一個杯子而言，其振動頻率與其形狀、材質以及所盛的液體有關，[參考資料一~二]。在本研究中，以圓筒型玻璃杯，所盛的液體為 RO 純水，作為控制變因，以杯體深度、杯口直徑、杯壁厚度、水位高低等 4 個因素為操作變因，分別探討這些變因對玻璃杯振動聲音頻率的影響。

二、聲頻之測量

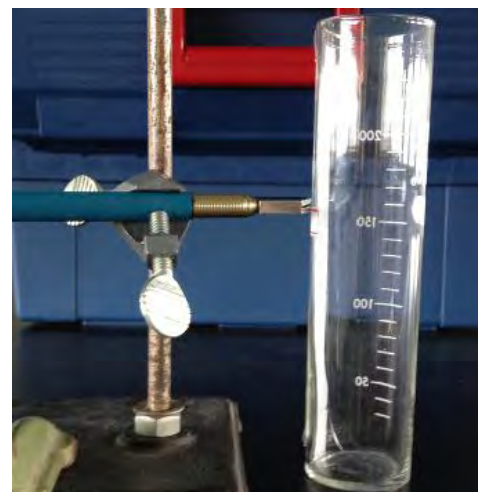
將玻璃杯以橡皮敲擊鎚敲擊其側壁後，以連結至 PC 之麥克風接收其振動音頻，透過聲頻分析軟體”Audacity”紀錄分析其振動頻率，如右圖示。軟體”Audacity”可上網免費下載。



三、玻璃杯之裁切

為了取得所需規格之圓柱型玻璃杯，我們將各種圓柱型玻璃器皿，如酒瓶、玻璃罐、水杯、量杯…等，進行裁切截取成玻璃杯。其步驟如下：

1. 將鑽石刀依所需高度固定於支架上。
2. 以圓柱型玻璃器皿側壁用力擠壓鑽石刀，並進行旋轉，讓鑽石刀在杯子外壁畫出環繞器皿柱面的一圈刻痕。
3. 將圓柱型玻璃器皿置於轉盤中心後，開啟加熱槍，將其火燄對準器皿柱面的刻痕。



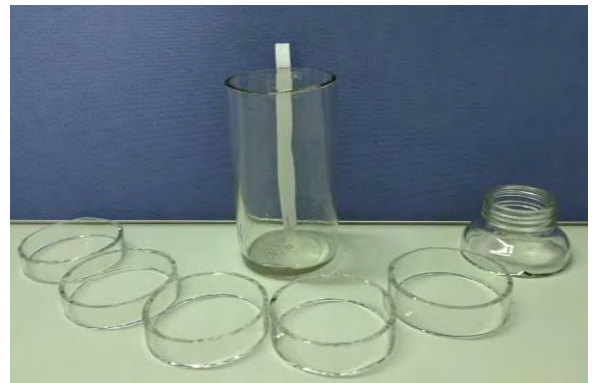
4. 旋轉轉盤帶動玻璃器皿，使加熱槍火燄可以環繞刻痕持續加熱，旋轉多圈直至玻璃器皿受熱沿刻痕裂開。
5. 玻璃器皿裂開後，取所需之圓柱型杯，以剉刀、砂紙打磨其杯口處，即可製得所需之圓柱玻璃杯。



四、實驗操作流程

(一) 玻璃杯深度 H 對空杯振動頻率 F 的影響

1. 取長度較長的圓柱型玻璃杯，測量其杯口至杯底的深度 H 。
2. 以橡皮敲擊鎚敲擊玻璃杯側壁後，以麥克風接收其聲音，透過聲頻分析軟體測得其頻率 F 。
3. 將步驟 1 中的同一玻璃杯，自杯口往下截切一小段，改變其深度 H ，重複步驟 1-2。
4. 重複步驟 1-3 多次，以“Microsoft Excel”分析玻璃杯振動頻率 F 與其深度 H 的函數關係。



(二) 玻璃杯內直徑 D 對空杯振動頻率 F 的影響

1. 取不同直徑之圓筒型玻璃杯器，截切為相同深度玻璃杯，挑選杯壁厚度相同但口徑 D 不同之玻璃杯組。
2. 以橡皮敲擊鎚敲擊玻璃杯側壁後，以麥克風接收其聲音，透過聲頻分析軟體測得其頻率 F 。
3. 分析玻璃杯振動頻率 F 與其內直徑 D 的函數關係。



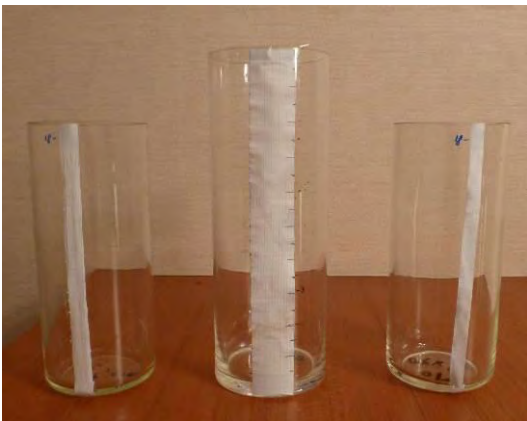
(三) 玻璃杯壁厚度 T 對振動頻率 f 的影響

1. 取不同直徑之圓筒型玻璃杯器，截切為相同深度玻璃杯，挑選相同口徑、不同杯壁厚度 T 之玻璃杯組。
2. 以橡皮敲擊鎚敲擊玻璃杯側壁後，以麥克風接收其聲音，透過聲頻分析軟體測得其頻率 F 。
3. 分析玻璃杯振動頻率 F 與其壁厚度 T 的函數關係。



(四) 玻璃杯內盛水位 h 高低對振動頻率 f 的影響

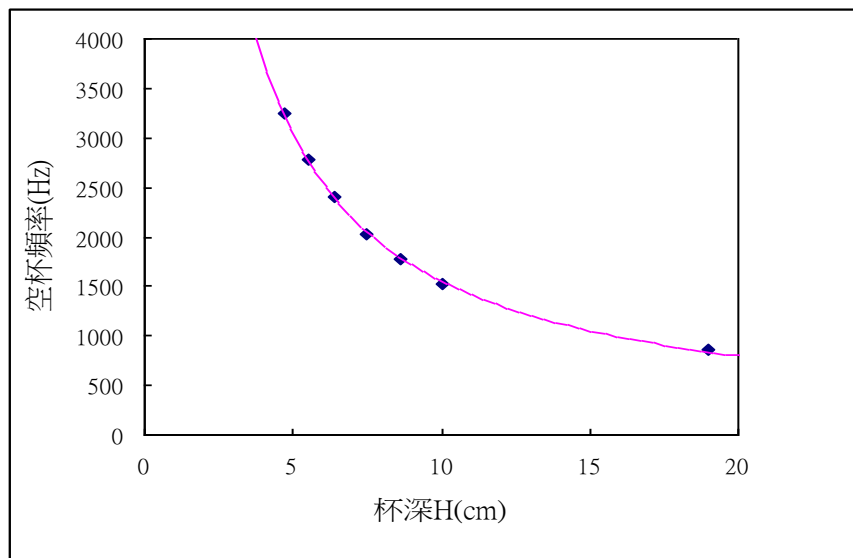
1. 取一圓柱型玻璃杯空杯，以橡皮敲擊鎚敲擊其側壁後，以麥克風接收其聲音，透過聲頻分析軟體測得其頻率 F 。
2. 將水注入玻璃杯中達深度 1 公分後，重複前項步驟，測得盛水杯子所產生的聲音頻率 f 。
3. 多次改變注入杯中之水深 h ，分別測量紀錄其頻率 f ，分析振動頻率 f 與水深 h 的關係。
4. 更換不同的圓形柱玻璃杯，重複步驟 1-3。



伍、研究結果

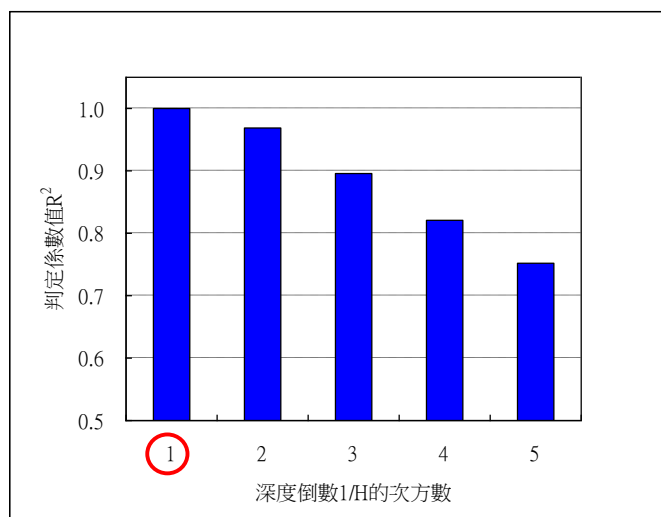
一、玻璃杯深度H對空杯振動頻率F的影響

1. 擷取不同深度H的玻璃杯在未裝水時所測得振動頻率F，畫出F隨H變化之關係圖形，如〈圖一-1〉所示。由圖可看出玻璃空杯的振動頻率F會隨杯體深度H增加而變小。

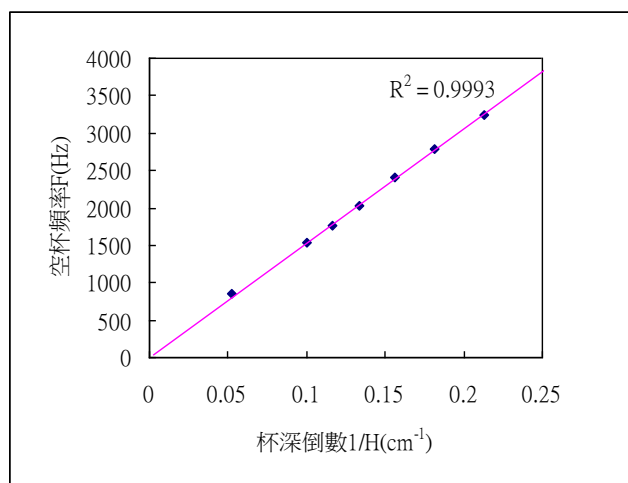


〈圖一-1〉深度厚度相同之玻璃杯，其空杯振動頻率F隨杯體深度H變化情形。

2. 分析玻璃空杯振動頻率F與杯體深度H的函數相關性，分別畫出F對 $1/H^1 \sim 1/H^5$ 的關係圖，以MS EXCEL進行趨勢線分析，可以得到判定係數值 R^2 ，此值愈大，表示圖形為線性函數的相關性愈高。將各圖之 R^2 值整理後，畫成〈圖一-2〉，可以看到F與 $1/H$ 為一次線性函數的相關性最高。



〈圖一-2〉F對 $1/H^1 \sim 1/H^5$ 一次線性函數分析之判定係數變化。



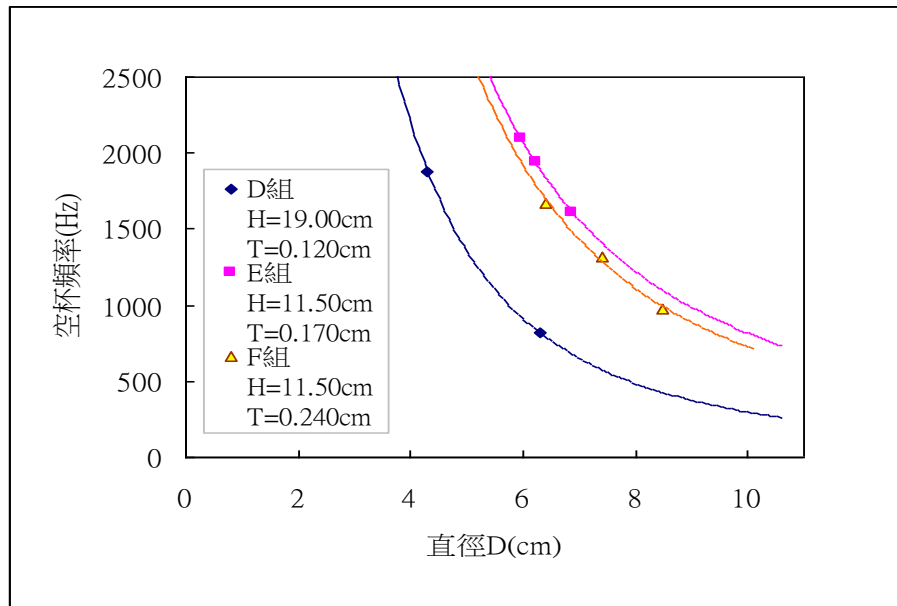
〈圖一-3〉空杯頻率F與深度倒數 $1/H$ 關係圖。

3. 空杯頻率F與 $1/H$ 的關係圖如〈圖一-3〉所示，可以觀察到F與 $1/H$ 的函數關係為一過原點的斜直線，因此F與H的函數關係可表示為：

$$F \propto \frac{1}{H} \text{ ----- [式1]}$$

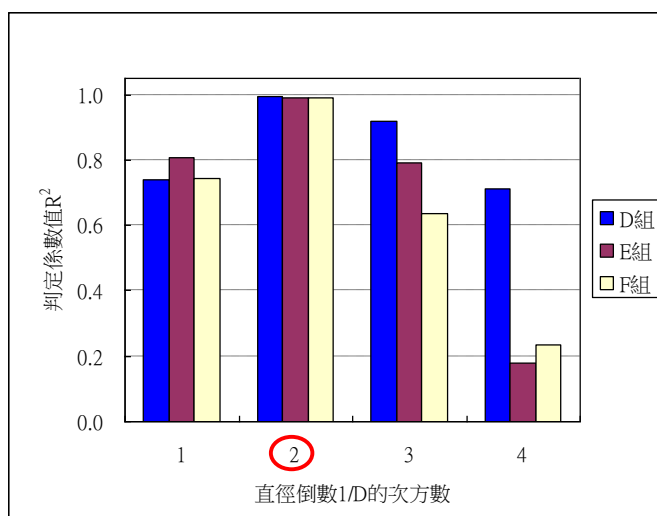
二、玻璃杯內直徑D對空杯振動頻率F的影響

1. 擷取不同直徑D的杯子在未裝水時所測得振動頻率F，畫出F隨D變化之圖形，如下圖〈圖二-1〉所示。可以由圖看到F會隨D的增加而變小，三種玻璃杯組皆如此。

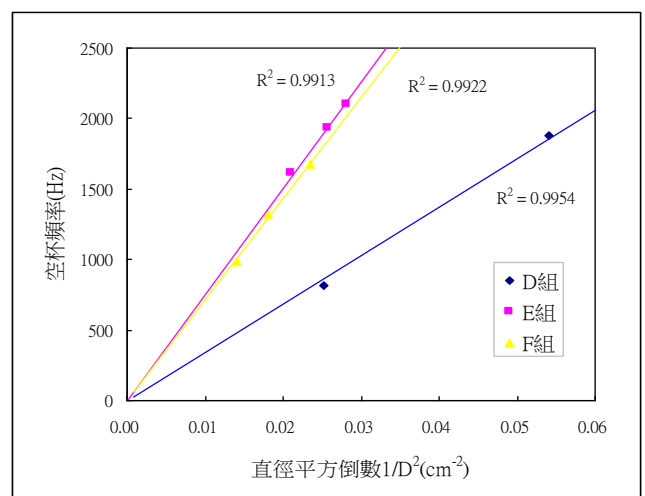


〈圖二-1〉深度厚度相同之玻璃杯，其空杯頻率F隨直徑D變化情形。

2. 分析玻璃空杯振動頻率F與直徑D的函數相關性，分別畫出F對 $1/D^1 \sim 1/D^4$ 的關係圖，進行趨勢線分析，得到判定係數值 R^2 。將各圖之 R^2 值整理後，畫成〈圖二-2〉，可以看到F與 $1/D^2$ 為一次線性函數的相關性最高。



〈圖二-2〉F對 $1/D^1 \sim 1/D^4$ 一次線性函數分析之判定係數變化。



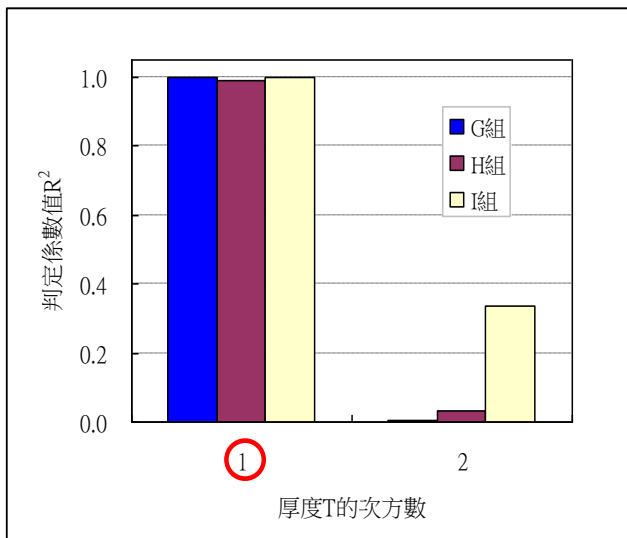
〈圖二-3〉空杯頻率F與 $1/D^2$ 的關係圖。

3. 空杯頻率 F 與 $1/D^2$ 的關係圖如〈圖二-3〉所示，可以觀察到 F 與 $1/D^2$ 的函數關係為一過原點的斜直線，因此 F 與 D 的函數關係可表示為：

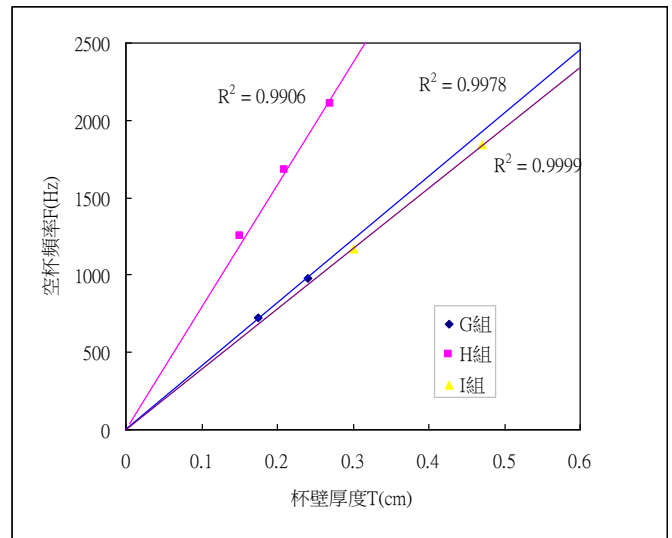
$$F \propto \frac{1}{D^2} \text{-----[式2]}$$

三、玻璃杯壁厚度 T 對空杯振動頻率 F 的影響

1. 擷取不同杯壁厚度 T 的杯子在未裝水時所測得振動頻率 F ，畫出 F 隨 T 變化之圖形，如〈圖三-1〉所示，可以看到 F 會隨 T 的增加而變大。



〈圖三-2〉 F 對 $T^1 \sim T^2$ 一次線性函數分析之判定係數。



〈圖三-3〉深度直徑相同之玻璃杯，其空杯頻率 F 與杯壁厚度 T 關係圖。

2. 分析空杯振動頻率 F 與厚度 T 的函數相關性，分別畫出 F 對 $T^1 \sim T^2$ 的關係圖，進行趨勢線分析，得到判定係數值 R^2 。將各圖之 R^2 值整理後，畫成〈圖三-2〉，可以確定 F 與 T 為一次線性函數的相關性最高。

3. 空杯頻率 F 與厚度 T 的關係圖如〈圖三-3〉所示， F 與 T 的函數關係為一過原點的斜直線，因此 F 與 T 的函數關係可表示為：

$$F \propto T \text{-----[式3]}$$

四、玻璃空杯振動頻率 F 與杯體深度 H 、直徑 D 、厚度 T 的函數關係

綜合[式1]、[式2]、[式3]的結果，玻璃空杯振動頻率 F 與玻璃杯深度 H 、口徑 D 、厚度 T 之間的函數關係，可用下列式子表示：

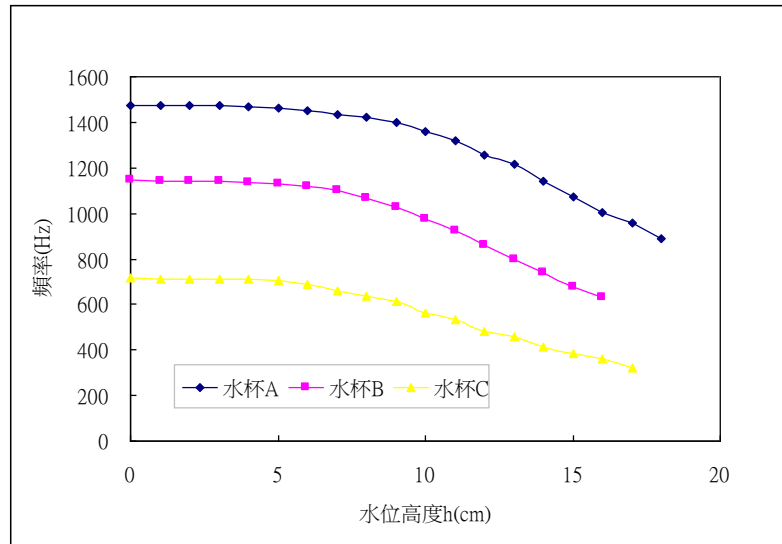
$$F \propto \frac{T}{D^2 H}$$

$$\rightarrow F = m \frac{T}{D^2 H} \text{-----[式4]}$$

式子中的 m 為不會受 H 、 D 、 T 影響的常數，在本研究中 m 的實驗值為 $405.31 \text{ Hz} \cdot \text{m}^2$ 。

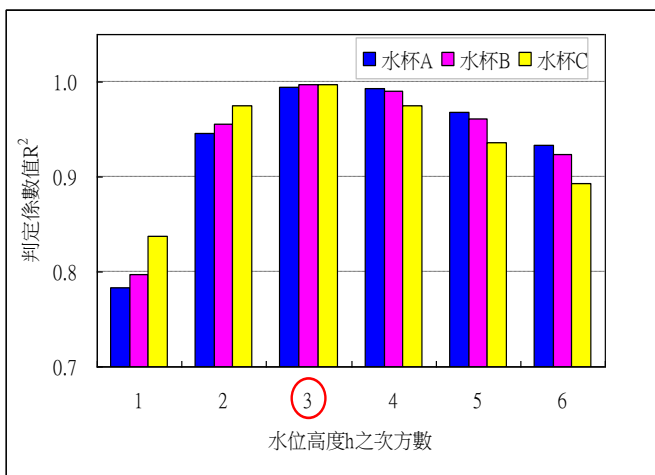
五、玻璃杯盛水位高度 h 對杯體振動頻率 f 的影響

1. 〈圖四-1〉是杯子頻率 f 隨水位高度 h 的變化情形，由圖可以看出，不管何種規格的水杯，當水位 h 升高時，其頻率 f 皆逐漸變小。而且，在低水位時，頻率 f 會隨水位 h 增加緩和變小；在高水位時，頻率 f 隨水位 h 增加呈較劇烈下降。

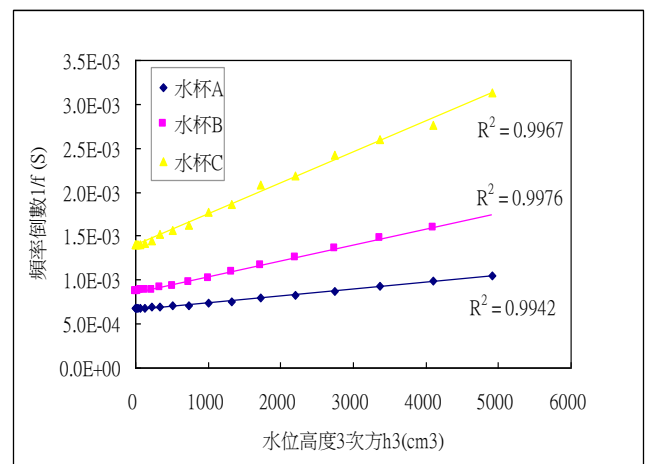


〈圖四-1〉玻璃杯頻率 f 隨水位高度 h 變化情形。

2. 分析杯子頻率 f 與水位高度 h 之函數相關性，分別畫出 $1/f$ 對 $h^1 \sim h^6$ 的關係圖，以 MS EXCEL 進行趨勢線分析，可以得到判定係數值 R^2 ，此值愈大，表示圖形為一線性線函數的相關性愈高。
3. 將 $1/f$ 對 $h^1 \sim h^6$ 的函數圖形的 R^2 值分別列出，畫成〈圖四-2〉，可以看到三個不同玻璃水杯，其頻率倒數 $1/f$ 與水位三次方 h^3 的線性相關性皆為最高。 $1/f$ 與 h^3 的關係圖如〈圖四-3〉所示，可以看到 $1/f$ 與 h^3 間為明顯的一次線性函數關係。



〈圖四-2〉 $1/f$ 對 $h^1 \sim h^6$ 一次線性函數分析判定係數之變化。



〈圖四-3〉 $1/f$ 對 h^3 的函數關係圖。

4. 由前項結果，我們可以歸納出杯子頻率 f 與水位高度 h 的關係：

$$\frac{1}{f} = ah^3 + b \text{-----[式5]}$$

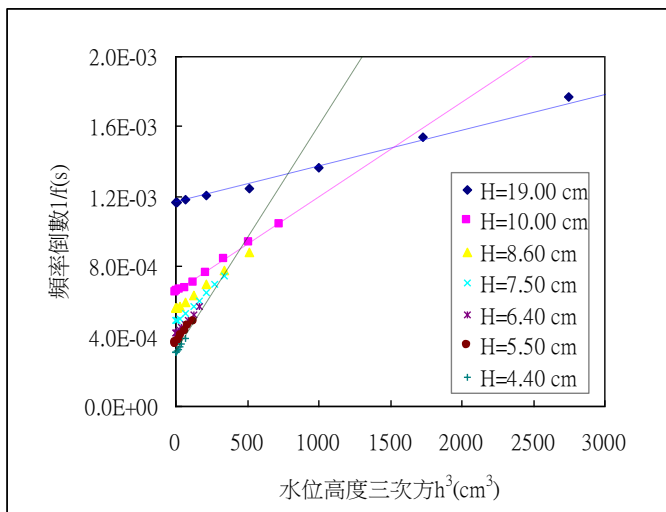
其中常數 a 為 $1/f$ 對 h^3 之函數圖形的斜率值，常數 b 則為函數圖形上 y 軸($1/f$)上的截距。

5. 當玻璃杯中未裝水時，所測得頻率 f 即為空杯頻率 F ，換言之，當 $h=0$ 時， $f=F$ 。將此條件代入[式5]，可以推導出 $b=1/F$ ，因此[式1]可以改寫為：

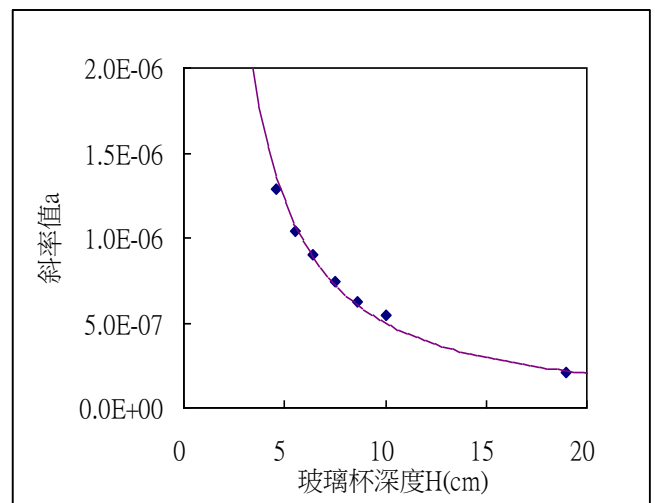
$$\frac{1}{f} = ah^3 + \frac{1}{F} \text{-----[式6]}$$

六、玻璃杯體長度 H 對盛水杯體振動頻率 f 的影響

1. 由同一個圓柱長杯，所截取出直徑、壁厚相同，但深度 H 不同的玻璃杯組，分別測量其頻率 f 隨水位高度 h 的變化，其頻率倒數 $1/f$ 與水位高度三次方 h^3 的關係圖形如〈圖五-1〉所示。此圖顯示，不論各種深度的玻璃杯，其 $1/f$ 皆隨 h^3 呈一次線性變化。



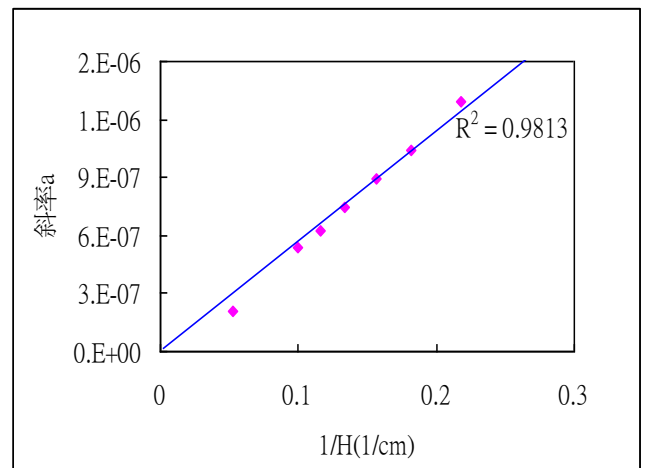
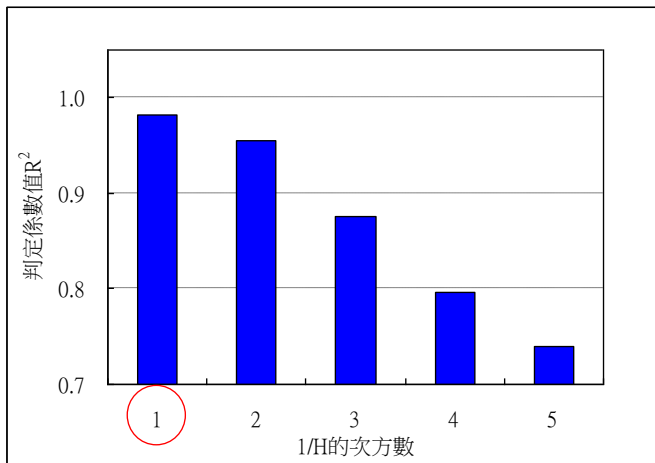
〈圖五-1〉不同深度之玻璃杯之頻率倒數 $1/f$ 與水位高度三次方 h^3 關係圖。



〈圖五-2〉 $1/f$ 對 h^3 的函數關係斜率值 a 隨杯深 H 變化情形。

2. 在〈圖五-1〉中也可以觀察到，不同深度 H 之杯子，其 $1/f$ 與 h^3 的函數圖形之斜率值 a 皆不同。將圖中各玻璃杯的 a 值與 H 作成關係圖形，如上〈圖五-2〉所示，可以看到斜率值 a 會隨 H 增加而變小。

3. 分析斜率值 a 與深度 H 的函數相關性，分別畫出 a 對 $(1/H)^1 \sim (1/H)^5$ 的關係圖，並進行趨勢線分析，得到判定係數值 R^2 。將各圖之 R^2 值整理後，畫成〈圖五-3〉，可以看到 a 與 $1/H$ 為一次線性函數的相關性最高。



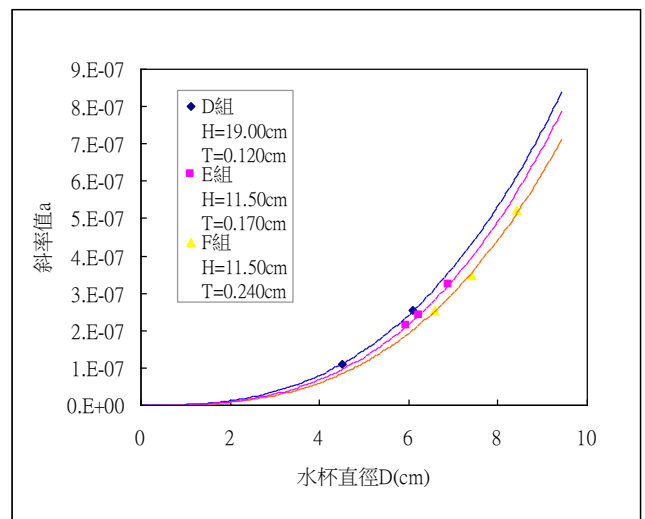
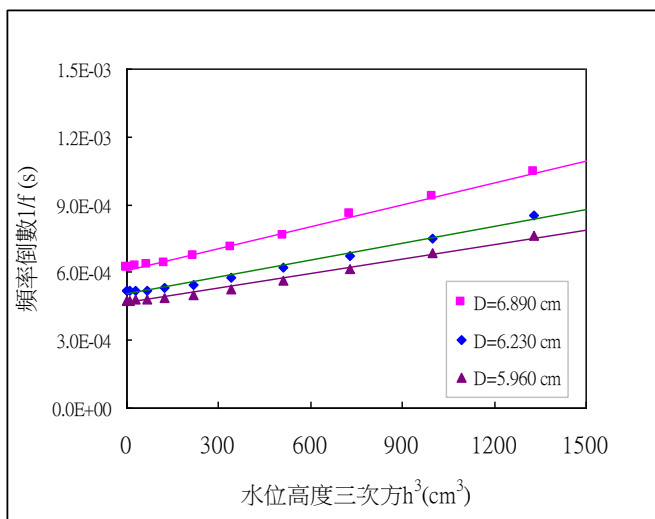
〈圖五-3〉斜率值 a 對 $1/H^1 \sim 1/H^5$ 一次線性函數分析判定係數之變化。 〈圖五-4〉斜率 a 與杯深倒數 $1/H$ 之關係圖。

4. 斜率值 a 與深度倒數 $1/H$ 的關係圖如〈圖五-4〉所示，可以明顯看到 a 與 $1/H$ 為一過原點的斜直線，因此， a 與 H 可以下列的關係式表示：

$$a \propto \frac{1}{H} \text{-----[式7]}$$

七、玻璃杯體內直徑 D 對盛水杯體振動頻率 f 的影響

1. 以相同杯深、壁厚但內直徑 D 不同的玻璃杯組進行實驗，將其頻率倒數 $1/f$ 對水位高度三次方 h^3 作圖，其結果如〈圖六-1〉所示， $1/f$ 與 h^3 成一次線性的函數關係。



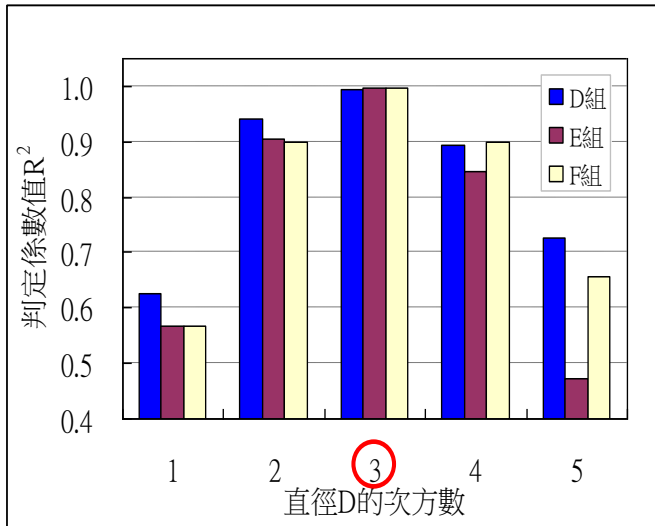
〈圖六-1〉深厚度相同直徑不同玻璃杯之 $1/f$ 與 h^3 關係圖。 〈圖六-2〉斜率值 a 隨直徑 D 增加之變化情形。

2. 在〈圖六-1〉中可以觀察到函數圖形之斜率值 a ，會隨玻璃杯的直徑 D 不同而有所變化。取深度厚度各自相同的三組玻璃杯，畫出其 a 隨 D 的變化情形，如〈圖六-2〉所示，由圖可觀察到，其斜率值 a 隨直徑 D 增加而變大，三組玻璃杯組

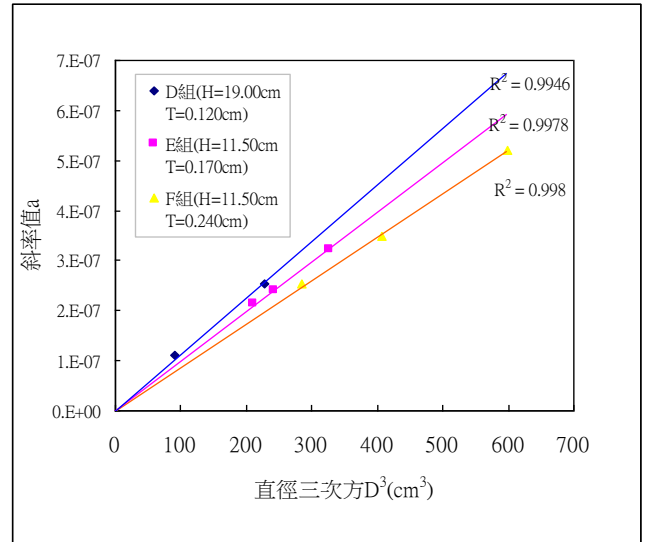
皆如此。

- 分析斜率值 a 與直徑 D 的函數相關性，分別畫出 a 對 $D^1 \sim D^5$ 的關係圖，進行趨勢線分析，得到判定係數值 R^2 。將各圖之 R^2 值整理後，畫成〈圖六-3〉，可以看到 a 與 D^3 為一次線性函數的相關性最高。
- 斜率值 a 與直徑 D^3 的關係圖如〈圖六-4〉所示，可以明顯看到 a 與 D^3 的函數關係為一過原點的斜直線。因此，斜率值 a 與直徑 D 可以下列的關係式表示：

$$a \propto D^3 \text{-----[式8]}$$



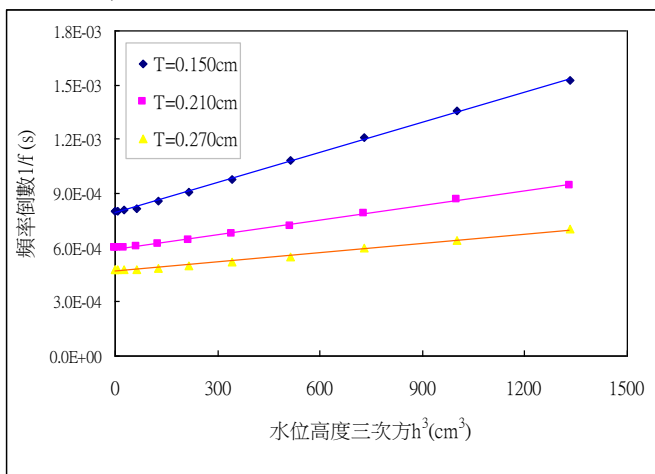
〈圖六-3〉 a 對 $D^1 \sim D^5$ 一次線性函數分析之判定係數變化。



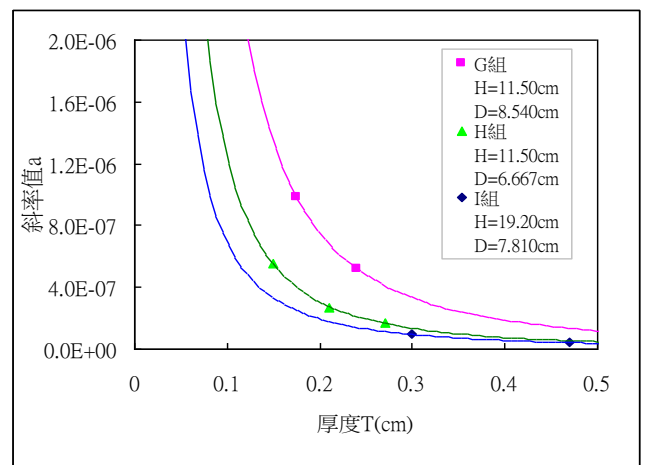
〈圖六-4〉斜率值 a 與直徑三次方 D^3 關係圖。

八、玻璃杯壁厚厚度 T 對盛水杯體振動頻率 f 的影響

- 以杯深直徑相同但杯壁厚厚度 T 不同的玻璃杯組進行實驗，將其頻率倒數 $1/f$ 對水位高度三次方 h^3 作圖，其結果如〈圖七-1〉所示， $1/f$ 與 h^3 成一次線性的函數關係。



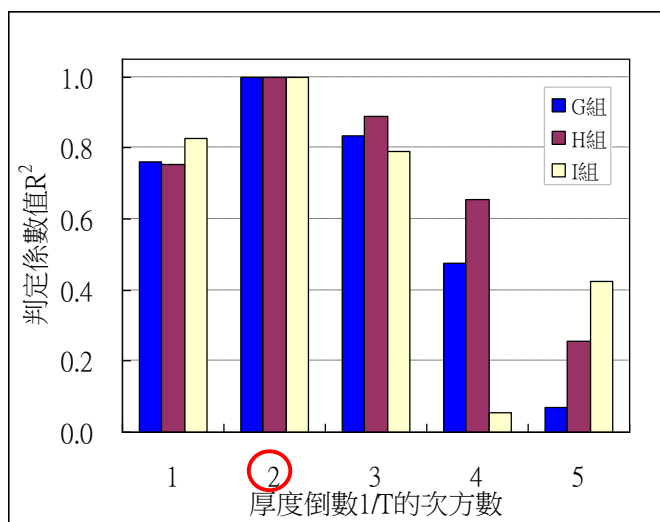
〈圖七-1〉深度直徑相同、厚度不同玻璃杯之 $1/f$ 與 h^3 關係圖。



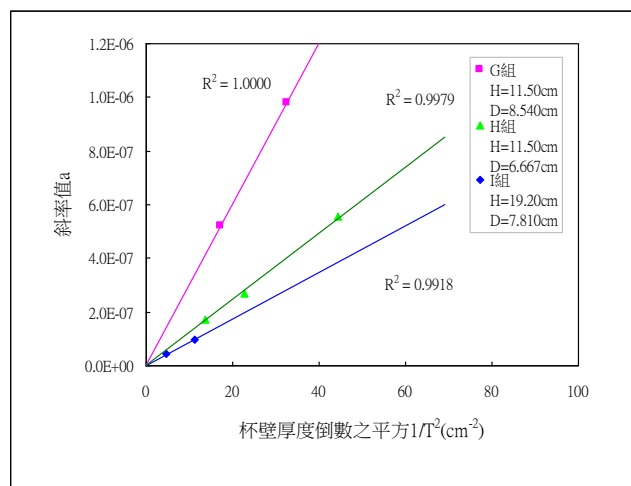
〈圖七-2〉斜率值 a 隨厚度 T 變化情形。

2. 在〈圖七-1〉中可以觀察到函數圖形之斜率值 a ，會隨玻璃杯壁厚度 T 不同而有所變化。取深度直徑各自相同的三組玻璃杯，畫出其 a 隨 T 的變化情形，如〈圖七-2〉所示，由圖可觀察到，可觀察到斜率值 a 隨厚度 T 增加而變小，三組皆有相同趨勢。
3. 分析斜率值 a 與厚度 T 的函數相關性，分別畫出 a 對 $1/T^1 \sim 1/T^5$ 的關係圖，進行趨勢線分析，得到判定係數值 R^2 。將各圖之 R^2 值整理後，畫成〈圖七-3〉，可以看到 a 與 $1/T^2$ 為一次線性函數的相關性最高。
4. 斜率值 a 與 $1/T^2$ 的關係圖如〈圖七-4〉所示，可以明顯看到 a 與 $1/T^2$ 的函數關係為一過原點的斜直線。因此，斜率值 a 與厚度 T 可以下列的關係式表示：

$$a \propto \frac{1}{T^2} \text{-----[式9]}$$



〈圖七-3〉 a 對 $1/T^1 \sim 1/T^5$ 一次線性函數分析之判定係數變化。



〈圖七-4〉斜率值 a 與厚度倒數平方 $1/T^2$ 關係圖。

九、玻璃水杯振動頻率 f 與杯體深度 H 、口徑 D 、厚度 T 的函數關係

綜合[式7]、[式8]、[式9]的結果，斜率值 a 與玻璃杯杯深度 H 、口徑 D 、厚度 T 之間的關係，可用下列式子表示：

$$a \propto \frac{D^3}{HT^2}$$

$$\rightarrow a = k \frac{D^3}{T^2 H} \text{-----[式10]}$$

式子中的 k 為不受 H 、 D 、 T 影響的常數，在本研究中 m 的實驗值為 1664.9 s/m^3 。

十、函數關係式的歸納

將前面各項研究所得函數關係整理如下：

$$F = m \frac{T}{D^2 H} \text{-----[式4]}$$

$$\frac{1}{f} = ah^3 + \frac{1}{F} \text{-----[式6]}$$

$$a = k \frac{D^3}{T^2 H} \text{-----[式10]}$$

將[式4]、[式10]代入[式6]，可以得到以下結果：

$$\frac{1}{f} = k \frac{D^3 h^3}{T^2 H} + n \frac{D^2 H}{T} \text{-----[式11]}$$

其中常數 $n=1/m$ 。

由[式11]可以看出，玻璃杯的深度H、直徑D、壁厚T以及所盛水位高度h決定了玻璃杯敲擊後所產生的振動頻率。

陸、結論

- 一、圓筒型玻璃杯內未盛液體時，其空杯的振動頻率與杯體的深度、直徑、厚度有關。深度愈短、直徑愈小、杯壁愈厚的玻璃杯，所產生的振動頻率愈高。
- 二、圓筒型玻璃杯未盛水時，其空杯振動頻率 F 的倒數與杯體深度 H 的一次方成反比；與直徑 D 的平方成反比；與杯壁厚度 T 的一次方成正比，其關係式為：

$$F = m \frac{T}{D^2 H}$$

上式中 m 為常數。

- 三、圓柱型玻璃杯盛水後所產生的振動頻率，會比在空杯時的振動頻率來的小。當杯內的水位愈高，所產生的振動頻會愈低。
- 四、圓柱型盛水玻璃杯所產生的振動頻率 f 的倒數，與內盛水位高度 h 的3次方成線性函數關係，其關係式為：

$$\frac{1}{f} = ah^3 + \frac{1}{F}$$

上式中 a 為常數。而 a 值也與杯體之深度 H 、直徑 D 、厚度 T 有關，其關係式為：

$$a = k \frac{D^3}{T^2 H}$$

- 五、盛水圓筒型玻璃杯所產生的振動頻率 f 與其深度 H 、直徑 D 、厚度 T 以及內盛水位高度 h 有關，其關係式可總結表示為：

$$\frac{1}{f} = k \frac{D^3 h^3}{T^2 H} + n \frac{D^2 H}{T}$$

其中 k 、 n 為常數。

- 六、依照本研究之方法與結果，若建立起各種內含液體之容器或管路結構之振動頻率資料庫，未來只需敲擊容器或管路使其發出聲響，偵測其聲音頻率，就可以推斷其結構或內容物的變化，可以應用作為一種非破壞性的檢測方法。

柒、參考資料

1. 國中自然與生活科技課本[二上], 康軒出版社
2. 高中選修物理[上], 龍騰文化。
3. 陳可崗譯, 觀念物理IV, 天下文化出版。
4. 徐悠, 王靖童, 2013, 第53屆全國科展生活應用科學科國小組作品。
5. 本研究作者群, 2014, 第54屆宜蘭縣國中小科展物理科國中組作品。

捌、附錄 （實驗數據）

一、 玻璃杯深度H對空杯振動頻率F的影響

編號	杯深 H(cm)	頻率 F(Hz)	1/H 次方數	判定係數 R^2
L19	19.00	855	1	0.9993
L10	10.00	1528	2	0.9680
L9	8.60	1770	3	0.8959
L8	7.50	2029	4	0.8201
L7	6.40	2399	5	0.7530
L6	5.50	2787		
L5	4.70	3249		

二、 玻璃杯直徑D對空杯振動頻率F的影響

空杯 頻 率 F	D 組(雨量杯)		E 組(進口水杯)			F 組(花器杯)		
	H=19.00cm	H=19.20cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm
	D=4.510 cm	D=6.120 cm	D=5.960 cm	D=6.230 cm	D=6.890 cm	D=6.580 cm	D=7.410 cm	D=8.430 cm
	T=0.120cm	T=0.120cm	T=0.170cm	T=0.170cm	T=0.170cm	T=0.240cm	T=0.240cm	T=0.240cm
	F=1879 Hz	F=819 Hz	F=2097 Hz	F=1936 Hz	F=1610 Hz	F=1674 Hz	F=1322 Hz	F=980 Hz

D 次 方數	D 組	E 組	F 組
	判定係數 R^2	判定係數 R^2	判定係數 R^2
1	0.7391	0.808	0.7424
2	0.9954	0.9913	0.9922
3	0.9207	0.7897	0.6345
4	0.7126	0.1779	0.2353

三、 玻璃杯壁厚度T對空杯振動頻率F的影響

空杯頻 率 F	G 組(花器杯)		H 組(花器杯)			I 組(花器杯)	
	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=19.20cm	H=19.20cm
	D=8.650 cm	D=8.430 cm	D=5.960 cm	D=6.640 cm	D=6.560 cm	D=8.430 cm	D=6.580 cm
	T=0.180cm	T=0.240cm	T=0.150cm	T=0.210cm	T=0.270cm	T=0.300cm	T=0.470cm
	F=725 Hz	F=980 Hz	F=1248 Hz	F=1679 Hz	F=2103 Hz	F=1167 Hz	F=1838 Hz

T 次方數	G 組	H 組	I 組
	判定係數 R^2	判定係數 R^2	判定係數 R^2
1	0.9978	0.9906	0.9999
2	0.0026	0.0323	0.3339

四、玻璃杯盛水位高度h對杯體振動頻率f的影響

水杯頻率 f 與水位高度 h 關係

水位高度 h(cm)	頻率(Hz) 水杯 A	頻率(Hz) 水杯 B	頻率(Hz) 水杯 C
0.00	1473	1145	715
1.00	1473	1143	714
2.00	1472	1142	714
3.00	1471	1142	711
4.00	1467	1138	710
5.00	1460	1131	708
6.00	1449	1120	689
7.00	1434	1099	660
8.00	1420	1069	639
9.00	1402	1029	616
10.00	1357	976	564
11.00	1319	921	536
12.00	1258	859	481
13.00	1218	798	457
14.00	1143	739	414
15.00	1071	677	385
16.00	1004	629	362
17.00	960		320
18.00	888		

1/f 與 h 次方函數一次線性的符合程度

h 次方數	判定係數 R^2 (水杯 A)	判定係數 R^2 (水杯 B)	判定係數 R^2 (水杯 C)
1	0.78396	0.79711	0.83720
2	0.94630	0.95608	0.97498
3	0.99416	0.99757	0.99670
4	0.99256	0.99016	0.97483
5	0.96826	0.96148	0.93650
6	0.93394	0.92419	0.89317

五、玻璃杯體長度H對盛水杯體振動頻率f的影響

杯體深度 H=19.00 cm		杯體深度 H=10.00 cm		杯體深度 H=8.60 cm		杯體深度 H=7.50 cm		杯體深度 H=6.40 cm		杯體深度 H=5.50 cm		杯體深度 H=4.40 cm	
水位 高度 h(cm)	頻率 (Hz)	水位 高度 h(cm)	頻率 (Hz)	水位 高度 h(cm)	頻率 (Hz)	水位 高度 h(cm)	頻率 (Hz)	水位 高度 h(cm)	頻率 (Hz)	水位 高度 h(cm)	頻率 (Hz)	水位 高度 h(cm)	頻率 (Hz)
0.00	855	0.00	1528	0.00	1770	0.00	2029	0.00	2399	0.00	2787	0.00	3249
2.00	855	2.00	1520	1.00	1767	1.00	2029	1.00	2390	1.00	2779	1.00	3228
4.00	846	3.00	1506	2.00	1763	2.00	2021	2.00	2366	1.50	2768	1.50	3210
6.00	827	4.00	1481	3.00	1745	3.00	1990	2.50	2346	2.00	2719	2.00	3147
8.00	802	5.00	1408	4.00	1675	4.00	1883	3.00	2284	2.50	2685	2.50	3062
10.00	733	6.00	1315	5.00	1574	5.00	1740	3.50	2222	3.00	2599	3.00	2935
12.00	649	7.00	1190	6.00	1424	5.50	1652	4.00	2138	3.50	2479	3.50	2772
14.00	564	8.00	1066	7.00	1284	6.00	1545	4.50	2020	4.00	2350	4.00	2553
16.00	492	9.00	965	8.00	1135	6.50	1431	5.00	1913	4.50	2188		
17.00	459					7.00	1345	5.50	1759	5.00	2056		
18.00	432												

杯體深度 H(cm)	1/f 對 h^3 斜率值 a
19.00	2.04E-07
10.00	5.42E-07
8.60	6.28E-07
7.50	7.46E-07
6.40	8.97E-07
5.50	1.04E-06
4.60	1.29E-06

1/H 次方數	判定係數 R^2
1	0.9813
2	0.9551
3	0.8754
4	0.7964
5	0.739

六、玻璃杯內直徑D對盛水杯體振動頻率f的影響

水位高度 h(cm)	D 組(雨量杯)		E 組(進口水杯)			F 組(花器杯)		
	H=19.00cm	H=19.20cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm
	D=4.510cm	D=6.120cm	D=6.890cm	D=6.230cm	D=5.960cm	D=6.580cm	D=8.430cm	D=7.410cm
	T=0.120cm	T=0.120cm	T=0.170cm	T=0.170cm	T=0.170cm	T=0.240cm	T=0.240cm	T=0.240cm
	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)
0	1879	826	1608	1935	2096	1674	978	1321
1	1859	828	1607	1935	2096	1674	977	1319
2	1857	826	1604	1933	2095	1672	975	1318
3	1855	819	1595	1929	2086	1663	970	1309
4	1853	817	1583	1920	2085	1649	961	1281
5	1842	811	1565	1886	2042	1593	914	1243
6	1815	797	1489	1832	1998	1542	885	1189
7	1753	763	1409	1742	1914	1477	824	1132
8	1662	732	1312	1609	1771	1387	775	1056
9	1568	708	1167	1486	1628	1273	713	976
10	1470	649	1067	1329	1458	1168	645	901
11	1338	622	957	1170	1314	1078	586	825
12	1248	569						
13	1172	540						
14	1124	507						
15	1064	473						
16	1022	450						
17	984	416						

1/f 對 h ³ 斜率 值 a	D 組(雨量杯)		E 組(進口水杯)			F 組(花器杯)		
	H=19.00cm	H=19.20cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm
	D=4.510cm	D=6.120cm	D=5.960cm	D=6.230cm	D=6.890cm	D=6.580cm	D=7.410cm	D=8.430cm
	T=0.120cm	T=0.120cm	T=0.170cm	T=0.170cm	T=0.170cm	T=0.240cm	T=0.240cm	T=0.240cm
	a=1.10E-07	a=2.54E-07	a=2.13E-07	a=2.40E-07	a=3.22E-07	a=2.54E-07	a=3.48E-07	a=5.21E-07

D 次方數	D 組	E 組	F 組
	判定係數 R ²	判定係數 R ²	判定係數 R ²
1	0.6262	0.5678	0.5678
2	0.9409	0.9053	0.8993
3	0.9946	0.9978	0.9980
4	0.8924	0.8473	0.8993
5	0.7259	0.4725	0.6555

七、玻璃杯壁厚度T對盛水杯體振動頻率f的影響。

水位 高度 h(cm)	G 組(花器杯)		H 組(花器杯)			I 組(花器杯)	
	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=19.20cm	H=19.20cm
	D=8.430 cm	D=8.650 cm	D=6.560 cm	D=6.640 cm	D=5.960 cm	D=6.580 cm	D=8.430 cm
	T=0.240cm	T=0.180cm	T=0.270cm	T=0.210cm	T=0.150cm	T=0.470cm	T=0.300cm
	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)	頻率(Hz)
0	978	727	2104	1679	2096	1838	1167
1	977	725	2104	1681	2096	1835	1187
2	975	720	2103	1678	2095	1836	1167
3	970	714	2097	1675	2086	1835	1165
4	961	702	2085	1662	2085	1834	1163
5	914	662	2047	1619	2042	1828	1151
6	885	626	1997	1569	1998	1818	1153
7	824	567	1917	1483	1914	1782	1143
8	775	529	1818	1392	1771	1762	1132
9	713	469	1682	1268	1628	1735	1085
10	645	417	1568	1159	1458	1679	1062
11	586	379	1420	1058	1314	1650	1028
12						1584	983
13						1527	942
14						1485	894
15						1422	846
16						1391	804
17						1332	757
18						1285	718

1/f 對 h ³ 斜 率值 a	G 組(花器杯)		H 組(花器杯)			I 組(花器杯)	
	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=11.50cm	H=19.20cm	H=19.20cm
	D=8.650 cm	D=8.430 cm	D=5.960 cm	D=6.640 cm	D=6.560 cm	D=8.430 cm	D=6.580 cm
	T=0.180cm	T=0.240cm	T=0.150cm	T=0.210cm	T=0.270cm	T=0.300cm	T=0.470cm
	a=9.80E-07	a=5.21E-07	a=5.55E-07	a=2.69E-07	a=1.71E-07	a=9.51E-08	a=4.24E-08

	G 組	H 組	I 組
1/T 次方數	判定係數 R ²	判定係數 R ²	判定係數 R ²
1	0.7628	0.7519	0.8284
2	1.0000	0.9979	0.9978
3	0.8347	0.8878	0.7899
4	0.4745	0.654	0.0544
5	0.0699	0.257	0.4231

【評語】 052301

製作出實驗所需不同規格之圓筒狀玻璃杯，偵測玻璃杯振動所發出聲音的頻率。論文以實驗歸納法，來研究探討玻璃杯深度、口徑、厚度、水位高度等變因對頻率之影響，研究的結果歸納出玻璃杯振動頻率與各項變因之間的定量關係式。整體而言，論文結構完整，具科學論文的形式，且有具體結論。

作品海報

摘要

本研究利用刻畫與加熱膨脹裂截的方法，製作出實驗所需規格之圓筒狀玻璃杯，以電腦聲頻分析軟體，偵測玻璃杯振動所發出聲音的頻率，探討玻璃杯深度、口徑、厚度、水位高度等變因對頻率之影響。研究結果發現，玻璃杯深度愈長、口徑愈大、杯壁愈薄、水位愈高，其振動的聲音頻率愈小，並歸納出振動頻率與各項變因之間的定量關係式。若能利用本研究的方法與結果，建立各種內盛液體容器或管路振動聲音頻率的資料庫，未來只需偵測其振動聲響之頻率，就可以推斷其結構或內容物的變化，可以作為一種非破壞性的檢測方法。

壹、研究動機

敲擊不同水位的玻璃杯，可以觀察到所產生的聲音高低不同，甚至可以看到利用不同水位的水杯，敲擊出不同的音高的聲音，進行音樂演奏。因此，我們想研究影響杯子振動所產生聲音頻率高低的因素，並探究其定量關係。

貳、研究目的

- 一、探討玻璃杯體深度對振動頻率的影響。
- 二、探討玻璃杯體口徑對振動頻率的影響。
- 三、探討玻璃杯壁厚度對振動頻率的影響。
- 四、探討玻璃杯內盛水位高度對振動頻率的影響。

參、研究設備及器材

- 個人電腦、麥克風、聲頻分析軟體[Audacity]、敲擊鎚、圓柱型玻璃杯、游標尺、方格紙、鑽石刀、剉刀、砂紙、加熱槍。
- 軟體：聲頻分析軟體(Audacity)、Microsoft Excel。

肆、研究過程與方法

一、變因之決定

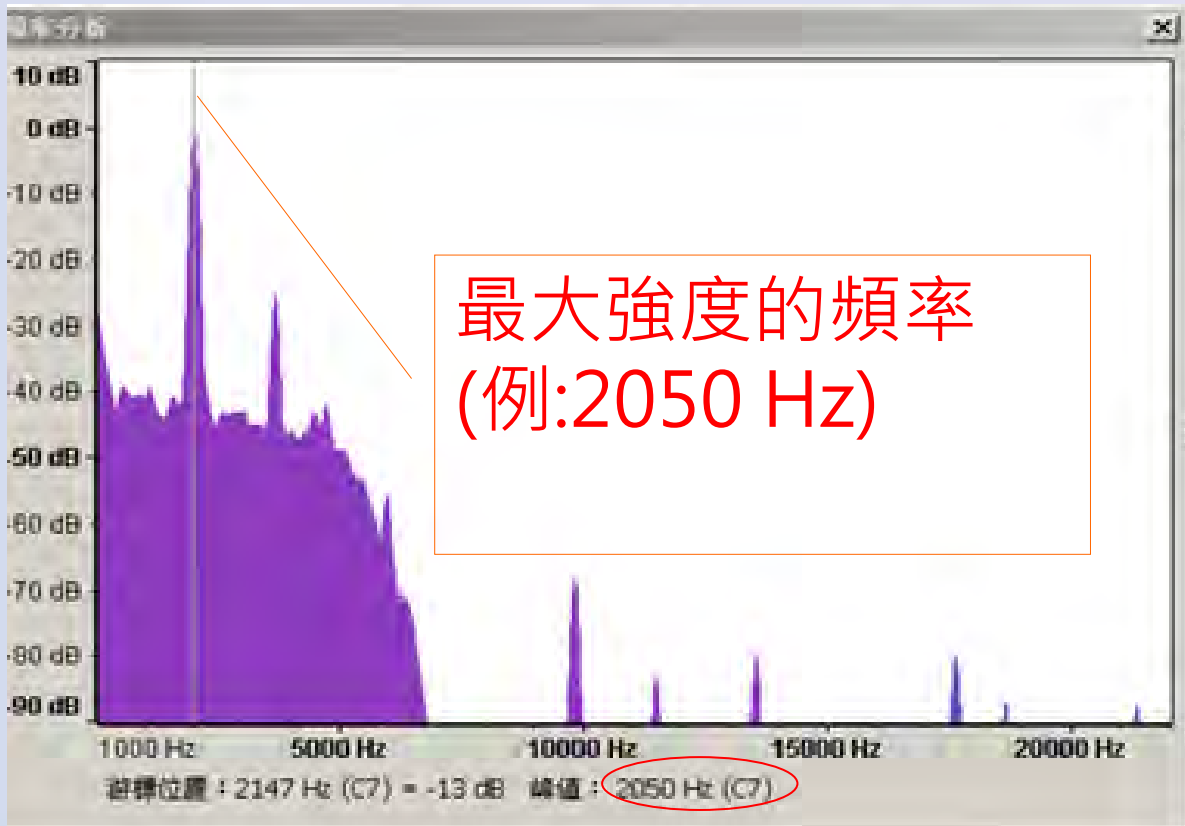
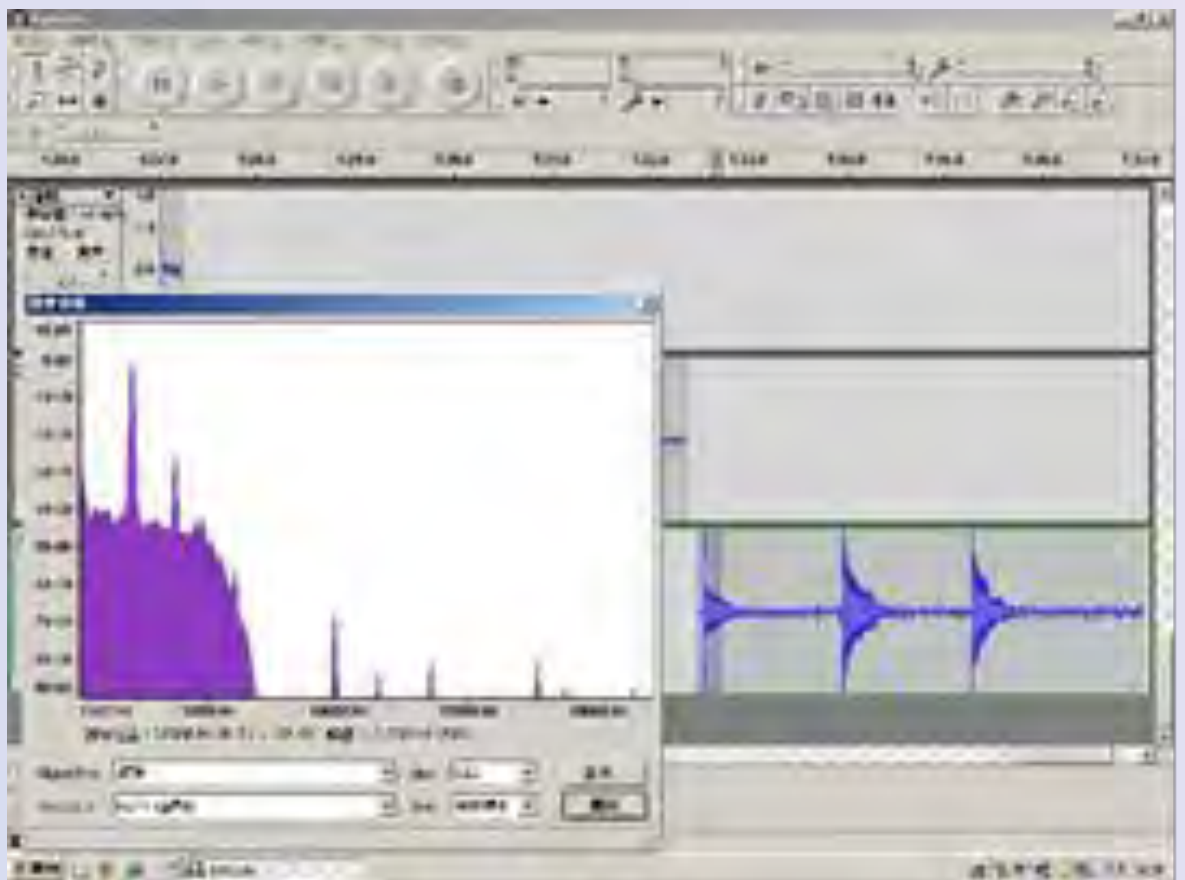
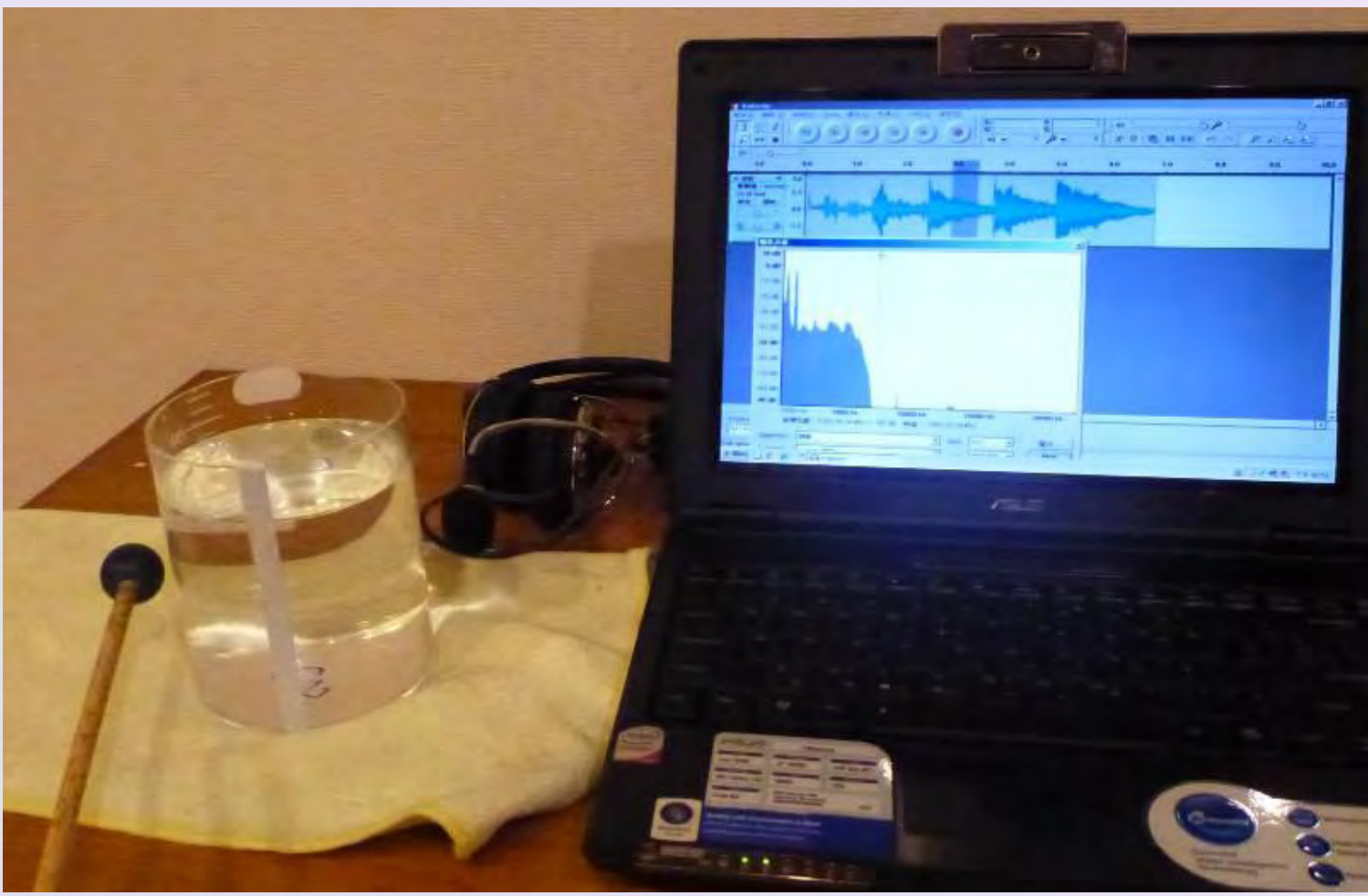
本研究以圓筒型玻璃杯，內盛液體為RO純水，作為控制變因。以杯體深度、杯口直徑、杯壁厚度、水位高低等4個因素為操作變因，探討這些變因對玻璃杯振動聲音頻率的影響。

二、聲頻之測量

以橡皮敲擊鎚敲擊玻璃杯側壁，以連結至PC之麥克風接收其振動音頻，透過聲頻分析軟體” Audacity” 紀錄其振動頻率。

三、玻璃杯之裁切

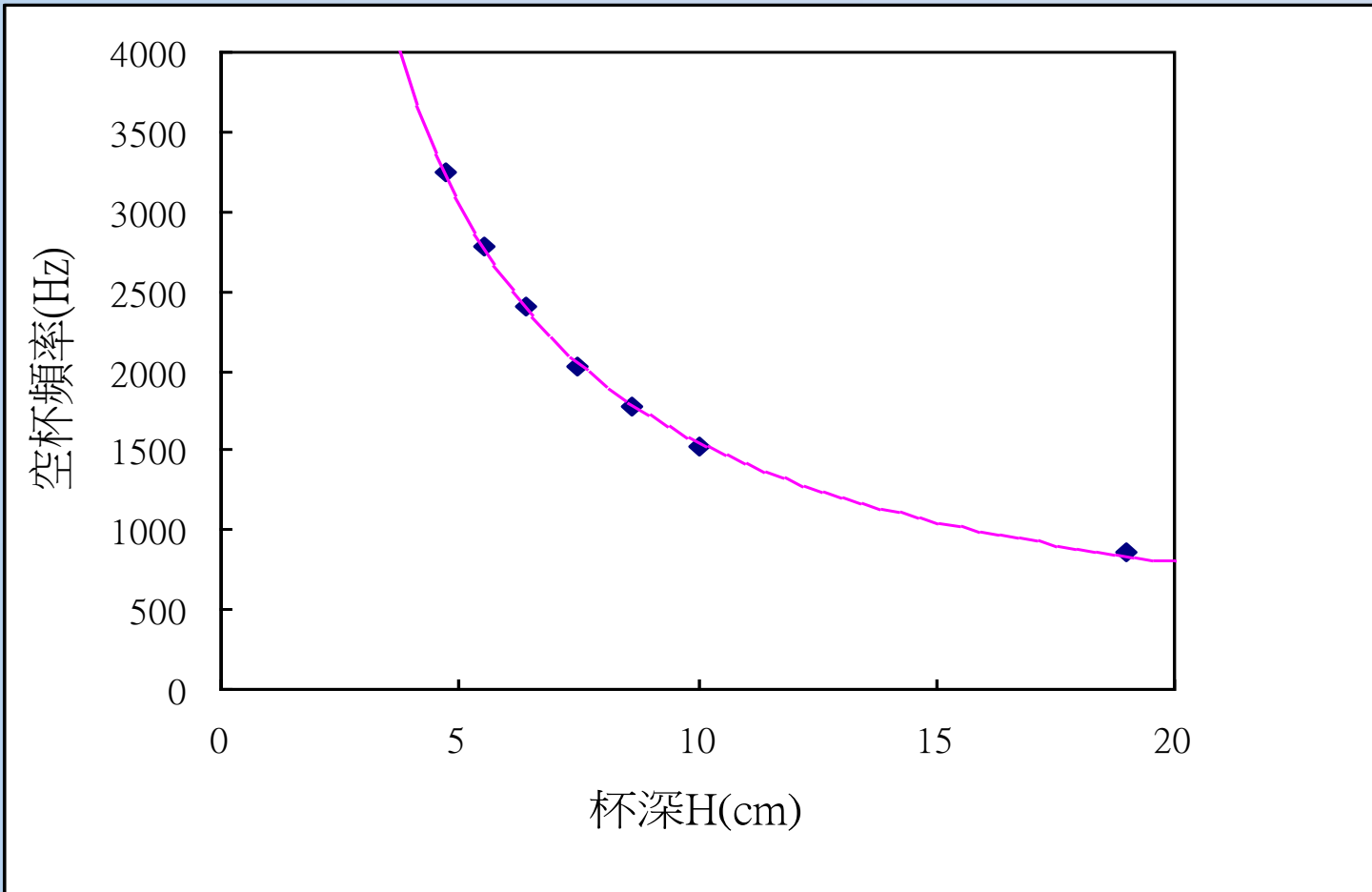
1. 將鑽石刀依所需高度固定於支架上。
2. 以圓柱型玻璃器皿側壁用力擠壓鑽石刀，並進行旋轉，讓鑽石刀在杯子外壁畫出環繞器皿柱面的一圈刻痕。
3. 將圓柱型玻璃器皿置於轉盤中心後，開啟加熱槍，將其火燄對準器皿柱面的刻痕。
4. 旋轉轉盤帶動玻璃器皿，使加熱槍火燄可以環繞刻痕持續加熱，旋轉多圈直至玻璃杯受熱沿刻痕裂開。
5. 玻璃器皿裂開後，取所需之圓柱型杯，以剉刀、砂紙打磨其杯口處，即可製得所需之圓柱玻璃杯。



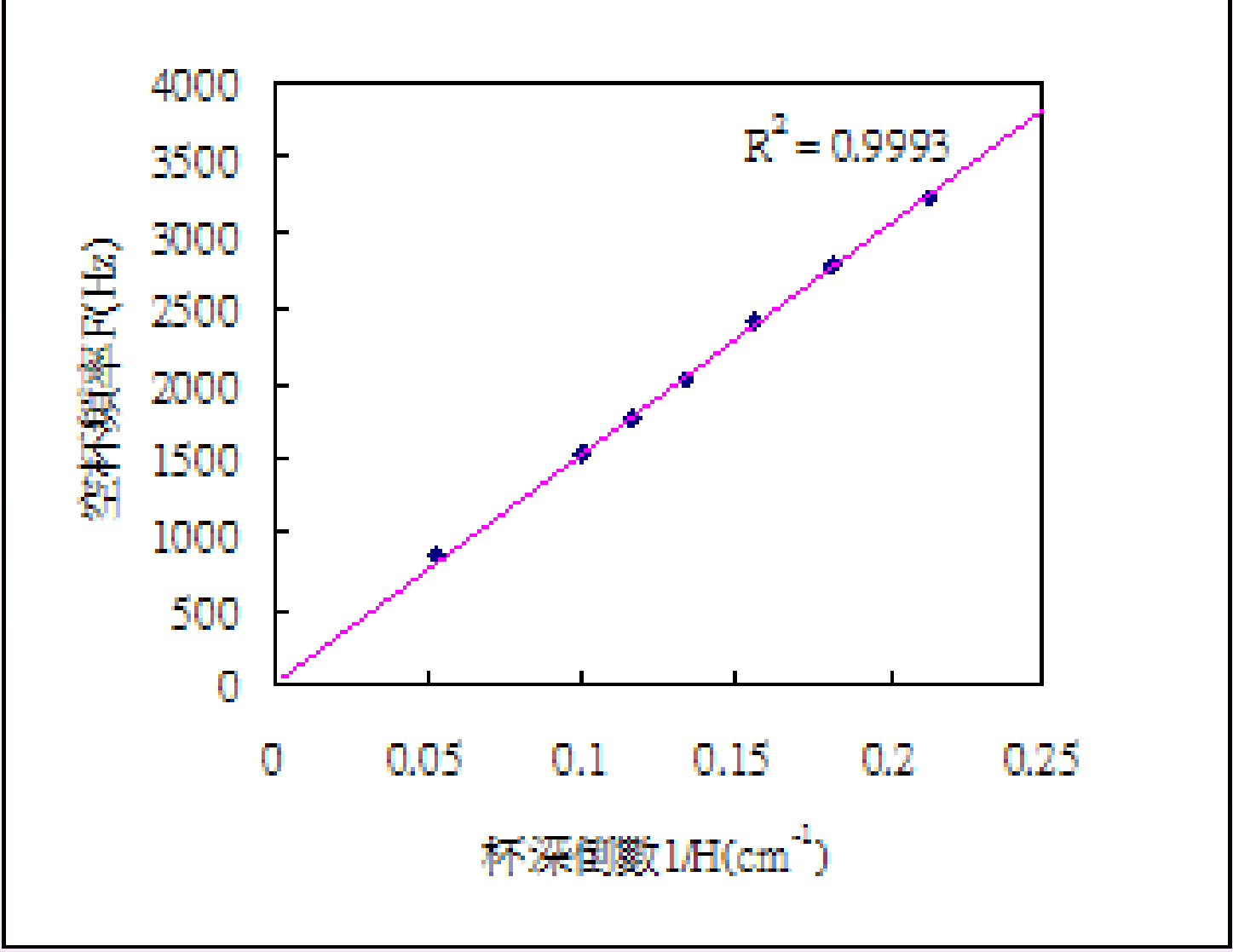
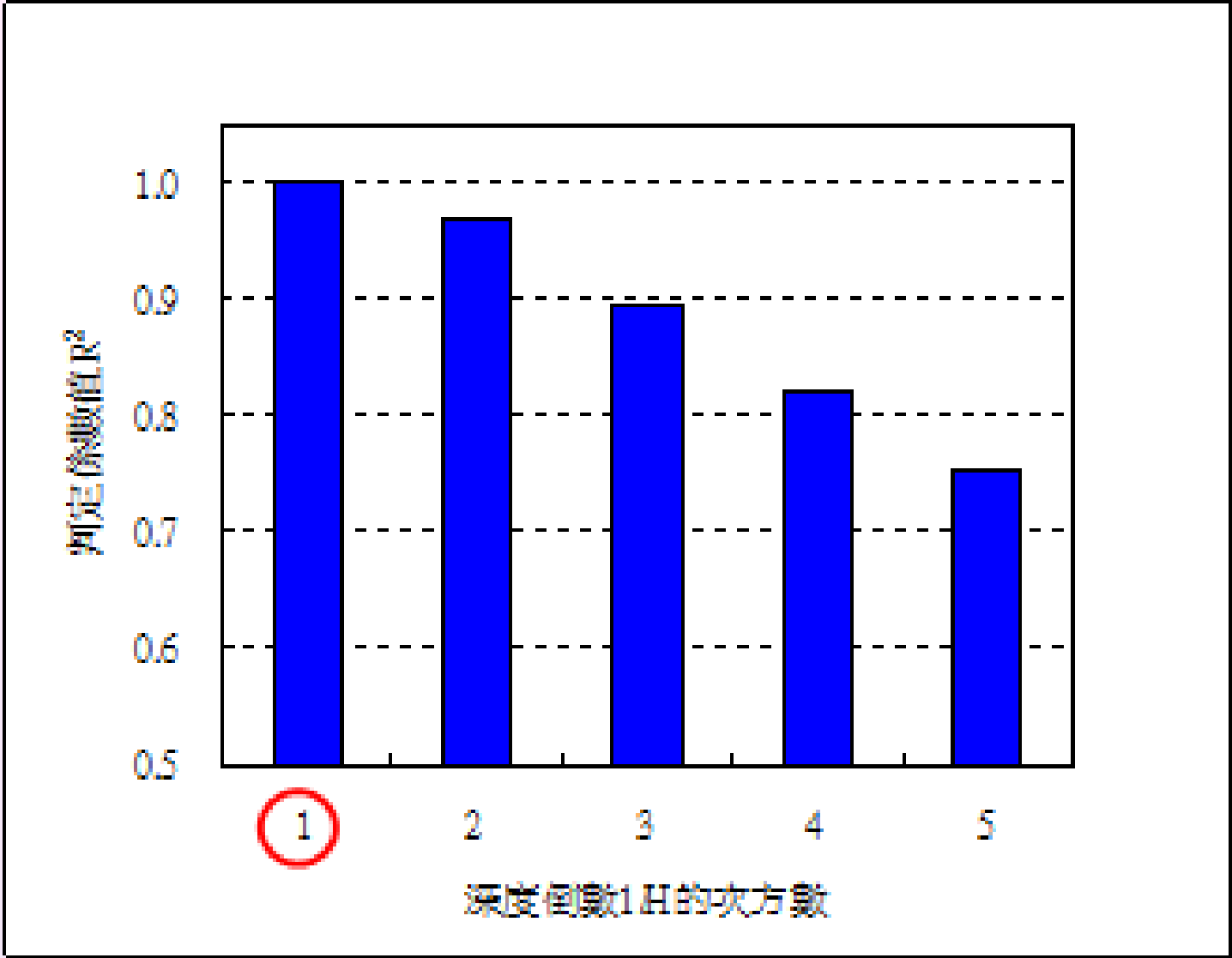
伍、研究結果與討論

一、玻璃杯深度H對空杯振動頻率F的影響

- 1.擷取不同深度H的玻璃杯在未裝水時所測得振動頻率F，畫出F隨H變化之關係圖形，如[圖一-1]所示。由圖可看出玻璃空杯的振動頻率F會隨杯體深度H增加而變小。



2.分析玻璃空杯振動頻率F與杯體深度H的函數相關性，分別畫出F對1/H¹~1/H⁵的關係圖，以MS Excel進行趨勢線分析，可以得到判定係數值R²，此值愈大，表示圖形為線性函數的相關性愈高。將各圖之R²值整理後，畫成[圖一-2]，可以看到F與1/H為一次線性函數的相關性最高。



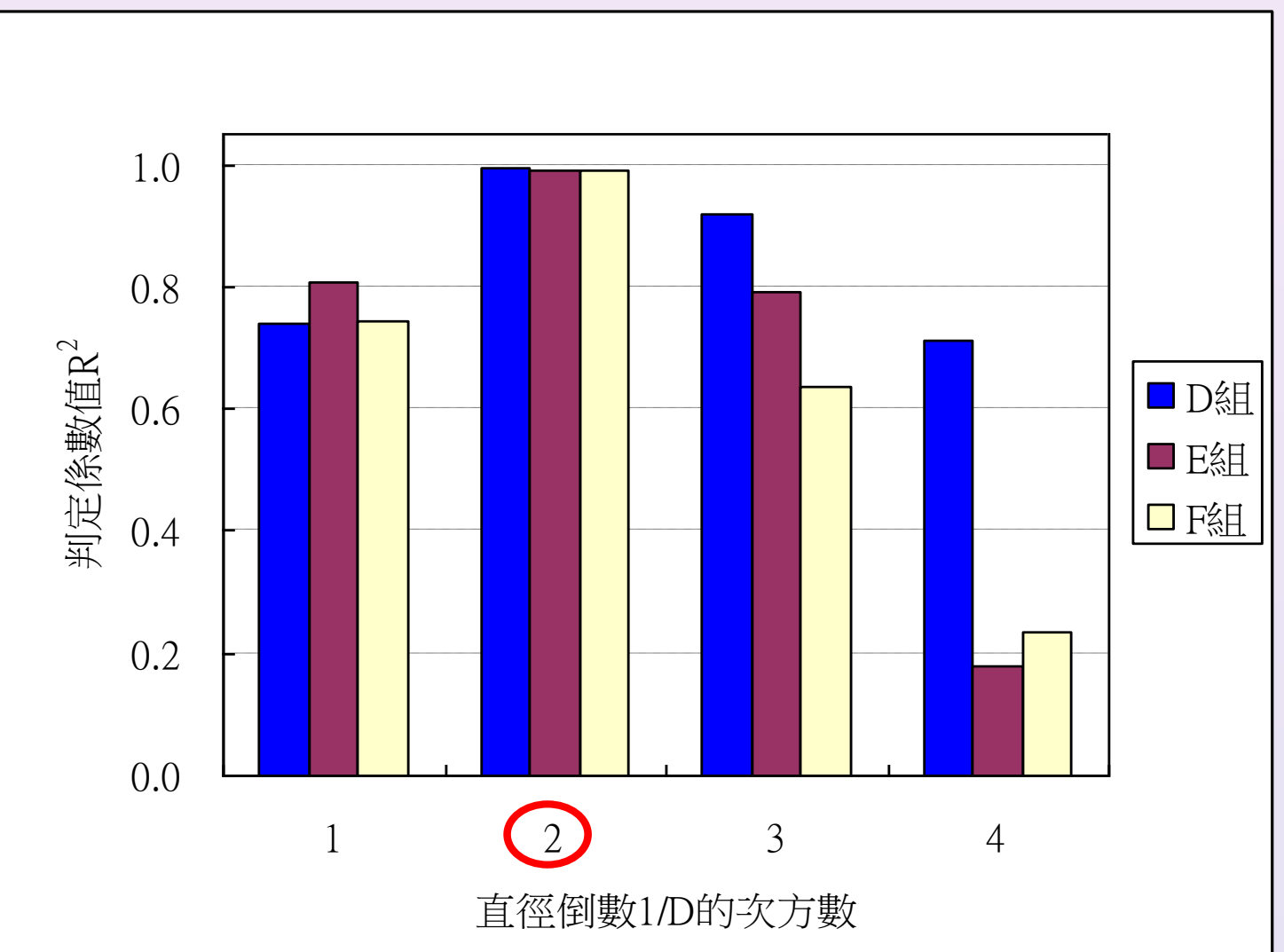
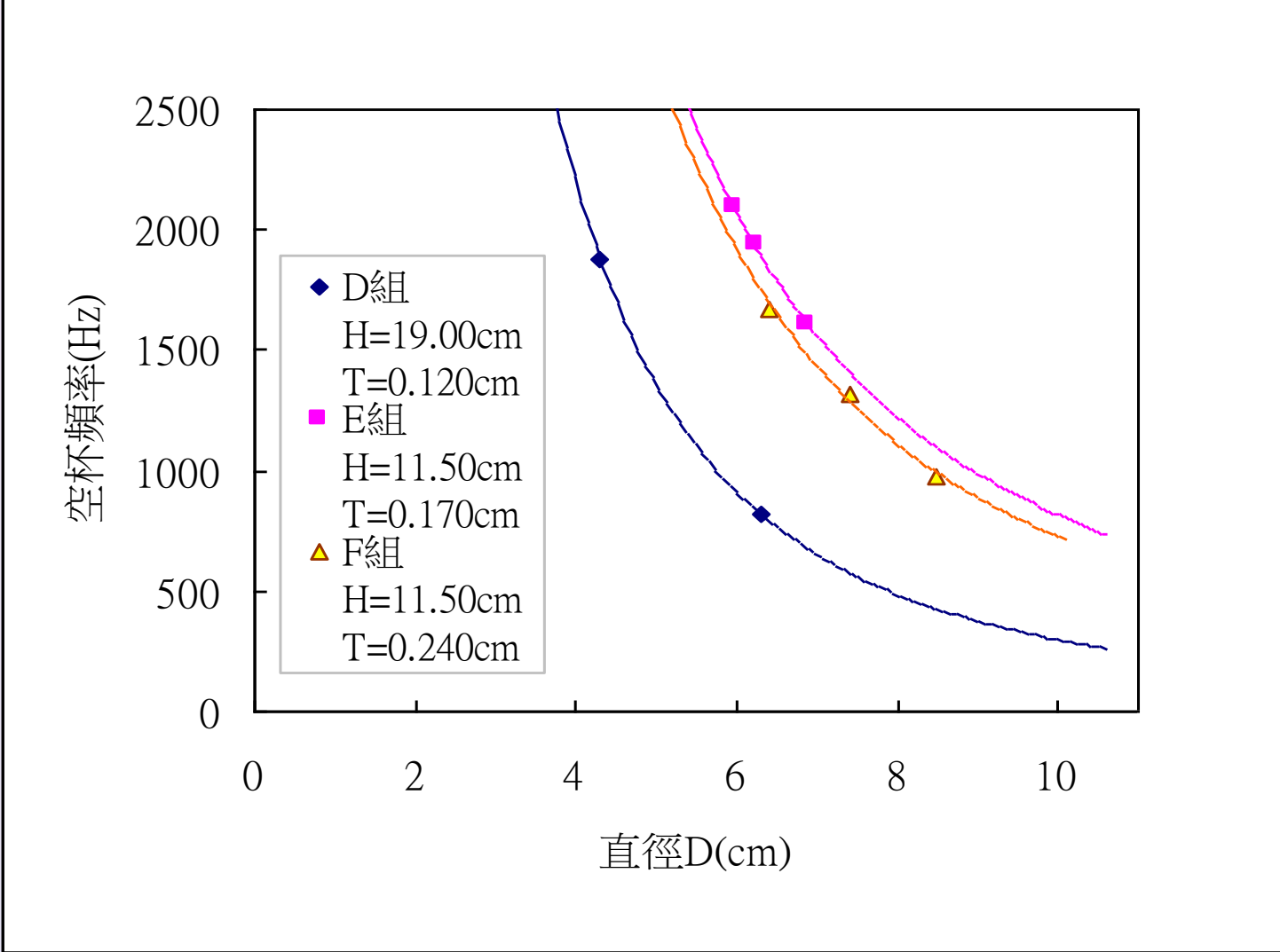
3.空杯頻率F與1/H的關係圖如[圖一-3]所示，可以觀察到F與1/H的函數關係為一過原點的斜直線，因此F與H的函數關係可表示為：

$$F \propto \frac{1}{H}$$

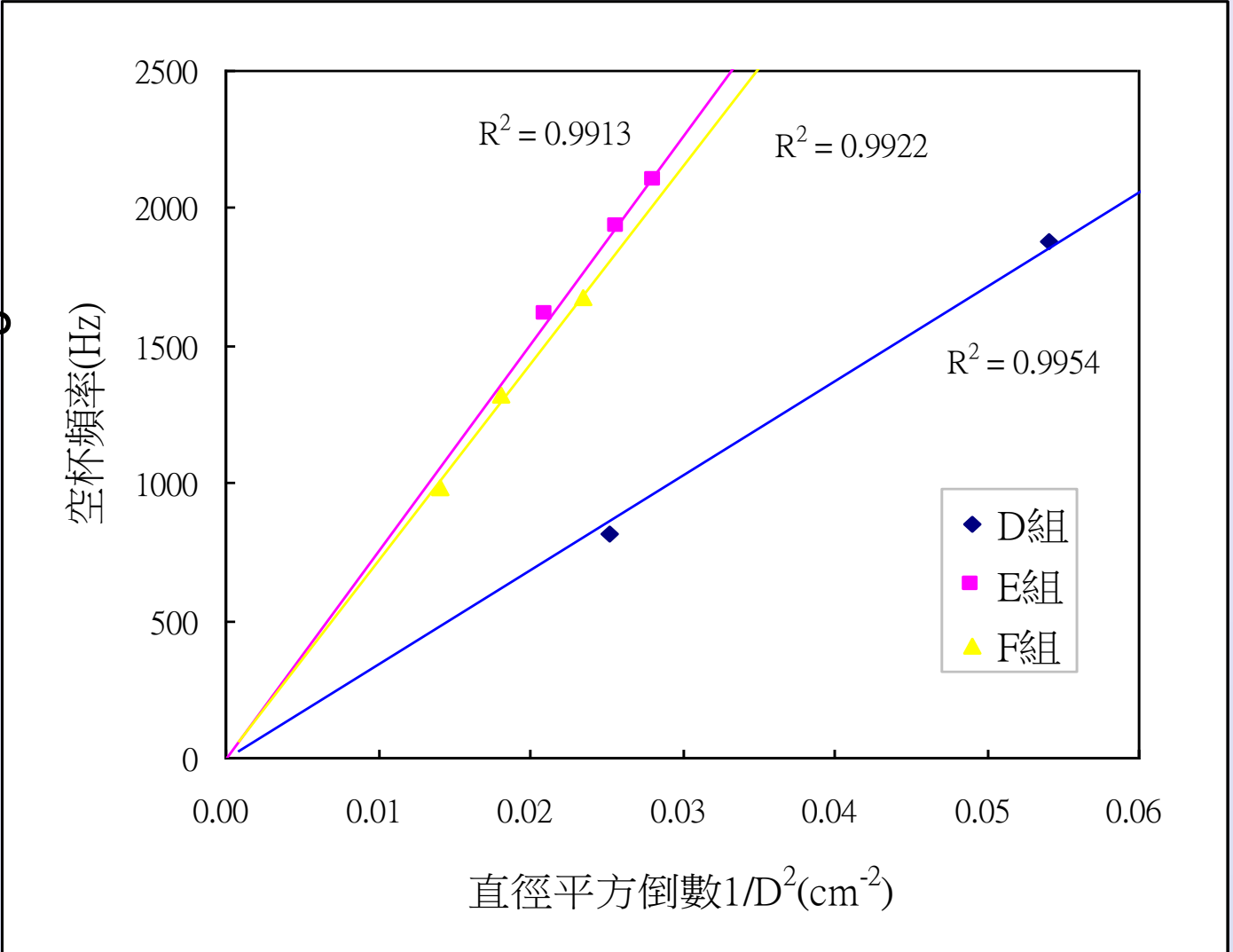
---[式1]

二、玻璃杯內直徑D對空杯振動頻率F的影響

1.擷取不同直徑D的杯子測其空杯的振動頻率F，畫出F隨D變化之圖形，如右[圖二-1]示。發現三種杯組之F皆隨D的增加而變小。



2.分析玻璃空杯振動頻率F與直徑D的函數相關性，進行趨勢線分析，其判定係數值R²如[圖二-2]示，發現F與1/D²為1次線性函數的相關性最高。



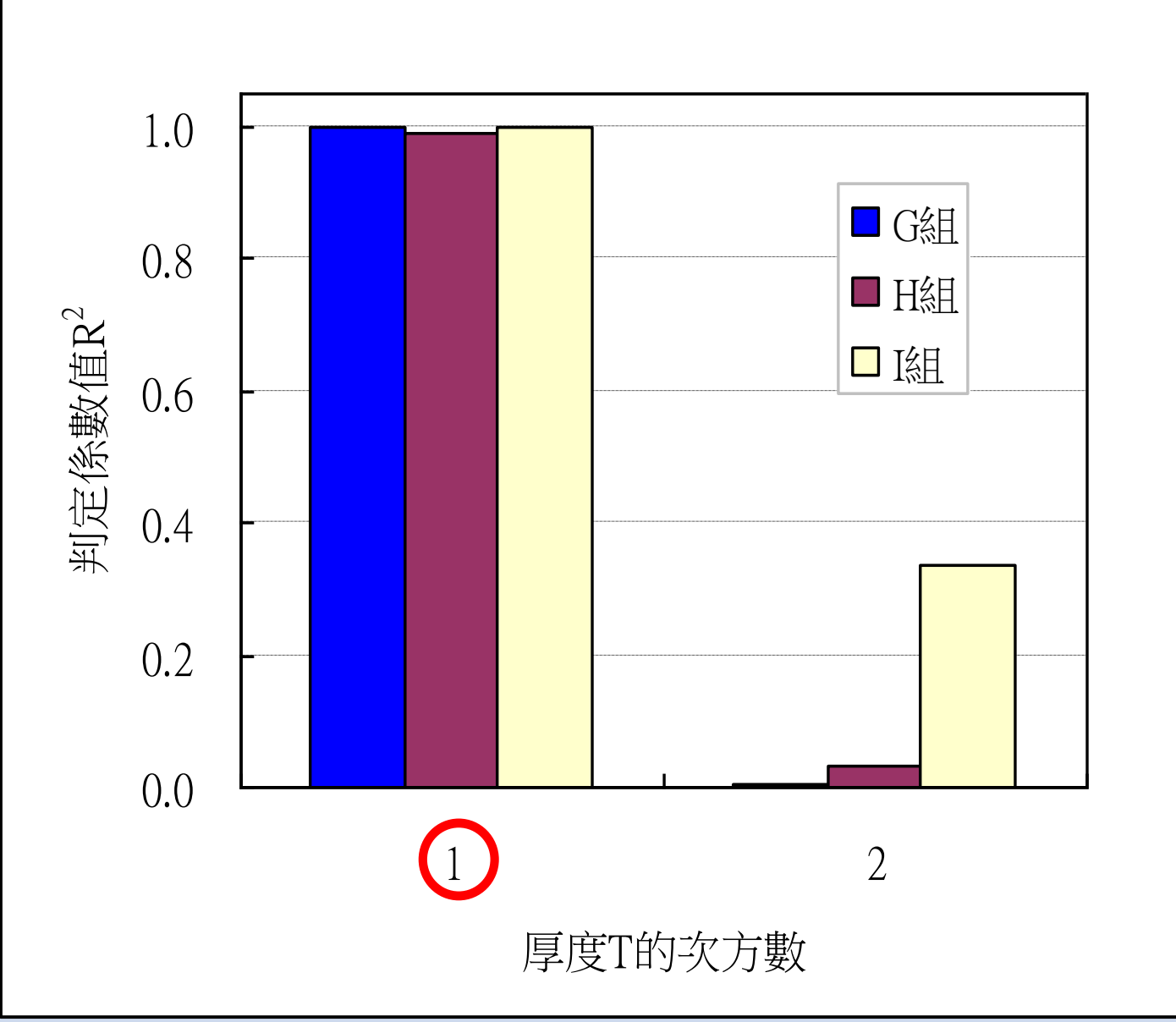
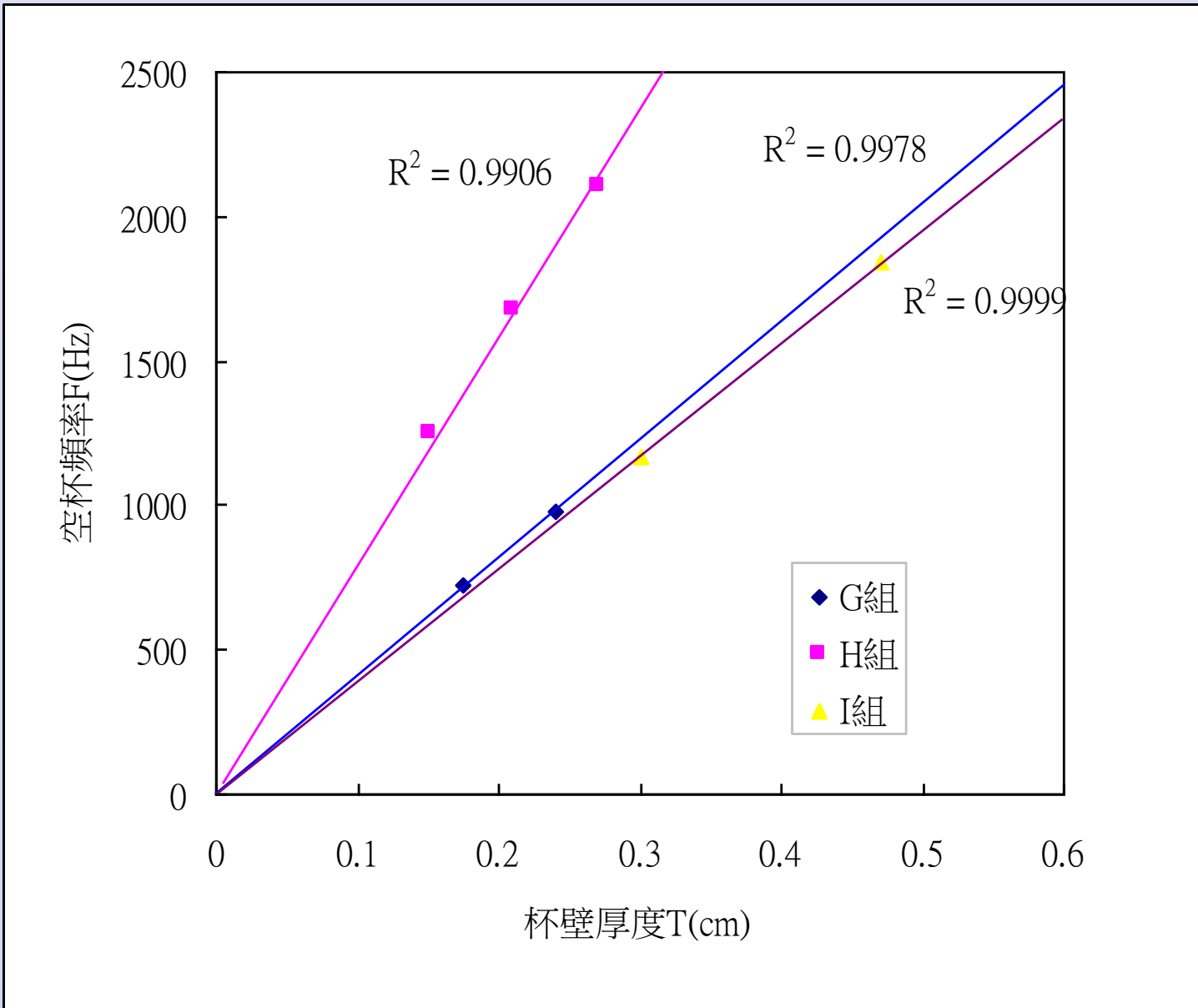
3.空杯頻率F與1/D²的關係圖如[圖二-3]所示，為過原點的斜直線，其函數關係可表示為：

$$F \propto \frac{1}{D^2}$$

---[式2]

三、玻璃杯壁厚度T對空杯振動頻率F的影響

1.測得不同杯壁厚度T的空杯的振動頻率F，畫出F隨T變化之圖形，如右[圖三-1]所示，發現F會隨T的增加而變大。



2.進行F與T的函數趨勢線相關性分析，發現F與T為一次線性函數的判定係數值R²最高，[圖三-2]示。

3.空杯頻率F與厚度T的關係圖如[圖三-1]所示，為一過原點的斜直線，其函數關係可表為：

$$F \propto T$$

---[式3]

四、空杯振動頻率F與深度H、直徑D、厚度T關係歸納

綜合[式1],[式2],[式3]，空杯振動頻率F與深度H、口徑D、厚度T之的函數關係，可歸納為：

$$F \propto \frac{T}{D^2 H}$$

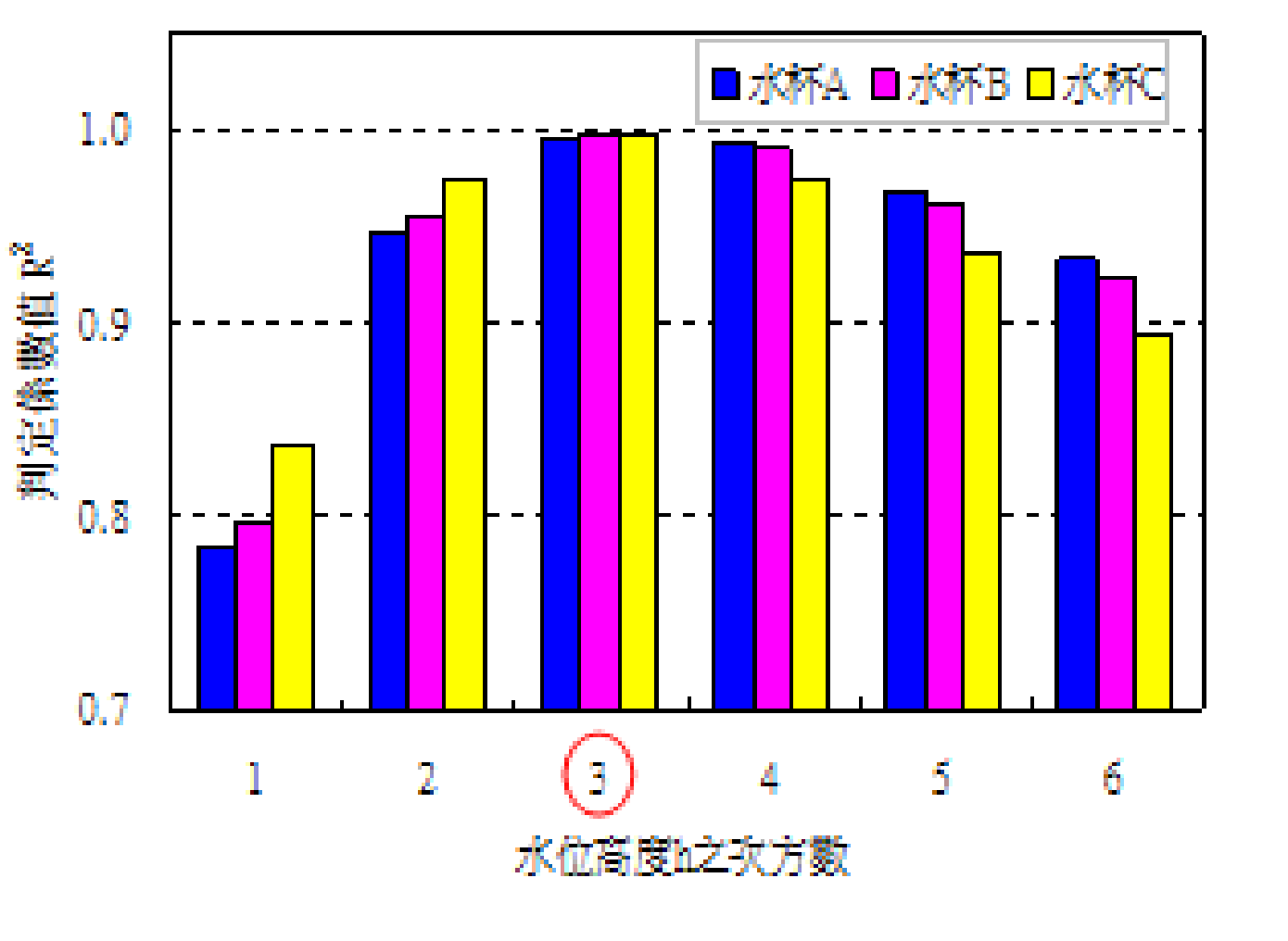
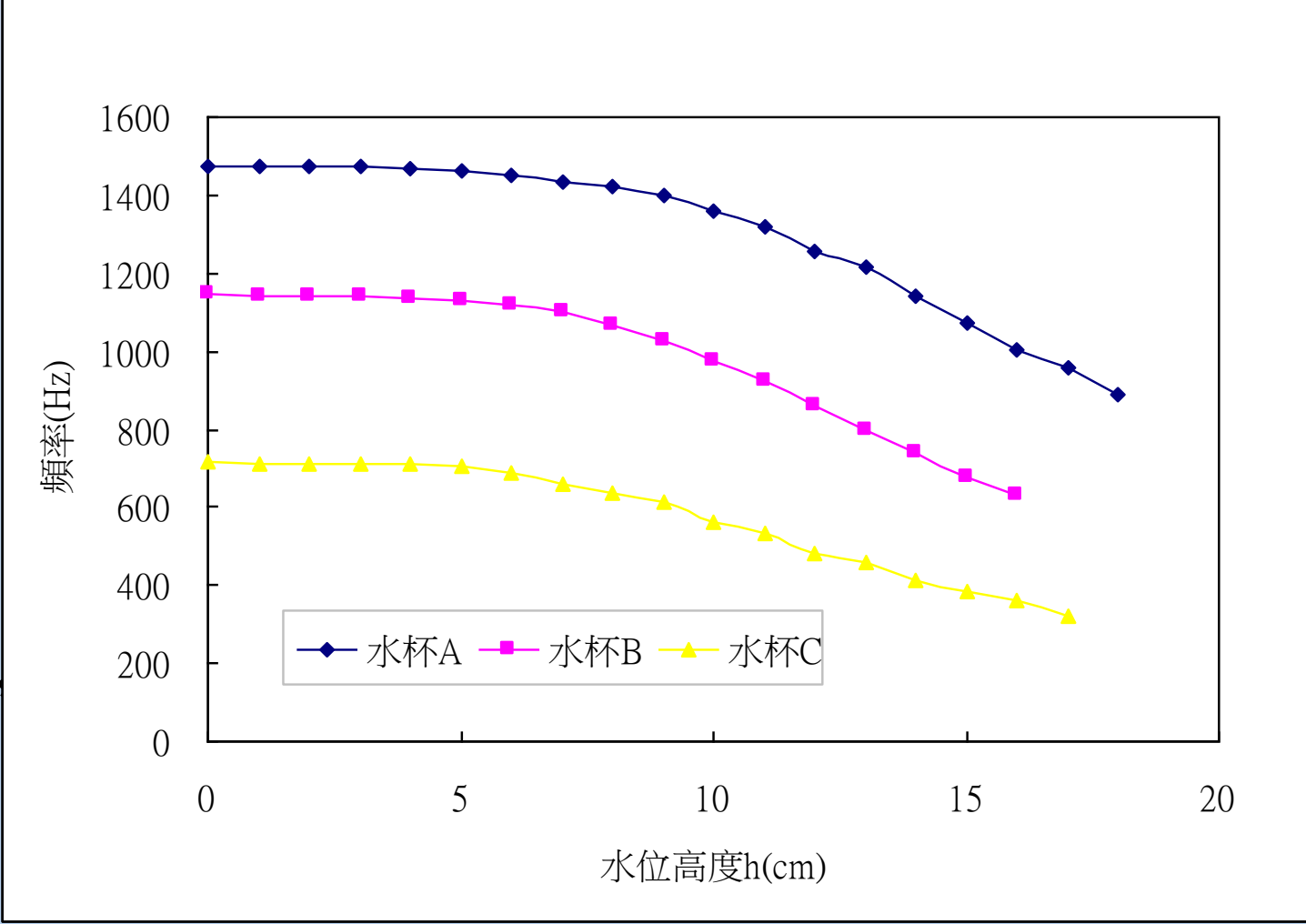
→

$$F = m \frac{T}{D^2 H}$$

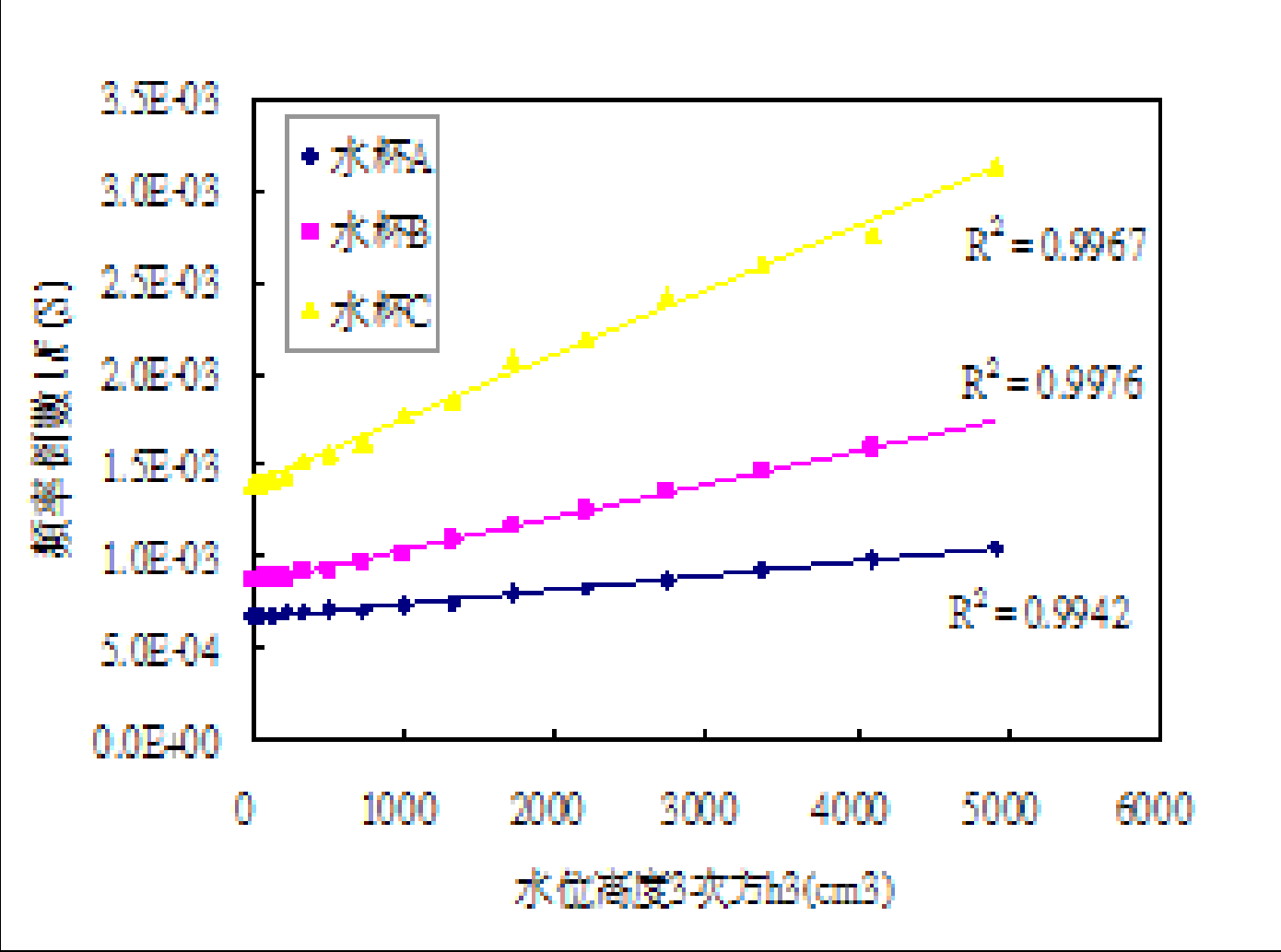
---[式4]

五、玻璃杯盛水位高度h對振動頻率f的影響

1.右[圖四-1]是杯子頻率f隨水位高度h的變化情形，由圖可以看出，不管何種規格的杯子當水位h升高時，其頻率f皆逐漸變小。且在低水位時，頻率f會隨水位h增加緩和變小;在高水位時，頻率f隨水位h增加下降較劇烈。



2.分析頻率f與水位高度h之函數相關性，進行趨勢線分析，得到判定係數值R²，顯示1/f與h³的線性相關性皆為最高，如右上[圖四-2]示。



3.1/f與h³的關係圖如[圖四-3]所示，1/f與h³明顯為一次線性函數關係。

4.由前項結果，可以歸納出杯子振動頻率f與水位高度h的關係：

$$\frac{1}{f} = ah^3 + b$$

---[式5]

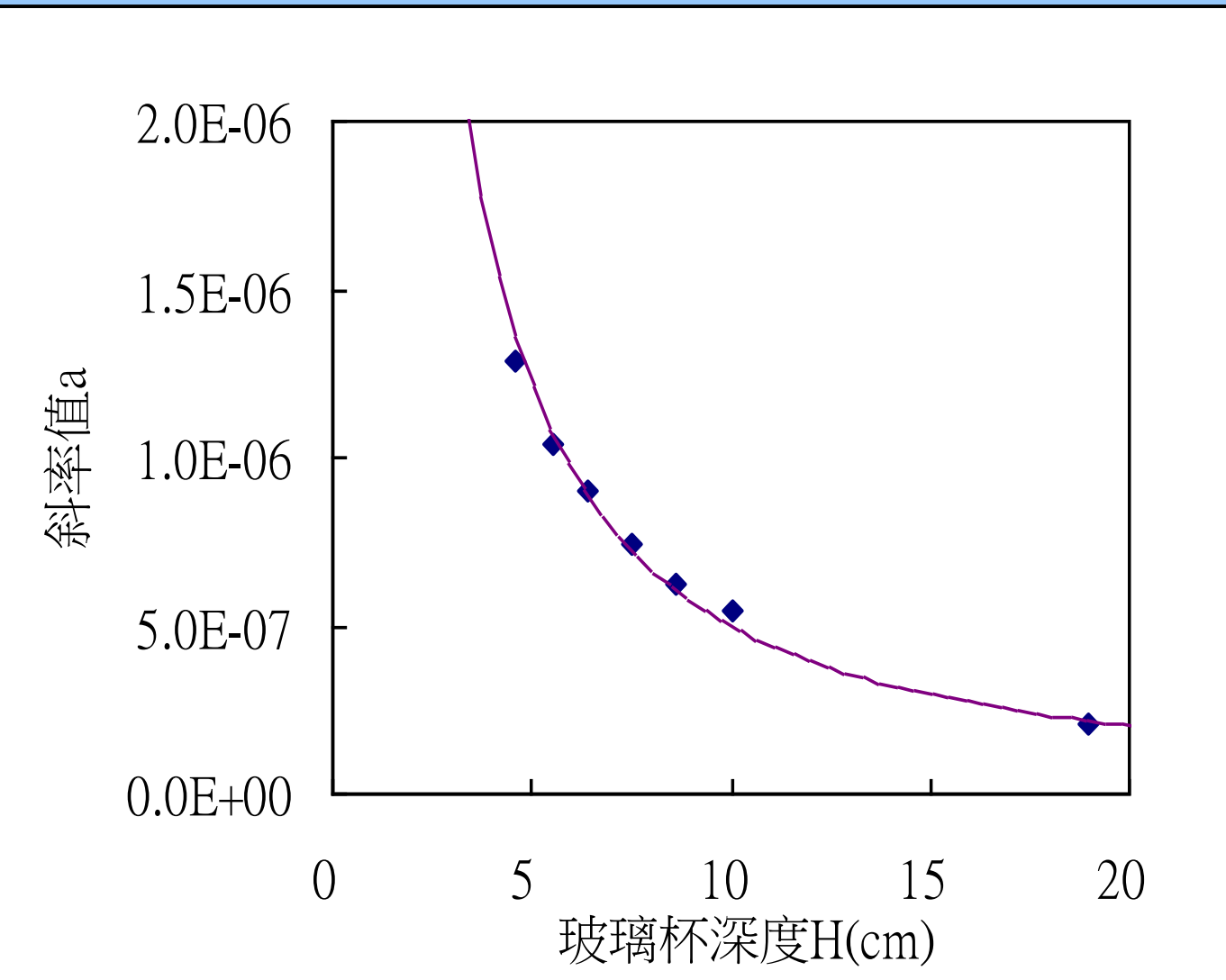
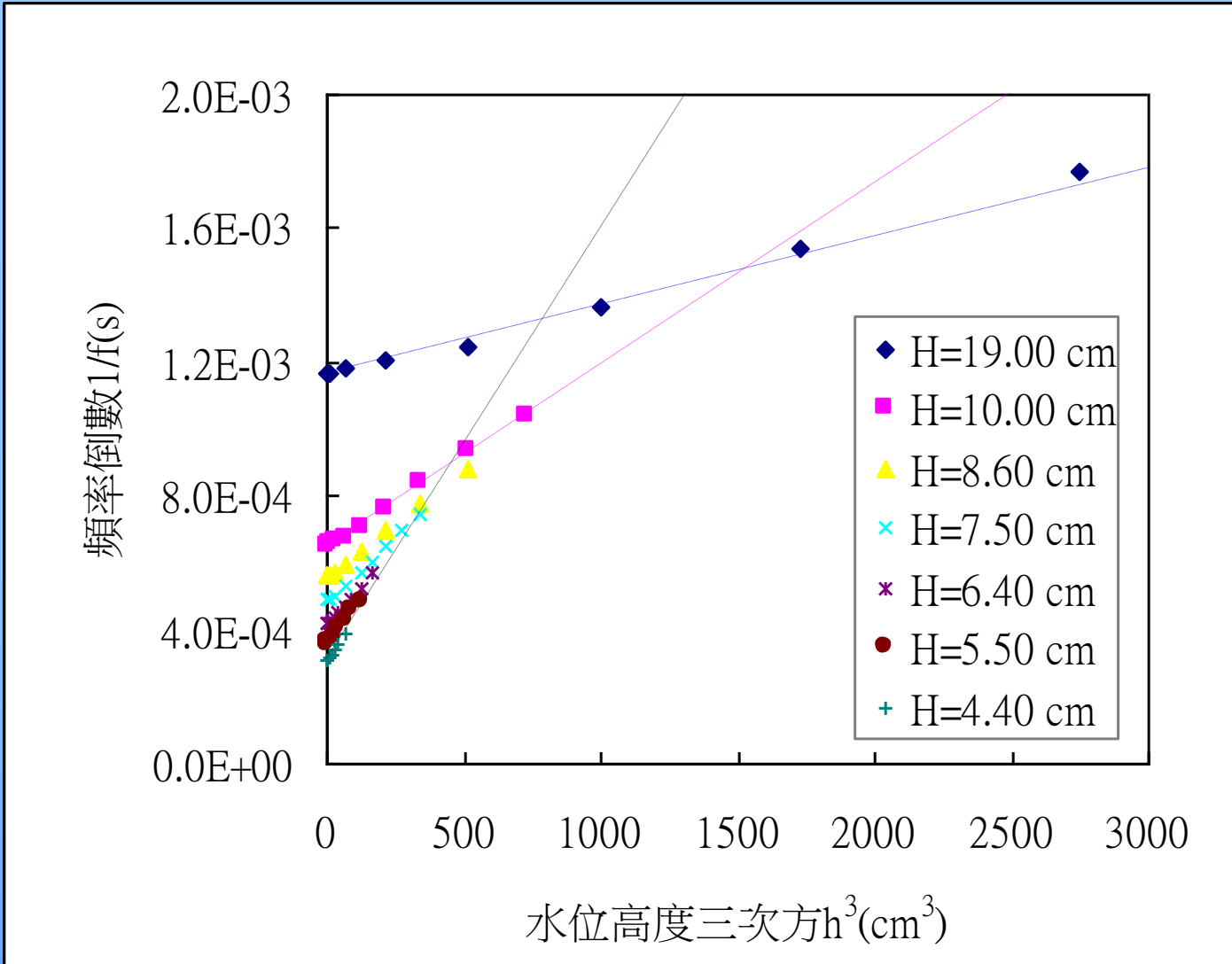
5.當玻璃杯中未裝水時，所測得頻率f即為空杯頻率F，換言之，當h=0時，f=F。將此條件代入[式5]，可以推導出b=1/F，[式5]可改寫如右：

$$\frac{1}{f} = ah^3 + \frac{1}{F}$$

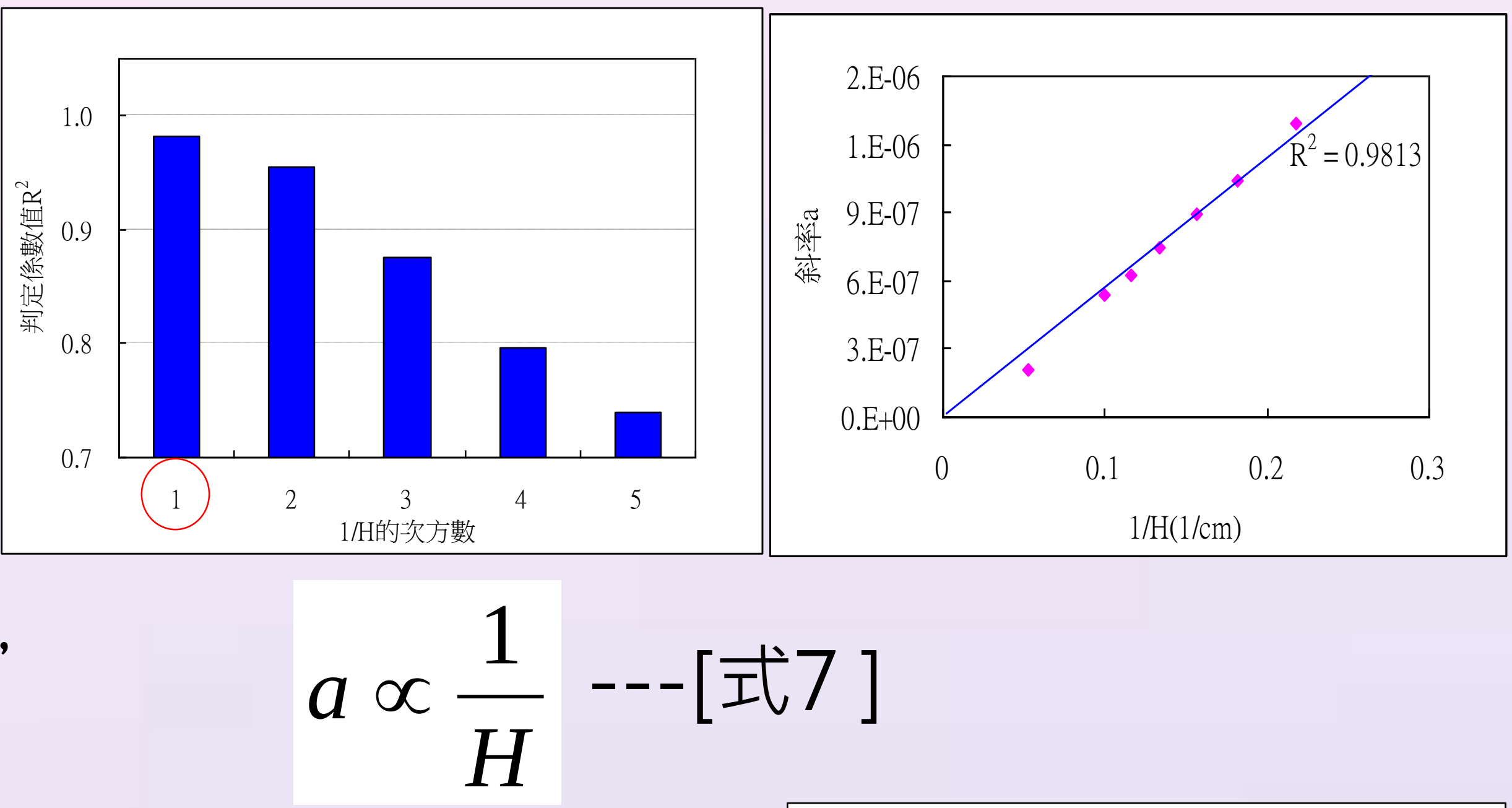
---[式6]

六、玻璃杯體長度H對盛水杯振動頻率f的影響

1.取同一個圓柱長杯，截取出直徑、壁厚相同但深度H不同的玻璃杯組，分別測量其頻率倒數1/f與水位高度三次方h³的關係，如右[圖五-1]所示。發現不論各種深度的玻璃杯，其1/f皆隨h³成1次線性函數關係。



- 2.以不同深度H之杯子之1/f與h³圖斜率值a與H作圖，發現斜率值a會隨H增加而變小，如前頁[圖五-2]所示。
- 3.進行斜率值a與深度H的函數趨勢線分析，可以看到a與1/H為1次線性函數的判定係數值R²最高，如右[圖五-3]。
- 4.作a與深度倒數1/H關係如上[圖五-4]示，為過原點斜直線，其函數關係式如右：

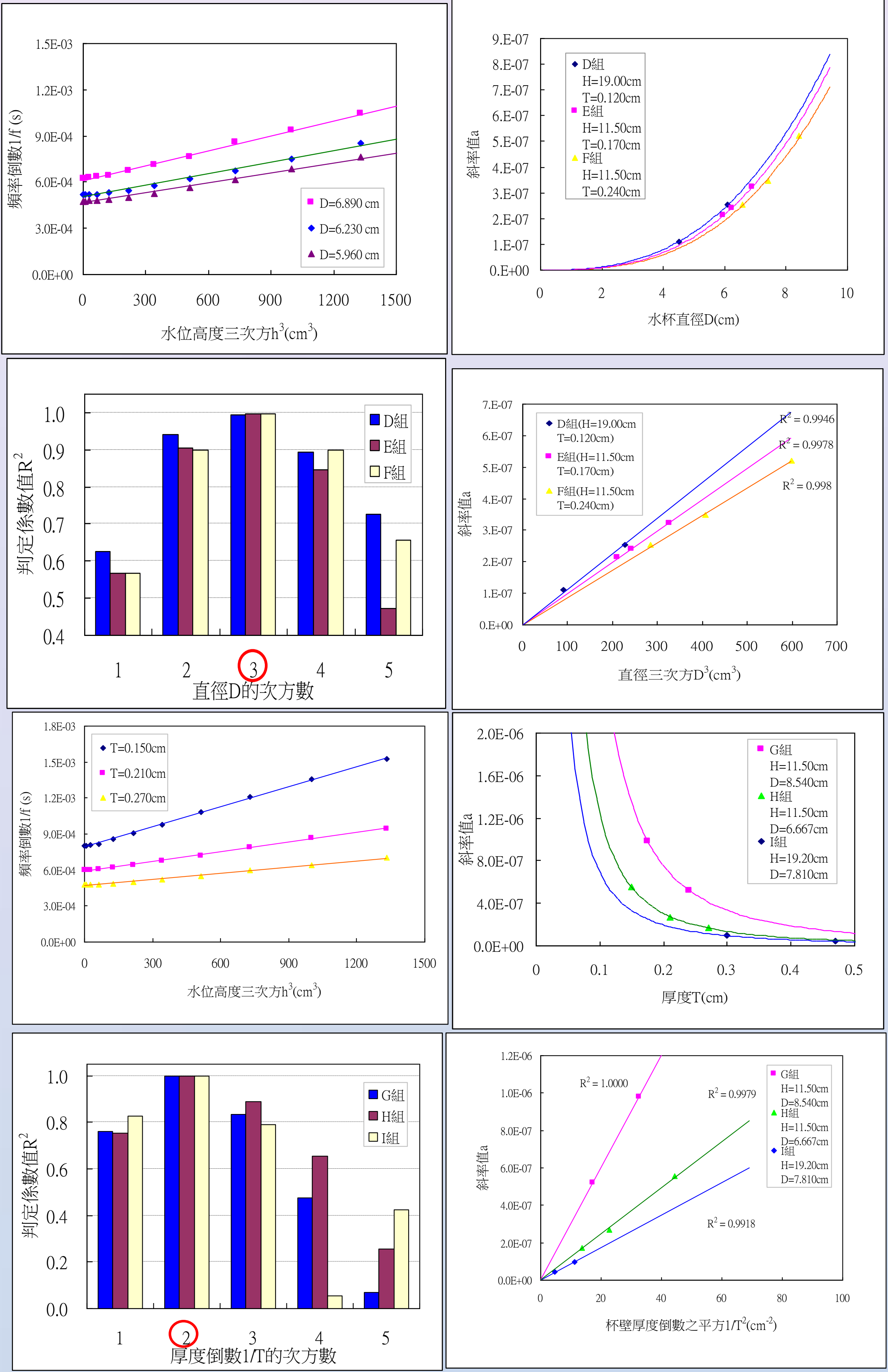


$$a \propto \frac{1}{H} \quad \text{---[式7]}$$

七、內直徑D對盛水杯振動頻率f影響

- 1.測量直徑D不同的玻璃杯組之頻率f，作1/f與h³關係如右[圖六-1]，發現兩者成一次線性的函數關係，其斜率值a皆不同。
- 2.取深度厚度各自相同的三組玻璃杯進行實驗，觀察a隨D的變化如右[圖六-2]，發現三組之a皆隨直徑D增加而變大。
- 3.進行斜率值a與直徑D的函數趨勢線分析，可以看到a與D³為一次線性函數的判定係數值R²相關性最高如右[圖六-3]。
- 4.作斜率a與直徑D³的關係圖，為一過原點的斜直線圖右[六-4]。因此兩者關係式為：

$$a \propto D^3 \quad \text{---[式8]}$$



八、杯壁厚度T對盛水杯振動頻率f的影響

- 1.測量不同杯厚T的玻璃杯組其頻率f，作1/f與h³關係圖如右[圖七-1]，發現為1次線性函數關係，且斜率值a隨不同T而異。
- 2.取深度直徑各自相同的三組玻璃杯，測量其1/f- h³斜率值a隨T的變化情形如[右圖七-2]，觀察到a隨厚度T增加而變小。
- 3.分析斜率值a與厚度T的函數趨勢線相關性，發現a與1/T²為一次線性函數的判定係數值R²最高，如[圖七-3]示。
- 4.作斜率值a與1/T²的關係圖[圖七-4]，為過原點的斜直線，因此兩者關係式如右：

$$a \propto \frac{1}{T^2} \quad \text{---[式9]}$$

九、斜率值a與深度H,直徑D,厚度T關係歸納

綜合[式7].[式8].[式9] 結果:

$$a \propto \frac{D^3}{HT^2}$$

→

$$a = k \frac{D^3}{T^2 H}$$

---[式10]

十、水杯振動頻率f函數關係

將[式10].[式4]代入[式6]：

$$\frac{1}{f} = ah^3 + \frac{1}{F} = k \frac{D^3 h^3}{T^2 H} + n \frac{D^2 H}{T}$$

陸、結論

- 一、圓筒型玻璃杯其空杯的振動頻率與杯體的深度、直徑、厚度有關。深度愈短、直徑愈小、杯壁愈厚的玻璃杯，其振動頻率愈高。
- 二、圓筒型空杯振動頻率F與杯體深度H的一次方成反比;與直徑D的平方成反比;與杯壁厚度T的一次方成正比，其關係如右：
- 三、圓柱型玻璃杯盛水後所產生的振動頻率，會比在空杯時的振動頻率來的小。當杯內的水位愈高，所產生的振動頻會愈低。
- 四、圓柱型盛水玻璃杯所產生的振動頻率倒數1/f，與水位高度h的3次方成線性函數關係如右：

$$F = m \frac{T}{D^2 H}$$

$$\frac{1}{f} = ah^3 + \frac{1}{F}$$

$$a = k \frac{D^3}{T^2 H}$$

其中a值與深度H、直徑D、厚度T有關，關係式如右上:

- 五、盛水圓筒型玻璃杯的振動頻率f與其深度H、直徑D、厚度T、內盛水位高度h有關，其關係式可總結表示如右：

$$\frac{1}{f} = k \frac{D^3 h^3}{T^2 H} + n \frac{D^2 H}{T}$$

- 六、若能建立各種內盛液體容器或管路之振動頻率資料，只需偵測其振動聲音頻率，就可以推斷其結構或內容物的變化，可應用作為一種非破壞性的檢測方法。

柒、參考資料

- 1.國中自然與生活科技課本[二上],康軒出版社。 2.高中選修物理[上],龍騰文化。
3.陳可崗譯,觀念物理IV,天下文化出版。 4.徐悠,王靖童,2013, 53屆全國科展生活應用科學科
國小組作品。 5.2014, 54屆宜蘭縣國中小科展物理科國中組作品。